

Polinômios de Lee-Yang com Coeficientes Complexos

Leandro Chiarini ^{*} Leandro Cioletti [†] Filipe Fernandes [‡]

17 de setembro de 2013

Resumo

Neste artigo, apresentamos, de forma detalhada, uma prova do célebre Teorema de Lee-Yang, que se refere à localização dos zeros de uma determinada classe de polinômios com coeficientes reais. Estenderemos o resultado original para o caso em que os coeficientes dos polinômios sejam números complexos. A aplicação central desse teorema é no contexto da Mecânica Estatística do Equilíbrio. Em particular, resulta do mesmo que o modelo de Ising d -dimensional, sob efeito de um campo magnético externo, não apresenta o fenômeno de transição de fase. Esse teorema, na formulação em que os coeficientes são complexos, foi provado recentemente por David Ruelle, em [26], onde foram usados o método da contração de Asano e de idéias originais sobre o raio interno. A prova apresentada aqui é inspirada no argumento original do Teorema de Lee-Yang para coeficientes reais, veja [18]. Utilizamos apenas resultados clássicos da teoria de funções de uma variável complexa e, dentre esses resultados, a invariância da família de círculos na esfera de Riemann pelas transformações de Möbius. Este trabalho não requer do leitor conhecimentos quaisquer sobre Física-Matemática.

1 Introdução

Em 1952, Lee e Yang, no artigo [18], propuseram um programa para análise do fenômeno de transição de fase em termos dos zeros da função de partição. O principal teorema obtido por esses autores afirma que certos polinômios P de grau n em uma variável complexa z têm todas suas raízes no círculo unitário $|z| = 1$. Este teorema deu início a uma ativa área de pesquisa. Em [27], David Ruelle conta a história do Teorema de Lee-Yang e também argumenta como um problema físico pode originar uma teoria matemática a qual não se tem, em um primeiro momento, idéia de sua importância. Para situar o leitor da devida relevância do Teorema de Lee-Yang, vamos apresentar um breve panorama de resultados existentes relacionados a ele e aos problemas de localização de raízes de polinômios em várias variáveis.

A localização de zeros de polinômios multivariados ou de funções inteiras transcendentais e sua dinâmica por transformações lineares são tópicos centrais na teoria geométrica de funções e recentemente tem sido aplicada com sucesso em Mecânica Estatística, Combinatória, Teoria da Probabilidade e Teoria de Matrizes, veja [3, 4, 5, 9, 30].

^{*}Universidade de Brasília - Brasília, Brasil. E-mail: leandro.chiarini@gmail.com

[†]Universidade de Brasília - Brasília, Brasil. E-mail: leandro.mat@gmail.com

[‡]Universidade de Brasília - Brasília, Brasil. E-mail: skyywayy@hotmail.com

De modo geral, tais problemas estão intimamente relacionados aos problemas de descrever todos os operadores lineares no espaço de polinômios que preservam a propriedade de não nulidade quando as variáveis estão em um subconjunto prescrito de \mathbb{C}^n . Isso, em particular, engloba um problema antigo de classificação cuja origem remonta a trabalhos clássicos de Hermite, Laguerre, Hurwitz e Pólya-Schur em polinômios multivariados com tais propriedades. Os problemas de classificação a que nos referimos são precisamente enunciados abaixo, mas antes precisamos introduzir algumas notações (Observamos que desenvolvimento da demonstração do Teorema de Lee-Yang dada aqui é independente das idéias introduzidas no restante desta seção).

Seja $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} . Denotamos por $\mathbb{K}[z_1, \dots, z_n]$ o conjunto de todos os polinômios em n indeterminadas com coeficientes em \mathbb{K} , isto é,

$$\mathbb{K}[z_1, \dots, z_n] = \left\{ \sum_{\alpha_1=0}^{k_1} \dots \sum_{\alpha_n=0}^{k_n} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n} \right\},$$

onde $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $A_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \in \mathbb{K}$. Dado $n \geq 1$ e $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, dizemos que $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ é Ω -estável se $f(z_1, \dots, z_n) \neq 0$ sempre que $(z_1, \dots, z_n) \in \Omega$. Seja V um subespaço de $\mathbb{K}[z_1, \dots, z_n]$. Dizemos que um operador \mathbb{K} -linear $T : V \rightarrow \mathbb{K}[z_1, \dots, z_n]$ preserva Ω estabilidade se para todo polinômio Ω -estável $f \in \mathbb{K}[z_1, \dots, z_n]$, temos que $T(f)$ é um polinômio Ω -estável ou $T(f) \equiv 0$. Sejam $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ e

$$\mathbb{K}_k = \{f \in \mathbb{K}[z_1, \dots, z_n] : \text{grau}_{z_i}(f) \leq k_i, 1 \leq i \leq n\}, \quad (1)$$

onde $\text{grau}_{z_i}(f)$ é o grau de f na variável z_i . Se $U \subset \mathbb{C}$ e $\Omega = U^n$ (o produto cartesiano de n cópias de U), vamos nos referir a Ω estabilidade simplesmente por U -estabilidade. Os problemas de classificação citados acima estão relacionados aos seguintes problemas:

Problema 1. Caracterizar todos operadores lineares $T : \mathbb{K}_k \rightarrow \mathbb{K}[z_1, \dots, z_n]$ que preservam Ω -estabilidade para um dado $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ e $k \in \mathbb{N}^n$.

Problema 2. Caracterizar todos operadores lineares $T : \mathbb{K}[z_1, \dots, z_n] \rightarrow \mathbb{K}[z_1, \dots, z_n]$ que preservam Ω -estabilidade.

Para $n = 1$ os problemas acima foram enunciados em [10] e [12], veja também [16] e [25, pág. 182-183]. O análogo em várias variáveis foi formulado explicitamente em [6, 8], desta forma abrangendo essencialmente todas as questões similares e algumas variações que tem sido estudadas por mais de um século. Note que para $n = 1$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \neq 0\}$ os Problemas 1 e 2 se referem à classificação de operadores lineares que preservam o conjunto dos polinômios reais com todos os zeros reais. Pólya e Schur, em [23], caracterizaram todos os operadores diagonais com essa propriedade (chamados de sequências multiplicadoras). Isto abriu caminho para inúmeras investigações subsequentes [7, 8, 13, 11, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 25, 29]. Entretanto, apenas recentemente, as soluções completas para essas questões (e de modo mais geral, para os Problemas 1 e 2 para $n = 1$ em qualquer domínio circular aberto Ω) foram respondidas em [7].

Outro progresso importante no estudo dos polinômios Ω -estáveis foi feito em 2010 por David Ruelle [26]. Ele classificou todos os polinômios de $\mathbb{C}_{(1, \dots, 1)}$, como definido em (1), que são simultaneamente Ω_1 -estáveis e Ω_2 -estáveis, onde $\Omega_1 = B(0, 1)^n$ e $\Omega_2 = \mathbb{C}^n - \overline{\Omega_1} = (\mathbb{C} - \overline{B(0, 1)})^n$. Em [26], denota-se tal conjunto de polinômios por LY_n . Usando o conceito de

raio interno os polinômios $\Psi \in LY_{n+1}$, são caracterizados em termos de polinômios Φ em n variáveis tais que $\Phi(z_1, \dots, z_n) \neq 0$ quando $|z_1|, \dots, |z_n| < 1$.

O principal teorema deste trabalho é conhecido como Teorema de Lee-Yang. Como uma de suas aplicações, podemos apresentar uma classe ampla de polinômios em $\mathbb{C}_{(1, \dots, 1)}$ que são Ω_1 -estáveis e Ω_2 -estáveis, onde Ω_1 e Ω_2 são como acima definidos.

Os coeficientes que aparecem nos polinômios do clássico Teorema de Lee-Yang, veja [14] e referências, dependem de uma família $\{A_{ij}\}_{i \neq j}$ de números reais satisfazendo $|A_{ij}| \leq 1$ e $A_{ij} = A_{ji}$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Uma das contribuições deste artigo é mostrar que a conclusão do Teorema de Lee-Yang permanece verdadeira supondo agora que $\{A_{ij}\}_{i \neq j}$ é uma família de números complexos, satisfazendo $|A_{ij}| \leq 1$ e $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$ para quaisquer i, j , onde $\overline{A_{ji}}$ denota o conjugado complexo de A_{ji} .

Os resultados deste trabalho podem ser obtidos a partir do primeiro exemplo da Seção 7 de [26] tomando $b_U = 1$ e $a_U = A_{ij}$ se $U = \{i, j\}$ com $i < j$, com A_{ij} satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.1. A vantagem da prova apresentada aqui é sua simplicidade. Outras generalizações do Teorema de Lee-Yang podem ser encontradas na literatura, veja [1, 31].

A prova do Teorema é feita em duas partes. Em ambas as partes, assumimos sempre que $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$. Na primeira parte, supomos que $0 < |A_{ij}| < 1$ e, usando uma indução no grau dos polinômios, mostramos que o teorema é verdadeiro. Esta indução é bastante elaborada e utiliza fortemente várias propriedades das aplicações de Möbius. Por isso, para facilitar a exposição das idéias, dividimos a indução em três casos e apresentamos ao longo do argumento alguns lemas úteis sobre as transformações de Möbius. A técnica usada no processo de indução é explicada com todos os detalhes na Seção 3.1.2 em um caso particular, onde $n = 3$. Na seção seguinte mostramos como fazer as adaptações necessárias para o caso geral.

Na segunda parte da demonstração voltamos nossa atenção ao caso $|A_{ij}| \leq 1$. A prova do teorema nesse caso é baseada na dependência contínua das raízes de polinômios em uma variável complexa com respeito a seus coeficientes. Para deixar o texto o mais auto-contido possível, provamos esse fato por meio de conceitos elementares da teoria de espaços métricos. A prova apresentada aqui para esse teorema auxiliar é totalmente inspirada na prova dada em [22], e como nesta referência apresentamos todos os detalhes. Após a prova da dependência contínua, na seção seguinte, mostramos finalmente como concluir a prova do Teorema de Lee-Yang.

2 O Teorema de Lee-Yang

Neste texto, \mathbb{N} denota o conjunto dos inteiros positivos. Fixado $n \in \mathbb{N}$, vamos considerar o conjunto $\Delta_n \subset \mathbb{N}$, definido por $\Delta_n \equiv \{1, \dots, n\}$. Vamos usar a notação $\mathcal{P}(\Delta_n)$ para referir-nos ao conjunto das partes de Δ_n . Fixado $n \in \mathbb{N}$, dizemos que $S, S' \subset \Delta_n$ formam uma partição de Δ_n se $S \cup S' = \Delta_n$ e $S \cap S' = \emptyset$. Uma partição S, S' de Δ_n é dita não-trivial se ambos S e S' são não vazios. Dadas uma partição S, S' não-trivial de Δ_n e uma coleção de números complexos A_{ij} com $i \in S$ e $j \in S'$, definimos de maneira canônica o produto $\prod_{i \in S} \prod_{j \in S'} A_{ij}$. Caso S ou S' sejam vazios, convencionamos que esse produto é igual a um. Se $S = \{i_1, \dots, i_S\} \subset \Delta_n$ é um subconjunto não vazio e $z_{i_1}, \dots, z_{i_S} \in \mathbb{C}$, vamos usar a notação $z^S = z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_S}$. Para o caso $S = \emptyset$, colocamos $z^S = 1$. Agora estamos prontos para apresentar de forma precisa o enunciado do principal teorema deste trabalho.

Teorema 2.1 (Lee-Yang). *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\{A_{ij}\}_{i \neq j}$ uma família de números complexos satisfazendo $|A_{ij}| \leq 1$, $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$ para todo $1 \leq i, j \leq n$ e P_n o seguinte polinômio:*

$$P_n(z_1, \dots, z_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}(\Delta_n)} z^S \prod_{i \in S} \prod_{j \in S'} A_{ij}, \quad (2)$$

onde $S' = \Delta_n - S$. Se $P_n(z_1, \dots, z_n) = 0$ e para algum $m \in \Delta_n$ temos $|z_k| \geq 1, \forall k \in \Delta_n - \{m\}$, então $|z_m| \leq 1$.

Observação 2.1. O Teorema também é válido para a situação dual: se $P_n(z_1, \dots, z_n) = 0$ e existe $m \in \Delta_n$ tal que $|z_k| \leq 1, \forall k \in \Delta_n - \{m\}$, então $|z_m| \geq 1$.

Abaixo apresentamos algumas aplicações deste teorema.

Corolário 2.2. *Se $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é um polinômio em uma variável complexa tal que*

$$P(z) = P_n(z, \dots, z)$$

para algum polinômio P_n da forma (2) satisfazendo as hipóteses do Teorema de Lee-Yang, então todos os zeros de P estão no círculo unitário.

Demonstração. Se $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ então segue da definição de P_n as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} P(z^{-1}) &= P_n(z^{-1}, \dots, z^{-1}) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{P}(\Delta_n)} (z^{-1})^S \prod_{i \in S} \prod_{j \in S'} A_{ij} \\ &= \sum_{S \in \mathcal{P}(\Delta_n)} (z^{-1})^{\Delta_n} \cdot z^{\Delta_n} \cdot (z^{-1})^S \prod_{i \in S} \prod_{j \in S'} A_{ij} \\ &= z^{-n} \sum_{S \in \mathcal{P}(\Delta_n)} z^{(\Delta_n - S)} \prod_{i \in S} \prod_{j \in S'} A_{ij}. \end{aligned}$$

Mas note que somar sobre $S \in \mathcal{P}(\Delta_n)$ é equivalente a somar sobre $S' \in \mathcal{P}(\Delta_n)$. Agora, como $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$, podemos inverter a ordem dos produtórios da última igualdade e assim, obtemos

$$P(z^{-1}) = z^{-n} \sum_{S' \in \mathcal{P}(\Delta_n)} z^{S'} \prod_{j \in S'} \prod_{i \in S} \overline{A_{ji}} = z^{-n} \overline{P_n(\overline{z}, \dots, \overline{z})} = z^{-n} \overline{P(\overline{z})}. \quad (3)$$

Se $|\overline{z}| \geq 1$ e $P(\overline{z}) = P_n(\overline{z}, \dots, \overline{z}) = 0$, então segue do Teorema de Lee-Yang que $|\overline{z}| \leq 1$ e logo $|\overline{z}| = 1$. Por outro lado, se $|\overline{z}| \leq 1$ e $P(\overline{z}) = 0$ segue da equação (3) que $P(z^{-1}) = 0$. Assim, pela definição de P temos que $0 = P(z^{-1}) = P_n(z^{-1}, \dots, z^{-1})$. Aplicando novamente o Teorema de Lee-Yang temos que $|z^{-1}| = 1$. Pelas propriedades da conjugação complexa segue imediatamente que $|\overline{z}| = 1$. Em resumo, qualquer raiz da equação $P(z) = 0$ satisfaz $|\overline{z}| = 1$ e, portanto, toda raiz de P pertence ao círculo unitário. ■

2.1 Aplicações

Fixe $d \in \mathbb{N}$. Considere o produto cartesiano de d cópias do conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}^d = \{(p_1, \dots, p_d) : p_j \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } j = 1, \dots, d\}$ como um espaço métrico cuja a distância entre dois de seus pontos p e q é dada por

$$\|p - q\| = \sum_{j=1}^d |p_j - q_j|.$$

Para cada $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito definimos o espaço $\{-1, 1\}^\Lambda = \{(\sigma_p)_{p \in \Lambda} : \sigma_p \in \{-1, 1\}\}$ que será denotado por Ω_Λ e chamado de espaço de configurações no volume Λ . A função $H_\Lambda : \Omega_\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\Lambda((\sigma_p)_{p \in \Lambda}) = - \sum_{\substack{p, q \in \Lambda \\ \|p - q\| = 1}} J(\sigma_p \sigma_q - 1) - \sum_{p \in \Lambda} h(\sigma_p - 1),$$

onde J e h são constantes reais é chamada de Hamiltoniano do modelo de Ising de primeiros vizinhos no volume Λ . Se a constante J é positiva dizemos que o modelo é ferromagnético.

Através da função H_Λ podemos definir uma medida de probabilidade \mathbb{P}_Λ sobre o conjunto das partes de Ω_Λ tal que cada configuração $(\sigma_p)_{p \in \Lambda}$ tem probabilidade

$$\mathbb{P}_\Lambda(\{(\sigma_p)_{p \in \Lambda}\}) = \frac{\exp\left(-H_\Lambda((\sigma_p)_{p \in \Lambda})\right)}{Z_\Lambda(h)},$$

onde $Z_\Lambda(h)$ é uma contante de normalização escolhida de forma que \mathbb{P}_Λ seja uma medida de probabilidade. $Z_\Lambda(h)$ é chamada de *função de partição* e pode ser expressa como

$$Z_\Lambda(h) = \sum_{(\omega_p)_{p \in \Lambda} \in \Omega_\Lambda} \exp\left(-H_\Lambda((\omega_p)_{p \in \Lambda})\right). \quad (4)$$

A rigor a função de partição também depende do parâmetro J , mas omitimos esta dependência na notação porque estamos mais interessados na dependência da função de partição apenas com respeito ao parâmetro h .

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $\Lambda_n = [-n, n] \times \dots \times [-n, n] \cap \mathbb{Z}^d$ um hipercubo em \mathbb{Z}^d e denote por $|\Lambda_n| = (2n + 1)^d$ a cardinalidade deste conjunto. Se $J > 0$ e $h \in \mathbb{R}$ podemos mostrar que existe o seguinte limite

$$f(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \ln(Z_{\Lambda_n}(h)).$$

Neste caso os possíveis valores de h para o qual o modelo de Ising ferromagnético ($J > 0$) passa por uma *transição de fase* são aqueles onde a função f não é diferenciável.

O Teorema de Lee-Yang pode ser usado para mostrar que f é analítica se $h \neq 0$. Uma observação importante é que para $d \geq 2$ é bem conhecido que $Z_\Lambda(h)$ não é diferenciável no ponto $h = 0$. Este teorema é conhecido na literatura como *argumento de Peirls* e é um resultado de grande importância no estudo matemático do fenômeno de transição de fase.

Para usar o teorema de Lee-Yang olhamos para a função de partição $Z_\Lambda(h)$ em (4) como uma função de uma variável complexa h . Observe que isto pode ser feito sem nenhum problema já que hamiltoniano H_Λ se estende de maneira natural para $h \in \mathbb{C}$.

Para cada configuração $(\sigma_p)_{p \in \Lambda}$ associamos o seguinte conjunto

$$S\left((\sigma_p)_{p \in \Lambda}\right) = \{p \in \Lambda : \sigma_p = -1\}.$$

Esta associação define uma bijeção entre os conjuntos Ω_Λ e $\{S : S \subset \Lambda\} = \mathcal{P}(\Lambda)$. Para representar a função de partição como um polinômio de Lee-Yang em uma variável complexa fazemos $z = \exp(-2h)$ e para cada $i, j \in \Lambda$ e fixado $S = S\left((\sigma_p)_{p \in \Lambda}\right)$ definimos

$$A_{ij} = \begin{cases} \exp(-2J), & \text{se } i \in S, j \in (\Lambda \setminus S) \text{ e } \|i - j\| = 1; \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Usando agora a definição da função de partição temos que

$$\begin{aligned} Z_\Lambda(h) &= \sum_{(\sigma_p)_{p \in \Lambda} \in \Omega_\Lambda} \exp\left(\sum_{\substack{p, q \in \Lambda \\ \|p - q\| = 1}} J(\sigma_p \sigma_q - 1) + \sum_{p \in \Lambda} h(\sigma_p - 1)\right) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{P}(\Lambda)} z^{|S|} \left(\prod_{i \in S} \prod_{j \in S'} A_{ij}\right) \\ &= P_{|\Lambda|}(z, \dots, z). \end{aligned}$$

Pelo Corolário 2.2 segue que se $Z_\Lambda(h) = 0$ então $|z| = |\exp(-2h)| = 1$. Portanto podemos concluir que $Z_\Lambda(h) \neq 0$ sempre que $\text{Re}(h) \neq 0$. Podemos mostrar que é possível definir um ramo do logaritmo de tal forma que $\log(Z_\Lambda(h))$ é uma função analítica de h , para todo h tal que $\text{Re}(h) \neq 0$ e além do mais que existe

$$F(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \log(Z_{\Lambda_n}(h)).$$

Usando os Teoremas de Hurwitz e Vitali e uma estimativa simples para função de partição podemos mostrar que F é analítica para todo h tal que $\text{Re}(h) \neq 0$ e também que $F(h) = f(h)$ para todo $h \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, mostrando a ausência de transição de fase no modelo de Ising ferromagnético para $h \neq 0$. Para maiores detalhes veja [14, 28].

2.2 Exemplo

Neste exemplo, vamos mostrar quais são todos os polinômios de grau três possuindo suas raízes no círculo unitário que podem ser obtidos via o Teorema de Lee-Yang. Primeiro consideramos o caso em que os coeficientes são reais e em seguida, o caso complexo. No caso de coeficientes reais, este conjunto de polinômios pode ser descrito por uma família a um parâmetro real α . De fato, observe que se $n = 3$ em (2), então temos

$$\begin{aligned} P_3(z_1, z_2, z_3) &= 1 + z_1 A_{12} A_{13} + z_2 A_{21} A_{23} + z_3 A_{31} A_{32} \\ &\quad + z_1 z_2 A_{13} A_{23} + z_1 z_3 A_{12} A_{32} + z_2 z_3 A_{21} A_{31} + z_1 z_2 z_3. \end{aligned}$$

Tomando $z_1 = z_2 = z_3 = z$ e supondo que a família A_{ij} é simétrica, obtemos o seguinte polinômio de grau 3 na variável complexa z

$$P(z) = P_3(z, z, z) = 1 + \alpha z + \alpha z^2 + z^3, \quad (5)$$

onde $\alpha = A_{12}A_{13} + A_{12}A_{23} + A_{13}A_{23}$. Vamos mostrar como aplicação do Teorema de Lee-Yang que para todo $\alpha \in [-1, 3]$ o polinômio P , como definido acima, tem todas suas raízes no círculo unitário. Note que é suficiente mostrar que a função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ leva o cubo $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ sobre o intervalo $[-1, 3]$. Pela continuidade de f , isto pode ser feito mostrando que -1 e 3 são os valores extremos de f neste cubo. Para o cálculo dos valores extremos note que f é uma função harmônica e portanto seus valores extremos são assumidos por pontos da fronteira deste cubo. Usando também que $f(x_1, x_2, x_3) = f(-x_1, -x_2, -x_3)$ é fácil mostrar que os pontos de mínimo é máximo de f restrita o cubo unitário são respectivamente -1 e 3 .

No caso em que A_{ij} é complexo no lugar de (5) teremos

$$P(z) = P_3(z, z, z) = 1 + \alpha z + \bar{\alpha}z^2 + z^3, \quad (6)$$

Ainda é possível, mesmo neste caso, encontrar explicitamente um subconjunto de $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ tal que para todo $\alpha \in \mathcal{D}$ as raízes do polinômio (6) estão todas no círculo unitário. Esta região é limitada por uma curva chamada deltóide, veja figura abaixo:

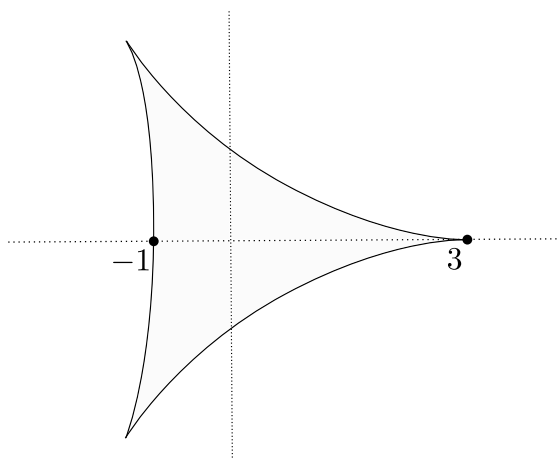


Figura 1: A Deltóide

Uma caracterização de \mathcal{D} , baseada nas idéias usadas neste trabalho e em belíssimos argumentos geométricos pode ser encontrada em [19].

3 A Prova do Teorema de Lee-Yang

Esta seção é dedicada à prova do Teorema 2.1. Para facilitar a compreensão do argumento, essa prova será dividida em alguns lemas e proposições, cujos enunciados e provas serão apresentados aqui.

3.1 A prova para o caso $0 < |A_{ij}| < 1$

Vamos provar inicialmente o Teorema 2.1 com hipóteses um pouco mais fortes, isto é, vamos assumir além das hipóteses feitas no enunciado que $0 < |A_{ij}| < 1, \forall i, j$. Em seguida, mostraremos na Seção 3.2 como fazer a prova no caso geral. Antes de prosseguir, observamos também que não há perda de generalidade em supor que $m = n$.

Como mencionamos anteriormente a demonstração do Teorema de Lee-Yang será feita por indução em n . Na próximas duas seções apresentamos detalhadamente a prova para os casos onde $n = 2$ e 3 . Para o caso $n = 1$, temos que $P_1(z_1) = 1 + z_1$, então a raiz de P_1 satisfaz $|z_1| = 1$, mostrando que o teorema é verdadeiro neste caso.

3.1.1 Caso $n = 2$

Para o caso $n = 2$, temos $P_2(z_1, z_2) = 1 + A_{12}z_1 + A_{21}z_2 + z_1z_2$. Observe que $P(z_1, -A_{12}) \equiv 1 - |A_{12}|^2 \neq 0$. Assim, se $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ é uma raiz de P_2 , então $z_2 \neq -A_{12}$. Além disso, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ é zero de P_2 se e somente se

$$z_1 = -\frac{1 + \overline{A_{12}}z_2}{A_{12} + z_2} := -\frac{A + Cz_2}{B + Dz_2} := T(z_2). \quad (7)$$

Uma vez que $AD - BC = 1 - |A_{12}|^2 \neq 0$, temos que a aplicação linear fracionária definida em (7) é uma transformação de Möbius. Para terminar a prova desse caso, precisamos da seguinte proposição:

Proposição 3.1. *Se $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ é uma Transformação de Möbius, da forma*

$$T(z) = k \cdot \frac{1 + az}{\bar{a} + z}, \text{ com } |k| = 1$$

então $T(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$. Além disso, se $|a| < 1$, então $T(B(0, 1)) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$

Demonstração. Para todo $z := e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$, temos

$$|T(e^{i\theta})| = \left| \frac{1 + ae^{i\theta}}{\bar{a} + e^{i\theta}} \right| = \left| \frac{1 + ae^{i\theta}}{e^{i\theta}(e^{-i\theta}\bar{a} + 1)} \right| = \frac{|1 + ae^{i\theta}|}{|(e^{i\theta}a + 1)|} = 1.$$

Assim temos que $T(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$. Como T preserva o círculo unitário, para mostrar que a imagem do disco unitário $T(B(0, 1)) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, é suficiente observar que T é contínua, $|T(0)| = |1/a| > 1$ e aplicar o Teorema da Alfândega. ■

Para verificar a validade do Teorema de Lee-Yang para $n = 2$, suponha que (z_1, z_2) seja uma raiz de P_2 (portanto, z_1 e z_2 satisfazem (7)) com $|z_1| \geq 1$ e $|z_2| > 1$. Note que a aplicação T satisfaz a Proposição 3.1 com $a = \overline{A_{12}}$ e $k = -1$. A partir disso, temos que $T(z_2) \in B(0, 1)$, mas isso é uma contradição, pois $|T(z_2)| = |z_1| \geq 1$.

3.1.2 Caso $n = 3$

Vamos apresentar a prova de mais um caso particular para ilustrar melhor a técnica utilizada para provar o caso geral. Neste caso, temos

$$P_3(z_1, z_2, z_3) = 1 + z_1 A_{12} A_{13} + z_2 A_{21} A_{23} + z_3 A_{31} A_{32} \\ + z_1 z_2 A_{13} A_{23} + z_1 z_3 A_{12} A_{32} + z_2 z_3 A_{21} A_{31} + z_1 z_2 z_3.$$

Escolhendo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, tais que $P_3(z_1, z_2, z_3) = 0$, temos

$$0 = \underbrace{(1 + z_2 A_{21} A_{23})}_A + z_3 \underbrace{(A_{31} A_{32} + z_2 A_{21} A_{31})}_B \\ + z_1 \underbrace{(A_{12} A_{13} + z_2 A_{13} A_{23})}_C + z_1 z_3 \underbrace{(A_{12} A_{32} + z_2)}_D. \quad (8)$$

Claramente de (8) segue que

$$z_1(C + Dz_3) = -(A + Bz_3). \quad (9)$$

Lema 3.2. *Sejam B, C e D como em (8) e supondo que $z_2 \in \mathbb{C}$ é tal que $|z_2| \geq 1$, então $D \neq 0$ e valem as seguintes desigualdades: $|-C/D| < 1$ e $|-B/D| < 1$.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que $D \neq 0$. Reescrevemos D , colocando o fator $A_{12}A_{32}$ em evidência como segue

$$D = A_{12}A_{32} + z_2 \\ = A_{12}A_{32}(1 + A_{12}^{-1}A_{32}^{-1}z_2).$$

Usando a mudança de variáveis $\xi = A_{12}^{-1}A_{32}^{-1}z_2$, ficamos com $D = A_{12}A_{32}P_1(\xi)$. Como $1 \leq |z_2| < |\xi|$, temos que $P_1(\xi) \neq 0$, logo $D \neq 0$.

Vamos mostrar agora que $|-C/D| < 1$. Para isso, considere a função $z \mapsto C + Dz$. Usando (8), temos que

$$C + D \cdot z = A_{12}A_{13} + z_2 A_{13}A_{23} + (A_{12}A_{32} + z_2)z \\ = A_{12}A_{13}(1 + z_2 A_{12}^{-1}A_{23} + z A_{13}^{-1}A_{32} + z_2 A_{12}^{-1} \cdot z A_{13}^{-1}) \\ = A_{12}A_{13} \tilde{P}_2(\xi_1, \xi_2),$$

onde $\xi_1 = z A_{13}^{-1}$, $\xi_2 = z_2 A_{12}^{-1}$ e $\tilde{P}_2(\xi_1, \xi_2) = 1 + A_{23}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + \xi_1\xi_2$ é um polinômio do tipo P_2 . Tomando $z = -C/D$ na igualdade acima, concluímos que

$$\tilde{P}_2(\xi_1, \xi_2) = 0.$$

Por hipótese, temos que $|z_2| \geq 1$ e $|A_{12}^{-1}| > 1$, logo $|\xi_2| > 1$. Usando agora o teorema para o caso $n = 2$, temos imediatamente que $|\xi_1| \leq 1$ e, portanto,

$$|-C/D| = |z| < |\xi_1| \leq 1. \quad (10)$$

Para provar que $|-B/D| < 1$, basta considerar a função $z \mapsto B + zD$. Nesse caso, temos

$$\begin{aligned} B + zD &= A_{31}A_{32} \left(1 + A_{21}(z_2A_{32}^{-1}) + A_{12}(zA_{31}^{-1}) + (z_2A_{32}^{-1})(zA_{31}^{-1}) \right) \\ &= A_{31}A_{32}\tilde{P}_2(\zeta_1, \zeta_2), \end{aligned}$$

onde $\zeta_1 = zA_{31}^{-1}$ e $\zeta_2 = z_2A_{32}^{-1}$. Tomando $z = -B/D$, a prova da desigualdade segue de maneira análoga à do caso anterior. ■

Para concluir a prova deste caso, faremos uso do seguinte lema:

Lema 3.3. *Se existe $(z'_1, z'_2, z'_3) \in \mathbb{C}^3$ com $|z'_1|, |z'_2| \geq 1$ e $|z'_3| > 1$ tal que $P_3(z'_1, z'_2, z'_3) = 0$, então existe (z''_1, z''_2, z''_3) com $|z''_1| = 1, |z''_2| \geq 1$ e $|z''_3| > 1$ tal que $P_3(z''_1, z''_2, z''_3) = 0$.*

Demonstração. No caso em que $|z'_1| = 1$, não há nada a fazer, pois basta tomar $(z''_1, z''_2, z''_3) = (z'_1, z'_2, z'_3)$. Portanto podemos assumir que $|z'_1| > 1$.

Já que $P(z'_1, z'_2, z'_3) = 0$, o ponto (z'_1, z'_2, z'_3) define, conforme mostrado em (8), coeficientes A, B, C e D (dependentes de z'_2) que satisfazem também a equação (9). Fixado z'_2 tal que $|z'_2| \geq 1$, segue do Lema 3.2 que $|-C/D| < 1$. Como supomos que $|z'_3| > 1$, então $z'_3 \neq -C/D$ e, logo,

$$z'_1 = -\frac{A + Bz'_3}{C + Dz'_3}. \quad (11)$$

O lado direito da igualdade acima define naturalmente uma transformação linear fracionária em \mathbb{C}_∞ . Vamos denotar essa aplicação como T .

Afirmamos que T é uma aplicação de Möbius. De fato, se T é uma aplicação linear fracionária que não é de Möbius, então T é constante. Logo existe uma constante $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$\lambda \equiv -\frac{A + Bz_3}{C + Dz_3} \implies -\lambda D = B. \quad (12)$$

Usando (11), (12) e o Lema 3.2, temos $|z'_1| = |\lambda| = |B/D| < 1$. No entanto, isso é um absurdo, pois $|z'_1| > 1$. Portanto, podemos assumir que a aplicação T induzida por (11) é uma aplicação de Möbius.

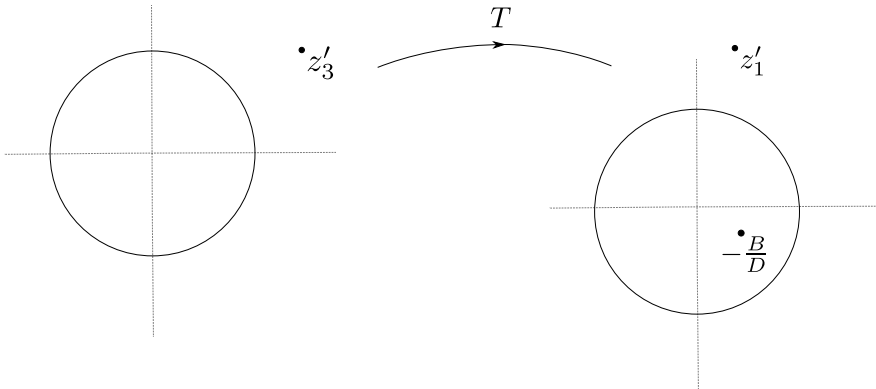


Figura 2: A transformação T

Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ uma reta arbitrária que passe por z'_3 e não intercepte o círculo unitário. Pelo

Lema 3.2, temos que o ponto $z_3 = -C/D$ não está em Γ . Como as transformações de Möbius preservam a família dos círculos em \mathbb{C}_∞ , temos que $T(\Gamma)$ é uma circunferência em \mathbb{C} , pois T é uma bijeção e $T(-C/D) = \infty$. Além disso, temos que $z'_1, -B/D \in T(\Gamma)$, logo $T(\Gamma)$ é uma circunferência que intercepta o círculo unitário em dois pontos distintos. Tomando z'_1 como um desses pontos, $z''_3 = T^{-1}(z'_1)$ e $z''_2 = z'_2$. Veja a figura abaixo:

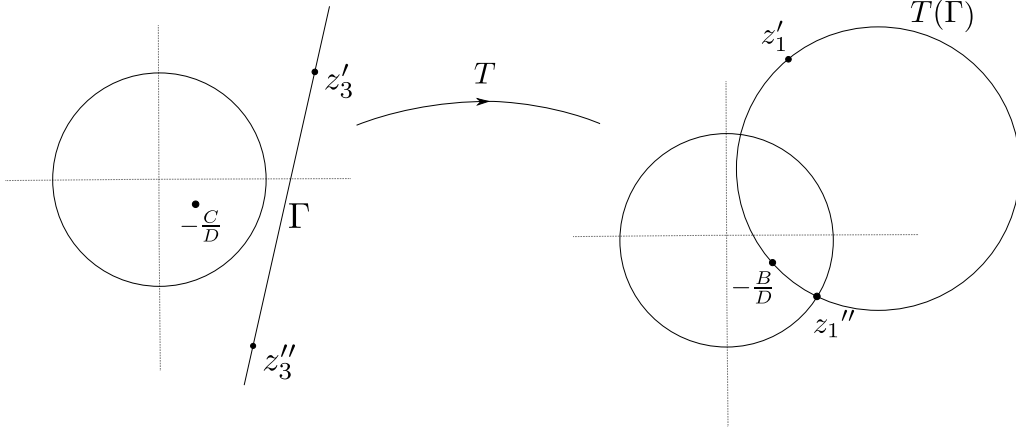


Figura 3: A reta Γ e a construção da raiz (z''_1, z''_2, z''_3) .

Deste modo, obtemos (z''_1, z''_2, z''_3) com $|z''_1| = 1$, $|z''_2| \geq 1$ e $|z''_3| > 1$, como queríamos. ■

Fixado o ponto z''_1 , construído como no Lema 3.3, temos da definição de P_3 a seguinte igualdade:

$$P_3(z''_1, z_2, z_3) = \overbrace{(1 + z''_1 A_{12} A_{13})}^{A'} + z_2 \overbrace{(A_{21} A_{23} + z''_1 A_{13} A_{23})}^{B'} + z_3 \overbrace{(A_{31} A_{32} + z''_1 A_{12} A_{32})}^{C'} + z_2 z_3 \overbrace{(A_{21} A_{31} + z''_1)}^{D'}. \quad (13)$$

Observamos que os coeficientes definidos acima são ligeiramente diferentes daqueles obtidos no Lema 3.2, no qual os coeficientes foram obtidos expressando z_1 como função de z_3 . A intenção agora é expressar z_2 como função de z_3 . Por um argumento análogo usado na prova do Lema 3.2, podemos mostrar que, se $|z''_1| = 1$, então $|-B'/D'| < 1$. Se $P_3(z''_1, z_2, z_3) = 0$ e $z_3 \neq -B'/D'$, então podemos expressar z_2 como a imagem de z_3 pela aplicação dada abaixo:

$$z_2 = \tilde{T}(z_3) \equiv -\frac{A' + C' z_3}{B' + D' z_3}, \quad (14)$$

onde os coeficientes A', B', C' e D' são dados em (13). Verificamos que são válidas as seguintes relações entre os coeficientes de (14):

$$\begin{aligned} A' &= 1 + z''_1 A_{12} A_{13} = z''_1 (\overline{A_{21} A_{31}} + z''_1^{-1}) \\ &= z''_1 (\overline{A_{21} A_{31}} + \overline{z''_1}) \\ &= z''_1 \cdot \overline{D'}, \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, usamos que $|z_1''| = 1$. A segunda relação é $C' = z_1'' \cdot \overline{B'}$, que é obtida de maneira análoga. A partir dessas relações, podemos verificar que a aplicação \tilde{T} , em (14), pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}\tilde{T}(z_3) &= -\frac{z_1'' \cdot \overline{D'} + z_1'' \cdot \overline{B'} z_3}{B' + D' z_3} \\ &= -z_1'' \cdot \frac{\overline{D'}}{D'} \cdot \frac{1 + \left(\frac{B'}{D'}\right) z_3}{\frac{B'}{D'} + z_3},\end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, usamos que $D' = A_{21}A_{31} + z_1'' \neq 0$. Tomando

$$k = -z_1'' \cdot \frac{\overline{D'}}{D'} \quad \text{e} \quad a = \left(\frac{B'}{D'}\right),$$

segue da desigualdade $|B'/D'| < 1$ que \tilde{T} satisfaz todas as hipóteses da Proposição (3.1). A partir disso, podemos concluir que \tilde{T} transforma o plano de modo que o exterior do disco unitário torna-se o interior do disco unitário. Uma vez que $|z_3''| > 1$, temos que $z_3'' \neq -B'/D'$. Nesse caso, como observado anteriormente, a equação $P_3(z_1'', z_2'', z_3'') = 0$ é equivalente a $\tilde{T}(z_2'') = z_3''$. No entanto, como $|z_2''| \geq 1$ e \tilde{T} transforma o plano de modo que o complementar do disco unitário torna-se o fecho do disco unitário, deveríamos ter $|z_3''| = |T(z_2'')| \leq 1$. Por outro lado, $z_3'' \in \Gamma$ e essa reta não intercepta o círculo unitário, logo, temos uma contradição. Portanto, vale o teorema para o caso $n = 3$.

3.1.3 Caso geral

A seguir, faremos um processo de indução para provar os casos $n \geq 4$ uma vez que os argumentos principais já foram exemplificados nos casos particulares. No entanto, para generalizar esses argumentos, precisamos antes demonstrar o

Lema 3.4. *Suponhamos que o Teorema de Lee-Yang seja válido para $n - 1$ e $n - 2$. Sejam A, B, C e D coeficientes dependentes de z_j com $j \in \Delta_{n-1} - \{k\} \equiv X$, definidos pela seguinte igualdade:*

$$P_n(z_1, \dots, z_n) = A + Bz_k + Cz_n + Dz_k z_n. \quad (15)$$

Se para todo $j \in X$ temos que $|z_j| \geq 1$, então $D \neq 0$, $|-C/D| < 1$ e $|-B/D| < 1$.

Demonstração. Assumamos que o Teorema seja válido para $n - 1$ e $n - 2$ e suponhamos que $|z_i| \geq 1, \forall i \in X$. Pela definição dos coeficientes A, B, C e D , temos que:

$$P_n(z_1, \dots, z_n) = A + Bz_k + Cz_n + Dz_k z_n,$$

onde $Dz_n z_k$ é dado pelo somatório sobre os conjuntos da forma $S \cup \{k, n\}$ com $S \subset X$ como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned}Dz_n z_k &= \sum_{S \in \mathcal{P}(X)} z_k z_n z^S \prod_{i \in S \cup \{k, n\}} z_i \prod_{j \in \Delta_n - (S \cup \{k, n\})} A_{ij} \\ &= z_k z_n \sum_{S \in \mathcal{P}(X)} z^S \prod_{i \in S \cup \{k, n\}} z_i \prod_{j \in \Delta_n - (S \cup \{k, n\})} A_{ij}.\end{aligned}$$

Como z_n e z_k na equação acima são arbitrários, podemos concluir que

$$D = \sum_{S \in \mathcal{P}(X)} z^S \prod_{i \in S \cup \{k, n\}} \prod_{j \in \Delta_n - (S \cup \{k, n\})} A_{ij}.$$

Mas como $\Delta_n - (S \cup \{k, n\}) = X - S$, temos que

$$\begin{aligned} D &= \sum_{S \in \mathcal{P}(X)} z^S \prod_{i \in S \cup \{k, n\}} \prod_{j \in X - S} A_{ij} \\ &= \sum_{S \in \mathcal{P}(X)} z^S \left(\prod_{j \in X - S} A_{kj} A_{nj} \right) \left(\prod_{i \in S} \prod_{j \in X - S} A_{ij} \right) \\ &= \left(\prod_{j \in X} A_{kj} A_{nj} \right) \sum_{S \in \mathcal{P}(X)} z^S \left(\prod_{j \in S} A_{kj}^{-1} A_{nj}^{-1} \right) \left(\prod_{i \in S} \prod_{j \in X - S} A_{ij} \right) \\ &= \left(\prod_{j \in X} A_{kj} A_{nj} \right) \sum_{S \in \mathcal{P}(X)} \left(\prod_{j \in S} z_j A_{kj}^{-1} A_{nj}^{-1} \right) \left(\prod_{i \in S} \prod_{j \in X - S} A_{ij} \right) \\ &= \left(\prod_{j \in X} A_{kj} A_{nj} \right) \sum_{S \in \mathcal{P}(X)} \left(\prod_{j \in S} \xi_j \right) \left(\prod_{i \in S} \prod_{j \in X - S} A_{ij} \right) \\ &= \left(\prod_{j \in X} A_{kj} A_{nj} \right) P_{n-2}(\{\xi_j\}_{j \in X}), \end{aligned}$$

onde $\xi_j = z_j A_{kj}^{-1} A_{nj}^{-1}$. Observando que $|\xi_j| > |z_j| \geq 1$, temos pela hipótese de indução que $P_{n-2}(\{\xi_j\}_{j \in X}) \neq 0$ e, portanto, $D \neq 0$.

De maneira semelhante, temos que $Cz_n + Dz_k z_n$ é dado pelo somatório sobre todos os conjuntos $S \cup \{n\}$ tais que $S \in \mathcal{P}(\Delta_{n-1})$, conforme abaixo:

$$\begin{aligned} Cz_n + Dz_k z_n &= \sum_{S \in \mathcal{P}(\Delta_{n-1})} z_n z^S \left(\prod_{i \in S \cup \{n\}} \prod_{j \in \Delta_n - (S \cup \{n\})} A_{ij} \right) \\ z_n(C + Dz_k) &= z_n \sum_{S \in \mathcal{P}(\Delta_{n-1})} z^S \left(\prod_{i \in S \cup \{n\}} \prod_{j \in \Delta_n - (S \cup \{n\})} A_{ij} \right) \end{aligned}$$

Já que a igualdade acima é válida para todo $z_n \in \mathbb{C}$, segue que

$$\begin{aligned}
C + Dz_k &= \sum_{S \in \mathcal{P}(\Delta_{n-1})} z^S \left(\prod_{i \in S \cup \{n\}} \prod_{j \in \Delta_n - (S \cup \{n\})} A_{ij} \right) \\
&= \sum_{S \in \mathcal{P}(\Delta_{n-1})} z^S \left(\prod_{j \in \Delta_{n-1} - S} A_{nj} \right) \left(\prod_{i \in S} \prod_{j \in \Delta_{n-1} - S} A_{ij} \right) \\
&= \left(\prod_{j \in \Delta_{n-1}} A_{nj} \right) \sum_{S \in \mathcal{P}(\Delta_{n-1})} z^S \left(\prod_{j \in S} A_{nj}^{-1} \right) \left(\prod_{i \in S} \prod_{j \in \Delta_{n-1} - S} A_{ij} \right) \\
&= \left(\prod_{j \in \Delta_{n-1}} A_{nj} \right) \sum_{S \in \mathcal{P}(\Delta_{n-1})} \left(\prod_{j \in S} z_j A_{nj}^{-1} \right) \left(\prod_{i \in S} \prod_{j \in \Delta_{n-1} - S} A_{ij} \right) \\
&= \left(\prod_{j \in \Delta_{n-1}} A_{nj} \right) P_{n-1}(\{\xi_j\}_{j \in \Delta_{n-1}}),
\end{aligned}$$

onde desta vez $\xi_j \equiv z_j A_{nj}^{-1}$. Fazendo $z_k = -C/D$ na equação acima, obtemos a seguinte igualdade: $P_{n-1}(\{\xi_j\}_{j \in \Delta_{n-1}}) = 0$. Note novamente que $|\xi_i| > |z_i| \geq 1$ para todo $i \in X$, portanto, segue da hipótese de indução do caso $n - 1$ que $|\xi_k| \leq 1$ e, por isso,

$$|-C/D| = |z_k| = |A_{nk}\xi_k| < |\xi_k| \leq 1.$$

A prova de que $|-B/D| < 1$ segue de argumentos análogos aos expostos acima. ■

Vamos considerar agora a aplicação fracionária linear $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ dada por

$$T(z_n) = -\frac{A + Cz_n}{B + Dz_n}$$

com A, B, C e D dados como em (15). Sob as hipóteses do lema anterior, sabemos que $D \neq 0$ e, portanto, temos que $T(\infty) = -C/D$. Em geral, como no caso $n = 3$, T pode não ser uma transformação de Möbius. Sendo assim, precisamos considerar estes dois casos: T é uma transformação de Möbius; e T não é uma transformação de Möbius.

Caso T não seja uma transformação de Möbius, sabemos que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T(z_n) \equiv \lambda$. Sob as hipóteses do Lema 3.4, temos que $|-C/D| < 1$ e, portanto, $|T(\infty)| = |-C/D| < 1$, o que mostra que $|\lambda| < 1$. Já que T é constante podemos verificar imediatamente que $A = -\lambda B$ e $C = -\lambda D$. Usando essas igualdades na expressão do polinômio P_n , podemos afirmar que, se (z_1, \dots, z_n) é uma de suas raízes e satisfaz as hipóteses do Lema 3.4, então as seguintes igualdades são verdadeiras:

$$\begin{aligned}
0 &= A + Bz_k + Cz_n + Dz_kz_n \\
&= -\lambda B + Bz_k - \lambda Dz_n + Dz_kz_n \\
&= (z_k - \lambda) \left(\frac{B}{D} + z_n \right)
\end{aligned}$$

Da igualdade acima, decorre que não pode existir nenhuma raiz (z_1, \dots, z_n) de P_n tal que $|z_j| \geq 1$ para todo $j = 1, \dots, (n-1)$ e $|z_n| > 1$. Assim, prova-se o teorema para esse caso.

Vamos considerar agora o caso em que T é uma transformação de Möbius. Suponhamos que $z'_1, \dots, z'_{n-1}, z'_n$ sejam tais que $P_n(z'_1, \dots, z'_n) = 0$ e $|z'_1|, |z'_2|, \dots, |z'_{n-1}| \geq 1$. Se $|z'_1| = 1$, tomemos $z''_i = z'_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Caso $|z'_1| > 1$, podemos usar o Lema 3.4 com $k = 1$ para garantir que $T(z'_n) = z'_1$ e $T(\infty) = -C/D$. Se considerarmos Γ uma reta que passe por z'_1 e não intercepte o disco unitário, o Lema 3.4 garante também que Γ não passa por $-B/D$. Por meio dessa observação, podemos dizer que $T(\Gamma)$ é um círculo em \mathbb{C} e que intercepta o círculo unitário em dois pontos. Tomemos z''_1 como um desses pontos e $z''_n = T^{-1}(z''_1)$ e $z''_j = z'_j$ para todo $2 \leq j \leq n-1$. Podemos agora aplicar esse mesmo processo com base no Lema 3.4 em que k varia entre os valores 2 e $n-2$. Assim podemos construir uma n -úpla (z_1^*, \dots, z_n^*) tal que $P(z_1^*, \dots, z_n^*) = 0$ com $|z_1^*| = \dots = |z_{n-2}^*| = 1$. Usando as expressões que definem os coeficientes $A \equiv A(z_1^*, \dots, z_{n-2}^*)$ e $D \equiv D(z_1^*, \dots, z_{n-2}^*)$ e que $|z_1^*| = \dots = |z_{n-2}^*| = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\overline{A(z_1^*, \dots, z_{n-2}^*)} &= \sum_{S \in \mathcal{P}(\Delta_{n-2})} (\overline{z^*})^S \prod_{i \in S} \prod_{j \in \Delta_n - S} \overline{A_{ij}} \\
&= \sum_{S \in \mathcal{P}(\Delta_{n-2})} (\overline{z^*})^S \prod_{i \in \Delta_n - S} \prod_{j \in S} A_{ji}, \text{ pois } A_{ij} = \overline{A_{ji}} \\
&= \overline{(z^*)^{\Delta_{n-2}}} \sum_{S \in \mathcal{P}(\Delta_{n-2})} (\overline{z^*})^{S - \Delta_{n-2}} \prod_{i \in \Delta_n - S} \prod_{j \in S} A_{ji} \\
&= \overline{(z^*)^{\Delta_{n-2}}} \sum_{S \in \mathcal{P}(\Delta_{n-2})} (z^*)^{\Delta_{n-2} - S} \prod_{i \in \Delta_n - S} \prod_{j \in S} A_{ji}, \text{ pois } |z^*| = 1 \Rightarrow \overline{z^*} = (z^*)^{-1} \\
&= \overline{(z^*)^{\Delta_{n-2}}} D(z_1^*, \dots, z_{n-2}^*).
\end{aligned}$$

Na penúltima igualdade, usamos o fato de que somar sobre os complementares de S ou sobre S é equivalente. Analogamente, expressando $B \equiv B(z_1, \dots, z_{n-2})$ e $C \equiv C(z_1, \dots, z_{n-2})$ com $|z_1| = \dots = |z_{n-2}| = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\overline{B(z_1^*, \dots, z_{n-2}^*)} &= \sum_{S \in \mathcal{P}(\Delta_{n-2})} (\overline{z^*})^S \prod_{i \in \text{SU}\{n-1\}} \prod_{j \in \Delta_n - (\text{SU}\{n-1\})} \overline{A_{ij}} \\
&= \sum_{S \in \mathcal{P}(\Delta_{n-2})} (\overline{z^*})^S \prod_{i \in \Delta_n - (\text{SU}\{n-1\})} \prod_{j \in \text{SU}\{n-1\}} A_{ji} \\
&= \overline{(z^*)^{\Delta_{n-2}}} \sum_{S \in \mathcal{P}(\Delta_{n-2})} (\overline{z^*})^{S - \Delta_{n-2}} \prod_{i \in \Delta_n - (\text{SU}\{n-1\})} \prod_{j \in \text{SU}\{n-1\}} A_{ji} \\
&= \overline{(z^*)^{\Delta_{n-2}}} \sum_{S \in \mathcal{P}(\Delta_{n-2})} (z^*)^{\Delta_{n-2} - S} \prod_{i \in \Delta_n - (\text{SU}\{n-1\})} \prod_{j \in \text{SU}\{n-1\}} A_{ji} \\
&= \overline{(z^*)^{\Delta_{n-2}}} C(z_1^*, \dots, z_{n-2}^*).
\end{aligned}$$

Em especial, tomando $z_1 = z_1^*, \dots, z_{n-2} = z_{n-2}^*$, temos que a transformação

$$z_{n-1} = T(z_n) = -\frac{A + Cz_n}{B + Dz_n}, \quad (16)$$

pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} z_{n-1} = T(z_n) &= -\frac{A + Cz_n}{B + Dz_n} \\ &= -\frac{(z^*)^{\Delta_{n-2}} \bar{D} + (z^*)^{\Delta_{n-2}} \bar{B} z_n}{B + Dz_n} \\ &= -(z^*)^{\Delta_{n-2}} \frac{\bar{D} 1 + \frac{\bar{B}}{D} z_n}{\frac{B}{D} + z_n}. \end{aligned}$$

Entretanto, como $|B| = |(z^*)^{\Delta_{n-2}} \cdot \bar{B}'| = |C|$, então temos que $|B/D| = |C/D| < 1$. Mais uma vez, estamos em condições de aplicar a Proposição (3.1). Para isso, basta tomar $k = -(z^*)^{\Delta_{n-2}} \cdot \frac{\bar{D}'}{D'}$ e $a = \frac{\bar{B}}{D}$ e, logo, $|T(z_n)| < 1$, pois supomos que $|z_n| > 1$. Contudo, por (16), temos $|z_{n-1}| = |T(z_n)|$, o que é um absurdo devido à escolha de z_{n-1} e, assim, a prova do Teorema de Lee-Yang está completa.

3.2 A prova para o caso $|A_{ij}| \leq 1$

Nesta seção mostraremos como reduzir a prova do Teorema de Lee-Yang onde $|A_{ij}| \in [0, 1]$ ao caso em que $0 < |A_{ij}| < 1$. Isso é feito por um argumento de continuidade. A idéia é definir a partir de P_n , um polinômio de uma variável complexa e, assim, utilizar um resultado clássico sobre a dependência contínua entre as raízes de polinômios em uma variável complexa e os coeficientes desses polinômios.

Esta seção será dividida em duas subseções. Na primeira apresentamos a prova da dependência contínua das raízes de um polinômio (em uma variável complexa) em função dos coeficientes. Na segunda subseção, usando os resultados da primeira, mostraremos como pode ser feita a prova do Teorema de Lee-Yang para o caso em que $|A_{ij}| \in [0, 1]$.

3.2.1 Dependência contínua das raízes com respeito aos coeficientes em $\mathbb{C}[z]$

Nesta subseção estudaremos a dependência das raízes de um polinômio de uma variável complexa, com respeito aos coeficientes. Vamos mostrar aqui que as raízes, vistas como função dos coeficientes, dependem continuamente dos mesmos. Existem várias provas desse fato e a grande maioria delas está ligada de forma implícita ou explícita ao Teorema de Rouché. Por exemplo, a dependência contínua das raízes como função dos coeficientes pode ser obtida como uma aplicação direta do Teorema de Hurwitz (veja [21] e referências contidas).

Neste trabalho, optamos por apresentar a prova da continuidade utilizando outra técnica. A principal razão é ilustrar de maneira simples como atacar esse tipo de problema utilizando fatos elementares da teoria de espaços métricos.

Antes de prosseguir, introduziremos mais algumas notações. Diremos que um número complexo $z = a + ib$ é lexicograficamente menor que um número complexo $w = u + iv$,

quando $a < u$ ou $a = u$ e $b < v$. Quando z for lexicograficamente menor que w , vamos usar a notação $z \prec w$. A notação $z \preceq w$ será usada para indicar que $z \prec w$ ou $z = w$.

Será de grande importância o seguinte espaço:

$$\mathbb{L}_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; z_1 \preceq \dots \preceq z_n\}.$$

Em palavras, esse conjunto é o conjunto de todas as n -úplas de números complexos cujas coordenadas da esquerda para direita aparecem em ordem lexicográfica não decrescente. De maneira usual, definimos a distância entre $z = (z_1, \dots, z_n)$ e $w = (w_1, \dots, w_n)$ em \mathbb{C}^n por

$$d(z, w) = \left(\sum_{j=1}^n |z_j - w_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observe que \mathbb{L}_n é um subconjunto fechado do espaço métrico (\mathbb{C}^n, d) .

Nesta seção, vamos escrever a fórmula geral de um polinômio mônico, P de grau n em uma variável complexa z , de maneira ligeiramente não usual:

$$P(z) = z^n - a_1 z^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n. \quad (17)$$

A razão para isso é simplesmente não ter de carregar fatores da forma $(-1)^j$ na fórmula de Viète que será usada abaixo. A partir de agora, vamos pensar nos coeficientes do polinômio P como um vetor $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, sabemos que P possui n raízes, z_1, \dots, z_n , contadas com multiplicidade. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $z_j \preceq z_{j+1}$, para $1 \leq j < n$. Logo, podemos associar as raízes de P a um elemento $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{L}_n$. Pela famosa fórmula de Viète, temos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} a_1 &= z_1 + z_2 + \dots + z_n, \\ a_2 &= z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n, \\ &\vdots \\ a_n &= z_1 z_2 \dots z_n. \end{aligned}$$

Essas identidades permitem-nos definir uma aplicação contínua $F : \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{C}^n$ dada por $F(z_1, \dots, z_n) = (a_1, \dots, a_n)$. Do Teorema Fundamental da Álgebra, segue que F é uma aplicação sobrejetiva e injetiva. Portanto, F nos fornece uma bijeção entre \mathbb{L}_n e \mathbb{C}^n . Assim podemos falar de $F^{-1} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{L}_n$, que é justamente a aplicação que associa os coeficientes do polinômio P às suas respectivas raízes. Nosso objetivo nesta seção é provar que F^{-1} é contínua. Para isso vamos primeiro enunciar um lema.

Lema 3.5. *Para todo $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ temos que*

$$d(F^{-1}(a_1, \dots, a_n), (0, \dots, 0)) \leq n^2 \left(1 + \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Sejam $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{L}_n$ e $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ tais que $F^{-1}(a_1, \dots, a_n) = (z_1, \dots, z_n)$. Pela definição de F^{-1} e por (17), temos para todo $1 \leq j \leq n$ a seguinte igualdade:

$z_j^n - a_1 z_j^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n = 0$. Isolando z_j^n nessa equação e aplicando a desigualdade triangular obtemos

$$|z_j|^n \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \cdot |z_j|^{n-k} \quad (18)$$

Se $|z_j| \leq 1$, segue da desigualdade acima que $|z_j|^n \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$. Por Cauchy-Schwarz, temos $\sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sqrt{n} (\sum_{k=1}^n |a_k|^2)^{1/2}$. Combinando essas duas desigualdades, temos a seguinte estimativa:

$$|z_j| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\sqrt{n} \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2n}} \leq n^{\frac{1}{4n}} \left(1 + \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2n}}.$$

Observe que se $n \geq 1$ e $x > 1$, então $x^{1/2n} \leq x^{1/2}$. Desse fato e das desigualdades acima, concluímos que

$$|z_j| \leq n^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

Para obter a estimativa (19) quando $|z_j| \geq 1$, vamos primeiro dividir os dois lados da desigualdade (18) por $|z_j|^{n-1}$ e, em seguida, usar que, se $k \geq 1$, então temos $|z_j|^{1-k} \leq 1$ e assim ficamos com

$$|z_j| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \cdot |z_j|^{1-k} \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$$

Aplicando Cauchy-Schwarz na soma mais à direita nas desigualdades acima e a cota trivial $\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq 1 + \sum_{k=1}^n |a_k|^2$, chegamos novamente à estimativa (19):

$$|z_j| \leq n^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq n^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Agora podemos tomar o quadrado em ambos lados da desigualdade acima e, em seguida, somar sobre j para finalmente concluir que

$$\left[d(F^{-1}(a_1, \dots, a_n), (0, \dots, 0)) \right]^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \leq n^2 \left(1 + \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right).$$

■

Teorema 3.6. A função $F^{-1} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{L}_n$ é contínua.

Demonstração. Vamos fazer a prova por contradição. Suponhamos que F^{-1} não seja contínua em um ponto $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Então existe, uma sequência (a_1^k, \dots, a_n^k) em \mathbb{C}^n tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_1^k, \dots, a_n^k) = (a_1, \dots, a_n)$ e $\varepsilon_0 > 0$ satisfazendo as seguintes condições: para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e para infinitos valores de $k \in \mathbb{N}$, temos

$$d(F^{-1}(a_1^k, \dots, a_n^k), F^{-1}(a_1, \dots, a_n)) > \varepsilon. \quad (20)$$

Segue do Lema 3.5 que a sequência $F^{-1}(a_1^k, \dots, a_n^k)$ é limitada, portanto, a menos de sub-sequência, podemos assumir que

$$F^{-1}(a_1^k, \dots, a_n^k) \rightarrow (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{L}_n. \quad (21)$$

Usando a continuidade de F , temos

$$F(z_1, \dots, z_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} F \circ F^{-1}(a_1^k, \dots, a_n^k) = (a_1, \dots, a_n).$$

Logo, $(z_1, \dots, z_n) = F^{-1}(a_1, \dots, a_n)$. Usando esta igualdade e (21) para todo $\varepsilon > 0$ deve existir $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$ então

$$d\left(F^{-1}(a_1^k, \dots, a_n^k), F^{-1}(a_1, \dots, a_n)\right) < \varepsilon.$$

Mas essa desigualdade leva-nos a uma contradição com (20). ■

3.2.2 A prova para o caso $|A_{ij}| \in [0, 1]$

Na Seção 3.1, provamos a validade do Teorema 2.1 supondo que a matriz A_{ij} que define os coeficientes de P_n é hermitiana, isto é, $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$ e que $|A_{ij}| \in (0, 1)$ para todo $i, j = 1, \dots, n$. Agora vamos mostrar que o teorema também permanece válido se $|A_{ij}| \in [0, 1]$.

Para deixar mais explícita a dependência dos polinômios P_n definidos em (2) com respeito à matriz $A \equiv (A_{ij})$, vamos denotá-los da seguinte forma:

$$P_n(A)(z_1, \dots, z_n) \equiv P_n(z_1, \dots, z_n).$$

Seja A uma matriz simétrica $n \times n$ tal que $|A_{ij}| \in [0, 1]$, para todo $i, j = 1, \dots, n$. Suponhamos que o Teorema de Lee-Yang seja falso neste caso. Então é possível encontrar um vetor (w_1, \dots, w_n) com $|w_i| \geq 1$ para todo $i = 1, \dots, (n-1)$ e $|w_n| > 1$ tal que $P_n(A)(w_1, \dots, w_n) = 0$. Seja Q o polinômio definido por

$$Q(z) \equiv P_n(A)(w_1, \dots, w_{n-1}, z).$$

Suponhamos que o polinômio Q tenha grau m e sejam a_0, \dots, a_m seus coeficientes. Usando (2), é fácil ver que, para todo $j = 0, \dots, m$, os coeficientes $a_j \equiv a_j(A, w_1, \dots, w_{n-1})$ definem aplicações $A \mapsto a_j(A, w_1, \dots, w_{n-1})$ contínuas. Pela construção de Q , temos $Q(w_n) = 0$. Considerando w_n como função dos coeficientes, isto é, $w_n \equiv w_n(a_0, \dots, a_m)$ o Teorema 3.6 da Seção 3.2.1 garante-nos que a aplicação $(a_0, \dots, a_m) \mapsto w_n(a_0, \dots, a_m)$ é contínua. Como a composição de aplicações contínuas é contínua, temos que a aplicação

$$A \mapsto w_n\left(a_0(A, w_1, \dots, w_{n-1}), \dots, a_m(A, w_1, \dots, w_{n-1})\right)$$

é contínua. Assim, dado $0 < \varepsilon < (|w_n| - 1)/2$, existe $\delta > 0$ tal que, se \tilde{A} é uma matriz $n \times n$ simétrica com $0 < |\tilde{A}_{ij}| < 1$ e $\max_{i,j} |\tilde{A}_{ij} - A_{ij}| < \delta$, então

$$|w_n(A, w_1, \dots, w_{n-1}) - w_n(\tilde{A}, w_1, \dots, w_{n-1})| < \varepsilon.$$

Pela construção do polinômio Q , temos $P_n(\tilde{A})(w_1, \dots, w_n(\tilde{A}, w_1, \dots, w_{n-1})) = 0$ com

$$|w_j| \geq 1 \text{ para todo } j = 1, \dots, (n-1) \text{ e } |w_n(\tilde{A}, w_1, \dots, w_{n-1})| > 1.$$

No entanto, isso é uma contradição com o caso provado anteriormente.

Agradecimentos

Os autores deste texto agradecem ao professor Edson Vargas (IME-USP), Alinne Fernandes e José Siqueira pela leitura minuciosa e por suas sugestões. Agradecem também ao professor Pedro Roitman, por apontar a referência [19], e ao revisor deste artigo, por suas valiosas sugestões, referências e por identificar os erros da versão preliminar. Leandro Cioletti agradece o apoio financeiro da FEMAT. Filipe Fernandes e Leandro Chiarini agradecem o apoio financeiro do MEC.

Referências

- [1] B. Beauzamy. *On complex Lee and Yang polynomials*, Commun. Math. Phys. **182** (1996), 177-184.
- [2] J. Borcea, P. Brändén: *Applications of stable polynomials to mixed determinants: Johnson's Conjectures, unimodality, and Symmetrized Fischer Products*, Duke Mathematical Journal **143** (2008), 205-223.
- [3] J. Borcea, P. Brändén: *The Lee-Yang and Pólya-Schur Programs. I. linear operators preserving stability*, Inventiones mathematicae **177** (2009), 541-569.
- [4] J. Borcea, P. Brändén: *The Lee-Yang and Pólya-Schur programs. II. Theory of stable polynomials and applications*, Communications on Pure and Applied Mathematics **62** (2009), 1595-1631.
- [5] J. Borcea, P. Brändén, Liggett, T.M.: *Negative dependence and the geometry of polynomials*, Journal of the American Mathematical Society **22** (2009), 521-567 .
- [6] J. Borcea, P. Brändén, G. Csordas, V. Vinnikov: *Pólya-Schur-Lax problems: hyperbolicity and stability preservers*, workshop report, American Institute of Mathematics, Palo Alto, CA, May–June 2007; <http://www.aimath.org/pastworkshops/polyaschurlax.html>.
- [7] J. Borcea, P. Brändén: *Pólya-Schur Master Theorems for circular domains and their boundaries*, Annals of Mathematics, **170** (2009), 465-492.
- [8] J. Borcea, P. Brändén: *Multivariate Pólya-Schur classification problems in the Weyl Algebra*, Proceedings of the London Mathematical Society, **101** (2010), 73-104.
- [9] Y. Choe, J. Oxley, A.D.Sokal ,D.G Wagner: *Homogeneous multivariate polynomials with the half-plane property*, Advances in Applied Mathematics **32** (2004), 88-187.
- [10] T. Craven , G. Csordas: *Composition theorems, multiplier sequences and complex zero decreasing sequences*, Barsegian, G., Laine, I., Yang, C.C. (eds.) Value distribution theory and Its related topics, pp. 131-166. Kluwer, Dordrecht (2004).
- [11] T. Craven, G. Csordas: *Multiplier sequences for fields*, Illinois Journal of Mathematics **21** (1977), 801-817.
- [12] G. Csordas: *Linear operators and the distribution of zeros of entire functions*, Complex Variables and Elliptic Equations. **51** (2006), 625-632.

- [13] T. Craven, G. Csordas, W. Smith: *The zeros of derivatives of entire functions and the Pólya-Wiman conjecture*, Annals of Mathematics **125** (1987), 405-431.
- [14] P. Cupertino: *O Teorema de Lee-Yang*, (2004), <http://www.mat.ufmg.br/~lima/artigos/leeyang.pdf>, acessado em 20/01/2013.
- [15] S. Fisk: *Polynomials, roots, and interlacing. Versions 1-2*, <http://www.bowdoin.edu/fisk/>, xx+700 pp.
- [16] A. Iserles, S. P. Nørsett, E. B. Saff: *On transformations and zeros of polynomials*, Rocky Mountain J. Math. **21** (1991), 331-357.
- [17] B. Ja. Levin: *Distribution of zeros of entire functions*, Transactions of the American Mathematical Society, Providence, R.I., (1980).
- [18] T.D. Lee and C.N. Yang: *Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions, II, Lattice Gas and Ising Model*, Phys. Rev. **87**, (1952), 410-419 .
- [19] D. Loeffler: *Adventures with polynomials: a criterion for Weil numbers*, (2010), <http://homepages.warwick.ac.uk/~masiao/maths/cubics.pdf>, acessado em 24/04/2013.
- [20] M. Marden: *The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable*, Math. Surveys Vol. 3, Amer. Math. Soc., New York, NY, (1949).
- [21] M. Marden: *Geometry of polynomials*, Mathematical Surveys and Monographs, AMS **3**, Second edition (1966).
- [22] R. Naulin, C. Pabst: *The roots of a polynomial depend continuously on its coefficients*, Rev. Colomb. Mat. **28**, (1994), 35-37.
- [23] G. Pólya, I. Schur: *Über zwei arten von faktorenfolgen in der theorie der algebraischen gleichungen*, J. Reine Angew. Math. **144** (1914), 89-113.
- [24] *G. Pólya: Collected papers, Vol. II: location of zeros*, Mathematicians of our time. **8** (R. P. Boas, ed.), The MIT Press, Cambridge, MA, (1974).
- [25] Q. I. Rahman, G. Schmeisser: *Analytic Theory of Polynomials*, London Math. Soc. Monogr. (N. S.) **26**, Oxford Univ. Press, New York, NY, (2002).
- [26] D. Ruelle: *Characterization of Lee-Yang Polynomials*, Annals of Mathematics, **171**, (2010), 589-603.
- [27] D. Ruelle: *Is our mathematical natural? The case of equilibrium statistical mechanics*, Bull. A.M.S., **19**, (1988), 259-268.
- [28] D. Ruelle: *Statistical Mechanics - Rigorous Results*, World Scientific, Imperial College Press (2007).
- [29] I. Schur: *Zwei Sätze über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln*, J. Reine Angew. Math. **144** (1923), 75-88.

- [30] A.D. Sokal: *The multivariate Tutte polynomial (alias Potts model) for graphs and matroids*, in: Webb, B.S. (ed.) *Surveys in Combinatorics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge (2005).
- [31] S. Star *Universality of Correlations for Random Analytic Functions*, in R. Sims and D. Ueltschi (Eds), *Entropy and the Quantum II*, *Contemporary Mathematics* **552**, AMS, (2011),135-144. <http://arxiv.org/abs/1107.4135>