

**Comportamento Assintótico das Funções de
Correlação para Modelos de Spins e Percolação
de Alcance Misto**

Leandro Martins Cioletti

Março de 2008

Comportamento Assintótico das Funções de Correlação para Modelos de Spins e Percolação de Alcance Misto

Leandro Martins Cioletti

Orientador: Prof. Gastão de Almeida Braga

Tese apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Sumário

1	Introdução	2
2	Modelos de Percolação de alcance misto em \mathbb{Z}^{k+d}	4
2.1	Preliminares	4
2.2	Resultados fundamentais e fase subcrítica	6
2.3	Comportamento assintótico da conectividade	7
2.3.1	Cotas inferiores	7
2.3.2	Cotas Superiores	9
3	Modelos de Spins com interações de alcance misto em \mathbb{Z}^{k+d}	17
3.1	Preliminares	17
3.2	Desigualdades de Correlação para sistemas de spins ferromagnéticos	18
3.3	Comportamento assintótico Intermediário da correlação spin-spin	22
3.3.1	Cotas inferiores	23
3.3.2	Cotas superiores em altas temperaturas	24
3.3.3	Cotas superiores no regime $\chi(\beta) < \infty$	33
4	Apêndice	40
	Referências	41

1 Introdução

Nesta tese de doutorado determinamos o comportamento assintótico, em termos de cotas superiores e inferiores no limite de grandes distâncias, de funções de conectividade e correlação, nos modelos de percolação e spins, respectivamente, em redes hipercúbicas \mathbb{Z}^{k+d} com interações de alcance misto (exponencial na direção \mathbb{Z}^k e polinomial de alcance R na direção \mathbb{Z}^d), na fase subcrítica. Os resultados mais importantes deste trabalho são os Teoremas 2.1, 3.3 e 3.4.

No Capítulo 2 introduzimos, detalhadamente, em \mathbb{Z}^{0+d} (sem interação exponencial e com interação polinomial de alcance infinito) os modelos de percolação de elos independentes em um caso particular de alcance misto. Por meio de cotas inferior e superior, determinamos o comportamento assintótico da conectividade de dois pontos em função da distância entre eles em toda fase subcrítica, sendo esse o conteúdo do Teorema 2.1. Este resultado é uma extensão para \mathbb{Z}^{0+d} ($d > 1$) dos resultados de Aizenman e Newman [1] para $d = 1$. Na prova do teorema nós usamos a desigualdade de Hammersley-Simon-Lieb, veja [2, 3, 4], e a expansão em escalas múltiplas desenvolvidas em [1]. Este capítulo está baseado na referência [5], onde a prova do Teorema 2.1 foi publicada.

No Capítulo 3 introduzimos os sistemas de spins ferromagnéticos com interações de alcance misto e estudamos o comportamento da correlação spin-spin. Neste capítulo são considerados modelos de alcance misto em \mathbb{Z}^{k+d} mais gerais do que os tratados no Capítulo 2. A generalização é feita em dois sentidos, tanto permitimos o alcance R tomar qualquer valor em $\mathbb{N} \cup +\infty$, quanto admitimos decaimento polinomial com correções logarítmicas na direção \mathbb{Z}^d sendo estes mais gerais que aqueles apresentados no Capítulo 2. Este capítulo é baseado no trabalho [6], submetido para publicação.

Sendo mais específico sobre o Capítulo 3, na Subseção 3.3.2, nós desenvolvemos uma teoria de perturbação rigorosa capaz de realizar o estudo mencionado no parágrafo anterior em casos que a interação entre os spins não é necessariamente invariante por translação. A expansão apresentada nesta teoria de perturbação é baseada em propriedades convolutivas das interações, que são vistas como núcleos de operadores integrais e nas desigualdades de correlação G-I, G-II e Simon-Lieb. Provamos a convergência desta expansão no regime de altas temperaturas (β pequeno). Como consequência, das cotas superiores obtidas por esta expansão, podemos concluir a posteriori que a susceptibilidade do modelo é finita ($\chi(\beta) < \infty$) para toda região do parâmetro β onde a expansão é convergente. Em seguida, na Subseção 3.3.3 nós nos restringimos às iterações com invariância translacional e com algumas outras hipóteses adicionais e estendemos os resultados obtidos no regime perturbativo para toda região de β para o qual a susceptibilidade é finita. Para modelos de spins escalares, isto é equivalente a dizer que os resultados são válidos até o inverso da temperatura crítica β_c , a ser definido posteriormente.

Os resultados obtidos no Capítulo 2 são baseados em desigualdades de correlação [2, 3, 4] e nas técnicas de análise em escalas múltiplas que foram introduzidas por Aizenman e Newman em [1] para modelos de percolação de elos de longo alcance uni-dimensionais. A escolha de introduzir inicialmente os modelos de percolação, e estes com um tipo especial de alcance misto, foi feita com intuito de deixar mais claro como fazer funcionar o método de escalas múltiplas tanto no caso em que as interações são mistas quanto quando a rede não é mais uni-dimensional. A teoria de perturbação construída no Capítulo 3 também pode ser aplicada aos modelos de percolação. A opção por apresentá-la no contexto de sistemas de spins esta relacionada a importância de tais sistemas onde as constantes de acoplamento ou interação são não-invariantes por translação. A introdução do parâmetro R no Capítulo 3 trás novidades ao comportamento assintótico das correlações, algo que denotamos por comportamento assintótico intermediário. Este fenômeno é observado quando a distância dos pontos correlacionados é comparado à escala R da interação. Nas preliminares dos capítulos 2 e 3 introduzimos de forma rigorosa os modelos de percolação e de spins, respectivamente. Nas seções que se seguem são discutidos, separadamente em cada um dos capítulos, os resultados relevantes da teoria e o contexto em que estão inseridos os problemas abordados neste trabalho.

Finalizamos esta introdução observando que os resultados obtidos no Capítulo 3 são também válidos para os modelos de percolação e as adaptações podem ser obtidas facilmente uma vez que em ambos os capítulos as técnicas são desenvolvidas via desigualdades de correlação, o que se aplica a ambos os modelos tratados aqui.

2 Modelos de Percolação de alcance misto em \mathbb{Z}^{k+d}

2.1 Preliminares

Nesta seção apresentamos os chamados, modelos de percolação de alcance misto em \mathbb{Z}^{k+d} . A definição geral, de um modelo de percolação de elos envolve basicamente, a definição de um grafo e uma medida sobre as possíveis configurações (no nosso caso de elos) que podemos obter a partir deste grafo. Neste capítulo estudamos modelos de percolação cujo o grafo é dado por $\mathbb{L} = (\mathbb{Z}^{k+d}, \mathbb{B})$, onde cada elemento $u \in \mathbb{Z}^{k+d}$ é da forma $u = (u_0, u_1)$, com $u_0 \in \mathbb{Z}^k$ e $u_1 \in \mathbb{Z}^d$ e o conjunto \mathbb{B} é formado por determinados pares não ordenados (u, v) tais que $u, v \in \mathbb{Z}^{k+d}$ e $u \neq v$. A especificação mais precisa de quem é o conjunto \mathbb{B} é dada mais abaixo.

Os elementos de \mathbb{Z}^{k+d} são chamados de *sítios* ou *vértices*, enquanto que os elementos de \mathbb{B} são chamados de *elos*. A especificação *alcance misto*, está ligada à medida de probabilidade que é definida no conjunto de configurações de elos do grafo citado acima. A medida de probabilidade usual para os modelos de percolação de elos independentes é construída a partir de uma lista de probabilidades, i.e., indicamos individualmente qual a probabilidade de cada elo em \mathbb{B} estar "aberto" ou "fechado" (será definido abaixo).

Neste capítulo estaremos interessados em modelos de alcance misto com decaimento polinomial. De maneira mais precisa, a cada elo $b = (u, v) \in \mathbb{Z}^{k+d} \times \mathbb{Z}^{k+d}$, associamos uma variável aleatória ω_b , independentemente, tomando valores em $\{0, 1\}$ e com distribuição de Bernoulli tal que a probabilidade de $\omega_b = 1$ é dada por

$$p_{uv} = p_{uv}(\beta) \equiv \beta J_{uv}, \quad (1)$$

onde $\beta \in [0, 1]$ e para $\varepsilon > 0$, J_{uv} é dado por

$$J_{uv} = \begin{cases} \frac{2}{1 + \|u_1 - v_1\|^{d+\varepsilon}} & \text{se } u_0 = v_0 \text{ e } u_1 \neq v_1; \\ 1 & \text{se } u_1 = v_1 \text{ e } \|u_0 - v_0\| = 1; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2)$$

Se $\omega_b = 1$ então dizemos que o elo b está *aberto*, caso contrário dizemos que o elo b está *fechado*.

Com a lista de probabilidades dada acima por (1) e (2), a construção da medida de probabilidade segue de forma usual, veja [7]. Tomamos $\Omega \equiv \{0, 1\}^{\mathbb{B}}$, como espaço de medida ou espaço de configurações e consideramos P a medida produto induzida por p_{uv} sobre os cilindros de Ω , onde um cilindro neste contexto é um subconjunto $C \subset \Omega$ que satisfaz a

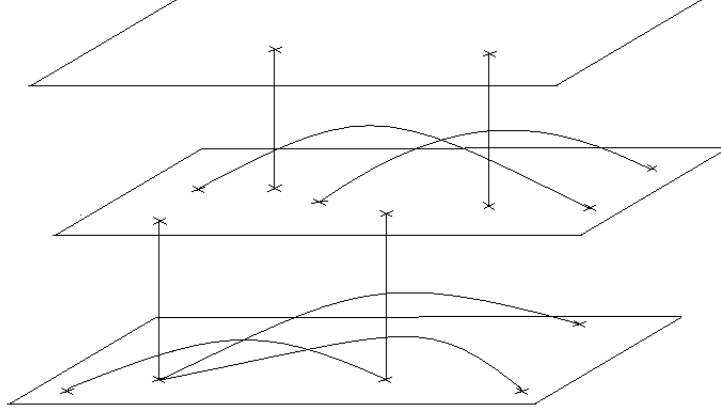


Figura 1: exemplo de configuração em \mathbb{Z}^{1+2} .

seguinte propriedade: existem $n_0 \in \mathbb{N}$, $b_1, \dots, b_{n_0} \in \mathbb{B}$ e $v_1, \dots, v_{n_0} \in \{0, 1\}$ tais que para todo elemento $\omega \in C$ temos $\omega_{b_i} = v_i$ para todo $i = 1, \dots, n_0$.

A seguir daremos algumas definições básicas que são necessárias para a compreensão deste texto. Diremos que γ é um caminho unindo dois *sítios* distintos x e y , se γ é um conjunto de elos formado por uma seqüência finita (b_1, \dots, b_n) , com $b_i = (x_i, x_{i+1}) \in \mathbb{B}$ e $x_1 = x$, $x_{n+1} = y$. Dada uma configuração $\omega \in \Omega$ e um caminho γ , diremos que γ está aberto (na configuração ω) se $\omega_e = 1$ para todo $b_i \in \gamma$. Dada uma configuração ω , diremos que dois pontos $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$, estão no mesmo *aglomerado*, se existe um caminho γ aberto (na configuração ω) unindo estes dois pontos. Diremos que um ponto está conectado ao infinito, se o aglomerado deste ponto for infinito. O *evento* $\{\omega \in \Omega : \text{existe um caminho aberto conectando } x \text{ a } y\}$ será denotado por $\{x \leftrightarrow y\}$ e definimos a função conectividade entre dois pontos $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$ por $\tau_{xy} \equiv P(\{x \leftrightarrow y\})$. Para cada subconjunto $S \subset \mathbb{Z}^{k+d}$, definimos $\tau_{xy}^S \equiv P(\{x \leftrightarrow y \text{ dentro de } S\})$, que é a probabilidade de x estar conectado a y por um caminho cujo os vértices dos elos deste caminho estão todos contido em S . Também necessitaremos da noção de distância nos grafos que estamos trabalhando. Usaremos a distância induzida pela norma L^1 em \mathbb{Z}^{k+d} , i.e., $\|x\| \equiv |x_1| + \dots + |x_{k+d}|$.

Uma grandeza de fundamental importância neste capítulo será a susceptibilidade que é definida por:

$$\chi(\beta) \equiv \sum_{u \in \mathbb{Z}^{k+d}} \tau_{0u}$$

e relacionado a ela, estaremos também interessados em

$$\pi_c \equiv \sup\{\beta \in [0, 1] : \chi(\beta) < \infty\}.$$

Algumas das propriedades deste parâmetro π_c bem como da susceptibilidade são mencionados na próxima seção.

2.2 Resultados fundamentais e fase subcrítica

Vamos recordar alguns fatos sobre percolação de longo alcance definidos por (1) e (2). Seja $\theta(\beta, \varepsilon) \equiv P_{\beta, \varepsilon}(\{0 \leftrightarrow \infty\})$, a probabilidade da origem estar num aglomerado infinito. Se $k + d \geq 2$ é a dimensão do espaço então, por comparação com o modelo de percolação de primeiros vizinhos e para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\beta_c = \beta_c(d, \varepsilon)$, tal que $\theta(\beta, \varepsilon) = 0$ se $\beta < \beta_c$ e $\theta(\beta, \varepsilon) > 0$ se $\beta > \beta_c$.

Para $k = 0$ e $d = 1$ é conhecido que a existência de β_c depende de ε . Se $\varepsilon > 1$, o sistema possui pelo menos um aglomerado infinito com probabilidade positiva independentemente da escolha do parâmetro β . E portanto dizemos que este sistema não exhibe transição de fase em termos da função $\theta(\beta, \varepsilon)$, veja [8]. Já no caso $0 \leq \varepsilon \leq 1$, existe um β_c como descrito no paragrafo anterior. Assim estes sistemas apresentam transição de fase com respeito a $\theta(\beta, \varepsilon)$, veja [9].

A transição de fase pode ser medida em termos da susceptibilidade $\chi(\beta)$. Usando a desigualdade de FKG (4), podemos verificar facilmente que $\pi_c(d, \varepsilon) \leq \beta_c(d, \varepsilon)$. Para a classe de modelos que estamos trabalhando podemos provar, na verdade que vale a igualdade. Este importante fato foi demonstrado independentemente por Aizenman e Barsky em [10] e por Menshikov [11].

Nos sistemas que exibem transição de fase, como os que são estudados aqui, é comum separarmos o espaço de parâmetros β em três subconjuntos, o primeiro dado por $\beta < \beta_c$, que chamamos de fase subcrítica. Em seguida $\beta = \beta_c$ que é chamado de ponto crítico e por último o que compreende os valores maiores que β_c , que é chamado de fase supercrítica.

Para os sistemas que abordamos neste trabalho, com $k + d \geq 2$, o estudo do comportamento assintótico da função de conectividade τ_{xy} é feito por técnicas completamente distintas em cada uma destas três fases:

- 1) Na fase supercrítica a função τ_{xy} não decai como função dos pontos x e y , veja [7]. Isto é basicamente justificado pela existência de um único aglomerado infinito quase certamente;
- 2) Na fase crítica, i.e., no ponto crítico, o comportamento assintótico da função τ_{xy} , pelo menos para dimensões altas, foi obtido via *expansão em laços*, maiores detalhes veja [12]. É importante mencionar também que neste trabalho, é feita a prova, em dimensões altas, da conjectura mais famosa para percolação de elos independentes;
- 3) Na fase subcrítica, o estudo do decaimento da função conectividade é bastante amplo envolve separadamente os sistemas de percolação de, curto alcance, longo alcance e alcance misto. A literatura sobre este assunto é bastante extensa. No contexto de percolação de longo alcance, podemos destacar o trabalho de Aizenman e Newman [1] que obtêm, através de técnicas de escalas múltiplas, o comportamento assintótico das conectividades, como função da distância, para modelos uni-dimensionais de longo alcance, até o ponto crítico. No caso de curto alcance os resultados podem ser encontrados em [7] e em suas referências. O

estudo em dimensões maiores ou iguais a um é feito em [5] para modelos com alcance misto e os resultados são objeto da seguinte seção.

2.3 Comportamento assintótico da conectividade

Nesta seção enunciamos o principal resultado deste capítulo, o Teorema 2.1. Este teorema nos dá informação sobre o comportamento assintótico da função conectividade em modelos de alcance misto em toda a fase subcrítica.

Teorema 2.1. *Suponha que $\beta < \beta_c$ e considere o modelo de percolação de longo alcance com p_{uv} dado por (1) e J_{uv} dado por (2). Então existem constantes positivas C_1, C_2, m_1 e m_2 que dependem de β tais que*

$$\frac{C_1 e^{-m_1 \|x_0 - y_0\|}}{1 + \|x_1 - y_1\|^{d+\varepsilon}} \leq \tau_{xy} \leq \frac{C_2 e^{-m_2 \|x_0 - y_0\|}}{1 + \|x_1 - y_1\|^{d+\varepsilon}} \quad (3)$$

para todo $x, y \in Z^{k+d}$.

O teorema acima nos diz, em certo sentido, que a probabilidade p_{uv} dita o comportamento assintótico da função conectividade em toda a fase subcrítica.

A prova deste resultado será dividida em duas partes: 1) primeiro mostramos como obter a cota inferior afirmada em (3). Na verdade este resultado é facilmente obtido pela desigualdade de FKG (4) em toda a fase subcrítica e sua prova será incluída porque as ideias envolvidas na sua demonstração serão usadas no Capítulo 3.

Em seguida apresentamos a prova da cota superior. Para a prova desta cota, precisamos lançar mão de outros tipos de desigualdades de correlação. A mais importante delas é a desigualdade de Hammersley-Simon-Lieb, veja [2, 3, 4]. Nesta parte da prova é mostrado como adaptar o argumento de escalas múltiplas introduzido por Aizenman e Newman, para modelos uni-dimensionais, aos modelos de alcance misto em quaisquer dimensões.

2.3.1 Cotas inferiores

Como mencionado anteriormente, a desigualdade de FKG é a principal ferramenta para obtenção da cota inferior do Teorema 2.1. No que segue apresentamos todos elementos para que possamos enunciar precisamente esta desigualdade. A prova desta desigualdade pode ser encontrada, por exemplo, em [7]. Em seguida passamos para a demonstração da cota inferior do Teorema 2.1.

Desigualdade de FKG

Considere o espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , onde $\Omega \equiv \{0, 1\}^{\mathbb{B}}$, \mathcal{F} é a σ -álgebra gerada pelos cilindros e P a medida produto obtida à partir das probabilidades p_{uv} sobre os cilindros. Usaremos a notação I_E , para indicar a função característica de um conjunto $E \in \mathcal{F}$. Para podermos enunciar de forma precisa o teorema da desigualdade de FKG, vamos precisar introduzir uma ordem parcial no conjunto Ω das configurações. Esta ordem parcial é definida da seguinte maneira: dados $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, diremos que $\omega_1 \leq \omega_2$, se $\omega_1(b) \leq \omega_2(b)$ para todo $b \in \mathbb{B}$. Diremos que um *evento* $E \in \mathcal{F}$ é crescente se $I_E(\omega) \leq I_E(\omega')$ sempre que $\omega \leq \omega'$. Por outro lado, diremos que E é um evento decrescente se seu complementar, E^c , é um evento crescente. De maneira mais geral, uma *variável aleatória* $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, num espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) é dita crescente se $f(\omega) \leq f(\omega')$ sempre que $\omega \leq \omega'$.

Teorema 2.2 (Desigualdade de FKG). *Se f, g são variáveis aleatórias crescentes tais que $\int f^2 dP < \infty$ e $\int g^2 dP < \infty$, então*

$$\int f dP \int g dP \leq \int fg dP. \quad (4)$$

Para a prova desta desigualdade veja [7].

Obs: Uma conseqüência imediata e importante deste resultado é que se A e B são eventos crescentes, então

$$P(A) P(B) \leq P(A \cap B). \quad (5)$$

Agora que estamos de posse da desigualdade de FKG, podemos apresentar a prova da cota inferior de (3).

Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$ pontos distintos. Considere $u \equiv (x_0, y_1) \in \mathbb{Z}^{k+d}$ e γ qualquer caminho de comprimento mínimo, de elos de primeiros vizinhos conectando u a y , veja Figura 2.

Considere os eventos $A = \{\text{O elo } (x, u) \text{ está aberto}\}$ e $B = \{\gamma \text{ está aberto}\}$.

É fato que $A \cap B \subset \{x \leftrightarrow y\}$ e, já que A e B são eventos crescentes, podemos, após tomar probabilidades destes eventos, usar a desigualdade de FKG para concluir que

$$P(A) P(B) \leq P(A \cap B) \leq P(\{x \leftrightarrow y\}) = \tau_{xy}.$$

Usando as definições (1) e (2), podemos calcular explicitamente $P(A)$ e $P(B)$. Donde concluímos que

$$\frac{C_1 e^{-m_1 \|x_0 - y_0\|}}{1 + \|x_1 - y_1\|^{d+\varepsilon}} \leq \tau_{xy}, \quad (6)$$

onde $-m_1 = \log \beta$ e $C_1 = 2$. □

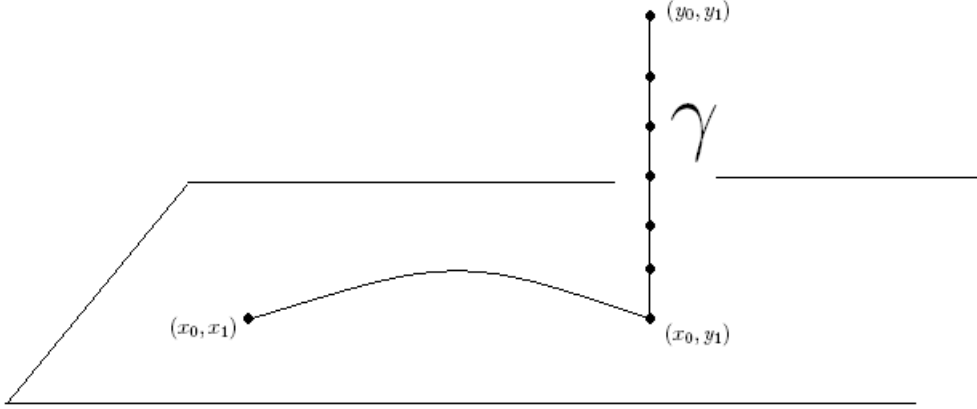


Figura 2: sistema uni-dimensional.

2.3.2 Cotas Superiores

Esta é a parte mais delicada da prova do Teorema 2.1. Desenvolveremos esta seção na seguinte sequência: 1) Iniciamos com a introdução dos elementos necessários para a compreensão do enunciado da desigualdade de Van den Berge e Kesten conhecida como desigualdade de BK; 2) e em seguida usamos esta desigualdade para apresentarmos uma prova, simples e curta, da desigualdade de Hammersley-Simon-Lieb. Optamos por provar H-S-L neste trabalho, pelo menos para o modelo de percolação, por que ela é na verdade o pilar para construção do método de escalas múltiplas, já mencionadas anteriormente, e também da teoria de perturbação que é construída no capítulo seguinte para modelos de spins em altas temperaturas.

Desigualdade de BK

Sejam n um inteiro positivo, $\Gamma = \{0, 1\}^n$, \mathcal{G} o conjunto de todos os subconjuntos de Γ e P a medida produto em (Γ, \mathcal{G}) determinada por densidades $p(i)$, i.e.,

$$P = \prod_{i=1}^n \mu_i$$

onde $\mu_i(\{0\}) = 1 - p(i)$ e $\mu_i(\{1\}) = p(i)$.

Dados $\omega \in \Gamma$ e $S \subset \{1, \dots, n\}$, usaremos a notação

$$[\omega]_S \equiv \{\tilde{\omega} \in \Gamma : \tilde{\omega}_i = \omega_i \forall i \in S\}$$

para designar o cilindro determinado por ω e S . Para $E_1, E_2 \in \mathcal{G}$, definimos o evento *ocorrência disjunta* de E_1 e E_2 , denotado por $E_1 \circ E_2$, como

$$E_1 \circ E_2 = \{\omega : \text{existe } S = S(\omega) \subset \{1, \dots, n\}, [\omega]_S \subset E_1 \text{ e } [\omega]_{S^c} \subset E_2\}$$

Para maiores detalhes e prova do teorema enunciado abaixo, veja [7] e referências contidas.

Teorema 2.3 (Desigualdade de BK). *Se E_1 e E_2 são eventos crescentes em \mathcal{G} , então*

$$P(E_1 \circ E_2) \leq P(E_1)P(E_2). \quad (7)$$

Observações: A desigualdade, como enunciada acima pede que o espaço amostral Γ seja composto de um número finito de cópias do conjunto $\{0, 1\}$. Portanto não poderia ser diretamente aplicada aos modelos de percolação de alcance misto que estamos tratando neste trabalho. Porém podemos mostrar que é possível obter a desigualdade de BK para a medida de probabilidade dos modelos de percolação de elos independentes de alcance misto, se restringirmos os *eventos* E_1 e E_2 à uma certa classe de eventos na σ -álgebra gerada pelos cilindros. Em particular esta desigualdade é verdadeira para os eventos que aparecem na prova da desigualdade de Hammersley-Simon-Lieb, para maiores detalhes veja [7]. Note que a operação de ocorrência disjunta é uma operação associativa e, portanto, procedendo uma indução formal sobre o número de conjuntos, podemos generalizar a desigualdade de BK para qualquer número finito de eventos crescentes. Este fato será usado na prova de H-S-L.

Teorema 2.4 (Desigualdade de Hammersley-Simon-Lieb). *Dados $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$ e $B \subset \mathbb{Z}^{k+d}$ tais que $x \in B$ e $y \in B^c$ então*

$$\tau_{xy} \leq \sum_{\substack{u \in B \\ v \in B^c}} \tau_{xu}^B p_{uv} \tau_{vy}. \quad (8)$$

Prova: Dados $x, y \in \mathbb{Z}^d$, considere uma configuração $\omega \in \{x \leftrightarrow y\}$. Então sabemos que existe um caminho aberto em ω conectando x a y . Vamos denotar este caminho por γ e nomear seus elos como segue abaixo:

$$\gamma = \{(x, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, y)\}.$$

Para a configuração ω tomada acima e para o caminho γ , definimos o número

$$k \equiv \min\{i ; (x_i, x_{i+1}) \in \gamma, x_i \in B \text{ e } x_{i+1} \in B^c\}$$

que é exatamente a primeira saída do caminho γ do conjunto separador B , veja Figura 3. Continuamos o argumento pondo $u = x_k$ e $v = x_{k+1}$. Pela definição de k temos

$$\omega \in \{x \leftrightarrow u \text{ dentro de } B\} \circ \{(u, v) \text{ está aberto}\} \circ \{v \leftrightarrow y\}.$$

Observe agora que para qualquer ω dado em $\{x \leftrightarrow y\}$ a construção acima nos permite sempre encontrar u e v , que claramente dependerão de ω de forma que a relação de pertinência mostrada acima seja verdadeira. Portanto temos

$$\{x \leftrightarrow y\} \subset \bigcup_{\substack{u \in B \\ v \in B^c}} \{x \leftrightarrow u \text{ dentro de } B\} \circ \{(u, v) \text{ está aberto}\} \circ \{v \leftrightarrow y\}. \quad (9)$$

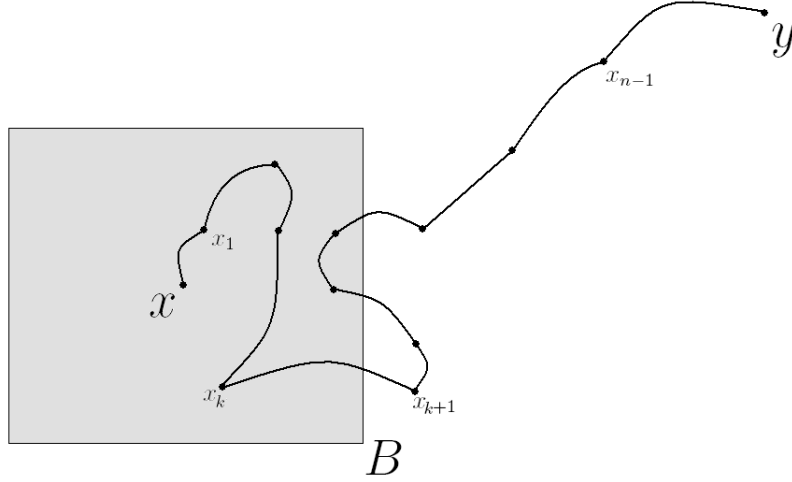


Figura 3: Os pontos x_k e x_{k+1} .

Tomando a probabilidade em (9) e usando a desigualdade de BK, concluímos a prova do teorema. \square

A seguir desenvolvemos o argumento que prova a cota superior em (3). Primeiro podemos verificar que a susceptibilidade, χ , pode ser escrita como

$$\chi = \sum_{n \geq 0} \sum_{\|x_0\|=n} \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}^d} \tau_{0x}.$$

Aqui usamos apenas a notação $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{Z}^{k+d}$ e que τ_{0x} é não negativo para podermos reordenar a soma.

Por hipótese, $\chi < \infty$. Assim, dado $\lambda \in (0, 1)$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, temos

$$\sum_{\|x_0\|=n} \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}^d} \tau_{0x} < \lambda.$$

Vamos fixar atenção na soma

$$\sum_{x_1 \in \mathbb{Z}^d} \tau_{0x},$$

para algum valor fixado de $\|x_0\| > n_0$. Neste caso, para cada um dos termos desta soma, podemos aplicar a desigualdade de Hammersley-Simon-Lieb, com $B = \{x \in \mathbb{Z}^{k+d} : \|x_0\| \leq n_0\}$ (veja Figura 4) e obtemos, pela definição (1) de p_{uv} , a seguinte desigualdade

$$\tau_{0x} \leq \sum_{\substack{\|u\|=n_0 \\ v \in B^c: \|v_0 - u_0\|=1, u_1=v_1}} \tau_{0u} p_{uv} \tau_{vx}.$$

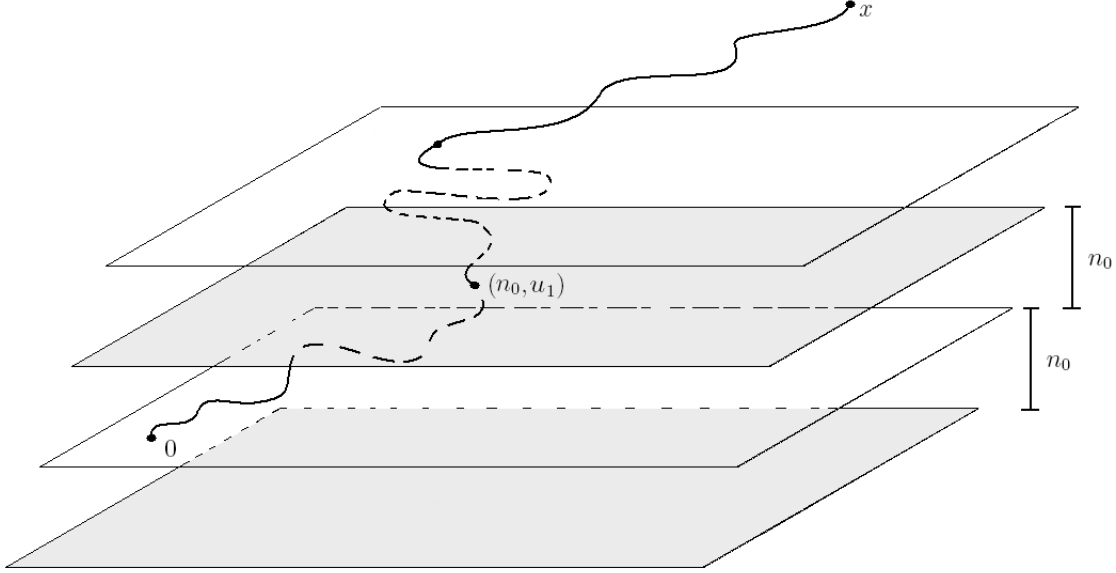


Figura 4: cilindro horizontal.

Já que $\|v_0 - u_0\| = 1$ e $u_1 = v_1$ temos $p_{uv} = \beta$ em todos os termos da soma acima. Usando a invariância translacional deste modelo e que $\chi < \infty$, podemos afirmar que $\tau_{0x} \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$ e portanto que existe um ponto $\bar{v} \in \mathbb{Z}^{k+d}$, com $\|v_0\| = n_0 + 1$ tal que a desigualdade $\tau_{vx} \leq \tau_{\bar{v}x}$ é válida em todas as parcelas da soma acima. Destas observações segue que

$$\begin{aligned} \tau_{0x} &\leq \beta \tau_{\bar{v}x} \sum_{\|u\|=n_0} \tau_{ou} \\ &\leq \beta \lambda \tau_{\bar{v}x}. \end{aligned}$$

Observe que a desigualdade acima pode ser iterada $\lfloor \|x_0\|/(n_0+1) \rfloor$ vezes, onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota o menor inteiro maior ou igual ao argumento. Feito isto, obtemos

$$\tau_{0x} \leq (\beta \lambda)^{\lfloor \|x_0\|/(n_0+1) \rfloor} \tau_{v^*x}$$

para algum $v^* \in \mathbb{Z}^{k+d}$. Agora, somando sobre $x_1 \in \mathbb{Z}^d$ em ambos membros da desigualdade acima obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}^d} \tau_{0x} &\leq \chi (\beta \lambda)^{\lfloor \|x_0\|/(n_0+1) \rfloor} \\ &= \chi e^{-m \|x_0\|}, \end{aligned}$$

com $e^{-m} = (\beta \lambda)^{1/(n_0+1)}$. Isto mostra que as parcelas da susceptibilidade decaem exponencialmente na “direção temporal”.

No que segue, mudamos o foco do estudo da conectividade τ_{xy} , para uma nova função

que denotaremos por $T_{m'}(x, y)$. O papel dos parâmetros bem como sua definição são estabelecidos logo abaixo. A introdução desta nova função, pode ser encarada como uma maneira de projetarmos um sistema misto em um sistema de longo alcance. Além disto, esta simples idéia irá nos permitir estender a análise em escalas múltiplas, conhecida anteriormente para sistemas de longo alcance com decaimento polinomial, para os sistemas de alcance misto.

Seja δ positivo tal que $\delta < m$ e defina $m' = m - \delta$. Mostraremos agora uma desigualdade do tipo Hammersley-Simon-Lieb para a função conectividade modificada $T_{m'}(x, y) \equiv e^{m'\|x_0-y_0\|}\tau_{xy}$, para B dado por $B = C_L(x) \equiv \{z \in \mathbb{Z}^{k+d} : \|x_1 - y_1\| \leq L\}$.

Para $L > 1$ e $y \in C_L^c(x)$, temos da desigualdade de Hammersley-Simon-Lieb que

$$\tau_{xy} \leq \sum_{\substack{u \in C_L(x) \\ v \in C_L^c(x)}} \tau_{xu} p_{uv} \tau_{vy}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} T_{m'}(x, y) &= e^{m'\|x_0-y_0\|}\tau_{xy} \\ &\leq e^{m'\|x_0-y_0\|} \sum_{\substack{u \in C_L(x) \\ v \in C_L^c(x)}} \tau_{xu} p_{uv} \tau_{vy} \\ &\leq \sum_{\substack{u \in C_L(x) \\ v \in C_L^c(x)}} e^{m'\|x_0-u_0\|}\tau_{xu} p_{uv} e^{m'\|y_0-v_0\|}\tau_{vy}, \end{aligned}$$

onde, na primeira desigualdade usamos Hammersley-Simon-Lieb e na segunda desigualdade usamos a definição de p_{uv} para concluir que para todas as parcelas não nulas que aparecem no lado direito da desigualdade, temos necessariamente $u_0 = v_0$. Da última desigualdade e da definição de $T_{m'}$, segue imediatamente que

$$T_{m'}(x, y) \leq \sum_{\substack{u \in C_L(x) \\ v \in C_L^c(x)}} T_{m'}(x, u) p_{uv} T_{m'}(v, y).$$

Em analogia com a conectividade modificada, introduzimos também a susceptibilidade modificada

$$\chi_{m'} \equiv \sum_{x \in \mathbb{Z}^{k+d}} T_{m'}(0, x).$$

Esta função, como mostramos abaixo, é finita para todo β tal que a susceptibilidade,

$\chi(\beta)$, é finita. De fato, para $\beta < \beta_c$

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \mathbb{Z}^{k+d}} T_{m'}(0, x) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^{k+d}} e^{m' \|x_0\|} \tau_{0x} \\
&\leq \sum_{k \geq 0} \sum_{\|x_0\|=k} e^{m' \|x_0\|} \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}^d} \tau_{0x} \\
&\leq \sum_{k \geq 0} 2d k^{d-1} e^{m' k} e^{-m k} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Esta propriedade da susceptibilidade modificada será usada, para provar que a função $T_{m'}(x, y)$ apresenta decaimento polinomial na direção \mathbb{Z}^d em função da distância de x_1 a y_1 até o ponto crítico. A partir de agora nosso argumento segue de perto as idéias introduzidas na seção 3 de [1]. Fixados $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$ e $L \equiv \|x_1 - y_1\|/4$, já mostramos que vale a seguinte desigualdade

$$T_{m'}(x, y) \leq \sum_{\substack{u \in C_L^c(x) \\ v \in C_L^c(x)}} T_{m'}(x, u) p_{uv} T_{m'}(v, y).$$

Agora, decompos a soma em v , do lado direito da desigualdade acima, em dois somatórios e através das grandezas que definiremos logo abaixo, cotamos cada uma das destas somas separadamente:

$$\sum_{\substack{u \in C_L^c(x) \\ v \in C_L^c(x) \cap C_{3L}^c(x)}} T_{m'}(x, u) p_{uv} T_{m'}(v, y) + \sum_{\substack{u \in C_L^c(x) \\ v \in C_L^c(x) \cap C_{3L}^c(x)}} T_{m'}(x, u) p_{uv} T_{m'}(v, y). \quad (10)$$

A idéia que esta por trás desta decomposição é agrupar os termos em que u e v estão distantes, no máximo, um múltiplo fixo da escala L e usar a hipótese que $\chi_{m'} < \infty$ para obtermos cotas superiores que serão dependentes de $T_{m'}$ e que vão para zero quando L vai para infinito. Nos demais termos usamos a finitude de $\chi_{m'}$ e as propriedades de p_{uv} para as parcelas remanescentes. Nas figuras abaixo representamos graficamente os termos gerais da primeira e segunda parcela, respectivamente, de (10).

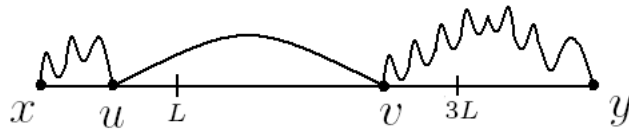


Figura 5: uma representação gráfica do primeiro somatório de (10).

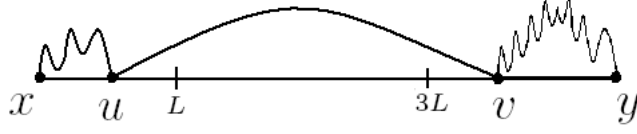


Figura 6: uma representação gráfica do segundo somatório de (10).

Definindo

$$\mathbb{T}_{m'}(L) \equiv \sup\{T_{m'}(0, u) : u \in C_L^c(0)\} \quad \text{e} \quad \gamma_L \equiv \sum_{\substack{u \in C_L^c(x) \\ v \in C_L^c(x)}} T_{m'}(x, u) p_{uv},$$

o primeiro termo do lado direito de (10) pode ser cotado por $\mathbb{T}_{m'}(L/2)\gamma_L$ enquanto o segundo é limitado por

$$\frac{2^{d+\varepsilon} 2\beta\chi_{m'}^2}{1 + \|x_1 - y_1\|^{d+\varepsilon}},$$

o que nos fornece a cota

$$T_{m'}(x, y) \leq \frac{2^{d+\varepsilon} 2\beta\chi_{m'}^2}{1 + \|x_1 - y_1\|^{d+\varepsilon}} + \gamma_L \mathbb{T}_{m'}(L/2).$$

Usando que $\chi_{m'} < \infty$, para $\beta < \beta_c$ e que $\sum_u p_{0u} < \infty$, podemos afirmar que

$$\sum_{u, v \in \mathbb{Z}^{k+d}} T_{m'}(x, u) p_{uv} < \infty.$$

Por outro lado, segue da definição de γ_L que

$$\gamma_L \leq \sum_{u, v \in \mathbb{Z}^{k+d}} T_{m'}(x, u) p_{uv} I_{C_L(x)}(u) I_{C_L^c(x)}(v),$$

donde concluimos, depois de usar o teorema da convergência dominada de Lebesgue (ver apêndice), que $\gamma_L \rightarrow 0$ quando $L \rightarrow \infty$.

Para $\alpha \in (0, 2^{-(d+\varepsilon)})$, existe um $L_0 > 0$, tal que $\gamma_L < \alpha$ para todo $L \geq L_0$. Considerando então $L > L_0$ segue que

$$\mathbb{T}_{m'}(L) \leq \frac{2^{d+\varepsilon} 2\beta\chi_{m'}^2}{1 + \|x_1 - y_1\|^{d+\varepsilon}} + \alpha \mathbb{T}_{m'}(L/2). \quad (11)$$

Iterando (11) n vezes, com n sendo o menor inteiro para o qual $L2^{-n} \leq L_0$, obtemos para todo $L > L_0$

$$\mathbb{T}_{m'}(L) \leq \frac{2\beta\chi_{m'}^2 \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha 2^{d+\varepsilon})^j}{1 + \|x_1 - y_1\|^{d+\varepsilon}} + \alpha^n \mathbb{T}_{m'}(L/2^n).$$

Notando que $T_{m'}(x, y) \leq \mathbb{T}_{m'}(L)$, $\mathbb{T}_{m'}(L') \leq \chi_{m'}$, para qualquer $L' > 0$ e que

$$\alpha^n \leq 2^{-(d+\varepsilon)n} = \frac{1}{1+L^{d+\varepsilon}} \frac{(1+L^{d+\varepsilon})}{2^{(d+\varepsilon)n}} \leq \frac{2 \cdot 2^{d+\varepsilon}}{1 + \|x_1 - y_1\|^{d+\varepsilon}} \left(\frac{L}{2^n} \right) \leq \frac{2(2L_0)^{d+\varepsilon}}{1 + \|x_1 - y_1\|^{d+\varepsilon}},$$

podemos concluir que, para $\beta < \beta_c$ e $C_2 = 2\chi_{m'}(\beta\chi_{m'} \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha 2^{d+\varepsilon})^j + (2L_0)^{d+\varepsilon})$ que

$$\tau_{xy} \leq \frac{C_2 e^{-m'\|x_0-y_0\|}}{1 + \|x_1 - y_1\|^{d+\varepsilon}}$$

vale para qualquer $m' = m - \delta$. Finalmente, já que δ pode ser tomado arbitrariamente pequeno, está completa a prova do Teorema 2.1.

□

3 Modelos de Spins com interações de alcance misto em \mathbb{Z}^{k+d}

3.1 Preliminares

Nesta seção vamos considerar modelos de Mecânica Estatística do equilíbrio com Hamiltonianos dados por:

$$H_\Lambda(\{\vec{\sigma}\}) = - \sum_{u,v \in \Lambda} J_{uv}^R \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v, \quad (12)$$

onde $u = (u_0, u_1) \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^{k+d}$ e $\vec{\sigma}_u = (\sigma_u^{(1)}, \sigma_u^{(2)}, \dots, \sigma_u^{(N)}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ é uma variável aleatória, chamada de *spin*. Associamos também a esta variável uma distribuição de probabilidade, comumente chamada de distribuição *a priori*. Usaremos a notação $d\mu(\vec{\sigma}_u)$ para nos referir a distribuição *a priori* no sítio u . As constantes J_{uv}^R , são chamadas de *constantes de acoplamento* ou também *interação*. Neste trabalho estaremos interessados apenas no caso em que as *constantes de acoplamento* são não negativas. Neste caso, dizemos que a interação é *ferromagnética*. Os modelos que denominamos *ferromagnéticos de alcance misto* são definidos por interações da forma:

$$J_{uv}^R = \begin{cases} K_{u_1 v_1} & \text{se } u_0 = v_0 \text{ e } \|u_1 - v_1\| < R; \\ 1 & \text{se } u_1 = v_1 \text{ e } \|u_0 - v_0\| = 1; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (13)$$

Em (13), consideraremos sempre que as constantes $K_{u_1 v_1}$ estão bem definidas para todos $u_1, v_1 \in \mathbb{Z}^d$. O parâmetro R que aparece na definição acima é chamado *alcance* da interação. Permitiremos que $1 \leq R \leq \infty$, embora nosso principal interesse, neste capítulo, seja em valores finitos do parâmetro R , porém arbitrariamente grandes.

Observação: Agora as interações que definem os modelos de alcance misto são mais gerais do que as apresentadas no capítulo anterior. Além da introdução do alcance R , agora as interações, na direção *espacial*, i.e., as constantes de acoplamento $K_{u_1 v_1}$ não são necessariamente da forma $K_{u_1 v_1} = 2/(1 + \|u_1 - v_1\|^{d+\varepsilon})$.

Dados o Hamiltoniano (12) e o inverso da temperatura β , assumiremos que a medida *a priori*, em cada sítio $u \in \mathbb{Z}^{k+d}$, $d\mu(\vec{\sigma}_u)$ é tal que

$$\int_{\Omega^{|\Lambda|}} \left| \prod_{k=1}^N \prod_{i \in A} (\sigma_i^{(k)})^{a_i} \right| e^{-\beta H_\Lambda(\{\vec{\sigma}\})} \prod_{i \in \Lambda} d\mu(\vec{\sigma}_i) < \infty \quad (14)$$

para qualquer escolha dos expoentes $a_i \in \mathbb{N}$ e para qualquer $A \subset \Lambda$. A notação $|\Lambda|$ denota a cardinalidade do conjunto Λ . *Valores esperados* são definidos como de maneira usual

em mecânica estatística

$$\langle f(\{\vec{\sigma}\}) \rangle_\Lambda = \frac{\int_{\Omega^{|\Lambda|}} f(\{\vec{\sigma}\}) e^{-\beta H_\Lambda(\{\vec{\sigma}\})} \prod_{i \in \Lambda} d\mu(\vec{\sigma}_i)}{\int_{\Omega^{|\Lambda|}} e^{-\beta H_\Lambda(\{\vec{\sigma}\})} \prod_{i \in \Lambda} d\mu(\vec{\sigma}_i)}, \quad (15)$$

assumiremos a existência do *limite termodinâmico*

$$\langle f(\{\vec{\sigma}\}) \rangle \equiv \lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} \langle f(\{\vec{\sigma}\}) \rangle_\Lambda \quad (16)$$

para funções contínuas f suportadas em subconjuntos finitos $A \subset \mathbb{Z}^d$. Diremos que $\langle \cdot \rangle$ é o estado de Gibbs associado ao Hamiltoniano (12) a temperatura $1/\beta$ com condições de fronteira livre.

3.2 Desigualdades de Correlação para sistemas de spins ferromagnéticos

Neste capítulo, temos dois objetivos: primeiro apresentamos, para uma grande classe de modelos de *spins* vetorial tomando valores em \mathbb{R}^N (os valores de N serão especificados mais tarde) com *interações ferromagnéticas*, uma teoria de perturbação convergente para valores pequenos de β , que nos fornece o comportamento assintótico intermediário da correlação *spin-spin* $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle$, como função de $\|x - y\|$; Em seguida estendemos os resultados perturbativos, os quais são válidos para pequenos valores de β , à todos os valores de β para os quais $\chi(\beta)$, a *susceptibilidade* do modelo, é finita. Ambos os resultados são baseados em desigualdades de correlação e para modelos escalares ($N=1$), a condição $\chi(\beta) < \infty$ significa que os resultados são válidos até o ponto crítico, veja [13].

O que estamos denotando por comportamento assintótico intermediário neste texto, é o comportamento da função $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle$ quando o comprimento $\|x - y\|$ é comparável com R . Para um sistema em um volume finito Λ e J^R da forma (13), tudo resume-se a considerar $\|x_1 - y_1\|$, a distância entre x e y na direção \mathbb{Z}^d , quando $\|x_1 - y_1\| \ll R \ll |\Lambda|^{1/d}$ ou quando $R \ll \|x_1 - y_1\| < |\Lambda|^{1/d}$. Para as medidas a priori $d\mu(\vec{\sigma})$ para os quais são válidas as desigualdades de correlação, nosso objetivo é encontrar uma classe de interações ferromagnéticas J^R tal que, pelo menos para valores pequenos de β , a correlação spin-spin se comporte assintoticamente como a interação, i.e.

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle_\Lambda \approx \begin{cases} CK_{x_1 y_1} e^{-m\|x_0 - y_0\|} & \text{se } \|x_1 - y_1\| \ll R \ll |\Lambda|^{1/d}, \\ \tilde{C} e^{-\tilde{m}\|x - y\|} & \text{se } R \ll \|x_1 - y_1\| < |\Lambda|^{1/d}, \end{cases} \quad (17)$$

$$\tilde{C} e^{-\tilde{m}\|x - y\|} \quad \text{se } R \ll \|x_1 - y_1\| < |\Lambda|^{1/d}, \quad (18)$$

para algumas constantes C, \tilde{C} e m , uniformemente em Λ . Em particular, esperamos que as cotas acima sejam válidas também quando $|\Lambda| \rightarrow \infty$ e, possivelmente, quando $R \rightarrow \infty$. É importante ressaltar, que $K_{x_1 y_1}$ pode ter um decaimento mais do geral do que polinomial.

Se $R \gg |\Lambda|^{1/d}$ então não existe comportamento intermediário já que, neste caso, o sistema é essencialmente de longo alcance. Dentro do contexto de mecânica estatística de interações de longo alcance, a questão se as correlações se comportam como a interação ou não já é uma questão antiga. Para modelos de gases na rede, no regime de baixa atividade, foi provado em [14] que potenciais invariantes por translação que decaem exponencialmente (polinomialmente) levam ao decaimento das correlações exponencial (polinomial), o mesmo também sendo válido para sistemas de spins clássicos ($N=1$), em altas temperaturas. Veja [15, 16] para spins limitados e ilimitados, respectivamente. Os efeitos de condições de contorno e ou campo magnético externo na taxa de decaimento das correlações para modelos escalares $N = 1$ é estudado em [17] e os resultados sobre a taxa de decaimento das correlações são recuperados, no regime de altas temperaturas, para o caso polinomial. Interações mistas como as que consideramos neste trabalho, veja (13), foram levadas em conta em [18], no estudo de correlações em modelos de cristais quânticos e a cota superior (17), com $R = \infty$ e

$$K_{u_1 v_1} = \frac{2}{1 + \|u_1 - v_1\|^{d+\varepsilon}}, \quad \text{com } \varepsilon > 0, \quad (19)$$

foram obtidas no regime perturbativo, entre outros resultados. Interações mistas foram também estudadas em [5], onde o método de análise em múltiplas escalas de Aizenan e Newman [1] foi adaptado para determinar o comportamento assintótico da conectividade até o ponto crítico, para a percolação de elos independentes d -dimensional. O caso de spins em redes unidimensionais, \mathbb{Z}^{0+1} , foi considerado em [19], com $N = 1, \dots, 4$ e com K dado por (19), e a cota superior (17) foi obtida na fase desordenada.

Para modelos de spins na rede as cotas superiores similares às obtidas no Teorema 2.1 eram conhecidas no regime de altas temperaturas, veja referência [15] para spins limitados e a referência [16] para modelos de spins ilimitados discretos. Um problema importante era determinar se a conectividade tinha decaimento dado pela mesma taxa das constantes de acoplamento no caso de interações de longo alcance. No caso ilimitado e contínuo, alguns dos resultados de [15, 16] foram estendidos em [17] com J_{uv} dado por (1) e $u, v \in \mathbb{Z}^{0+d}$, enquanto que em [18] são considerados modelos de decaimento misto mais gerais. Em ambos os casos a expansão em polímeros (veja [22] e referências contidas) é usada e os resultados são garantidos apenas no regime perturbativo. Em [19] é provado que para modelos de spins $O(N)$ em redes uni-dimensionais, com $1 \leq N \leq 4$, que o decaimento das correlações é ditado pela interação para todo β , tal que $\chi(\beta) < \infty$. Embora fosse esperado que estes resultados também fossem válidos em redes d -dimensionais, não era claro como prová-lo para toda a fase subcrítica ($\beta < \beta_c$).

Para $R \geq 1$, definimos

$$\|K^R\| \equiv \max\left\{ \sup_{u_1 \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\{v_1 \in \mathbb{Z}^d: \|v_1 - u_1\| < R\}} K_{u_1 v_1}, \sup_{v_1 \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\{u_1 \in \mathbb{Z}^d: \|u_1 - v_1\| < R\}} K_{u_1 v_1} \right\},$$

$\|J^R\| \equiv 2k + \|K^R\|$ e $\|J\| \equiv \sup_R \|J^R\|$. Quando $K_{u_1 v_1}$ é invariante por translação, as quantidades definidas acima se reduzem a norma L_1 usual. Vamos assumir por enquanto apenas que $\|J^R\| < \infty$ e mais tarde nos restringiremos adequadamente à classe de interações que lidaremos neste trabalho. Vamos assumir também que a medida a priori $d\mu(\vec{\sigma}_u)$ é uma medida par, i.e., μ é invariante pela aplicação $h(x) = -x$ que seja da forma

$$d\mu(\vec{\sigma}_u) \equiv e^{-f(\|\vec{\sigma}_u\|^2)} d\vec{\sigma}_u. \quad (20)$$

Dado o Hamiltoniano (12) e notando que $J_{uv} \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v \leq J_{uv} (\|\vec{\sigma}_u\|^2 + \|\vec{\sigma}_v\|^2)/2$, uma condição suficiente para (14) seja válido é que pelo menos uma, das duas condições abaixo, seja verificada:

F1) $f^{(k)}(0) > 0$ para algum $k \geq 2$;

F2) $f(x) = ax + b$, $a > 0$ e β satisfazendo $\beta \|J^R\| < a$.

Sob a hipótese de ferromagnetismo, positividade das correlações é assegurada pela primeira desigualdade de Griffiths. As desigualdades de Griffiths I (G-I) e II (G-II), veja [20, 21], são respectivamente dadas por

$$0 \leq \langle \sigma_A \rangle_\Lambda, \quad N \geq 1 \quad (21)$$

e

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle_\Lambda \langle \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v \rangle_\Lambda \leq \langle (\vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y)(\vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v) \rangle_\Lambda, \quad (22)$$

para qualquer $\Lambda \subset \mathbb{Z}^{k+d}$ e qualquer conjunto finito $A \subset \Lambda$, com $\sigma_A = \prod_{k=1}^N \prod_{i \in A} (\sigma_i^{(k)})^{a_i}$. G-II como enunciada acima não se encontra na sua forma mais geral, mas está na forma que a utilizaremos neste trabalho. As condições na medida a priori e em N para que as desigualdades G-I e G-II sejam válidas são as seguintes:

G1) Se a medida a priori for par então G-I será válida para qualquer $N \geq 1$, veja [22] e referências lá citadas;

G2) se a medida a priori for par então G-II será válida para $N = 1$, veja [22]. A desigualdade também é verdadeira para $N = 2$ para medidas a priori uniformes, veja [23]. Dunlop e Newman [24] mostraram que G-II também é válida para $N = 2$ quando a medida a priori considerada é par e da forma

$$d\mu(\vec{\sigma}) = e^{-f(r)} dr d\theta \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{br^2} e^{-f(r)} dr < \infty \quad \text{para cada } b \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

onde $\vec{\sigma} = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Note que se se G2 for satisfeita então G1 também será satisfeita. Para modelos com Hamiltonianos (12), a desigualdade de Simon-Lieb (S-L) [3, 4, 25] para modelos com $N = 1, 2$ afirma que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq \beta \sum_{\substack{u \in B \\ v \in B^c}} \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_u \rangle_B J_{uv}^R \langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_y \rangle, \quad (24)$$

onde $B \subset \mathbb{Z}^{k+d}$ e $x \in B, y \in B^c$. A desigualdade S-L, na forma acima, foi provada em [26] assumindo que a medida a priori satisfaz às hipóteses G2 e

SL1) para $N = 1$ com medida a priori (20), sendo tal que $f''(t) \geq 0$ para $t \geq 0$;

SL2) para $N = 2$ com medida a priori (20) e $f(t)$ sendo um polinômio cujos os coeficientes de grau maior ou igual a um sejam positivos.

Teorema 3.1. *As desigualdades de Griffiths I, II e Simon-Lieb são satisfeitas pelos estados de Gibbs (16) se: $N = 1$ e se a medida a priori satisfizer a condição SL1; $N = 2$ e a medida a priori satisfizer SL2.*

A segunda desigualdade de Griffiths implica que os valores esperados são funções não decrescentes do volume. Portanto se um estado $\langle \cdot \rangle$ satisfizer as hipóteses do teorema acima, então ele também satisfará a desigualdade de Simon [3]

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq \beta \sum_{\substack{u \in B \\ v \in B^c}} \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_u \rangle J_{uv}^R \langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \quad (25)$$

Além do mais, para Hamiltonianos dados por (12), Aizenman e Simon [27] provaram que

SL3) para $N = 2, 3, 4$ e medida a priori uniforme na esfera unitária, uma versão um pouco mais forte que (25) também é válida

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq (\beta/N) \sum_{\substack{u \in B \\ v \in B^c}} \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_u \rangle J_{uv}^R \langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_y \rangle.$$

Note que, em particular, a desigualdade de Simon (25) também é satisfeita.

Teorema 3.2. *A primeira desigualdade de Griffiths e a desigualdade de Simon são satisfeitas pelos estados de Gibbs (16) se: as hipóteses do Teorema 3.1 forem verificadas; $N = 3, 4$ com spins uniformemente distribuídos na esfera.*

Obs: Considere um sistema de spins cujo Hamiltoniano é dado por (12) e J_{uv} simétrica e não negativa ($J_{uv} = J_{vu} \geq 0$). Se a medida a priori $d\mu(\vec{\sigma})$ for dada por

$$d\mu(\vec{\sigma}) = e^{-\frac{\lambda}{4} \|\vec{\sigma}\|^4 + \frac{g}{2} \|\vec{\sigma}\|^2 + c} d\vec{\sigma},$$

com $\lambda > 0$ e $a \in \mathbb{R}$, então as hipóteses do Teorema 3.1 são satisfeitas. Em particular, o teorema vale quando $d\mu(\vec{\sigma}) = e^{-\lambda(\|\vec{\sigma}\|^2-1)^2} d\vec{\sigma}$ e, tomando o limite $\lambda \rightarrow \infty$, este resultado também se estende ao modelo de Ising ($N = 1$) e XY ($N = 2$) com interação de longo alcance. Com $N = 1$ usando o "truque" de Griffiths [28] que consiste em escrever um modelo de spins S como uma superposição de modelos de Ising, pode se mostrar que o Teorema 3.1 é satisfeito para spins discretos uniformemente distribuídos $\sigma \in \{-2S, -2S + 2, \dots, 0, \dots, 2S - 2, 2S\}$. Além do mais, tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ sobre os estados $\langle \cdot \rangle_n$ com medida a priori dada por

$$d\mu_n(\vec{\sigma}) = e^{-\|\vec{\sigma}\|^{2n}} d\vec{\sigma},$$

concluimos que o Teorema 3.1 é também satisfeito se os spins são uniformemente distribuídos na bola unitária $\|\vec{\sigma}\| \leq 1$, com $N = 1, 2$.

3.3 Comportamento assintótico Intermediário da correlação spin-spin

Nesta seção vamos considerar modelos de spins N -dimensional na rede $(k+d)$ -dimensional e vamos inicialmente mostrar, para valores pequenos de β , (17) e (18) em termos de cotas inferior e superior, para $N = 1, 2$ e para uma determinada classe de medidas a priori que será especificada mais a frente. Por enquanto, vamos mencionar apenas que nosso resultado para $N = 1$ cobre o modelo de Ising, com spin discreto em $\{-2S, -2S + 2, \dots, 2S\}$ uniformemente distribuído e também com spin contínuo no intervalo $[-S, S]$; (17) e (18) em termos de cotas superiores, para $N = 3, 4$ e para spins uniformemente distribuídos na esfera unitária.

Na Subseção 3.3.2, para obter a cotas superiores desenvolvemos uma teoria de perturbação que não impõe a interação J^R a restrição de ser invariante por translação. Ela deverá satisfazer a algumas outras hipóteses, veja hipóteses H1-H3 na Seção 3.3.2. Para β não necessariamente pequeno mas tal que $\chi(\beta) < \infty$, obtemos (17) e (18) em termos de cotas superiores, até a temperatura crítica, sob as hipóteses H4-H7, veja Subseção 3.3.3, em particular, vamos exigir invariância translacional da interação J^R .

Esta seção é organizada da seguinte maneira: Na Subseção 3.3.1 colocamos as condições na medida a priori para que sejam satisfeitas a primeira e a segunda desigualdade de Griffiths [20, 21] e também a desigualdade de Simon-Lieb [3, 4, 25], apresentamos também alguns exemplos de medidas a priori que satisfazem esta exigência e então provamos (17) e (18) em termos de cotas inferiores. Na subseção 3.3.2 colocamos as condições sobre a interação J^R para podermos obter a cota superior quando β é pequeno, veja Teorema 3.3. Em seguida na Subseção 3.3.3, apresentamos outras condições que devem ser impostas à interação J^R para que a cota superior continue sendo válida sempre que $\chi(\beta) < \infty$, veja Teorema 3.4.

3.3.1 Cotas inferiores

Proposição 3.1. *Considere o estado de Gibbs (16) à temperatura inversa β e suponha que a medida a priori (20) satisfaça a condição G2. Então, existem constantes positivas m_0 , C e \tilde{C} , que podem depender de β e J^R tais que, para todo $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$*

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \geq \begin{cases} CK_{x_1 y_1} e^{-m_0 \|x_0 - y_0\|} & \text{se } \|x_1 - y_1\| < R, \\ \tilde{C} e^{-m \|x - y\|} & \text{se } \|x_1 - y_1\| \geq R. \end{cases}$$

Prova: A condição G2 implica que as desigualdades G-I e G-II são satisfeitas. Vamos supor inicialmente que a variável de spin seja limitada, i.e., $|\vec{\sigma}| \leq S$. Fazendo uma expansão em série de Taylor do numerador, usando a hipótese de ferromagnetismo e que $d\mu(\vec{\sigma})$ é par, podemos afirmar que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y (S^2 - \|\sigma\|_z^2) \rangle_\Lambda \geq 0$$

para qualquer $x, y, z \in \Lambda$. Então segue de (22) e da desigualdade acima que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_z \rangle_\Lambda \langle \vec{\sigma}_z \cdot \vec{\sigma}_y \rangle_\Lambda \leq S^2 \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle_\Lambda.$$

Fixados $x, y \in \Lambda$, tomamos $z = (y_0, x_1)$ e consideramos primeiro $\|x_1 - y_1\| < R$. Seja Γ um conjunto de elos de primeiros vizinhos formando um caminho retilíneo que inicia em (x_0, x_1) e vai até (y_0, x_1) e seja b o elo com pontos terminais z e y . Então segue, novamente de (22) e da desigualdade acima, que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_z \rangle_\Gamma \langle \vec{\sigma}_y \cdot \vec{\sigma}_z \rangle_b \leq S^2 \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle_\Lambda.$$

Já que $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_z \rangle_\Gamma$ é o valor esperado tomado sobre um sistema uni-dimensional de interação de primeiros vizinhos e $\langle \vec{\sigma}_y \cdot \vec{\sigma}_z \rangle_b$ envolve integração sobre as variáveis $\vec{\sigma}_z$ e $\vec{\sigma}_y$, é fácil concluir que, para pequenos valores de β , existem constantes positivas C e m_0 , que podem depender de β , R , J^R e S tais que

$$CK_{x_1 y_1} e^{-m_0 \|x_0 - y_0\|} \leq \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle_\Lambda.$$

Consequentemente, também vem da monotonicidade que a cota inferior acima continua válida para todos os valores de β para os quais os estados de Gibbs estão bem definidos.

Para o caso $\|x_1 - y_1\| \geq R$, apenas substitua b no argumento acima por Γ_1 , conjunto dos elos de primeiros vizinhos formando um segmento retilíneo com pontos terminais z e y e assim podemos verificar que

$$C e^{-m_0 \|x_0 - y_0\|} e^{-m_1 \|x_1 - y_1\|} \leq \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle_\Lambda.$$

Para o caso de spins ilimitados e $\|x_1 - y_1\| < R$, vamos estabelecer a cota inferior pelo seguinte argumento: considere o caminho Γ definido acima, fazendo uma expansão em

série de Taylor de $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle_\Gamma$, em torno de $\beta = 0$, e em seguida usando que $d\mu(\vec{\sigma})$ é par obtemos a seguinte cota inferior

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle_\Gamma \geq \prod_{(u,v) \in \Gamma} \beta J_{uv}^R \left(\frac{\int_\Omega |\sigma_0^{(1)}|^2 d\mu(\vec{\sigma}_0)}{\int_\Omega e^{\beta \|J^R\| \|\vec{\sigma}_0\|^2} d\mu(\vec{\sigma}_0)} \right) = CK_{x_1 y_1} e^{-m_0 \|x_0 - y_0\|},$$

onde $C = e^{-m_0}$ é a razão entre as integrais acima. Observe que $m_0 > 0$ para qualquer $\beta > 0$ por que a razão entre as integrais é sempre menor do que um. \square

3.3.2 Cotas superiores em altas temperaturas

Vamos começar esta seção caracterizando as interações J^R que iremos considerar. Vamos assumir que J^R satisfazem às seguintes hipóteses:

H1) **positividade de K** : $\|J^R\| > 2k$, ou equivalentemente, $\|K^R\| > 0$;

H2) **limitação local**: dados $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}^d$, existe uma constante positiva C_3 , que não depende de x_1 e y_1 , tais que

$$K_{u_1 v_1} \leq C_3 K_{x_1 y_1} \quad \text{para todo } u_1, v_1 \in \mathbb{Z}^d \text{ com } \|u_1 - x_1\| \leq 1, \|v_1 - y_1\| \leq 1;$$

H3) **hipótese de convolução**: para todo $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}^d$, existe uma constante positiva C_2 , que não depende dos pontos x_1 e y_1 , tais que

$$\sum_{u_1 \in \mathbb{Z}^d} K_{x_1 u_1} K_{u_1 y_1} \leq C_2 K_{x_1 y_1}.$$

Os dois lemas que são apresentados na sequência nos permitem exibir explicitamente um exemplo de uma interação que satisfaz H1, H2 e H3. Como veremos abaixo, o Lema 1 é um resultado muito mais forte do que precisamos para justificar a hipótese H1. Olhando com cuidado, notamos que este lema prova H1 para os núcleos do tipo (19) em todas as escalas e não somente na escala $L = 1$ como é pedido em H1. A hipótese H3 para os núcleos da forma (19) é obtida pelo Lema 2. Depois da prova destes dois resultados, mostramos também outras famílias de interações para as quais são válidas H1 e H3 por simples modificação dos argumentos que mostraremos agora.

Lema 1. *Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^d$, com $\|x - y\| > L/2$, onde $L \geq 2\sqrt{d}$ é dado. e K_{uv} dado por (19). Então, existem constantes $C_1 = C_1(L)$ e $C_2 = C_2(L)$ tais que*

$$\frac{C_1}{1 + \|u - v\|^{d+\varepsilon}} \leq K_{uv} \leq \frac{C_2}{1 + \|u - v\|^{d+\varepsilon}}, \quad (26)$$

para todo $u \in B_L(x)$ e $v \in B_L(y)$, com $u \neq v$.

Prova: Suponha inicialmente que $L/2 < \|x - y\| \leq L$. Então $B_L(x) \cap B_L(y) \neq \emptyset$ e portanto $\|u - v\|$ não pode ser maior que duas vezes o comprimento da diagonal do hipercubo para todo $u \in B_L(x)$ e $v \in B_L(y)$. Já que $u \neq v$ então $\|u - v\| \geq 1$ e junto com as observações acima temos portanto

$$\frac{\|x - y\|}{L} \leq 1 \leq \|u - v\| \leq 2\sqrt{d}L \leq 4\sqrt{d}\|x - y\|. \quad (27)$$

Então a desigualdade (26) é satisfeita com $C_1 = (4\sqrt{d})^{-d-\varepsilon}$ e $C_2 = 2L^{d+\varepsilon}$. Agora, se $\|x - y\| > L$ então $B_L(x) \cap B_L(y) = \emptyset$ e existe um inteiro $n = n(L)$ tal que $L^n < \|x - y\| \leq L^{n+1}$. Se $n = 1$ poderia acontecer de termos $\|u - v\| = 1$ para algum $u \in B_L(x)$ e algum $v \in B_L(y)$. De qualquer forma a cota inferior dada em (27) continua sendo válida se substituimos L por L^2 , nos dando agora a nova constante $C_2 = 2L^{2(d+\varepsilon)}$. Para a cota superior, ainda no caso $n = 1$, basta procedermos como é mostrado na desigualdade (28) abaixo:

$$\frac{1}{2L}\|x - y\| \leq \frac{L^n}{2} \leq L^n - \sqrt{d}L \leq \|u - v\| \leq L^{n+1} + \sqrt{d}L \leq 2L^{n+1} \leq 2L\|x - y\|, \quad (28)$$

onde, para a segunda e quinta desigualdades, usamos a hipótese $L \geq 2\sqrt{d}$ e $n \geq 2$. A desigualdade (26) segue então com $C_1 = (2L)^{-d-\varepsilon}$ e $C_2 = (2L)^{d+\varepsilon}$. Portanto segue que a desigualdade (26) é válida em geral com as constantes $C_1 = 2(2L)^{-d-\varepsilon}$ e $C_2 = 2L^{2(d+\varepsilon)}$. \square

Lema 2. *Seja K_{uv} dado por (19). Então*

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}^d} K_{xu} K_{uy} \leq \frac{C_3}{1 + \|x - y\|^{d+\varepsilon}} \quad (29)$$

para todo $x, y \in \mathbb{Z}^d$, com $C_3 = 2^{d+2+\varepsilon}\|K\|$.

Prova: Seja $D = \|x - y\|$. Observe que

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}^d} K_{xu} K_{uy} \leq \sum_{\|u-x\| \leq D/2} K_{xu} K_{uy} + \sum_{\|u-y\| > D/2} K_{xu} K_{uy}.$$

Note que se $\|y - u\| \leq D/2$ então

$$K_{xu} \leq \frac{2}{1 + (D/2)^{d+\varepsilon}} \leq \frac{2^{1+d+\varepsilon}}{1 + D^{d+\varepsilon}}$$

Pondo $C_3 = 2^{d+2+\varepsilon}$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} K_{xu} K_{uy} &\leq \frac{C_3(2\|K\|)^{-1}}{1 + \|x - y\|^{d+\varepsilon}} \left(\sum_{\|u-y\| \leq D/2} K_{xu} + \sum_{\|u-x\| > D/2} K_{uy} \right) \\ &\leq \frac{C_3}{1 + \|x - y\|^{d+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

□

Obs: As hipóteses H1 e H2 são, em geral, facilmente verificadas, enquanto H3 requer algumas estimativas. Por exemplo, para $K_{u_1 v_1}$ dado por (19) verificamos a validade de H3, com $C_2 = 2^{d+2+\epsilon} \|K\|_1$, pelo Lema 2. Outro exemplo é

$$K_{u_1 v_1} = \frac{2}{(2 + \|u_1 - v_1\|)^d \ln^p(2 + \|u_1 - v_1\|)}, \quad (30)$$

com $p > 1$. E neste caso, $C_2 = 2^{d+p} \|K\|_1$.

Agora estamos em condições de enunciar o principal teorema desta seção

Teorema 3.3. *Considere o estado de Gibbs (16) à temperatura inversa β e com constantes de acoplamento J^R satisfazendo as hipóteses colocadas acima H1 à H3. Seja $S^2 > 0$ tal que $\langle \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v \rangle \leq S^2$ para todo $u, v \in \mathbb{Z}^{k+d}$. Então, sob as hipóteses do Teorema 3.1, existem constantes positivas β_0 , m e C tais que, para todo $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$*

$$\langle \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v \rangle \leq \begin{cases} CK_{x_1 y_1} e^{-m\|x_0 - y_0\|} & \text{se } \|x_1 - y_1\| < R, \\ S^2 e^{-\frac{m}{2R}\|x - y\|} & \text{se } \|x_1 - y_1\| \geq R, \end{cases} \quad (31)$$

$$(32)$$

sempre que $\beta < \beta_0$.

Obs 1: As constantes β_0 , m e C dependem de β , R , S^2 e $\|J^R\|$ e elas serão explicitamente determinadas na prova do teorema.

Obs 2: Por hipótese J^R é simétrica e se $d\mu(\vec{\sigma})$ satisfaz às hipóteses do Teorema 3.1 então as desigualdades G-I, G-II e S-L são válidas. Portanto os modelos de spins mencionados nas observações que sucedem o Teorema 3.2, com interações dadas por (19) e (30) satisfazem às hipóteses do Teorema 3.3, em particular, $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2$. Portanto, segue do Teorema 3.3 que a correlação spin-spin destes modelos decai como (31) e (32), para β pequeno. Junto com as cotas inferiores fornecidas pela Proposição 3.1 obtemos informações sobre o comportamento da correlação spin-spin, em termos de cotas inferiores e superiores. Para sistemas de spins ilimitados satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.3, antes de podermos concluir que as cotas (31) e (32) são válidas devemos verificar a existência de uma constante S^2 tal que $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2$. Isto normalmente é uma tarefa difícil. Vamos mencionar apenas que cotas superiores na correlação spin-spin podem ser obtidas sob a hipótese de convexidade (ver apêndice) da função f (20) para sistemas ferromagnéticos de longo alcance com Hamiltoniano da forma $-\sum_{i,j} J_{ij}(\sigma_i - \sigma_j)^2$, usando estimativas do tipo "chessboard", veja [29].

Prova do Teorema 3.3: A prova é dividida em duas partes:

1. Primeiro mostramos que $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle$ decai exponencialmente na “direção temporal” \mathbb{Z}^k para β pequeno e $\|x_0 - y_0\| > 0$, i.e., se β é pequeno existe uma constante positiva $m_0 = m_0(\beta)$ tal que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-m_0 \|x_0 - y_0\|}.$$

Em seguida provamos o decaimento exponencial das correlações na “direção espacial” \mathbb{Z}^d , i.e., se β é pequeno e se $\|x_1 - y_1\| > R$, onde R é o alcance da interação J^R , então,

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-\frac{m_0}{R} \|x_1 - y_1\|}.$$

Ambos decaimentos são obtidos por sucessivas aplicações da desigualdade S-L. Multiplicando ambos os membros das duas desigualdades acima e tomando a raiz quadrada temos (32) para β pequeno e $\|x_1 - y_1\| > R$:

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-\frac{m_0}{2R} \|x - y\|}.$$

2. A prova de (31) é feita por indução no número de vezes que aplicamos a desigualdade S-L. Fixados x e y iremos mostrar, que para cada inteiro n que, existem funções não negativas $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(k)}$, $k = 1, \dots, n$ e $R_{x,y}^{(n)}$ tais que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq \sum_{k=1}^n \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(k)} + R_{x,y}^{(n)},$$

onde, para β pequeno,

$$R_{xy}^{(n)} \leq \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(n)} + R_{xy}^{(n+1)}, \quad R_{xy}^{(n)} \leq C\beta^n$$

e

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(n)} \leq C \beta^n K_{x_1 y_1} e^{-m_0 \|x_0 - y_0\|}.$$

É então claro como provar (31) a partir das desigualdades acima.

Sob as hipóteses do Teorema 3.1 as desigualdades G-I, G-II e S-L são válidas. Após usar a hipótese $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_u \rangle \leq S^2$ para todo $x, u \in \mathbb{Z}^{k+d}$ e a desigualdade de Simon-Lieb com $B = \{x\}$, obtemos

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq \beta S^2 \sum_{u \in \mathbb{Z}^{k+d} \setminus \{x\}} J_{xu}^R \langle \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_y \rangle. \quad (33)$$

Para $z = (z_0, z_1) \in \mathbb{Z}^{k+d}$, defina o hiperplano $\mathbb{H}_{z_0} \equiv \{u \in \mathbb{Z}^{k+d} : u_0 = z_0\}$, que interpretaremos como “hiperplano horizontal na altura z_0 ”. Então, observe que, pela definição (13) de J^R , a soma em u de (33) é restrita aos pontos $u \in \mathbb{H}_{x_0}$ tais que $\|u_1 - x_1\| < R$ e também aos pontos da forma $u = (x_0 \pm e_i, x_1)$, onde $i \in \{1, \dots, k\}$ e e_i é o i -ésimo vetor

da base canônica de \mathbb{R}^k . Entre estes pontos, seja \bar{u} um ponto onde o máximo de $\langle \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_y \rangle$ é atingido. Então podemos concluir de (33) que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq \beta S^2 \|J^R\| \langle \vec{\sigma}_{\bar{u}} \cdot \vec{\sigma}_y \rangle. \quad (34)$$

Pela definição do ponto \bar{u} , podemos aplicar sucessivamente a desigualdade acima, pelo menos $(\|x_0 - y_0\| - 1)$ vezes. Este procedimento nos leva à seguinte desigualdade

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq (\beta S^2 \|J^R\|)^{\|x_0 - y_0\|} \langle \vec{\sigma}_{\bar{u}} \cdot \vec{\sigma}_y \rangle. \quad (35)$$

Para $\beta < \beta_1 \equiv 1/(S^2 \|J^R\|)$ e $m > 0$ tal que $e^{-m} = \beta S^2 \|J^R\|$, segue de (35) que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-m\|x_0 - y_0\|}, \quad (36)$$

que é a cota superior exponencial (31).

Agora suponha que $\|x_1 - y_1\| \geq R$. Pelo mesmo argumento dado acima, podemos aplicar iterativamente a desigualdade (34), pelo menos $\lfloor \|x_1 - y_1\|/R \rfloor - 1$ vezes, onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota o menor inteiro maior ou igual ao argumento. E portanto obter para $\beta < \beta_1$

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-\frac{m\|x_1 - y_1\|}{R}}.$$

Multiplicando (36) pela desigualdade acima e tomando a raiz quadrada temos

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-\frac{m}{2R}(\|x_0 - y_0\| + \|x_1 - y_1\|)},$$

que é a cota (32).

Se $\bar{u} \neq y$ então (35) nos sugere que a cota superior (36) pode ser melhorada. Mesmo que tivéssemos $\bar{u} = y$ poderíamos ainda tentar melhorar esta cota porque não exploramos ainda o possível decaimento na direção \mathbb{Z}^d . Para terminar a prova do teorema vamos assumir, a partir de agora, que $\|x_1 - y_1\| < R$ e mostraremos que ainda temos uma correção $K_{x_1 y_1}$ ao decaimento exponencial (36), como afirmado em (31). A prova será feita usando sucessivas aplicações da desigualdade de Simon-Lieb, junto com uso da cota (36), a hipótese de limitação local H2 e a hipótese de convolução H3.

Defina o hiperplano $\mathbb{V}_{z_1} \equiv \{u \in \mathbb{Z}^{k+d} : u_1 = z_1\}$, que interpretamos como o “hiperplano vertical de largura z_1 ”, e tome $B = \mathbb{V}_{x_1}$ em (24). Da desigualdade de Simon-Lieb segue que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq \beta \sum_{\substack{u \in \mathbb{V}_{x_1} \\ v \in \mathbb{V}_{x_1}^c}} \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_u \rangle_{\mathbb{V}_{x_1}} J_{uv}^R \langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_y \rangle. \quad (37)$$

Segue da definição de J_{uv}^R que a soma em v acima é restrita aos $v \in \mathbb{V}_{x_1}^c \cap \mathbb{H}_{u_0}$.

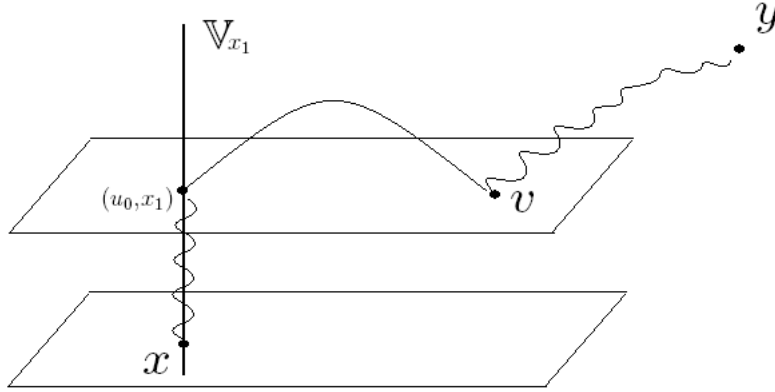


Figura 7: Representação em diagrama do lado direito de (37)

Observe que se $x_1 \neq y_1$ então (u_0, y_1) , a projeção de y sobre o hiperplano \mathbb{H}_{u_0} , é um ponto em $\mathbb{V}_{x_1}^c \cap \mathbb{H}_{u_0}$. Seja $b_1(u_0, y_1) \equiv \{v \in \mathbb{V}_{x_1}^c \cap \mathbb{H}_{u_0} : \|v_1 - y_1\| = 1\}$ e $b_1^*(u_0, y_1) \equiv \mathbb{V}_{x_1}^c \cap \mathbb{H}_{u_0} - b_1(u_0, y_1)$. Destas observações e de (36) com $\|J^R\| = 2k$ (observe que os valores esperados são tomados em redes \mathbb{Z}^{k+0}), temos

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_u \rangle_{\mathbb{V}_{x_1}} \leq S^2 e^{-m' \|x_0 - u_0\|}, \quad (38)$$

onde $e^{-m'} = 2kS^2\beta < 1$, que, quando substituído em (37), nos dá

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq \beta S^2 \sum_{u \in \mathbb{V}_{x_1}} e^{-m' \|x_0 - u_0\|} \sum_{v \in \mathbb{V}_{x_1}^c \cap \mathbb{H}_{u_0}} J_{uv}^R \langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \equiv \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(1)} + R_{xy}^{(1)},$$

onde

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(1)} \equiv \beta S^2 \sum_{u \in \mathbb{V}_{x_1}} e^{-m' \|x_0 - u_0\|} \sum_{v \in b_1(u_0, y_1)} J_{u_1 v_1}^R \langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_y \rangle$$

e

$$R_{xy}^{(1)} \equiv \beta S^2 \sum_{u \in \mathbb{V}_{x_1}} e^{-m' \|x_0 - u_0\|} \sum_{v \in b_1^*(u_0, y_1)} J_{u_1 v_1}^R \langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_y \rangle. \quad (39)$$

Encontraremos agora uma cota superior para $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(1)}$ cuja a dependência em x, y é similar a que temos no lado direito de (31). Usando que

$$\|x_0 - y_0\| \leq \|x_0 - v_0\| + \|v_0 - y_0\|,$$

vem de (36) que, para $\beta < \beta_1$,

$$\langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-m \|y_0 - v_0\|} \leq S^2 e^{-m \|y_0 - x_0\| + m \|x_0 - u_0\|}. \quad (40)$$

Nas parcelas que definem $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(1)}$, temos $u \in \mathbb{V}_{x_1}$ e $v \in b_1(u_0, y_1)$, portanto $u_1 = x_1$, $\|v_1 - y_1\| \leq 1$ e segue então de H2 que

$$K_{u_1 v_1} \leq C_3 K_{x_1 y_1}$$

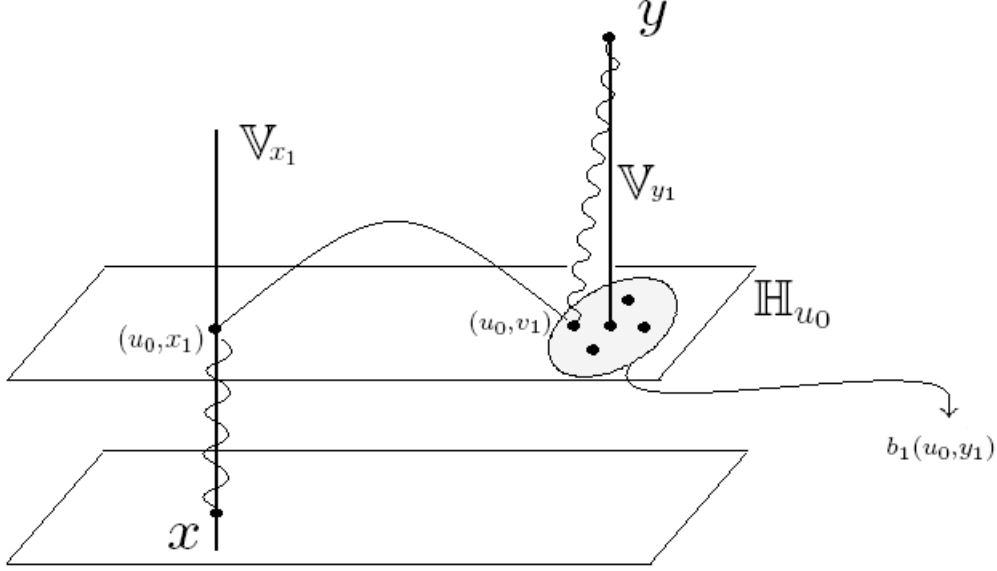


Figura 8: Representação em diagrama de $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(1)}$

que, quando substituído em $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(1)}$, junto com (40) e assumindo que $\beta < \beta_1$, nos dá

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(1)} \leq (2d\beta C_3 S^4) K_{x_1 y_1} e^{-m\|y_0 - x_0\|} \sum_{u \in \mathbb{V}_{x_1}} e^{-m'\|u\|} e^{m\|u\|}.$$

Recordando que $e^{-m} = \beta S^2 \|J^R\|$ e que de H1, $\|J^R\| > 2k$, a soma no lado direito da desigualdade acima é igual a

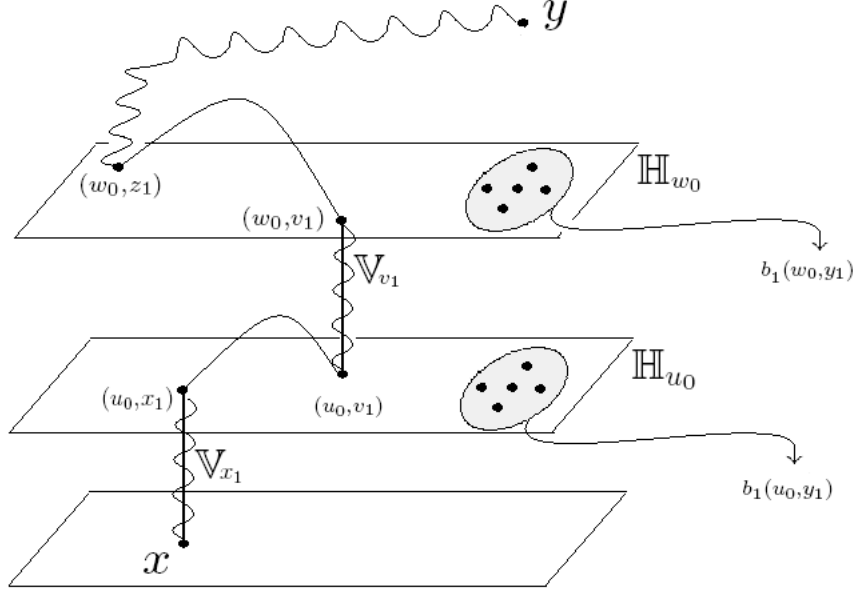
$$\sum_{u \in \mathbb{Z}^k} \left(\frac{2k}{\|J^R\|} \right)^{\|u\|} \equiv C_4 < \infty,$$

nos levando a seguinte cota superior

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(1)} \leq (2d\beta S^4 C_3 C_4) K_{x_1 y_1} e^{-m\|y_0 - x_0\|}.$$

Observe que o lado direito acima nos fornece o comportamento enunciado em (31). Agora vamos mostrar que $R_{xy}^{(1)}$ é uma perturbação de pequena ordem quando analisamos sua dependência com relação a x, y . Aplicando-se a desigualdade de Simon-Lieb a cada $\langle \sigma_v \sigma_y \rangle$, que aparece na definição de $R_{xy}^{(1)}$, juntamente com (38) obtemos a seguinte cota

$$R_{xy}^{(1)} \leq \beta^2 S^4 \sum_{u \in \mathbb{V}_{x_1}} e^{-m'\|u_0 - x_0\|} \sum_{v \in b_1^*(u_0, y_1)} J_{u_1 v_1}^R \left(\sum_{w \in \mathbb{V}_{v_1}} e^{-m'\|v_0 - w_0\|} \sum_{z \in \mathbb{V}_{v_1}^c \cap \mathbb{H}_{w_0}} J_{w_1 z_1}^R \langle \vec{\sigma}_z \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \right).$$



Fixamos $w \in \mathbb{V}_{v_1}$ e decompos a soma acima, em z , em dois termos, como foi feito na lado direito de (39), assim ficamos com

$$R_{xy}^{(1)} \leq \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(2)} + R_{xy}^{(2)},$$

onde

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(2)} \equiv \beta^2 S^4 \sum_{u \in \mathbb{V}_{x_1}} e^{-m' \|x_0 - u_0\|} \sum_{v \in b_1^*(u_0, y_1)} J_{u_1 v_1}^R \left(\sum_{w \in \mathbb{V}_{v_1}} e^{-m' \|v_0 - w_0\|} \sum_{z \in b_1(w_0, y_1)} J_{w_1 z_1}^R \langle \vec{\sigma}_z \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \right)$$

e

$$R_{xy}^{(2)} \equiv \beta^2 S^4 \sum_{u \in \mathbb{V}_{x_1}} e^{-m' \|x_0 - u_0\|} \sum_{v \in b_1^*(u_0, y_1)} J_{u_1 v_1}^R \left(\sum_{w \in \mathbb{V}_{v_1}} e^{-m' \|w_0 - v_0\|} \sum_{z \in b_1^*(w_0, y_1)} J_{w_1 z_1}^R \langle \vec{\sigma}_z \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \right).$$

Em seqüência, vamos mostrar que $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(2)}$ é da forma $O(\beta^2) K_{x_1 y_1} \exp(-m \|x_0 - y_0\|)$ e que $R_{xy}^{(2)}$ é uma pequena perturbação com respeito a esta cota.

Se $w \in \mathbb{V}_{v_1}$ então $w_1 = v_1$ enquanto se $z \in b_1(w_0, y_1)$ então $\|z_1 - y_1\| \leq 1$. Isto significa que, de H2

$$J_{wz}^R = K_{w_1 z_1} \leq C_3 K_{v_1 y_1}.$$

Também, da desigualdade

$$\|x_0 - y_0\| \leq \|x_0 - u_0\| + \|u_0 - z_0\| + \|z_0 - y_0\|,$$

e de (36) temos, para $\beta < \beta_1$

$$\langle \vec{\sigma}_z \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-m \|z_0 - y_0\|} \leq S^2 e^{-m(\|x_0 - y_0\| - \|z_0 - u_0\| - \|u_0 - x_0\|)}$$

para todo $u_0, z_0 \in \mathbb{Z}^k$. Finalmente, observando que $v_1 = w_1$ se $w \in \mathbb{V}_{v_1}$, temos das observações acima e da definição de $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(2)}$ que

$$\begin{aligned} \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(2)} &\leq (2d\beta^2 S^6 C_3) e^{-m\|y_0 - x_0\|} \left(\sum_{u \in \mathbb{Z}^k} e^{-m'\|u\|} e^{m\|u\|} \right)^2 \sum_{v \in \mathbb{H}_{u_0}} K_{x_1 v_1} K_{v_1 y_1} \\ &\leq (2dC_2 C_3) (\beta C_4)^2 (S^2)^3 K_{x_1 y_1} e^{-m\|y_0 - x_0\|}, \end{aligned}$$

onde usamos a hipótese de convolução H3 na obtenção da última desigualdade. Na verdade é importante enfatizar que H3 é o ingrediente chave para estabelecer a cota superior $K_{x_1 y_1} \exp(-m\|x_0 - y_0\|)$ durante todo o processo de interação, que já deve estar claro neste ponto: para mostrar que $R_{xy}^{(n)}$ é uma perturbação de ordem pequena com respeito a esta cota superior, nós aplicamos a desigualdade S-L às correlações que aparecem na definição de $R_{xy}^{(n)}$ e separamos a soma que vem da aplicação desta desigualdade em duas partes, uma a qual mostraremos, usando a hipótese convolutiva H3, ser $O(\beta^{n+1}) K_{x_1 y_1} \exp(-m\|x_0 - y_0\|)$ e outra, o resto, que é apenas uma pequena perturbação com respeito à grandeza anterior. Portanto o processo iterativo nos dá a seguinte cota

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq \sum_{i=1}^n \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(i)} + R_{xy}^{(n)}, \quad (41)$$

onde, para todo $n \geq 2$,

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(n)} \leq (2dC_2 C_3)^{n-1} (\beta C_4)^n (S^2)^{n+1} K_{x_1 y_1} e^{-m\|y_0 - x_0\|}$$

e

$$R_{xy}^{(n)} \leq S^2 (\beta S^2 C_4 \|J^R\|)^n.$$

Agora, se $\beta < \beta_0 \equiv \min\left\{\frac{1}{S^2 C_4 \|J^R\|}, \frac{1}{2d S^2 C_2 C_3 C_4}\right\} < \beta_1$ então

$$\sum_{i=2}^{\infty} (2dC_2 C_3)^{i-1} (\beta C_4)^i (S^2)^{i+1} < \infty$$

e $\limsup_{n \rightarrow \infty} R_{xy}^{(n)} = 0$. Para estes valores de β definimos

$$C(\beta) \equiv 2d\beta S^4 C_3 C_4 + \sum_{i=2}^{\infty} (2dC_2 C_3)^{i-1} (\beta C_4)^i (S^2)^{i+1}$$

e tomando o \limsup de (41) temos a cota superior (31).

□

3.3.3 Cotas superiores no regime $\chi(\beta) < \infty$

Na seção anterior, mostramos sob certas hipóteses (H1-H3) que o decaimento da função conectividade é ditado pela taxa de decaimento das constantes de acoplamento se β é suficientemente pequeno. A partir das cotas (31) e (32) do Teorema 3.3 podemos concluir que $\chi(\beta)$, a susceptibilidade, destes modelos é finita no intervalo $(0, \beta_0)$. Naturalmente surge a questão sobre o comportamento assintótico das conectividades em toda a região para o qual $\chi(\beta) < \infty$. Para dar uma resposta a esta questão, lançamos mão dos métodos introduzidos no Capítulo 1, onde obtivemos o comportamento assintótico das conectividades em todo regime subcrítico.

É claro que existem diferenças que saltam aos olhos sobre os modelos de percolação e os modelos de Mecânica Estatística em que as medidas são definidas a partir por Hamiltonianos como em (12). Porém no caso ferromagnético, que é objeto de estudo neste trabalho várias analogias podem ser feitas. A que nos interessa, em particular, é a relação entre as funções conectividade e a correlação spin-spin. Esta será explorada de duas maneiras neste trabalho; tanto para adaptar a prova do Teorema 3.3 para os modelos de percolação quanto para adaptar a prova do Teorema 3 para os modelos de mecânica Estatística definidos por (12). Nesta seção, como ilustração aos comentários prévios, mostraremos passo a passo como proceder para adaptar as técnicas de escalas múltiplas, introduzidas nos modelos de percolação na prova do Teorema 3, a modelos ferromagnéticos bem gerais. Além disto, mostraremos generalizações deste método em dois sentidos. Permitiremos tanto que o alcance R da interação tome valores $1 \leq R \leq \infty$ e também que os núcleos sejam mais gerais do que (19). Estes por sua vez, deverão satisfazer as hipóteses H4 à H7, listadas logo abaixo. Mencionamos também alguns exemplos de interações que satisfazem estas hipóteses.

Outro fato importante a se notar é que, para uma grande classe de modelos de spins escalar ($N = 1$), a condição $\chi(\beta) < \infty$ é equivalente a dizer que $\beta < \beta_c$, onde β_c é o inverso da temperatura crítica, veja [13]. Isto é particularmente verdadeiro para modelos de spins escalar mencionados nas observações que sucedem o Teorema 3.2, com interações dadas por (19) ou (30).

A partir de agora assumiremos que nossas interações satisfazem as hipóteses:

H4) **Invariância translacional:** existe uma função $K : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $K_{x_1 y_1} = K(\|x_1 - y_1\|)$;

H5) **Monotonicidade:** $K(q) < K(p)$ se $p < q$;

H6) **Cota superior uniforme:** para todo $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}^d$, existe uma constante positiva \tilde{C}

tal que

$$K\left(\frac{\|x_1 - y_1\|}{2}\right) \leq \tilde{C}K(\|x_1 - y_1\|);$$

H7) **Cota inferior uniforme:** existe uma constante positiva ν tal que

$$\frac{1}{R^\nu} \leq K(R)$$

para todo $R \geq 1$.

Obs: Observe que as interações(19) e (30) satisfazem trivialmente H4, H5 e H7. Para H6, pegamos $\tilde{C} = 2^{d+\varepsilon}$ no caso (19) e para (30) $\tilde{C} = 2^{d+p}$.

Podemos agora enunciar o principal resultado desta seção

Teorema 3.4. *Considere o estado de Gibbs (16) à temperatura inversa β e com constantes de acoplamento J^R satisfazendo as hipóteses feitas acima, H4 à H7. Seja $S^2 > 0$ tal que $\langle \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v \rangle \leq S^2$ para todo $u, v \in \mathbb{Z}^{k+d}$. Então sob as hipóteses do teorema 3.2 e para β tal que $\chi(\beta) < \infty$, existem constantes positivas m, \tilde{m}, C e R_0 tais que, para todo $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$ e para todo $R > R_0$*

$$\langle \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v \rangle \leq \begin{cases} CK_{x_1 y_1} e^{-m\|x_0 - y_0\|} & \text{se } \|x_1 - y_1\| < R, \\ S^2 e^{-\tilde{m}\|x - y\|} & \text{se } \|x_1 - y_1\| \geq R. \end{cases} \quad (42)$$

$$S^2 e^{-\tilde{m}\|x - y\|} \quad \text{se } \|x_1 - y_1\| \geq R. \quad (43)$$

Sob as hipóteses do Teorema 3.2 as desigualdades G-I e Simon são válidas. A prova do teorema acima, será baseada na expansão em escalas múltiplas desenvolvida no capítulo anterior. A prova será dividida em três partes:

1. como fizemos na prova do Teorema 3.3, primeiro mostraremos que a correlação spin-spin decai exponencialmente na “direção temporal” $x_0 \in \mathbb{Z}^k$ sempre que β for tal que $\chi(\beta) < \infty$, i.e., se $\chi(\beta) < \infty$ então existem constantes positivas $R_2 = R_2(\beta)$ e $m_0 = m_0(\beta)$ tais que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-m_0\|x_0 - y_0\|} \quad (44)$$

sempre que $\|x_0 - y_0\| > R_2$.

Similarmente, também provamos o decaimento exponencial das correlações na “direção espacial” $x_1 \in \mathbb{Z}^d$ para pares de spins suficientemente distantes, i.e., se $\chi(\beta) < \infty$ então existem constantes positivas $R_3 = R_3(\beta, R)$ and $m_1 = m_1(\beta, R) > 0$ tais que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-m_1\|x_1 - y_1\|}. \quad (45)$$

As constantes acima serão determinadas no decorrer da prova. Claramente, se tomamos $R_1 \equiv \max\{R_2, R_3\}$ e $m \equiv (m_0 + m_1)/2$ então, depois de multiplicarmos (44) por (45) e tomarmos a raiz quadrada concluímos que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-m\|x-y\|}$$

sempre que $\chi(\beta) < \infty$ e $\|x - y\| > R_1$;

2. seja $m' > 0$ dado e defina

$$T_{m'}(x, y) \equiv e^{m'\|x_0 - y_0\|} \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle.$$

Dado $L \geq 1$, seja $\mathcal{C}_L(x) \equiv \{z \in \mathbb{Z}^{k+d}; \|x_1 - y_1\| \leq L\}$ o “cilindro vertical” de raio L centrado em x . Tomando $y \in \mathcal{C}_L^c(x)$, iremos mostrar que $T_{m'}(x, y)$ satisfaz uma desigualdade tipo Simon, i.e.,

$$T_{m'}(x, y) \leq \sum_{\substack{u \in \mathcal{C}_L(x) \\ v \in \mathcal{C}_L^c(x)}} T_{m'}(x, u) J_{uv}^R T_{m'}(v, y). \quad (46)$$

Queremos chamar atenção que a desigualdade acima será útil quando $\chi(\beta) < \infty$ por que ela nos permitirá tomar $m' = m_0 - \delta$, onde $m_0 > 0$ é a taxa de decaimento exponencial na “direção temporal” e δ um número real positivo mas arbitrariamente pequeno;

3. a desigualdade (46) será usada para desenvolver uma teoria de perturbação convergente que captura o decaimento misto das correlações sob a condição $\chi(\beta) < \infty$, reproduzindo o resultado do teorema 3.1 que era antes, para β pequeno. Seja $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$ tais que $\|x_1 - y_1\| < R$ e escolha o comprimento de escala $L \equiv \|x_1 - y_1\|$. Se $\chi(\beta) < \infty$ então mostraremos que existe uma constante positiva \tilde{C} tal que

$$T_{m'}(x, y) \leq \tilde{C} \chi_{m'}^2 K_{x_1 y_1} + \mathbb{T}_{m'}(L/2) \gamma_{L/4}, \quad (47)$$

onde

$$\mathbb{T}_{m'}(L) \equiv \sup_{u \in \mathcal{C}_L^c(0)} T_{m'}(0, u), \quad \chi_{m'}(\beta) \equiv \sum_{u \in \mathbb{Z}^{k+d}} T_{m'}(0, u) \quad \text{e} \quad \gamma_L \equiv \sum_{\substack{u \in \mathcal{C}_L(x) \\ v \in \mathcal{C}_L^c(x)}} T_{m'}(x, u) J_{uv}^R.$$

No decorrer da prova mostraremos que se $\chi(\beta) < \infty$ então também temos $\chi_{m'}(\beta) < \infty$ e que $\gamma_L \rightarrow 0$ quando $L \rightarrow \infty$. Seguirá então que o segundo termo no lado direito da desigualdade (47) será pequeno comparado com o primeiro termo, o que vai nos levar a concluir que iterando (47) teremos o resultado.

Vamos começar provando (44). Devido a invariância translacional, iremos tomar $y = 0$. Uma vez que

$$\chi = \sum_{n \geq 0} \sum_{\|x_0\|=n} \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}^d} \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle,$$

da hipótese $\chi(\beta) < \infty$ segue que, dado $\lambda \in (0, 1)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{\|x_0\|=n} \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}^d} \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle < \lambda$$

para todo $n \geq n_0$. Tomamos $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{Z}^{k+d}$, com $\|x_0\| > n_0$ e aplicando a desigualdade de Simon (25) com B sendo o "cilindro horizontal" $\{x \in \mathbb{Z}^{k+d} : \|x_0\| \leq n_0\}$, obtemos

$$\langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq \beta \sum_{\substack{u \in B \\ v \in B^c}} \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_u \rangle J_{uv}^R \langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_x \rangle.$$

Segue da definição (13) de J^R que as únicas contribuições não-nulas possíveis no lado direito da soma acima ocorrem quando os pares $u \in B, v \in B^c$ são pares de primeiros vizinhos satisfazendo a condição $\|u_0\| = n_0$ e $u_1 = v_1$. Além do mais, já que $\chi(\beta) < \infty$ então podemos concluir que $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \rightarrow 0$ quando $\|x - y\| \rightarrow \infty$ e também que, para qualquer $n_0 \in \mathbb{N}$ fixado, existe $v = v(n_0) \in \mathbb{Z}^{k+d}$ tal que $\langle \vec{\sigma}_{v(n_0)} \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \equiv \sup_{z \in F} \langle \vec{\sigma}_z \cdot \vec{\sigma}_x \rangle$, onde o supremo é tomado sobre F , a fronteira externa do "cilindro horizontal" B . Portanto

$$\langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq 2k\beta \left(\sum_{\substack{u \in B \\ \|u_0\|=n_0}} \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_u \rangle \right) \langle \vec{\sigma}_{v(n_0)} \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq 2k\beta\lambda \langle \vec{\sigma}_{v(n_0)} \cdot \vec{\sigma}_x \rangle.$$

Aplicando sucessivamente a desigualdade acima, (note que isto pode ser feito pelo menos $\lfloor \|x_0\|/(n_0 + 1) \rfloor$, desde que $\|x_0\| \geq R_2 \equiv n_0 + 1$), obtemos

$$\langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq (2k\beta\lambda)^{\lfloor \|x_0\|/(n_0+1) \rfloor} \langle \vec{\sigma}_{v(n_0)} \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq S^2 e^{-m_0 \|x_0\|},$$

que, para λ suficientemente pequeno, é (44) com $e^{-m_0} = (2k\beta\lambda)^{1/(n_0+1)}$ e $\langle \vec{\sigma}_{v(n_0)} \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq S^2$. Segue também da primeira das desigualdades acima que

$$\sum_{x_1 \in \mathbb{Z}^d} \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq \chi e^{-m_0 \|x_0\|}. \quad (48)$$

Analogamente, provamos (45). Tome $y = 0$ e considere o "cilindro vertical" $B = \{x \in \mathbb{Z}^{k+d} : \|x_1\| \leq n_0\}$, onde $n_0 > R$ é escolhido tal que

$$\sum_{\{x_1 \in \mathbb{Z}^d : n-R \leq \|x_1\| \leq n\}} \sum_{x_0 \in \mathbb{Z}^k} \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle < \lambda < 1$$

para todo $n \geq n_0$, onde R é o alcance da interação e $\lambda < 1$ é um número positivo dado. Tomamos agora $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{Z}^{k+d}$, com $\|x_1\| > n_0$ e aplicamos a desigualdade de Simon e a definição de J^R para obter que

$$\langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq \beta \sum_{\substack{u \in B, n_0-R \leq \|u_1\| \leq n_0 \\ v \in B^c, \|u_1 - v_1\| < R, v_0 = u_0}} \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_u \rangle K_{u_1 v_1} \langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_x \rangle.$$

Então concluímos que o lado direito da última desigualdade é limitado superiormente por

$$\beta \|K\| \langle \vec{\sigma}_{v(n_0)} \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \sum_{u \in B, n_0 - R \leq \|u_1\| \leq n_0} \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_u \rangle,$$

onde $\langle \vec{\sigma}_{v(n_0)} \cdot \vec{\sigma}_x \rangle$ é o supremo de $\langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_x \rangle$ tomado sobre a fronteira do cilindro vertical de raio $n_0 + R$. Daí também concluímos que

$$\langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq (\beta \|K\| \lambda) \langle \vec{\sigma}_{v(n_0)} \cdot \vec{\sigma}_x \rangle.$$

Seja $R_3 \equiv n_0 + R$. Então, se $\|x_1\| > R_3$, podemos iterar a última desigualdade pelo menos $\lfloor \|x_1\|/R_3 \rfloor$ vezes e ver que

$$\langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq (\beta \|K\| \lambda)^{\lfloor \|x_1\|/L_1 \rfloor} \langle \vec{\sigma}_{v(n_0)} \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq S^2 e^{-m_1 \|x_1\|},$$

onde, para λ suficientemente pequeno, $e^{-m_1} = (\beta \|K\| \lambda)^{1/R_3}$ e $m_1 > 0$, o que prova (45). Também segue da primeira das desigualdades acima que

$$\sum_{x_0 \in \mathbb{Z}^k} \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq \chi e^{-m_1 \|x_1\|}.$$

O próximo passo é provar (46). Suponha que $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$ são tais que $y \in \mathcal{C}_L^c(x)$ para algum $L \geq 1$, onde $\mathcal{C}_L(x)$ é o cilindro vertical centrado em x com raio L . Então, aplicando a desigualdade de Simon a $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle$, com $B = \mathcal{C}_L(x)$, e multiplicando esta por $\exp(m' \|x_0 - y_0\|)$, usando a definição de $T_{m'}(x, y)$ e a desigualdade triangular chegamos a (46) pois

$$T_{m'}(x, y) \leq e^{m' \|x_0 - y_0\|} \sum_{\substack{u \in \mathcal{C}_L(x) \\ v \in \mathcal{C}_L^c(x)}} \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_u \rangle J_{uv}^R \langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq \sum_{\substack{u \in \mathcal{C}_L(x) \\ v \in \mathcal{C}_L^c(x)}} T_{m'}(x, u) J_{uv}^R T_{m'}(v, y).$$

Como próximo passo, dado (46), provaremos (47). Vamos precisar primeiro provar que $\chi_{m'}(\beta) < \infty$ se $\chi(\beta) < \infty$, onde $m' = m_0 - \delta$, m_0 sendo a taxa de decaimento exponencial na direção temporal, que é positiva se λ é pequeno, e δ é suficientemente pequeno e positivo. Mas isto vem de (48) e

$$\begin{aligned} \chi_{m'}(\beta) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^{k+d}} T_{m'}(0, x) \leq \sum_{j \geq 0} \sum_{\{x_0 \in \mathbb{Z}^k : \|x_0\| = j\}} e^{m' \|x_0\|} \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}^d} \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \\ &\leq \chi \sum_{j \geq 0} 2d j^{d-1} e^{m' j} e^{-m_0 j} < \infty. \end{aligned}$$

Considere $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$ tais que $R_4 < \|x_1 - y_1\| < R$. A constante R_4 será escolhida mais a frente. Tomamos $L \equiv \|x_1 - y_1\|$ e usando (46) temos

$$\begin{aligned} T_{m'}(x, y) &\leq \sum_{\substack{u \in \mathcal{C}_{L/4}(x) \\ v \in \mathcal{C}_{L/4}^c(x)}} T_{m'}(x, u) J_{uv}^R T_{m'}(v, y) \\ &\leq \sum_{\substack{u \in \mathcal{C}_{L/4}(x) \\ v \in \mathcal{C}_{L/4}^c(x) \cap \mathcal{C}_{L/2}(x)}} T_{m'}(x, u) J_{uv}^R T_{m'}(v, y) + \sum_{\substack{u \in \mathcal{C}_{L/4}(x) \\ v \in \mathcal{C}_{L/4}^c(x) \cap \mathcal{C}_{L/2}(x)}} T_{m'}(x, u) J_{uv}^R T_{m'}(v, y). \end{aligned}$$

Note que, em cada $T_{m'}(v, y)$ que aparece no primeiro termo do lado direito da última desigualdade, os pontos v e y são tais que $\|v - y\| \geq L/2$. Recordando que

$$\mathbb{T}_{m'}(L) = \sup_{u \in \mathcal{C}_L^c(0)} T_{m'}(0, u)$$

e que $T_{m'}(v, y)$ é invariante por translação temos $T_{m'}(v, y) \leq \mathbb{T}_{m'}(L/2)$. Usando esta cota superior para $T_{m'}(v, y)$, $T_{m'}(x, u)J_{uv}^R \geq 0$ e a definição de

$$\gamma_L = \sum_{\substack{u \in \mathcal{C}_L(x) \\ v \in \mathcal{C}_L^c(x)}} T_{m'}(x, u) J_{uv}^R$$

segue que o primeiro termo é limitado por $\mathbb{T}_{m'}(L/2)\gamma_{L/4}$. Para o segundo termo, observe inicialmente que todas constantes de acoplamento J_{uv}^R que aparecem nestes termos satisfazem $u_0 = v_0$ e $\|u_1 - v_1\| \geq \|x_1 - y_1\|/2$. Assim, temos para estas constantes de acoplamento

$$J_{uv}^R = K(\|u_1 - v_1\|) \leq K(\|x_1 - y_1\|/2) \leq \tilde{C}K_{x_1y_1},$$

onde, para justificar estas informações usamos as hipóteses H4, H5 and H6. Assim podemos concluir que o segundo termo é limitado por $\tilde{C}\chi_{m'}^2K_{x_1y_1}$, que leva a

$$T_{m'}(x, y) \leq \tilde{C}\chi_{m'}^2K_{x_1y_1} + \mathbb{T}_{m'}(L/2)\gamma_{L/4}.$$

Finalmente, partindo de (47), obtemos o decaimento misto exponencial- $K_{x_1y_1}$ (42). Como $\|J^R\| < \infty$ e $\chi_{m'}(\beta) < \infty$ se $\chi(\beta) < \infty$, concluímos que

$$\sum_{u, v \in \mathbb{Z}^{k+d}} T_{m'}(x, u) J_{uv}^R < \infty.$$

Por outro lado, segue da definição de γ_L que

$$\gamma_L \leq \sum_{u, v \in \mathbb{Z}^{k+d}} T_{m'}(x, u) J_{uv} \mathbf{1}_{\mathcal{C}_L(x)}(u) \mathbf{1}_{\mathcal{C}_L^c(x)}(v),$$

donde concluímos, pelo mesmo argumento dado no capítulo anterior, que $\gamma_L \rightarrow 0$ quando $L \rightarrow \infty$. Agora usamos este fato para pegar a cota superior (31) a partir da desigualdade (47).

Seja $\nu > 0$ dado por H7 e tome $\alpha \in (0, 1/(2^\nu \tilde{C}))$. Então, existe $R_4 > 0$ tal que $\gamma_{L/4} < \alpha$ para todo $L \geq R_4$. Tomando $L > R_4$, segue de (47) que,

$$T_{m'}(x, y) \leq \tilde{C}\chi_{m'}^2K_{x_1y_1} + \alpha\mathbb{T}_{m'}(L/2).$$

Note que para qualquer $z \in \mathbb{Z}^{k+d}$ com $L < \|x_1 - z_1\| \equiv \bar{L}$ temos

$$T_{m'}(x, z) \leq \tilde{C}\chi_{m'}^2K_{x_1z_1} + \alpha\mathbb{T}_{m'}(\bar{L}/2),$$

já que, para todo $L < \bar{L}$, temos $\gamma_{\bar{L}/4} < \alpha$. Após usarmos H5 e a definição de $\mathbb{T}_{m'}(\cdot)$ obtemos

$$\tilde{C}^2 \chi_{m'}^2 K_{x_1 z_1} + \alpha \mathbb{T}_{m'}(\bar{L}/2) \leq \tilde{C}^2 \chi_{m'}^2 K_{x_1 y_1} + \alpha \mathbb{T}_{m'}(L/2),$$

de onde concluimos que

$$\mathbb{T}_{m'}(L) \leq \tilde{C}^2 \chi_{m'}^2 K_{x_1 y_1} + \alpha \mathbb{T}_{m'}(L/2).$$

Iterando a última desigualdade n vezes, com n sendo o menor inteiro para o qual $L2^{-n} \leq R_4$, temos para todo $L \geq R_4$

$$\mathbb{T}_{m'}(L) \leq \chi_{m'}^2 K_{x_1 y_1} \sum_{j=0}^{n-1} (\tilde{C}^2 \alpha)^j + \alpha^n \mathbb{T}_{m'}(L/2^n). \quad (49)$$

Desta escolha de n , segue que

$$\alpha^n < \frac{1}{2^{\nu n}} = \frac{1}{K_{x_1 y_1}} \frac{K_{x_1 y_1}}{2^{\nu n}} \leq K_{x_1 y_1} \frac{(4L)^\nu}{2^{\nu n}} \leq K_{x_1 y_1} 4^\nu L_0^\nu,$$

onde foi usado na segunda desigualdade a hipótese H7. Levando esta cota superior em (49), e usando junto que $T_{m'}(x, y) \leq \mathbb{T}_{m'}(L)$ se $y \in \mathcal{C}_L^c(x)$ e $\mathbb{T}_{m'}(L') \leq \chi_{m'}$ para qualquer $L' > 0$, concluimos que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq C K_{x_1 y_1} e^{-(m_0 - \delta) \|x_0 - y_0\|}$$

sempre que $\chi(\beta) < \infty$, o que prova a cota superior (42).

□

4 Apêndice

Teorema 4.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). *Sejam (E, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida e $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável sobre E . Suponha que f_n seja uma sequência de funções mensuráveis definidas em E tal que*

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

e que $f_n \rightarrow g$ μ -q.t.p., então

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

Definição 4.2 (Conjunto convexo). *Um subconjunto C de um espaço vetorial é dito convexo se para quaisquer $x, y \in C$, $tx + (1 - t)y \in C$ para todo $t \in [0, 1]$.*

Definição 4.1 (Função Convexa). *Seja C um subconjunto convexo de um espaço vetorial. Uma função $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ é dita convexa, se para quaisquer $x, y \in C$ e $t \in [0, 1]$, temos*

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Referências

- [1] M. Aizenman and C. M. Newman, *Discontinuity of the percolation density in one-dimensional $1/|x - y|^2$ percolation models*, Comm. Math. Phys. **107**, 611–647, (1986).
- [2] J.M. Hammersley, *Percolation Processes. Lower bounds for the critical probability*, Annals of Mathematical Statistics. **28**, 790-795 , (1957)
- [3] B. Simon, *Correlation Inequalities and the Decay of Correlations in Ferromagnets*, Commun. Math. Phys., **77**,111-126, (1980).
- [4] E. H. Lieb, *A Refinement of Simon's Correlation Inequality*, Commun. Math. Phys., **77**,127-135, (1980).
- [5] Gastão A. Braga, Leandro Cioletti and Remy Sanchis, *Decay Properties of the Connectivity for Mixed Long Range Percolation Models on \mathbb{Z}^d* , J. Stat. Phys., 587–591, (2007).
- [6] Gastão A. Braga, Leandro Cioletti and Remy Sanchis, *Intermediate Asymptotics of Correlations for Ferromagnetic N-vector Spin Models 2008* (Submitted for publication).
- [7] G. Grimmett, *Percolation*, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, (1999).
- [8] L.S. Schulman, *Long range percolation in one dimension*, J. Phys. Lett. **A16** L639 (1983).
- [9] C.M. Newman, L.S. Schulman, *One-dimensional $1/|j - i|^s$ percolation models: The existence of a transition for $s \leq 2$.* , Comm. Math. Phys. **104** (1986), 547-571.
- [10] M. Aizenman and D.J. Barsky, *Sharpness of the phase transition in percolation models*, Comm. Math. Phys. **108** (1987), no. 3, 489–526.
- [11] M. V. Menshikov, *Coincidence of Critical Points in Percolation Problems*, Soviet Mathematics Doklady **33** (1986), 856-859.
- [12] T. Hara and G. Slade, *Mean-field critical behaviour for percolation in high dimensions*, Communications in Mathematical Physics **128** 856–859, (1990).
- [13] M. Aizenman, D. J. Barsky and R. Fernández, *The phase transition in a general class of Ising-type models is sharp*, J. Statist. Phys. **47** (1987), no. 3-4, 343–374.
- [14] M. Duneau, B. Souillard and D. Iagolnitzer, *Decay of Correlations for Infinite Range Interactions*, J. Math. Phys. **16**, 1662-1666, (1975).

- [15] L. Gross, *Decay of Correlations in Classical Lattice Models at High Temperature*, Commun. Math. Phys. **68**, 9-27 , (1979).
- [16] R. Israel and C. Nappi, *Exponential Clustering for Long-Range Integer-Spin Systems*, Commun. Math. Phys. **68**, 29-37 , (1979).
- [17] A. Procacci and B. Scoppola, *On Decay of Correlations for Unbounded Spin Systems with Arbitrary Boundary Conditions*, J. Stat. Phys. **105**, 453-482 , (2001).
- [18] R. S. Thebaldi, E. Pereira and A. Procacci, *A cluster expansion for the decay of correlations of light-mass quantum crystals and some stochastic models under intense noise*, J. Math. Phys. **46**, 053303 , (2005).
- [19] H. Spohn and W. Zwerger, *Decay of the two-point function in one-dimensional $O(N)$ spin models with long-range interactions*, J. Stat. Phys. **94**, 1037 - 1043 (1999).
- [20] R. B. Griffiths, *Correlations in Ising Ferromagnets I*, J. Math. Phys., **8**, 478-483, (1967).
- [21] R. B. Griffiths, *Correlations in Ising Ferromagnets. II. External Magnetic Fields*, J. Math. Phys., **8**, 484-489, (1967).
- [22] J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics: A Functional Integral Point of View*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, (1987).
- [23] J. Ginibre, *General Formulation of Griffiths' Inequalities*, Commun. Math. Phys., **16**, 310-328, (1970).
- [24] C. M. Newman and F. Dunlop, *Multicomponent Field Theories and Classical Rotators*, Commun. Math. Phys. **44**, 223-235 , (1975).
- [25] V. Rivasseau, *Lieb's Correlation Inequality for Plane Rotors*, Commun. Math. Phys. **77**, 145–147 (1980).
- [26] D. Brydges, J. Fröhlich and T. Spencer, *The Random Walk Representation of Classical Spin Systems and Correlation Inequalities*, Commun. Math. Phys. **83**, 123-150 , (1982).
- [27] M. Aizenman and B. Simon, *Local Ward Identities and the Decay of Correlations in Ferromagnets*, Commun. Math. Phys. **77**, 137-143 , (1980).
- [28] R. Griffiths, *Rigorous results for Ising ferromagnets of arbitrary spins*, J. Math. Phys., **10**, 1559–1565, (1969).
- [29] J. Fröhlich, R. Israel, E.H. Lieb and B. Simon, *Phase transitions and reflection positivity. I. General theory and long-range lattice models*, Commun. Math. Phys. **62** 1–34, (1978).