



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

**Cálculo Exato do Ponto Crítico de Modelos de
Aglomerados Aleatórios ($q \geq 1$) sobre a Rede
Bidimensional.**

por

Roberto Vila Gabriel

Orientador: Leandro Martins Cioletti

Brasília
2013

AGRADECIMENTOS

É meu desejo como um simples gesto de gratidão, dedicar meu humilde trabalho, em primeira instância, a Deus, que me deu força, fé, saúde e esperança para alcançar este desejo que se torna uma realidade, sempre me apoiou e me dotou de grandes dons e talentos que hoje eu posso usar na minha vida, em seguida, a meus pais Porfirio e Julia, que sempre me apoiarão com grande espírito, contribuindo sinceramente para alcançar minhas metas e objetivos.

Dedico este trabalho da mesma forma a meu orientador Dr. Leandro Martins Cioletti, que teve a paciência necessária para orientar-me e apoiar-me o tempo todo para realizar este trabalho e cujas contribuições ajudarão a tornar-me uma grande pessoa e profissional num futuro não muito distante.

Agradeço a minha irmã Carina, ela é a fonte de minha inspiração, que sempre me apoiou incondicionalmente ao longo de minha carreira para poder continuar estudando, também agradeço a meu irmão Ricardo, minha irmã Carla, meu cunhado René, Vanda, minha sobrinha Zoe e amigos que em todo momento me ajudaram e apoiaram a estudar, motivando-me para continuar com meus estudos, dando-me confiança.

Aos professores que estiveram comigo durante este longo caminho, sempre me dando orientação profissional, ética na aquisição de conhecimentos e fortalecendo a minha formação como estudante de mestrado.

Obrigado.

Resumo

Este trabalho está baseado no artigo: *The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for $q \geq 1$* , escrito pelos matemáticos *Vincent Beffara* e *Hugo Duminil-Copin* publicado no periódico *Probability Theory and Related Fields* em 2012. Neste trabalho os autores provam uma conjectura bastante antiga sobre o valor do ponto crítico do Modelo de Aglomerados Aleatórios na rede \mathbb{Z}^2 . Eles mostraram que o ponto auto-dual,

$$p_{sd}(q) = \sqrt{q}/(1 + \sqrt{q}),$$

para $q \geq 1$ é crítico na rede quadrada. Como uma aplicação deste resultado, eles mostraram também que as funções de conectividade, na fase subcrítica, decaem exponencialmente com respeito à distância entre dois pontos.

Palavras-chave: Modelo de Aglomerados aleatórios, Transição de Fase, Modelo Potts, Modelo de Ising, Percolação de Bernoulli, Teorema de Russo-Seymour-Welsh.

Abstract

This work is based on the paper: *The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for $q \geq 1$* , by Vincent Beffara and Hugo Duminil-Copin, Probability Theory and Related Fields 2012. In this work the authors proved an old conjecture about the critical point of the Random-Cluster Model in the square lattice. They shown that the self dual point,

$$p_{sd}(q) = \sqrt{q}/(1 + \sqrt{q}),$$

for $q \geq 1$ is critical on the square lattice. As an application they shown that the connectivity functions, in the subcritical phase, decays exponentially fast with the distance of the points.

Keywords: Random cluster model, Phase Transition, Potts model, Ising Model, Bernoulli percolation, Russo-Seymour-Welsh.

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 2 |
| 2 | OS MODELOS DE PERCOLAÇÃO E AGLOMERADOS ALEATÓRIOS | 5 |
| 2.1 | Percolação de Bernoulli | 5 |
| 2.1.1 | Algumas Definições e uma Ferramenta Útil | 7 |
| 2.1.2 | Grafos Planares | 11 |
| 2.1.3 | Dualidade | 14 |
| 2.1.4 | Transição de Fase para a percolação de Bernoulli sobre \mathbb{Z}^2 . . . | 15 |
| 2.2 | O Modelo de Aglomerados Aleatórios | 24 |
| 2.2.1 | Dualidade Planar | 28 |
| 2.2.2 | Alguns resultados básicos para este modelo. | 35 |
| 2.2.3 | O Limite Termodinâmico e a existência de transição de fase. . . | 44 |
| 2.2.4 | Unicidade do Aglomerado Aleatório Infinito | 49 |
| 3 | TEOREMAS FUNDAMENTAIS: PROBABILIDADES DE CRUZAMENTO | 55 |
| 3.1 | Generalização da Fórmula de Russo | 55 |
| 3.2 | Probabilidades de Cruzamento de Retângulos no Ponto Auto-dual . . . | 60 |
| 3.3 | Generalização do Teorema de Russo-Seymour-Welsh | 70 |
| 4 | CÁLCULO DO PONTO CRÍTICO p_c | 73 |
| 4.1 | Cota inferior para o ponto crítico: $p_c \geq p_{sd}$ | 73 |
| 4.2 | Cota superior para o ponto crítico: $p_c \leq p_{sd}$ | 76 |
| 5 | APÊNDICE | 85 |

INTRODUÇÃO

O modelo de aglomerados aleatórios foi inventado por Cees Fortuin e Piet Kasteleyn por volta de 1969 como uma unificação dos modelos de Percolação, Ising/Potts e também como uma extrapolação de redes elétricas. A motivação inicial deles era poder tratar de uma maneira unificadas as leis de circuitos ligados em série e paralelo de tais redes elétricas. Fazendo isso eles iniciaram um estudo em geometria estocástica e se depararam com belas estruturas que alguns anos mais tarde se transformaram em uma das ferramentas centrais para atacar um dos mais velhos desafios em Mecânica Estatística, que era a análise matemática do fenômeno de ferromagnetismo e especialmente a transição de fase.

A importância deste modelo para Probabilidade e Mecânica Estatística não havia sido completamente reconhecida até o início dos anos 80. Existiam duas razões para isto. Embora as publicações de 1969-1972 já contivessem várias provas das propriedades básicas do modelo, mas a ênfase colocada nos aspectos combinatórios obscurecia um pouco seu potencial para aplicações em outras situações. Além do mais, vários argumentos geométricos usados nesses trabalhos só tiveram suas provas estabelecidas durante a “década da percolação” que ocorreu nos anos 80.

Em 1980 foi publicada a prova de que $p_c = 1/2$ é o valor do ponto crítico para a percolação de arestas independentes na rede bidimensional por Harry Kesten. O estudo de percolação moveu-se para dimensões mais altas um pouco mais tarde, por volta de 1986 e várias questões matemáticas desta época foram resolvidas até 1989. O interesse no modelo de aglomerados aleatórios como uma ferramenta para o estudo do modelo de Ising/Potts foi despertado por volta de 1987. Swendsen e Wang utilizaram o modelo para propor um algoritmo de evolução temporal do modelo Potts; Aizenman, Chayes e Newman o usaram para mostrar a descontinuidade da magnetização, no modelo de Ising/Potts uni-dimensional de longo alcance.

Um dos principais projetos iniciados em 1992 era compreender a (in)validade da frase “tudo que vale a pena ser feito para o modelo de Ising/Potts é feito de maneira melhor via modelo de aglomerados aleatórios”. Há vários fatos que endossam esta afirmação, mas há também alguns pontos fracos. A representação em modelos de aglomerados aleatórios de parâmetros $(p, q) \in [0, 1] \times (0, \infty)$ possibilitou que muitos matemáticos dessem provas muito bonitas para fatos importantes incluindo: a descontinuidade da transição de fase para valores grandes do fator de dependência q , a existência de estados de Gibbs não-invariantes por translações para valores grandes do parâmetro p (estados de Dobrushin), a construção de Wulff em duas ou mais dimen-

sões, entre outros. Este tipo de modelo desempenha um papel importante em alguns sistemas quânticos em Mecânica Estatística, incluindo o modelo de Widom-Rowlinson do gás de rede e o modelo de Spin de vidro de Edwards-Anderson, colocando desafios novos e interessantes já que estes sistemas não tem a propriedade de ferromagnetismo (associação positiva).

O modelo de aglomerados aleatórios é entretanto apenas uma das técnicas necessárias para o estudo matemático do ferromagnetismo. A principal ilustração de suas limitações refere-se ao modelo de Ising. Este modelo, fundamental para o estudo de ferromagnetos, tem exatamente dois estados locais e uma característica especial do número 2 permite uma bela análise via a chamada “*random-current-representation*” que não parece ser possível de ser reproduzida pelas técnicas do modelo de aglomerados aleatórios.

A teoria do modelo de aglomerados aleatórios não é motivada apenas pelas aplicações em sistemas de spin mas também por causa da sua fonte de beleza e de seus próprios e interessantes problemas. Tais problemas envolvem geometria estocástica de sistemas interagentes em redes e também problemas de percolação.

Novos problemas apareceram e se juntaram aos antigos e a grande maioria deles refere-se à transição de fase no modelo bi-dimensional e sua relação com processos estocásticos conhecidos como SLE (Schramm-Löwner-Evolution). O estudo sobre os movimentos SLE foram intensamente desenvolvidos a partir de 1999, principalmente para percolação. Algumas contribuições de destaque nesta área foram dadas por Schramm, Smirnov, Lawler e Werner.

Uma das principais características deste modelo é a presença de transição de fase em dimensão maior ou igual que dois. A transição de fase pode ser estudada via a função de partição e está relacionada a pontos de não-analiticidade da mesma. Em grafos finitos isto não ocorre, pois esta função é simplesmente um polinômio nas variáveis de interesse p e q e portanto precisamos nos preocupar com grafos infinitos para que o fenômeno se manifeste. Isto pode ser feito de duas maneiras: ou tomando limites na topologia fraca (Limite Termodinâmico) ou olhando para as condições de consistência DLR (Dobrushin-Lanford-Ruelle).

Neste texto introduzimos a probabilidade de percolação e mostramos como este conceito nos levará à definição de transição de fase e à definição do ponto crítico $p_c(q)$. Quando $p < p_c$ conjectura-se, há muitos anos, que os aglomerados abertos contendo um determinado vértice de \mathbb{Z}^d seja controlado pelo decaimento exponencial de certas probabilidades. No último capítulo desta dissertação mostramos que esta conjectura é verdadeira para $d = 2$, como corolário do principal teorema do texto.

A fase super-crítica, quando $p > p_c$, tem sido palco recente de grandes resultados sobre a relação entre o modelo de Ising/Potts e o modelo de aglomerados aleatórios. Aqui merece um grande destaque a prova da chamada “Construção de Wulff” para o modelo de Ising super-crítico. Uma versão da construção de Wulff é válida para o modelo de aglomerados aleatórios, mas sujeita a uma forte restrição no parâmetro p . Acredita-se que esta construção possa ser feita até o ponto crítico p_c , mas esta conjectura ainda permanece em aberto, mesmo quando $q = 1$ e 2 . Outro grande problema nesta área é a prova da unicidade do aglomerado infinito quando $p \geq p_c$. Esta será dada aqui para todo $q \geq 1$.

A auto-dualidade da rede bidimensional \mathbb{Z}^2 é complementada pela relação de dualidade para as medidas do modelo de aglomerados aleatórios em grafos planares e esta

ferramenta permite uma compreensão muito grande do comportamento desse modelo em duas dimensões. Uma das conjecturas mais importantes sobre esse modelo em dimensão dois era que o ponto crítico coincidia com o ponto auto-dual, isto é,

$$p_c(q) = \frac{\sqrt{q}}{1 + \sqrt{q}}.$$

Este fato era conhecido para $q = 1$ (percolação) e na verdade este foi um dos resultados mais celebrados da “década da percolação”. Para $q = 2$ o cálculo exato foi feito primeiramente pelo Físico-Químico Lars Onsager e por este feito Onsager recebeu em 1968 o prêmio nobel de Química. Alguns anos mais tarde em um célebre artigo, Smirnov [Ann. of Math. 172 (2010) 1435-1467] definiu um observável para o modelo de aglomerados aleatórios no ponto auto-dual com $q = 2$ e o usou para obter a invariância conforme no limite de escalas do modelo de Ising. Isto possibilitou que Smirnov reobtivesse o resultado de Onsager, mas introduzindo uma nova maneira de fazer o cálculo explícito da temperatura crítica do modelo de Ising. Por este importante resultado Smirnov em 2010 acabou recebendo a Medalha Fields que é um dos prêmios de maior prestígio na comunidade matemática.

O principal objetivo desta dissertação é apresentar a prova da conjectura enunciada acima para todo $q \geq 1$. Para isto vamos nos basear no trabalho dos matemáticos Vincent Beffara e Hugo Duminil-Copin intitulado: *The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for $q \geq 1$* , Probability Theory and Related Fields, 153 (2012), pag. 511-542.

Esta dissertação dividida da seguinte forma. O Capítulo 1 contém duas seções. A primeira está dedicada ao estudo do modelo de Percolação de Bernoulli e alguns resultados importantes para seu estudo, como a Desigualdade de FKG e o Teorema de Existência de Transição de Fase. A segunda seção está centrada no estudo do modelo de aglomerados aleatórios a volumes finito e infinito. Estudamos a existência de transição de fase, as propriedades do Domínio de Markov, da Energia Finita e alguns resultados preliminares que serão úteis ao longo do texto. Em seguida, introduzimos um conceito fundamental da Mecânica Estatística, que é o conceito de condição de fronteira. São apresentadas duas definições não-equivalentes e discutimos com finalidade de tornar simples alguns cálculos que podem ser feitos rapidamente utilizando a primeira definição e usamos a segunda para introduzir as chamadas condição de fronteira periódicas. Assim vamos poder trabalhar sem nenhuma dificuldade com as diferentes maneiras de ver o toro bidimensional de tamanho n , notação \mathbb{T}_n .

O Capítulo 2 é dedicado a demonstrar diversos teoremas que nos fornecem estimativas de eventos de cruzamento no ponto auto-dual dentro de um toro bidimensional de tamanho n , que irão auxiliar na prova da generalização do célebre Teorema de Russo-Seymour-Welsh, que é bastante conhecido para o modelo de percolação de arestas independentes.

Finalmente, o Capítulo 3 é dedicado exclusivamente ao cálculo do ponto crítico do modelo de aglomerados aleatórios em dimensão dois com parâmetro $q \geq 1$ e uma aplicação deste resultado referente ao decaimento exponencial da função de dois pontos. A prova apresentada é inspirada no conhecido *Argumento de Zhang*, adaptado para este tipo de percolação dependente.

OS MODELOS DE PERCOLAÇÃO E AGLOMERADOS ALEATÓRIOS

Neste capítulo abordamos dois modelos importantes da Mecânica Estatística: o modelo de Percolação de Bernoulli ou modelo de arestas independentes, e o modelo de Aglomerados Aleatórios. O último pode ser visto como uma generalização do modelo de Percolação de Bernoulli e também de outros conhecidos modelos tais como: modelo de Potts e o modelo de Ising, ver Capítulo 1 da referência [13].

O modelo de Ising foi introduzido em 1925 com objetivo de modelar um ferromagneto. Um pouco mais tarde em 1957 aparece o modelo de Percolação de Bernoulli para modelar matematicamente meios porosos. Ambos modelos têm sido intensamente estudados e sobre eles já foi produzida uma quantidade numerosa de trabalhos notáveis. Em 1960, *Piet Kasteleyn* notou que o modelo de percolação de Bernoulli e o modelo de Ising satisfaziam as propriedades das chamadas leis *série/paralelo* (veja o Teorema 3.91 de [13], pag. 62). Essa simples observação levou *Piet Kasteleyn* e *Cees Fortuin* a formularem o conhecido modelo de aglomerados aleatórios. Esse novo modelo é basicamente determinado por dois parâmetros, p e q , onde $p \in [0, 1]$ e $q > 0$. O modelo de percolação de Bernoulli é obtido fazendo $q = 1$. Quando $q = 2$ obtemos o modelo de Ising, e para $q = 2, 3, \dots$ obtemos similarmente o modelo de Potts de q estados.

2.1 - Percolação de Bernoulli

O modelo de Percolação de Bernoulli é provavelmente o modelo mais simples da Mecânica Estatística. Esse tipo de percolação foi introduzido por Broadbent e Hammersley em 1957 como modelo para um fluido num meio poroso. Percolação é a ação ou processo de passar um líquido através de um meio, para filtrar ou para extrair substâncias desse meio. A percolação é um fenômeno da vida cotidiana, por exemplo: podemos dizer que a água em forma de vapor “percola” através do café moído na cafeteira. Porém, se a concentração de café no filtro fosse extremamente alta a água poderia não percolar, pois não encontraria espaços livres entre os poros para o fazer. Outros exemplos de percolação são:

- A extração de petróleo do subsolo, fazendo-o percolar através do meio rochoso /poroso.

- A percolação de infecções ou epidemias através de uma população: se a probabilidade de contágio é alta, a infecção se propaga ou percola numa população dada.

Um grafo é um par $G = (V, E)$, onde V é um conjunto qualquer não vazio cujos elementos são chamados de vértices e E é formado por pares não ordenados de elementos de V , cujos elementos são chamados de arestas.

Agora definiremos o modelo formalmente. Uma configuração ω sobre um grafo $G = (V, E)$ é um elemento de

$$\Omega = \{0, 1\}^E,$$

isto é, uma configuração é uma função $\omega : E \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $e \mapsto \omega(e)$, para cada $e \in E$. Diremos que uma aresta $e = e(\omega)$ é aberta (ou que ela tem estado aberto) na configuração ω se $\omega(e) = 1$. Analogamente, diremos que uma aresta $e = e(\omega)$ é fechada (ou que ela tem estado fechado) na configuração ω se $\omega(e) = 0$. A configuração ω pode ser vista como um subgrafo de G , composto dos mesmos vértices de G e de um subconjunto de arestas de E , já que sempre existe uma correspondência biunívoca entre um elemento de Ω e o conjunto $\{e \in E : \omega(e) = 1\}$ de arestas abertas de G . Assim uma configuração pode ser vista como um vetor indexado pelas arestas de E , cujas componentes são compostas pelos estados das arestas de G .

Chamaremos de evento cilíndrico ao conjunto de configurações de Ω nas quais fixamos os estados de um número finito de arestas e deixamos variar os estados das arestas restantes da rede, ou seja,

$$C(F, \omega) = \{\sigma \in \Omega : \sigma(e) = \omega(e), \quad \forall e \in F\},$$

onde F é um subconjunto finito de E e $\omega \in \Omega$, veja Figura (2.1).

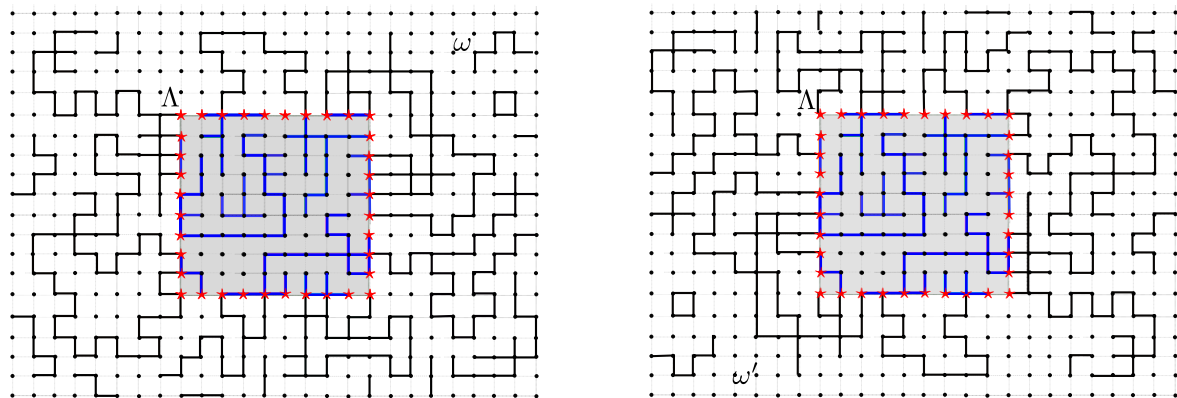


Figura 2.1: as configurações ω, ω' pertencem ao mesmo evento cilíndrico, já que os estados das arestas de ambas configurações dentro da caixa Λ (arestas azuis) coincidem e fora dela variam.

Seja \mathcal{F} a σ -álgebra associada ao espaço amostral Ω gerada pelos eventos cilíndricos. A σ -álgebra \mathcal{F} é obtida pelo uso do Teorema de Extensão de Hahn Kolmogorov (veja Teorema 12 de [1], pag. 333) da seguinte forma: primeiro consideramos o conjunto C de todos os eventos cilíndricos finitos-dimensionais de Ω , em seguida, definimos o conjunto $\wp = \wp(C)$ como o conjunto das uniões finitas de eventos cilíndricos de Ω . O

conjunto \wp é de fato um álgebra sobre Ω , obtendo o espaço de medida (Ω, \wp, μ) onde a medida μ é definida por

$$\mu(C(F, \omega)) = p^{\#\{e \in F: \omega(e)=1\}} (1-p)^{\#\{e \in F: \omega(e)=0\}},$$

para cada $p \in [0, 1]$.

Logo pelo Teorema de Extensão de Hahn Kolmogorov existe uma única medida (denotada por) $P_{p,G} : \mathcal{F} = \sigma(\wp) \rightarrow [0, 1]$ tal que para cada configuração $\omega \in \Omega$ ($p \in [0, 1]$)

$$P_{p,G}(C(F, \omega)) = p^{\#\{e \in F: \omega(e)=1\}} (1-p)^{\#\{e \in F: \omega(e)=0\}} \quad \forall C(F, \omega) \in C.$$

e $P_{p,G} \upharpoonright_{\wp} (A) = \mu_{p,G}(A) \quad \forall A \in C$, obtendo assim nosso espaço de probabilidade desejado $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$.

Denotaremos por P_p a medida de probabilidade $P_{p,G}$, quando o grafo G estiver subentendido. Daí a probabilidade de uma configuração $\omega \in \Omega$ é

$$P_{p,G}(\omega) = p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)}, \quad (2.1)$$

onde $o(\omega)$ (resp. $c(\omega)$) representa o número de arestas abertas (resp. fechadas) na configuração ω .

Dados $u, v \in V$, se existir uma aresta unindo estes vértices, dizemos que u e v são vértices adjacentes. Definimos o grau de um vértice v como o número de vértices adjacentes a este, isto é, o grau de v é a cardinalidade do conjunto $\{u \in V : \{u, v\} \in E\}$. Diremos que um grafo é localmente finito se todos seus vértices tem grau finito.

Considerando $G = (V, E)$ um grafo contável, localmente finito e que tenha estrutura de grupo, uma das propriedades importantes da medida de percolação de Bernoulli se relaciona com o conceito de medida ergódica (uma prova deste fato é dada no apêndice deste trabalho e foi extraída da referência [5], Lema 1, pag.118). Outro fato interessante é que a medida de Bernoulli $P_{p,G}$ é invariante por automorfismos (veja o Teorema 4.19 de [13], pag.19), em particular é invariante por translações.

Por outro lado, definindo a rede hipercúbica d -dimensional sendo o grafo $\mathbb{Z}^d = (V(\mathbb{Z}^d), E(\mathbb{Z}^d))$ (denotada por abuso de linguagem, por \mathbb{Z}^d), onde $V(\mathbb{Z}^d)$ representa o conjunto de vértices da rede e $E(\mathbb{Z}^d) = \{\{x, y\} \subset \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \|x - y\| = 1\}$ é o conjunto de arestas de primeiros vizinhos, onde $\|\cdot\|$ é uma norma ℓ^1 em \mathbb{Z}^d .

A cada aresta de $E(\mathbb{Z}^d)$ será atribuído aleatoriamente o estado aberto ou fechado da seguinte maneira. Considere $\{\omega(e) : e \in E(\mathbb{Z}^d)\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (v.a's iid.) com distribuição comum de Bernoulli com parâmetro $p \in [0, 1]$. É chamada de medida de percolação de Bernoulli de parâmetro $p \in [0, 1]$ a única medida de probabilidade P_{p,\mathbb{Z}^d} sobre Ω tal que $P_{p,\mathbb{Z}^d}(\omega(e) = 1) = p$ e $P_{p,\mathbb{Z}^d}(\omega(e) = 0) = 1 - p$, para cada $e \in E(\mathbb{Z}^d)$. A esperança com respeito a esta medida de probabilidade será denotado por E_p .

Estamos interessados em propriedades de conectividade na configuração ω quando $G = \mathbb{Z}^2$. Daqui em diante nos restringiremos a trabalhar com modelos de nosso interesse, modelos de percolação em duas dimensões.

2.1.1 Algumas Definições e uma Ferramenta Útil

No que segue, apresentamos algumas definições e uma ferramenta útil que serão relevantes no decorrer de nosso trabalho.

Um conjunto de arestas de $E(\mathbb{Z}^2)$, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, onde $e_i = \{x_i, y_i\}$, $x_i, y_i \in \mathbb{Z}^2$, $n \geq 1$, $i = 1, \dots, n$, será dito um *caminho* se x_1, x_2, \dots, x_n forem distintos e $y_i = x_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$ (na linguagem de grafos x_1, x_2, \dots, x_n forma um passeio sem laços, ou alternativamente um passeio auto-evitante). Dada uma configuração $\omega \in \{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^2)}$ um caminho $\{e_1, \dots, e_n\}$ é dito aberto em ω se todas suas arestas estiverem abertas (ie. $\omega(e_i) = 1, i = 1, \dots, n$). Um *circuito*, será um caminho $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tal que $y_n = x_1$, isto é, um circuito é um caminho que se fecha sobre si mesmo.

Diremos que dois vértices da rede \mathbb{Z}^2 , x, y , estão conectados na configuração $\omega \in \{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^2)}$, e escrevemos $x \leftrightarrow y$, se existir um caminho aberto $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ na configuração ω tal que $x_1 = x$ e $x_n = y$.

Denotemos por G um subgrafo de \mathbb{Z}^2 . O grafo G é dito conexo (ou conectado) se quaisquer dois de seu vértices podem ser ligados por um caminho aberto inteiramente contido em G .

Se definimos que cada vértice $x \in V(\mathbb{Z}^2)$ está conectado consigo mesmo, vê-se que a conectividade é uma relação de equivalência e à classes de equivalência em que se dividem os vértices serão chamados de “*aglomerados*” (ou sua expressão em inglês *clusters*, eles podem ser vértices isolados) da rede \mathbb{Z}^2 . Assim um *aglomerado aberto* é uma componente conexa de um subgrafo de arestas abertas de \mathbb{Z}^2 .

Denotamos por C_x o aglomerado do vértice x e por C o aglomerado da origem. Logo a notação $x \leftrightarrow \infty$ denotará o fato de que o aglomerado aberto que contem x possui infinitos vértices. Uma quantidade de grande interesse neste trabalho é o volume (ou cardinalidade) do aglomerado aberto do vértice x , isto é, $|C_x|$; mais precisamente em sua distribuição. Observe que $|C_x|$ é uma variável aleatória que pode assumir os valores $1, 2, \dots, \infty$. No modelo de Percolação de arestas independentes podemos mostrar que em grafos com invariância translacional, como \mathbb{Z}^2 , as variáveis aleatórias $|C_x|$ têm a mesma distribuição para todo $x \in \mathbb{Z}^2$ e portanto nos concentraremos no aglomerado da origem C . Uma quantidade de interesse é

$$\theta(p) = P_p(\{\omega \in \Omega : |C| = \infty\})$$

que por simplicidade de notação escreveremos apenas $\theta(p) = P_p(|C| = \infty)$. Segundo a notação introduzida acima temos que $\theta(p) = P_p(0 \leftrightarrow \infty)$. Mais a frente provamos que a percolação de Bernoulli sobre \mathbb{Z}^2 exibe uma transição de fase, isto é, existe um valor crítico não trivial (isto é no intervalo aberto $(0, 1)$) para o parâmetro p , abaixo do qual a probabilidade de existir aglomerados aleatórios infinitos é nula e acima do qual esta probabilidade é positiva.

Introduzimos a ordem parcial \preceq em Ω da seguinte maneira: para cada $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega$, $\omega \preceq \tilde{\omega} \Leftrightarrow \omega(e) \leq \tilde{\omega}(e), \forall e \in E(\mathbb{Z}^2)$. Uma variável aleatória X é dita crescente se for crescente na ordem parcial acima, isto é

$$X(\omega) \leq X(\tilde{\omega}) \quad \text{sempre que} \quad \omega \preceq \tilde{\omega}.$$

Um evento $A \in \mathcal{F}$ é dito *crescente* se 1_A , a função indicadora de A , for crescente, em outras palavras um evento A é crescente sempre que para cada configuração de arestas abertas em que A ocorre, ao abrirmos mais arestas nesta configuração, A continua ocorrendo. Exemplos comuns são: o evento $\{x \leftrightarrow y\}$ em que dois vértices estão

conectados por um caminho de arestas na rede \mathbb{Z}^2 , e o evento $\{|C| = \infty\}$ em que o aglomerado da origem é infinito.

Analogamente definimos que um evento $A \in \mathcal{F}$ é *decrecente* se -1_A é crescente.

TEOREMA 2.1 (Desigualdade FKG, [9], [12], [13]). *Se X e Y são duas variáveis aleatórias crescentes com segundo momento finito (isto é, $E_p(X^2) < \infty$ e $E_p(Y^2) < \infty$) em Ω , então*

$$E_p(XY) \geq E_p(X)E_p(Y).$$

Como caso particular, tomando $X = 1_A$ e $Y = 1_B$ onde A e B são eventos crescentes, obtemos que

$$P_p(A \cap B) \geq P_p(A)P_p(B).$$

Demonstração. Primeiro suponha que as variáveis aleatórias sejam crescentes e dependam dos estados de um conjunto finito de arestas e_1, e_2, \dots, e_n .

Vamos mostrar que a desigualdade é válida neste caso por indução em n . Suponhamos que $n = 1$, então X e Y são funções do estado $\omega(e_1)$ da aresta e_1 , onde $\omega(e_1) \in \{0, 1\}$. Ora como X e Y são variáveis aleatórias crescentes, para todo $\omega_1, \omega_2 \in \{0, 1\}$ temos

$$[X(\omega_1) - X(\omega_2)][Y(\omega_1) - Y(\omega_2)] \geq 0.$$

Definindo: $p_1 = P_p(\omega(e_1) = \omega_1)$, $p_2 = P_p(\omega(e_2) = \omega_2)$, $p_{1,2} = P_p(\omega(e_1) = \omega_1, \omega(e_2) = \omega_2)$. Como as variáveis aleatórias $\omega(e_1)$, $\omega(e_2)$ são independentes, temos que $p_{1,2} = p_1 p_2$. Logo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{\omega_1, \omega_2} [X(\omega_1) - X(\omega_2)][Y(\omega_1) - Y(\omega_2)] p_1 p_2 \\ &= \sum_{\omega_1} X(\omega_1)Y(\omega_1) p_1 - \sum_{\omega_1, \omega_2} X(\omega_1)Y(\omega_2) p_{1,2} - \sum_{\omega_1, \omega_2} X(\omega_2)Y(\omega_1) p_{1,2} + \\ &\quad \sum_{\omega_2} X(\omega_2)Y(\omega_2) p_2 \\ &= 2[E_p(XY) - E_p(X)E_p(Y)], \end{aligned}$$

obtendo o resultado desejado.

Suponha que o resultado seja válido para todo $n < k$ e que X e Y são variáveis aleatórias crescentes dependendo dos estados $\omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_k)$ das arestas e_1, e_2, \dots, e_k . Como X e Y têm segundo momento finito então pela desigualdade de Cauchy-Schwarz a média $E_p(XY)$ é finita, portanto

$$E_p(XY) = E_p[E_p(XY \mid \omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_{k-1}))]. \quad (2.2)$$

Denotando $\omega^{(k-1)} = (\omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_{k-1}))$, $a^{(k-1)} = (a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$, onde $a_i \in$

$\{0, 1\}$, $i = 1, \dots, k$, temos que

$$\begin{aligned}
E_p(XY \mid \omega(e_1) = a_1, \omega(e_2) = a_2, \dots, \omega(e_{k-1}) = a_{k-1}) \\
&= E_p(XY \mid \omega^{(k-1)} = a^{(k-1)}) \\
&= \sum_{a_k} \underbrace{X(a^{(k-1)}, a_k)}_{\widehat{X}(a_k)} \underbrace{Y(a^{(k-1)}, a_k)}_{\widehat{Y}(a_k)} P_p(\omega(e_k) = a_k \mid \omega^{(k-1)} = a^{(k-1)}) \\
&= \sum_{a_k} \widehat{X}(a_k) \widehat{Y}(a_k) P_p(\omega(e_k) = a_k) \\
&= E_p(\widehat{X}\widehat{Y}) \\
&\geq E_p(\widehat{X})E_p(\widehat{Y}) \\
&= \sum_{a_k} X(a^{(k-1)}, a_k) P_p(\omega(e_k) = a_k \mid \omega^{(k-1)} = a^{(k-1)}) \times \\
&\quad \times \sum_{a_k} Y(a^{(k-1)}, a_k) P_p(\omega(e_k) = a_k \mid \omega^{(k-1)} = a^{(k-1)}) \\
&= E_p(X \mid \omega^{(k-1)} = a^{(k-1)}) E_p(Y \mid \omega^{(k-1)} = a^{(k-1)}) \\
&= E_p(X \mid \omega(e_1) = a_1, \omega(e_2) = a_2, \dots, \omega(e_{k-1}) = a_{k-1}) \times \\
&\quad \times E_p(Y \mid \omega(e_1) = a_1, \omega(e_2) = a_2, \dots, \omega(e_{k-1}) = a_{k-1})
\end{aligned}$$

onde na terceira e quinta igualdade se usou a independência das variáveis aleatórias $\omega(e_i)$, $i = 1, \dots, k$. Observe que as variáveis aleatórias \widehat{X} e \widehat{Y} são variáveis aleatórias crescentes que estão em função do estado $\omega(e_k)$, portanto a desigualdade da acima é consequência do caso $n = 1$.

Usando a desigualdade obtida acima em (2.2) temos que

$$\begin{aligned}
E_p(XY) \geq E_p[E_p(X \mid \omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_{k-1})) \times \\
\times E_p(Y \mid \omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_{k-1}))]. \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos as seguintes seqüências de variáveis aleatórias $X_n = E_p(X \mid \omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_n))$ e $Y_n = E_p(Y \mid \omega(e_1), \omega(e_2), \dots, \omega(e_n))$. Observe que as variáveis aleatórias X_{k-1} e Y_{k-1} são crescentes e estão em função dos estados das $k-1$ arestas, logo pela hipótese de indução temos

$$E_p(X_{k-1}Y_{k-1}) \geq E_p(X_{k-1}) E_p(Y_{k-1}).$$

Usando esta desigualdade no lado direito de (2.3) ficamos com

$$E_p(XY) \geq E_p(X_{k-1}Y_{k-1}) \geq E_p(X_{k-1}) E_p(Y_{k-1}) = E_p(X)E_p(Y),$$

onde na última igualdade usamos que X e Y têm primeiro momento finito já que estas variáveis aleatórias têm segundo momento finito.

Por último mostramos que a desigualdade de FKG permanece válida para o caso em que X e Y dependem dos estados de uma quantidade infinita de arestas.

Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias crescentes com segundo momento finito e seja e_1, e_2, \dots , uma enumeração das arestas do grafo. As v.a.'s X_n e Y_n (como definidas acima) são funções crescentes e dependem apenas dos estados das arestas e_1, e_2, \dots, e_n . Sob estas hipóteses já sabemos que é válida a seguinte desigualdade

$$E_p(X_n Y_n) \geq E_p(X_n) E_p(Y_n). \quad (2.4)$$

Segue da definição de X_n e Y_n e das propriedades da esperança condicional que $E_p(X_n) = E_p(X) < \infty$ e $E_p(Y_n) = E_p(Y) < \infty$. Logo pelo Teorema de Convergência de Martingales (veja [8]), temos que quando $n \rightarrow \infty$

$$X_n \rightarrow X \quad \text{e} \quad Y_n \rightarrow Y \quad P_p - q.c \quad \text{e em } \mathbb{L}^2(P_p).$$

Além disso pelas desigualdades triangular e de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned} E_p |X_n Y_n - XY| &\leq E_p (|(X_n - X)Y_n| + |X(Y_n - Y)|) \\ &\leq \sqrt{E_p(X_n - X)^2 E_p(Y_n^2)} \sqrt{E_p(Y_n - Y)^2 E_p(X^2)} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

É fácil ver que o limite acima implica que $E_p(X_n Y_n) \rightarrow E_p(XY)$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ em (2.4) obtemos o resultado. ■

2.1.2 Grafos Planares

A teoria de dualidade planar fornece uma técnica interessante para o estudo de percolação de Bernoulli. Intuitivamente, um grafo é chamado *planar* se este pode ser mergulhado em \mathbb{R}^2 de tal forma que quaisquer duas de suas arestas se interceptam somente num vértice comum. Mais precisamente, fixe um conjunto infinito de pontos p_1, p_2, \dots em \mathbb{R}^3 tal que qualquer plano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ possui no máximo três destes pontos. Denotamos por (p_i, p_j) o segmento de reta unindo p_i a p_j (aberto ou fechado, como preferir). Para cada grafo $G = (V, E)$ vamos construir um espaço topológico $R(G)$ em \mathbb{R}^3 usando a sequência fixada p_1, p_2, \dots da seguinte maneira: se $G = (V, E)$ e $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ definimos

$$R(G) = \bigcup_{\{v_i, v_j\} \in E} (p_i, p_j) \cup \bigcup_{j=1}^n \{p_j\} \subset \mathbb{R}^3.$$

O espaço topológico $R(G)$ é chamado de uma realização de G . Observamos que se construirmos uma outra realização de G , digamos $\tilde{R}(G)$, a partir de uma outra sequência $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots$ também com a propriedade de que nenhum plano de \mathbb{R}^3 contém mais de três pontos desta coleção, então as realizações $\tilde{R}(G)$ e $R(G)$ são homeomorfas. Este fato mostra que a seguinte definição independe da escolha da sequência p_1, p_2, \dots .

Observamos que a definição de $R(G)$ dada acima estende-se naturalmente para o caso em que G é um grafo infinito enumerável, isto é, V tem a cardinalidade de \mathbb{N} .

DEFINIÇÃO 2.1 (Grafo Planar). *Um grafo $G = (V, E)$ enumerável é dito planar se $R(G)$ é homeomorfo a algum subconjunto do plano \mathbb{R}^2 .*

Observamos que para todo grafo planar G sempre existe um homeomorfismo φ que leva $R(G)$ em um subconjunto $\varphi(R(G)) \subset \mathbb{R}^2$ de forma que cada aresta de G é representada no plano por um segmento de reta. Para maiores detalhes ver [4] página 20.

Se G é um grafo planar, então a menos de homeomorfismos, podemos pensar em $R(G)$ como um subconjunto de \mathbb{R}^2 . Cada componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus R(G)$ é chamada de uma face de G . Com as noções introduzidas acima podemos provar a famosa: 1ª *Fórmula de Euler* para grafos planares.

TEOREMA 2.1 (1ª Fórmula de Euler). *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo, finito e planar. Se f denota o número de faces de G então*

$$|V| - |E| + f = 2.$$

Demonstração. A prova será feita por indução no número de faces de G . Se $f = 1$, então G não contém ciclos e logo é um grafo árvore. Já que para todo grafo árvore temos que $|E| = |V| - 1$ temos que a fórmula é verdadeira. Vamos supor agora que $f > 1$ e que o resultado é verdadeiro para valores menores que f . Seja $\{a, b\}$ uma aresta contida em algum ciclo de G . Já que um ciclo separa o plano em duas faces a aresta $\{a, b\}$ está contida na fronteira destas duas faces que vamos denotar por S e T .

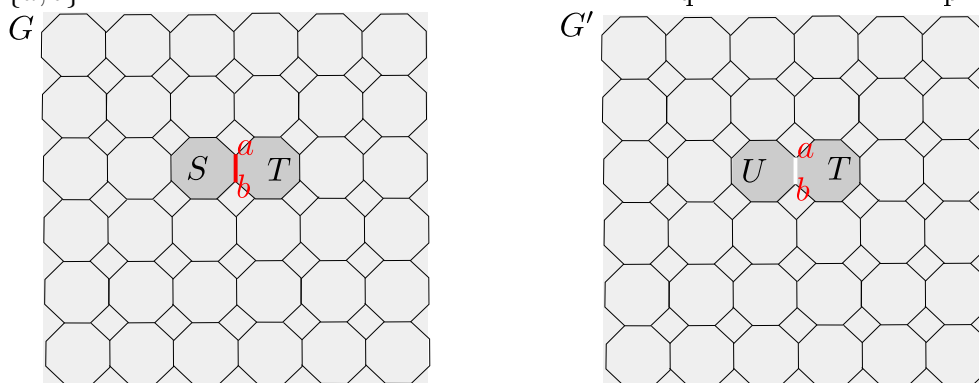


Figura 2.2: Os grafos G e G'

Considere o grafo G' obtido a partir de G pela remoção da aresta $\{a, b\}$, veja Figura 2.2. Observe que G e G' têm as mesmas faces exceto as faces S e T que após a remoção da aresta $\{a, b\}$ se fundiram em uma nova face que chamaremos de U . Se f' denota o número de faces de G' segue da hipótese de indução que

$$|V| - (|E| - 1) + f' = 2.$$

Usando que $f' = f - 1$ na última igualdade temos que $|V| - |E| + f = 2$. ■

O seguinte resultado é consequência direta do teorema de Euler, conhecida como: 2ª *Fórmula de Euler*, cuja aplicação será fundamental no próximo capítulo, sobre a dualidade de um grafo.

COROLÁRIO 2.1 (2ª Fórmula de Euler). *Seja $G = (V, E)$ um grafo (não necessariamente conexo), finito e planar. Se f denota o número de faces de G e K o número de componentes conexas de G então*

$$|V| - |E| + f = K + 1.$$

Demonstração. Sejam $|V_i|$ o número de vértices, $|E_i|$ o número de arestas e f_i o número de faces da i -ésima componente conexa de G , com $i = 1, \dots, K$. Pelo teorema anterior, temos que

$$|V_i| - |E_i| + f_i = 2 \quad i = 1, \dots, K \quad (2.5)$$

Observamos que $|V| = \sum_{i=1}^K |V_i|$, $|E| = \sum_{i=1}^K |E_i|$ e que o número $\sum_{i=1}^K f_i$ conta K -vezes a única face infinita de G , logo $\sum_{i=1}^K (f_i - 1) + 1$ contará o número de faces no grafo G (incluindo a única face infinita de G). Isto é, $f = \sum_{i=1}^K (f_i - 1) + 1$. Somando em i na equação (2.5) finalmente obtemos

$$|V| - |E| + (f + K - 1) = 2K.$$

O que conclui a prova. ■

DEFINIÇÃO 2.2 (Ponte). *Seja $G = (V, E)$ um grafo finito. Uma aresta $e \in E$ é chamada de ponte, se o grafo $(V, E \setminus \{e\})$ tem uma componente conexa a mais do que G .*

Seja G um grafo finito conexo planar com $|V|$ vértices, $|E|$ arestas e f faces. Denote por f_i o número de faces tendo exatamente i arestas em suas fronteiras. Claramente

$$\sum_i f_i = f,$$

e quando G não possui pontes, já que toda aresta está na fronteira de duas faces, temos também que

$$\sum_i i f_i = 2|E|.$$

DEFINIÇÃO 2.3 (Cintura). *A cintura g de um grafo G é o número de arestas dos ciclos de menor comprimento em G . Se G é acíclico então dizemos que a cintura de G é infinito, isto é $g = \infty$.*

TEOREMA 2.2. *Se $G = (V, E)$ um grafo planar com $|V| \geq 3$ então $|E| \leq 3|V| - 6$. Além do mais, se a cintura de G satisfaz $3 \leq g < \infty$ então podemos afirmar que*

$$|E| \leq \max \left\{ \frac{g}{g-2}(|V| - 2), |V| - 1 \right\}.$$

Demonstração. Observe que a primeira afirmação reduz-se ao caso $g = 3$. Logo é suficiente mostrar que a segunda afirmação é válida. Se $|V| \leq g - 1$ então claramente G é acíclico. Logo $|E| \leq |V| - 1$. Vamos supor então que $g \leq |V|$ e que a afirmação seja válida para todo grafo planar $G' = (V', E')$ tal que $|V'| < |V|$. Podemos assumir sem perda de generalidade que G é conexo. Se existe uma ponte $e \in E'$ então $G' \setminus \{e\}$ é união de dois subgrafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ cujos conjuntos de vértices são disjuntos. Por indução temos que

$$\begin{aligned} |E| &= |E_1| + |E_2| + 1 \\ &\leq \max \left\{ \frac{g}{g-2}(|V_1| - 2), |V_1| - 1 \right\} + \max \left\{ \frac{g}{g-2}(|V_2| - 2), |V_2| - 1 \right\} + 1 \\ &\leq \max \left\{ \frac{g}{g-2}(|V| - 2), |V| - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se G não possui pontes então sabemos que

$$gf = g \sum_i f_i \leq \sum_{i \geq g} if_i \leq \sum_i if_i = 2|E|.$$

Pela Fórmula de Euler temos

$$|E| + 2 = |V| + f \leq |V| + \frac{2}{g}|E|,$$

de onde segue que

$$|E| \leq \frac{g}{g-2}(|V| - 2).$$

■

COROLÁRIO 2.2. *O toro bi-dimensional $\mathbb{T}_m = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, de comprimento m , não é um grafo planar.*

Demonstração. O toro \mathbb{T}_m tem m^2 vértices e $2m^2$ arestas. Uma vez que sua cintura é $g = 4$, se \mathbb{T}_m fosse um grafo planar então teríamos pelo teorema acima que

$$2m^2 \leq \frac{4}{4-2}(m^2 - 2) = 2m^2 - 4.$$

o que é um absurdo. ■

2.1.3 Dualidade

Um laço em um grafo é um tipo especial de “aresta” cujas extremidades são formadas pelo mesmo vértice. Na literatura este novo objeto matemático é normalmente chamado de multigrafo mas por questão de simplicidade vamos nos referir a tais objetos, neste texto, simplesmente por grafos. De agora em diante, vamos assumir que nossos grafos podem possuir laços.

Seja $G = (V, E)$ um grafo planar (finito ou infinito). Obtemos seu grafo dual $G^* = (V^*, E^*)$ como segue: colocamos um novo vértice, que chamaremos de vértice dual, dentro de cada face de G , incluindo as faces infinitas de G caso existam. Para cada $e \in E$ colocamos uma aresta dual $e^* = (x^*, y^*)$ unindo os dois vértices duais nas duas faces de G separadas por e . Se essas duas faces são as mesmas temos que $x^* = y^*$ e portanto e^* é um laço. Portanto, dado um grafo planar G sempre é possível obter seu grafo dual G^* . O grafo G (resp. G^*) é chamado de grafo primal (dual). Veja Figura 2.3.

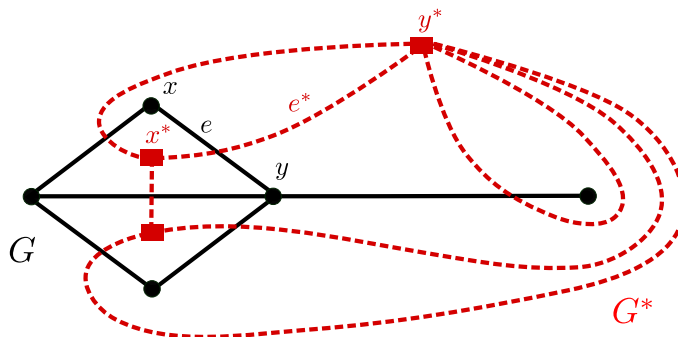


Figura 2.3: O grafo G (em linhas pretas contínuas) e seu grafo dual G^* (em linhas tracejadas vermelhas). O grafo G tem uma face infinita e o grafo dual G^* tem um laço. Exibe-se a aresta $e = \{x, y\}$ no grafo primal G e sua aresta dual $e^* = \{x^*, y^*\}$ no grafo dual G^* .

Assim V^* está em correspondência 1 – 1 com o conjunto de faces de G , e E^* está em correspondência 1 – 1 com E . A configuração $\omega \in \Omega = \{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^2)}$ dá lugar a uma configuração $\omega^* \in \Omega^* = \{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^{2*})}$ definida por $\omega^*(e^*) = 1 - \omega(e), \forall e^* \in E(\mathbb{Z}^{2*})$.

No modelo de percolação dizemos que uma aresta dual está aberta se a correspondente aresta sobre \mathbb{Z}^2 está fechada e vice-versa, logo a configuração ω^* é distribuída segundo um modelo de percolação de Bernoulli de parâmetro $p^* = 1 - p$.

Parte da rede \mathbb{Z}^2 e seu dual são representadas na Figura 2.4.

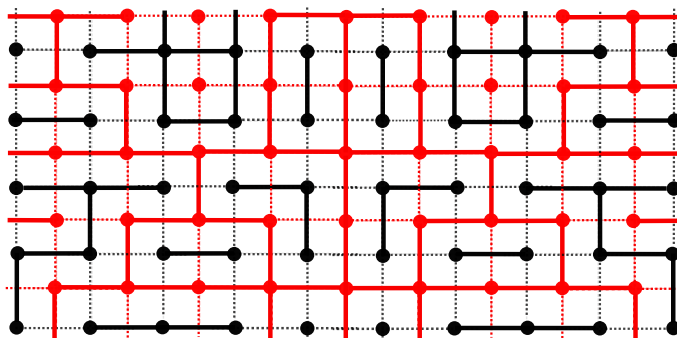


Figura 2.4: parte de uma configuração junto com sua configuração dual na rede \mathbb{Z}^2 . As arestas abertas da rede primal (resp. dual) são representadas por linhas sólidas pretas (resp. vermelhas) e as fechadas por linhas pretas (resp. vermelhas) tracejadas.

2.1.4 Transição de Fase para a percolação de Bernoulli sobre \mathbb{Z}^2

Quando esquentamos um bloco de gelo, o bloco de gelo tende a derreter-se. Este processo esconde um fenômeno que nos é familiar, porém é mais complexo do que imaginamos, já que as propriedades macroscópicas (aquelas que se podem medir de alguma forma ou de outra, como por exemplo: cor, textura, temperatura, peso, volume, etc...) da água mudam de maneira não contínua quando variamos temperatura.

Este exemplo da vida cotidiana é um exemplo de uma transição de fase. Num sistema composto por muitas partículas que interagem a nível local com outras partículas, uma transição de fase ocorre se uma propriedade macroscópica do sistema muda de repente quando um parâmetro macroscópico, como a temperatura, pressão, densidade, etc..., varia continuamente. Nesta seção daremos um significado matemático preciso para o que se entende atualmente por transição de fase no modelo de percolação. Apresentamos também nesta seção, como consequência do Teorema 2.2 e do Lema 2.1, a prova de que o modelo de percolação de arestas de Bernoulli na rede \mathbb{Z}^2 passa por esta transição de fase.

Acoplamento Crescente entre diferentes configurações de percolação

Desejamos saber como é o comportamento da função: $p \mapsto \theta(p) = P_p(0 \leftrightarrow \infty)$, $\forall p \in [0, 1]$. Poderia acontecer de existir $p < p'$ tal que para a percolação de parâmetro p existe uma componente conexa infinita quase certamente, mas não existe uma tal

componente conexa infinita para a percolação de parâmetro p' . É claro que este fenômeno é contraditório com nossa intuição, já que o modelo de percolação deve possuir mais arestas abertas quando p aumenta e portanto seria mais provável ver uma componente conexa infinita aberta no modelo em que o parâmetro p tem maior valor. A fim de formalizar esta ideia intuitiva de monotonicidade neste modelo, introduzimos a definição de acoplamento de duas medidas.

DEFINIÇÃO 2.4. *Um acoplamento de duas medidas de probabilidade ϕ_1 e ϕ_2 definidas sobre um espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) é uma medida de probabilidade ϕ sobre $(\Omega, \mathcal{F}) \times (\Omega, \mathcal{F})$ cuja primeira (resp. segunda) marginal é ϕ_1 (resp. ϕ_2)*

O método de acoplamento permite comparar diferentes medidas de probabilidade definidas sobre um mesmo espaço mensurável. Certamente existem numerosos acoplamentos de qualquer par de medidas ϕ_1 e ϕ_2 . A arte do acoplamento reside em encontrar um acoplamento útil para o problema de interesse.

PROPOSIÇÃO 2.1 (Acoplamento crescente). *Fixados $p, p' \in [0, 1]$ com $p < p'$, existe um acoplamento \mathbf{P} das medidas de probabilidade do modelo de percolação P_p e $P_{p'}$ definido sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2} \times \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ tal que*

$$\mathbf{P}\left(\{(\omega, \omega') : \omega \leq \omega'\}\right) = 1.$$

Demonstração. Considere uma família $(U_e : e \in \mathbb{Z}^2)$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) com distribuição uniforme em $[0, 1]$. Definamos as configurações $\omega, \omega' \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ como segue. Para todo $e \in \mathbb{Z}^2$

$$\omega(e) := \begin{cases} 1 & \text{se } U_e \leq p \\ 0 & \text{se } U_e > p \end{cases} \quad \omega'(e) := \begin{cases} 1 & \text{se } U_e \leq p' \\ 0 & \text{se } U_e > p'. \end{cases}$$

Observamos que cada aresta em ω está aberta com probabilidade p e fechada com probabilidade $1 - p$, independentemente das demais arestas. Analogamente, em ω' as arestas estão abertas com probabilidade p' e fechadas com probabilidade $1 - p'$ independentemente umas das outras. Como $\omega \leq \omega'$ sempre que $p < p'$, definimos \mathbf{P} pela lei da distribuição conjunta dos vetores aleatórios $(\omega(e), \omega'(e))_{\{e \in E\}}$. Por construção, temos imediatamente que as marginais de \mathbf{P} são P_p e $P_{p'}$. ■

Considere o ponto

$$p_c = \inf\{p \in [0, 1] : P_p(0 \leftrightarrow \infty) > 0\}.$$

Como as marginais de \mathbf{P} são P_p e $P_{p'}$, usando o teorema de Fubini obtemos as seguintes igualdades:

$$P_p(0 \leftrightarrow \infty) = \mathbf{P}(0 \leftrightarrow \infty \text{ em } \omega) \quad \text{e} \quad P_{p'}(0 \leftrightarrow \infty) = \mathbf{P}(0 \leftrightarrow \infty \text{ em } \omega'),$$

onde

$$\{0 \leftrightarrow \infty \text{ em } \omega\} = \{(\omega, \omega') \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2} \times \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2} : 0 \leftrightarrow \infty \text{ ocorre em } \omega\}.$$

Posto que $\omega \leq \omega'$, se a origem estiver em um aglomerado infinito em ω , então a origem também estará em um aglomerado infinito em ω' . Usando as propriedades do acoplamento \mathbf{P} temos a seguinte desigualdade:

$$P_p(0 \leftrightarrow \infty) = \mathbf{P}(0 \leftrightarrow \infty \text{ em } \omega) \leq \mathbf{P}(0 \leftrightarrow \infty \text{ em } \omega') = P_{p'}(0 \leftrightarrow \infty).$$

A desigualdade acima na verdade prova que a função $\theta(p) = P_p(0 \leftrightarrow \infty)$ é não-decrescente com respeito a p . Abaixo, no Teorema 2.2 vamos mostrar que o ponto crítico p_c é não-trivial, isto é, $p_c \in (0, 1)$.

Cabe destacar que no modelo de percolação em que $p = 0$, todas as arestas da rede estariam fechadas. Por outro lado, se $p = 1$ o aglomerado da origem é \mathbb{Z}^2 quase certamente com respeito a P_p com $p = 1$, pois todas as arestas estariam abertas quase certamente e este conjunto de arestas é enumerável. Note que esta observação não prova a existência de um ponto crítico para o modelo de percolação na rede bi-dimensional, pois poderíamos ter

$$P_p(0 \leftrightarrow \infty) = 0 \quad \text{para todo } p < 1.$$

Um dos problemas que ainda permanece em aberto e que é de grande interesse em percolação é calcular exatamente o valor ponto crítico do modelo de percolação de arestas independentes em d dimensões com $d \geq 3$. No restante deste trabalho nos ocuparemos de fazer esse cálculo, tanto como para o modelos de arestas independentes como para os modelos de aglomerados aleatórios na rede \mathbb{Z}^2 .

TEOREMA 2.2 (Existência de Transição de Fase, [5], [9], [12]). *Para o modelo de percolação de arestas independentes sobre \mathbb{Z}^2 , existe $p_c(2) \in (0, 1)$, chamado de ponto crítico, tal que*

$$\begin{cases} \theta(p) = 0, & \text{se } p < p_c(2); \\ \theta(p) > 0, & \text{se } p > p_c(2). \end{cases}$$

Observações. O teorema acima nos diz que o modelo de percolação de arestas independentes com parâmetro p não possui aglomerados infinitos quase certamente, se $p < p_c(2)$. Por outro lado, encontramos, com probabilidade positiva, pelo menos um aglomerado infinito se $p > p_c(2)$. Esta mudança de comportamento do modelo com respeito a existência ou não de um aglomerado infinito é chamada de transição de fase. Quando $p < p_c(2)$ dizemos que o modelo está na *fase sub-crítica*. Já para $p = p_c(2)$ dizemos que ele está na *fase crítica* e finalmente para $p > p_c(2)$ dizemos que ele está na *fase super-crítica*.

Este teorema também é válido para o modelo de percolação de arestas independentes em \mathbb{Z}^d para todo $d \geq 3$. Em dimensões $d \geq 3$ muita coisa já é bem conhecida nas fases sub-crítica e super-crítica, porém a fase crítica permanece bastante misteriosa. Vale ressaltar neste ponto que o problema em aberto mais famoso nesta área é saber se existe um aglomerado infinito em $p = p_c(d)$, para $d \geq 3$.

Não se conhece ainda uma fórmula geral para $p_c(d)$, com exceção de $d = 1, 2$. Para $d = 1$ o modelo é de certa forma trivial pois, exceto para $p = 1$ não existe nenhum aglomerado infinito quase certamente, por Borel-Cantelli e portanto $p_c(1) = 1$. Já para $d = 2$ o cálculo explícito do ponto crítico é o célebre Teorema de Kesten. Este é um resultado muito profundo e de enorme importância na história da percolação. Kesten provou seu famoso teorema na década de 80 mostrando que $p_c(2) = 1/2$. Além de

obter o valor explícito de $p_c(2)$, em seu famoso artigo Harry Kesten também demonstra que não há percolação no ponto crítico em dimensão 2.

Demonstração do Teorema (2.2).

NÃO PERCOLAÇÃO PARA VALORES DE p PRÓXIMOS DE 0. Para a prova desta primeira parte, fixamos $n > 0$ e definimos Ω_n como sendo o conjunto de todos os caminhos em \mathbb{Z}^2 que saem da origem e tem pelo menos n arestas. Atenção, nenhuma aleatoriedade está envolvida na definição de Ω_n este conjunto depende apenas do grafo onde estamos considerando a percolação, que neste caso é o \mathbb{Z}^2 . Observe que se uma configuração possui um caminho aberto infinito contendo a origem então este caminho pertence a Ω_n , logo

$$\begin{aligned} P_p(0 \leftrightarrow \infty) &\leq P_p(\exists \gamma \in \Omega_n; \text{ tal que } \omega(e_k) = 1, \forall k \leq n) \\ &\leq \sum_{\gamma \in \Omega_n} P_p(\omega(e_k) = 1, \forall k \leq n) = |\Omega_n| p^n \leq (4p)^n, \end{aligned}$$

onde na ultima desigualdade usamos o fato de que para construir um caminho aberto de n arestas, existe 4 maneiras de escolher a primeira aresta, em seguida há no máximo 3 maneiras diferentes para a escolha da segunda aresta, depois no máximo 3 maneiras para escolha da terceira e assim por diante. Portanto temos a seguinte estimativa $|\Omega_n| \leq 4(3)^{n-1} \leq 4^n$. Notar que a quantidade da direita na desigualdade $P_p(0 \leftrightarrow \infty) \leq (4p)^n$ tende a 0 quando $p < 1/4$. Usando a monotonicidade de $\theta(p)$ deduzimos que $p_c \geq 1/4$. Observamos que a estimativa obtida acima não é suficiente ainda para garantir a existência de transição de fase para o modelo de percolação em \mathbb{Z}^2 . O que temos por enquanto é apenas a seguinte afirmação: se existir o ponto crítico $p_c(2)$ então ele deve ser pelo menos $1/4$.

PERCOLAÇÃO PARA VALORES DE p PRÓXIMOS DE 1. A prova desta segunda parte, é baseada no conceito de dualidade introduzido na Seção 2.1.3. Um fato geométrico elementar (veja [9], pag. 8) diz que, se em uma determinada configuração ω a origem não está conectada ao infinito, então ω^* contém um circuito aberto na rede dual cercado a origem. Veja Figura 2.5.

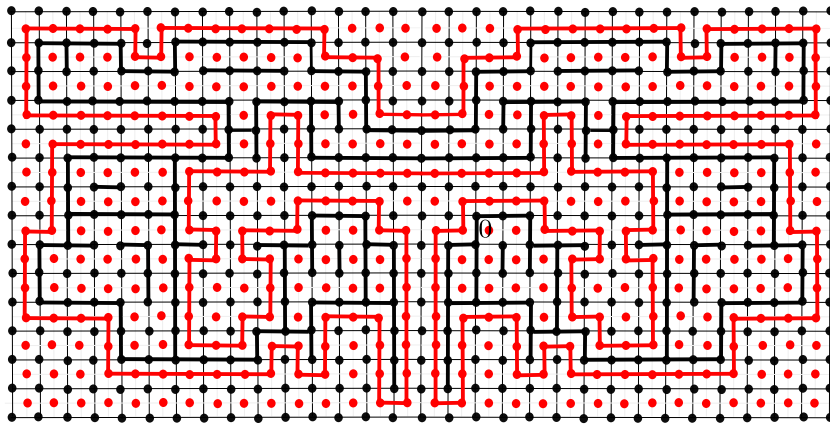


Figura 2.5: Um aglomerado aleatório finito da origem (em linhas sólidas pretas), sendo cercado por um circuito aberto na rede dual (em linhas sólidas vermelhas).

Seja $\Omega_{m,n}$ o conjunto de circuitos duais de comprimento m cercando a origem que passam por $(n + 1/2, 0)$. Para $p > 3/4$ temos as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} P_p(0 \not\leftrightarrow \infty) &= P_p \left(\exists \gamma \text{ aberto} \in \bigcup_{m,n} \Omega_{m,n} \right) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 2n+4} |\Omega_{m,n}| (1-p)^m \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 2n+4} (4-4p)^m \\ &\leq \frac{(4-4p)^6}{\log(4(1-p))}, \end{aligned}$$

onde na primeira e segunda desigualdades usamos o fato de que todo circuito dual que cerca a origem e passa por $(n + 1/2, 0)$ tem pelo menos $2n + 4$ arestas, na terceira desigualdade usamos uma comparação entre somas de Riemann e integrais junto com a hipótese $p > 3/4$. A cota superior obtida acima, apesar de não ter nenhum significado físico, mostra que se $p \approx 1$ (mais precisamente se $p > 3/4$) então $P_p(0 \not\leftrightarrow \infty) < 1$.

Desta desigualdade segue imediatamente que $P_p(0 \leftrightarrow \infty) > 0$ e portanto $p_c \leq 3/4 < 1$. Em outras palavras, para valores de p próximos de 1, a saber maiores que $3/4$, existe aglomerados infinitos. Portanto para valores de p próximos 1, existe percolação.

Finalmente, usando a monotonicidade de $\theta(p)$ podemos verificar que existe um valor crítico $p_c(2)$ não trivial, tal que se $p < p_c(2)$ então não temos aglomerado infinito quase certamente e se $p > p_c(2)$ então existe pelo menos um aglomerado infinito com probabilidade positiva. ■

OBSERVAÇÃO 2.1. *Na demonstração do Teorema 2.2 obtemos as seguintes estimativas para o ponto crítico em duas dimensões*

$$\frac{1}{4} \leq p_c(2) \leq \frac{3}{4}.$$

TEOREMA 2.3 (Unicidade do aglomerado, [5], [9], [12]). *Na fase supercrítica, isto é, $\theta(p) > 0$, existe um único aglomerado infinito quase certamente.*

A prova do Teorema 2.3 é semelhante a prova da unicidade do aglomerado infinito para o *modelo de aglomerados aleatórios* na fase supercrítica. Por isto decidimos apresentar o argumento diretamente para o modelo de aglomerados aleatórios quando formos fazer a prova do Teorema 2.12.

Como mencionado anteriormente em 1980 Kesten provou que o ponto crítico do modelo de percolação em \mathbb{Z}^2 , $p_c(2)$, é igual a $1/2$, que satisfaz a estimativa do Teorema 2.1.

No modelo de percolação de Bernoulli com parâmetro p é fácil ver que $p = 1/2$ é o único ponto para o qual p é igual a p^* . Chamamos a este ponto de *ponto auto-dual* e é denotado por p_{sd} (mais adiante definiremos formalmente o conceito de ponto auto-dual). Já que \mathbb{Z}^{2*} é simplesmente uma cópia de \mathbb{Z}^2 transladada pelo vetor $(1/2, 1/2)$

e que P_{p^*} é definida em termos de P_p , há uma certa simetria entre estes dois modelos de percolação. Como veremos a frente os principais resultados deste trabalho estão concentrados na análise do processo de percolação do modelo de aglomerados aleatórios na rede \mathbb{Z}^2 definidos no ponto $p_{sd} \in (0, 1)$, onde tais processos, bem como a percolação de elos independentes de Bernoulli, apresentam máxima semelhança possível.

O resultado de Kesten é muito importante, ele estabelece o principal teorema desta dissertação para o modelo de aglomerados aleatórios no caso $q = 1$. Na próxima seção apresentamos em detalhes o modelo de aglomerados aleatórios. Este modelo na rede \mathbb{Z}^2 é basicamente descrito por dois parâmetros $p \in [0, 1]$ e $q > 0$ e se reduz ao modelo de percolação de Bernoulli quando $q = 1$.

TEOREMA 2.4 (Kesten, [5], [9], [12]). *O ponto crítico da percolação de Bernoulli sobre \mathbb{Z}^2 é igual a seu ponto auto-dual, isto é,*

$$p_c(2) = \frac{1}{2} \quad \text{e além do mais} \quad P_{p_c}(0 \leftrightarrow \infty) = 0.$$

O Teorema 2.4 pode ser demonstrado utilizando os seguintes lemas:

LEMA 2.1 (Ref. [9], [12]). *Para o modelo de percolação de arestas independentes em \mathbb{Z}^2 com parâmetro $p = 1/2$, temos que*

$$P_{1/2}(0 \leftrightarrow \infty) = 0.$$

OBSERVAÇÃO 2.2. *Este resultado tem como consequência imediata que em duas dimensões $p_c(2) \geq 1/2$.*

LEMA 2.2 (Ref. [9], [12]). *Para o modelo de percolação de arestas independentes em \mathbb{Z}^2 com parâmetro p , temos que*

$$p_c(2) \leq \frac{1}{2}.$$

Optamos por omitir a prova do Lema (2.2) e apresentar a prova completa do Lema 2.1. A justificativa para isto é que a adaptação da prova do Lema 2.2 para o modelo de aglomerados aleatórios é muito mais elaborada e requer introdução de várias ideias novas. Já a prova do Lema 2.1 pode ser adaptada para o modelo de aglomerados aleatórios mais facilmente e no modelo de percolação independente a exposição das ideias envolvidas é bem mais simples.

Demonstração do Lema (2.1). Por contradição, assumamos que $P_{1/2}(0 \leftrightarrow \infty) > 0$. Em toda a demonstração vamos considerar $p = 1/2$. Para cada $n \geq 1$ defina a caixa $T(n) = [0, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2$, e os seguintes eventos:

$$A^u(n) = \left\{ \begin{array}{l} \text{algum vértice sobre o lado } u \text{ da caixa } T(n) \\ \text{está em um aglomerado aberto infinito de} \\ \mathbb{Z}^2 \text{ que não usa outros vértices de } T(n) \end{array} \right\}$$

e

$$R_n = \{\text{o único aglomerado aberto infinito em } \mathbb{Z}^2 \cap T(n)^c \text{ intersecta } T(n)\},$$

onde D^c denota o complemento do conjunto D , $u = e, d, c, b$ denota os lados esquerdo, direito, de cima e de baixo, respectivamente.

Observação: a notação $A^c(n)$ não deve ser confundida com a notação de complemento de conjunto.

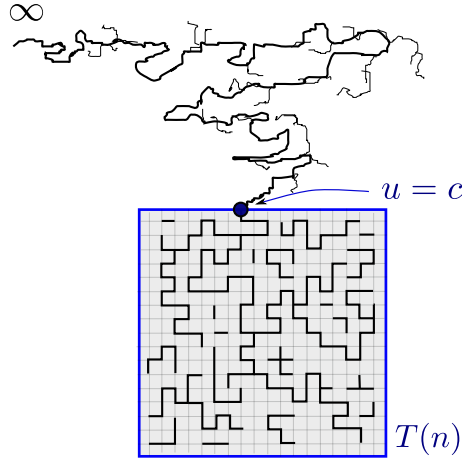


Figura 2.6: Exemplo de uma configuração em $A^c(n)$ conectando a parte de cima da caixa $T(n)$ “ao infinito”.

Observe que os eventos $A^e(n)$, $A^d(n)$, $A^c(n)$, e $A^b(n)$ são eventos crescentes. Além disso temos que

$$A^e(n) \cup A^d(n) \cup A^c(n) \cup A^b(n) = \{T(n) \leftrightarrow \infty\}. \quad (2.6)$$

Como a medida de probabilidade P_p é invariante por rotações de ângulo $\pi/2$ da rede \mathbb{Z}^2 , $\forall n \geq 1$ temos que

$$P_p(A^u(n)) = \text{const.}, \quad \text{onde } u = e, d, c, b \quad (2.7)$$

Definindo a variável aleatória η como o número de aglomerados abertos infinitos, segue do Teorema 2.3 que $P_p(\eta = 1) = 1$. Logo

$$\begin{aligned} 1 &= P_p(\eta = 1) \\ &= P_p\left(\bigcup_{n>0} R_n\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_p(R_n) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P_p(T(n) \leftrightarrow \infty) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_p(A^e(n) \cup A^d(n) \cup A^c(n) \cup A^b(n)) \end{aligned}$$

Onde na terceira igualdade fizemos uso da continuidade de probabilidade, já que a sequência de conjuntos $\{(R_n) : n \in \mathbb{N}\}$ é não-decrescente. Na desigualdade usamos simplesmente inclusão de conjuntos e na última igualdade fizemos uso de (2.6).

Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_p(A^e(n) \cup A^d(n) \cup A^c(n) \cup A^b(n)) = 1 \quad (2.8)$$

Pela Desigualdade FKG, por (2.7) e pelo “Truque da raiz quadrada”(Veja apêndice) obtemos

$$P_p(A^u(n)) \geq 1 - [1 - P_p(A^e(n) \cup A^d(n) \cup A^c(n) \cup A^b(n))]^{\frac{1}{4}} \quad \text{onde } u = e, d, c, b.$$

Usando (2.8) e o Teorema do Confronto podemos tomar o limite quando $n \rightarrow \infty$, na desigualdade acima e concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_p(A^u(n)) = 1, \quad \text{onde } u = e, d, c, b. \quad (2.9)$$

Agora tomamos $N \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq N$ então

$$P_p(A^u(n)) > \frac{7}{8}, \quad \text{onde } u = e, d, c, b. \quad (2.10)$$

Deslocando nossa rede por $(1/2, 1/2)$, definimos a caixa dual $T(n)^* = T(n-1) + (1/2, 1/2)$. Definimos agora o evento

$$B^u(n) = \left\{ \begin{array}{l} \text{algum vértice sobre o lado } u \text{ de } T(n)^* \text{ está em um aglomerado} \\ \text{aberto infinito da rede dual } \mathbb{Z}^{2*} \text{ sem usar outros vértices de } T(n)^* \end{array} \right\}$$

onde $u = e, d, c, b$.

Considere o evento $A = A^e(n) \cap A^d(n) \cap B^c(n) \cap B^b(n)$ visto como um subconjunto de Ω . Lembrando que $p = 1/2$, temos por (2.10) que

$$P_p(B^u(n)) = P_{1-p}(A^u(n)) > \frac{7}{8}, \quad \text{onde } u = e, d, c, b. \quad (2.11)$$

Logo, a probabilidade de que o evento A não ocorra é

$$\begin{aligned} P_p(\Omega \setminus A) &\leq P_p(\Omega \setminus A^e(n)) + P_p(\Omega \setminus A^d(n)) + P_{1-p}(\Omega \setminus B^c(n)) + P_{1-p}(\Omega \setminus B^b(n)) \\ &\leq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

onde fizemos o uso das desigualdades (2.10) e (2.11). Resumindo temos

$$P_{\frac{1}{2}}(A) \geq \frac{1}{2}. \quad (2.12)$$

Como quase certamente há apenas um aglomerado aberto infinito em \mathbb{Z}^2 e \mathbb{Z}^{2*} , então o aglomerado aberto infinito que intercepta o lado de cima de $T(N)^*$ deve estar conectado a algum ponto do aglomerado infinito que intercepta o lado de baixo de $T(N)^*$. Além do mais estes pontos se ligam por algum caminho aberto dentro de $T(N)$, pois estes aglomerados são impedidos de se unir fora de $T(N)^*$ por causa da existência de aglomerados infinitos na rede que interceptam os lados direito e esquerdo $T(N)$, veja figura abaixo:

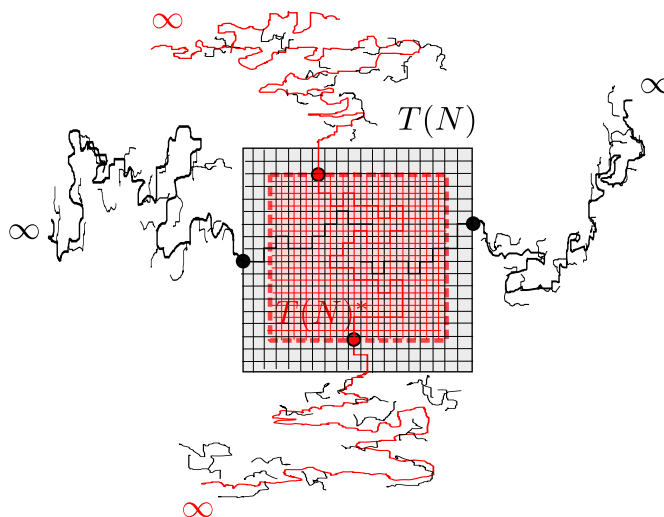


Figura 2.7: 4 braços. Cruzamento cima-baixo em $T(N)^*$ bloqueando cruzamento esquerda-direita em $T(N)$.

Mas isto implica a existência de pelo menos dois aglomerados infinitos em \mathbb{Z}^2 o que contradiz o Teorema da Unicidade do Aglomerado Infinito. Portanto concluímos que $P_{1/2}(A) = 0$, em contradição com (2.12). ■

2.2 - O Modelo de Aglomerados Aleatórios

Este modelo foi proposto por *Fortuin e Kasteleyn* [13] em 1972 e é uma generalização do modelo de percolação de Bernoulli de arestas independentes. Um modelo de aglomerados aleatórios é determinado por uma família de medidas de probabilidades que dependem de dois parâmetros, p e q , onde $p \in [0, 1]$ e $q > 0$. Esta família é usada para descrever um processo de percolação de arestas dependentes.

Sob certas condições (que serão precisamente explicadas a frente) o modelo de aglomerados aleatórios pode ser visto como um processo estocástico, onde as variáveis aleatórias são indexadas pelas arestas do grafo $\mathbb{Z}^2 = (V(\mathbb{Z}^2), E(\mathbb{Z}^2))$.

Pelo Teorema de Extensão de Kolmogorov não há nenhuma complicação para definir o processo de percolação de arestas independentes em toda rede \mathbb{Z}^2 . Já no modelo de aglomerados aleatórios, existem várias complicações para se fazer uma construção análoga, justamente por causa da estrutura de dependência entre as variáveis aleatórias. Para vencer estas dificuldades, vamos adotar o procedimento padrão que é usar o formalismo DLR (ou Propriedade de Markov). Ao longo desta seção introduzimos a ideia de condição de fronteira, alguns conceitos geométricos e o conceito de convergência fraca de medidas de probabilidade.

O Modelo de Aglomerados Aleatórios em Grafos Finitos

Seja $G = (V, E)$ um grafo finito. A cada função $\omega : E \rightarrow \{0, 1\}$ podemos associar um subgrafo de G cujo conjunto de vértices é V e o conjunto de arestas é dado por $\{e \in E : \omega(e) = 1\}$. Outra maneira de pensar neste subgrafo é pensar que as arestas de G podem estar abertas ou fechadas de acordo com os valores da função ω . Isto é, dizemos que e é uma aresta aberta se $\omega(e) = 1$ e fechada caso $\omega(e) = 0$. Desta forma podemos pensar na função ω como uma configuração do estados das arestas de G . Isto nos leva naturalmente a identificar ω com um ponto do espaço $\{0, 1\}^E$, que será nosso espaço amostral.

Uma configuração do modelo de aglomerados aleatórios em G é um elemento do espaço $\Omega_G \equiv \{0, 1\}^E$. Denotamos por $\eta(\omega) = \{e \in E : \omega(e) = 1\}$, o conjunto da arestas abertas do grafo G na configuração $\omega \in \Omega_G$ e $k(\omega)$ denotará o número de aglomerados (componentes conexas) do subgrafo $(V, \eta(\omega)) \subset G$. A medida de probabilidade do modelo de aglomerados aleatórios no grafo G com parâmetros p e q , onde $p \in [0, 1]$, $q > 0$ é uma medida de probabilidade denotada por $\phi_{p,q,G}$ que está definida na σ -álgebra das partes de Ω_G de forma que a probabilidade de um elemento arbitrário $\omega \in \Omega_G$ é dada por

$$\phi_{p,q,G}(\{\omega\}) = \frac{1}{Z_{p,q,G}} p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)} q^{k(\omega)}, \quad (2.13)$$

onde $o(\omega)$ (*resp.* $c(\omega)$) é o número de arestas abertas (*resp.* fechadas) em ω e a constante de normalização $Z_{p,q,G}$, conhecida também por função de partição, é dada por

$$Z_{p,q,G} = \sum_{\omega \in \Omega_G} p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)} q^{k(\omega)}.$$

O valor do parâmetro q pode ser qualquer número real positivo. Porém neste trabalho estamos mais interessados no caso $q \geq 1$. Note que se $q = 1$ então

$$\phi_{p,q,G}(\{\omega\}) = p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)}.$$

Portanto, neste caso, esta medida de probabilidade é uma medida produto de medidas de Bernoulli com parâmetro p , veja (2.1). Assim este modelo se reduz a um modelo de percolação de Bernoulli, em G , de arestas independentes.

Para cada $e \in E$, podemos pensar em $\omega(e)$ como uma variável aleatória no espaço de probabilidade $(\Omega_G, \mathcal{P}(\Omega_G), \phi_{p,q,G})$, onde $\mathcal{P}(\Omega_G)$ denota o conjunto das partes de Ω_G . No caso em que $q = 1$, se $e, e' \in E$ são duas arestas distintas e $x, y \in \{0, 1\}$, então temos que

$$\phi_{p,q,G}(\{\omega(e) = x\} \cap \{\omega(e') = y\}) = \phi_{p,q,G}(\{\omega(e) = x\}) \cdot \phi_{p,q,G}(\{\omega(e') = y\}).$$

Por outro lado, se $q > 1$ a igualdade acima, em geral, não se verifica. Neste caso as variáveis aleatórias $\{\omega(e) : e \in E\}$ são fortemente dependentes, portanto a extensão desta construção para grafos infinitos requer muitos cuidados.

O Modelo de Aglomerados Aleatórios em \mathbb{Z}^2

Uma das principais ideias da Mecânica Estatística Rigorosa está contida no que é hoje conhecido como formalismo DLR. Esta sigla é uma homenagem as contribuições seminais a esta área dadas por Dobrushin, Landford e Ruelle.

O formalismo DLR nos fornece um enfoque probabilístico ao estudo das medidas de Gibbs, um dos objetos centrais em Física-Estatística.

A fim de construir uma medida de probabilidade que descreva os estados de equilíbrio de um sistema físico em toda rede \mathbb{Z}^2 , seguindo o formalismo DLR, construímos uma família de probabilidades em certos subconjuntos finitos de \mathbb{Z}^2 e usamos as equações DLR para mostrar que esta família satisfaz uma certa condição de compatibilidade. Usando a compacidade fraca do espaço das probabilidades, definidas sobre os borelianos de $\{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^2)}$, mostra-se que os pontos de acumulação, com respeito a topologia fraca, desta família de probabilidades pode ser visto como uma generalização da construção da medida produto obtida pelo Teorema de Extensão de Kolmogorov. Estes comentários resumem a grosso modo o que é o formalismo DLR.

A partir de agora passamos a apresentar estas ideias no contexto do modelo de aglomerados aleatórios em \mathbb{Z}^2 .

Consideremos um subgrafo finito $G_\Lambda = (\Lambda, E_\Lambda)$ do grafo $\mathbb{Z}^2 = (V(\mathbb{Z}^2), E(\mathbb{Z}^2))$, onde Λ é um conjunto finito de vértices de \mathbb{Z}^2 e E_Λ é um subconjunto das arestas do grafo \mathbb{Z}^2 dado por $E_\Lambda = \{e = \{x, y\} : x, y \in \Lambda \text{ e } d(x, y) = 1\}$, onde d é a distância, induzida pela norma ℓ^1 em \mathbb{Z}^2 , dada por $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. O conjunto $\partial\Lambda = \{y \in \Lambda : d(y, \Lambda^c) = 1\}$ será chamado de fronteira de G_Λ . Note que a nossa definição de fronteira refere-se a “fronteira interna” do subgrafo G_Λ .

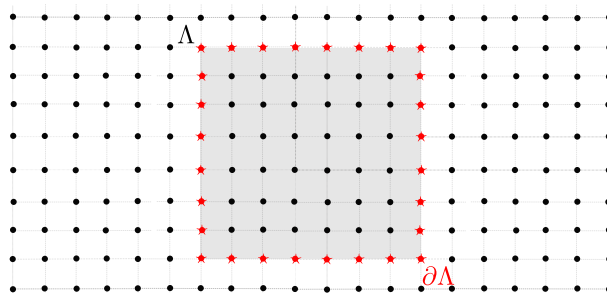


Figura 2.8: O conjunto de vértices Λ , formado pela união dos pontos pretos e vermelhos dentro da caixa de cor cinza.

Abusando um pouco da notação vamos denotar o grafo (Λ, E_Λ) simplesmente por Λ . Quando não houver perigo de confusão usaremos $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$, para dizer que Λ é um subgrafo do grafo \mathbb{Z}^2 e também para dizer que Λ é um subconjunto de $V(\mathbb{Z}^2)$.

DEFINIÇÃO 2.5 (Condição de Fronteira-1). *Fixado $\xi \in \Omega \equiv \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ e $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^2$, definimos um subconjunto (finito) de Ω que depende de Λ e de ξ , dado por*

$$\Omega_\Lambda^\xi = \{\omega \in \Omega : \omega(e) = \xi(e) \text{ para } e \in E(\mathbb{Z}^2) \setminus E_\Lambda\}.$$

A configuração ξ , por causa da definição acima, é chamada de condição de fronteira.

Claramente $|\Omega| = \infty$, mas por outro lado $|\Omega_\Lambda^\xi| = 2^{|E_\Lambda|}$. Dada uma configuração $\omega \in \Omega_\Lambda^\xi$ definimos $k(\omega, \Lambda)$ sendo o número de aglomerados de ω que interceptam Λ , veja Figura 2.9.

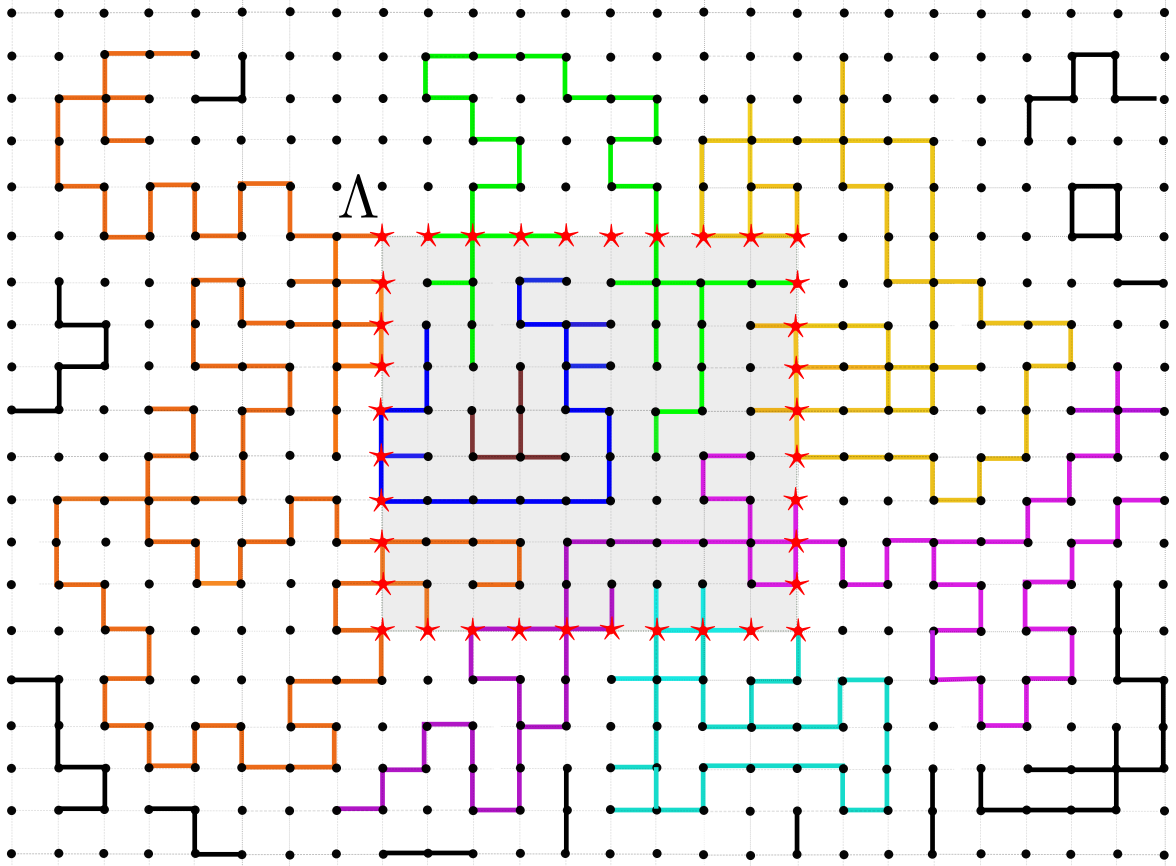


Figura 2.9: $k(\omega, \Lambda) = 10$. Note que os três pontos isolados deste grafo devem ser contados como aglomerados.

Denotando por \mathcal{F} à σ -álgebra gerada pelos cilindros finitos dimensionais de Ω , definimos a medida de probabilidade $\phi_{p,q,\Lambda}^\xi$ sobre (Ω, \mathcal{F}) do modelo de aglomerados aleatórios em Λ por

$$\phi_{p,q,\Lambda}^\xi(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{Z_{p,q,\Lambda}^\xi} p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)} q^{k(\omega,\Lambda)}, & \text{se } \omega \in \Omega_\Lambda^\xi; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $o(\omega)$ (resp. $c(\omega)$) denota o número de arestas abertas (resp. fechadas) na configuração ω e

$$Z_{p,q,\Lambda}^\xi = \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^\xi} p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)} q^{k(\omega,\Lambda)}$$

é a constante de normalização. Note que $\phi_{p,q,\Lambda}^\xi(\Omega_\Lambda^\xi) = 1$.

Condições de fronteira especiais: livre, conectada e periódica

As condições de fronteira *conectada*, *livre* e *periódicas*, desempenham um papel fundamental em nosso trabalho. Na verdade, a condição de fronteira periódica não pode ser obtida pela definição que apresentamos acima, isto é, não existe uma configuração $\xi \in \Omega$ que a represente. Para dar a definição desta condição de fronteira, vamos necessitar de novos conceitos, mas antes apresentamos as outras duas:

- Condições de fronteira *conectada*. Esta condição de fronteira é obtida pela configuração ξ tal que $\xi(e) = 1$ para todo $e \in E(\mathbb{Z}^2)$. A medida de probabilidade do modelo de aglomerados aleatórios correspondente será denotada por $\phi_{p,q,\Lambda}^1$. Esta condição de fronteira é caracterizada pelo fato de que para todo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ os vértices de $\partial\Lambda$ estão todos dois a dois conectados.
- Condições de fronteira *livre*. Esta condição de fronteira é obtida pela configuração ξ tal que $\xi(e) = 0$ para todo $e \in E(\mathbb{Z}^2)$. A correspondente medida de probabilidade é denotada por $\phi_{p,q,\Lambda}^0$, é caracterizada pela ausência de conexão entre os vértices da fronteira.

Condições de Fronteira Periódicas. As condições de fronteira periódicas serão apresentadas a seguir, usando uma generalização da definição de condição de fronteira dada acima.

DEFINIÇÃO 2.6 (Condição de Fronteira-2). *Seja Λ um subconjunto finito de vértices do grafo \mathbb{Z}^2 . Um conjunto ξ de arestas contido em $\{e = \{x, y\} : x, y \in \partial\Lambda\}$ é chamado de condição de fronteira.*

Agora a medida de probabilidade do modelo de aglomerados aleatórios em Λ com condição de fronteira ξ é definida sobre $\{0, 1\}^{E(\Lambda)}$ e a probabilidade de cada elemento ω deste espaço é dada por

$$\phi_{p,q,\Lambda}^\xi(\{\omega\}) = \frac{1}{Z_{p,q,\Lambda}^\xi} p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)} q^{k(\omega,\Lambda)}, \quad (2.14)$$

onde $c(\omega)$ e $o(\omega)$ são definidos como antes, e $k(\omega, \Lambda)$ denota o número de componentes conexas do grafo $G_\Lambda^\xi = (\Lambda, E(\Lambda) \cup \xi)$.

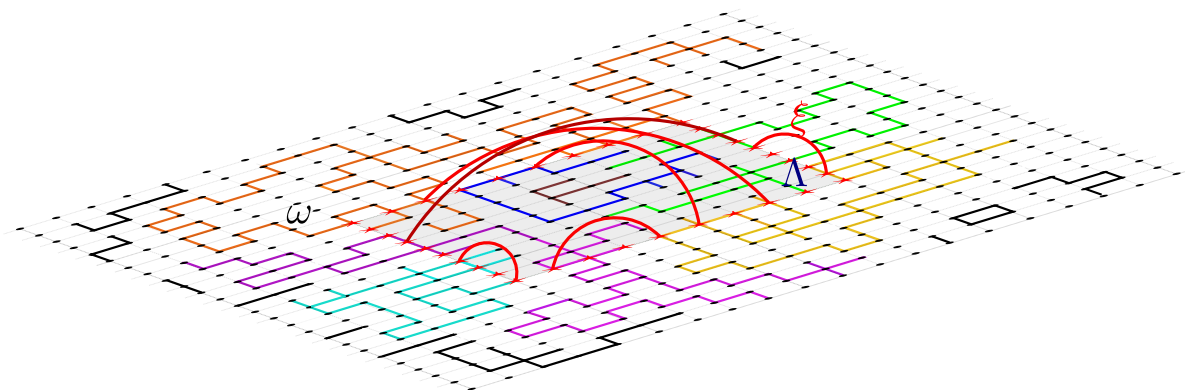


Figura 2.10: representação da condição de fronteira ξ (em linhas vermelhas) da caixa Λ . Observe que neste exemplo o valor de $k(\omega, \Lambda)$ é 7.

Condições de Fronteira Periódicas. Dizemos que ξ é uma condição de fronteira periódica em $\Lambda = [0, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2$ se todas as arestas de ξ têm vértices terminais da forma:

- $(0, j)$ e (n, j) com $j = 0, \dots, n$;
- $(i, 0)$ e (i, n) com $i = 0, \dots, n$.

Neste caso o grafo G_Λ^ξ é chamado de toro de tamanho n e por simplicidade vamos nos referir a ele apenas por \mathbb{T}_n . Observamos que esta maneira de definir o toro é equivalente aquela feita no Corolário 2.2. A medida de aglomerados aleatórios sobre o toro de tamanho n , \mathbb{T}_n , será denotado por $\phi_{p,q,[0,n]^2}^P$ ou mais concisamente $\phi_{p,q,n}^P$. As condições de fronteira que determinam o toro desta maneira não podem ser obtidas usando caminhos disjuntos fora do quadrado $[0, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2$, já que o toro não é um grafo planar, veja o Corolário 2.2.

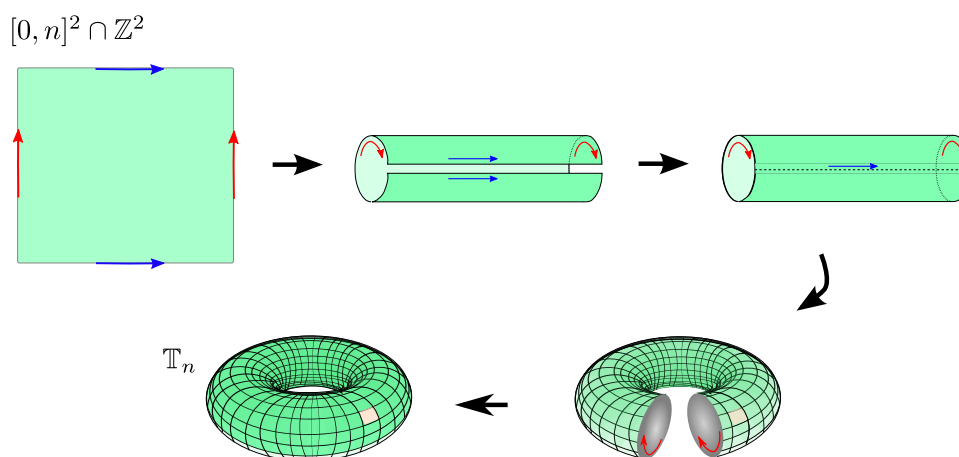


Figura 2.11: Construção do Toro bi-dimensional \mathbb{T}_n

2.2.1 Dualidade Planar

Algumas definições

Qualquer modelo de aglomerados aleatórios sobre um grafo planar G pode ser associado a um modelo dual definido sobre G^* . Dada uma configuração $\omega \in \{0, 1\}^E$,

o modelo sobre G^* é construído declarando que qualquer aresta do grafo dual, estará aberta (resp. fechada) se a aresta correspondente do grafo “primal” estiver fechada (resp. aberta) para a configuração ω . A nova configuração é chamada configuração dual de ω e é denotada por ω^* . Dois vértices x, y em G^* são ditos *conectados no dual* se existe um caminho aberto no modelo dual ligando os vértices x e y . O evento x está conectado a y no grafo dual será denotado por $x \overset{*}{\leftrightarrow} y$. Dizemos que os conjuntos A e B estão conectados no dual se existe um caminho aberto, no dual, conectando algum vértice de A a algum vértice de B . Uma componente conexa maximal no dual será chamada de aglomerado aleatório dual (aberto).

PROPOSIÇÃO 2.2. *Se G é um grafo planar então G^* é um multigrafo planar.*

Como dito acima uma configuração $\omega \in \{0, 1\}^E$ dá origem a uma configuração dual $\omega^* \in \{0, 1\}^{E^*}$ tal que $\omega^*(e^*) = 1 - \omega(e)$. Como anteriormente, para cada configuração ω^* definimos $\eta(\omega^*) = \{e^* \in E^* : \omega^*(e^*) = 1\}$, que é o conjunto das arestas abertas na configuração ω^* . Observe que $\eta(\omega^*)$ está em bijeção com $E \setminus \eta(\omega)$. Pela Proposição 2.2 temos que, para todo grafo planar G , G^* é um multigrafo planar, logo podemos definir o número de faces de $(V^*, \eta(\omega^*))$ que será denotado por $f(\omega^*)$ (incluindo a face infinita).

Para cada $\omega \in \{0, 1\}^E$, note que as faces de $(V^*, \eta(\omega^*))$ estão em bijeção com as componentes de $(V, \eta(\omega))$, veja Figura 2.12, por esta observação temos a seguinte proposição

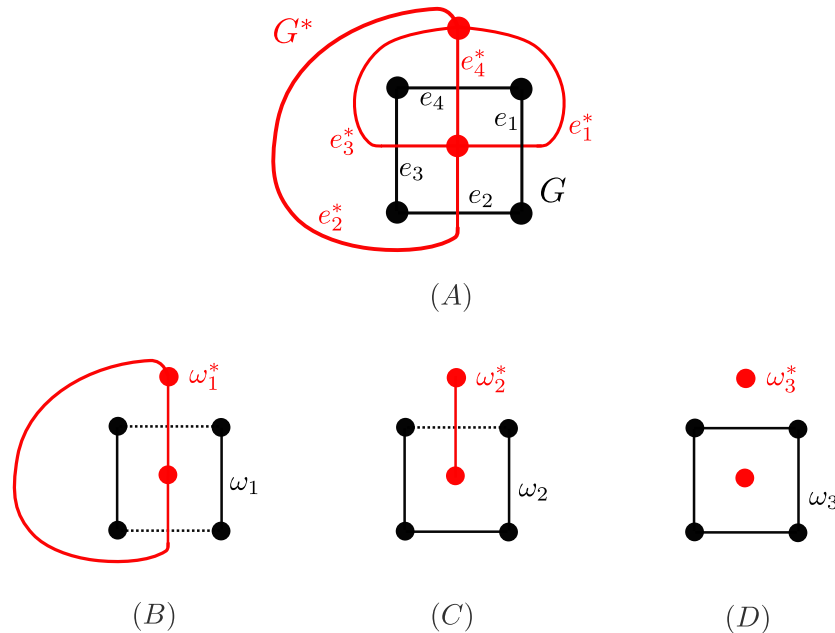


Figura 2.12: Em (A) temos os grafos G e G^* cujas arestas são dadas respectivamente por $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e $E(G^*) = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*\}$. Ilustrando a Proposição 2.3 temos em (B) que $f(\omega_1^*) = 2 = k(\omega_1)$ (contando a face infinita), em (C) temos $f(\omega_2^*) = 1 = k(\omega_2)$ e em (D) temos $f(\omega_3^*) = 1 = k(\omega_3)$.

PROPOSIÇÃO 2.3. *Sejam G um multigrafo planar e G^* seu dual. Para todo $\omega \in \{0, 1\}^E$ temos que*

$$f(\omega^*) = k(\omega).$$

Uma consequência imediata de $(G^*)^*$ ser isomorfo a G é que a proposição acima pode ser usada para concluir que

$$k(\omega^*) = f(\omega). \quad (2.15)$$

Pela 2ª Fórmula de Euler (Corolário 2.1) para toda configuração $\omega \in \{0, 1\}^E$ temos que o subgrafo aleatório $(V, \eta(\omega))$ satisfaz

$$k(\omega) = |V| - |\eta(\omega)| + f(\omega) - 1. \quad (2.16)$$

Usando a definição de grafo dual temos imediatamente que

$$|\eta(\omega)| + |\eta(\omega^*)| = |E|. \quad (2.17)$$

Pela definição de $\phi_{p,q,G}(\omega)$ temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \phi_{p,q,G}(\omega) &= \frac{1}{Z_{p,q,G}} p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)} q^{k(\omega)} \\ &= \frac{1}{Z_{p,q,G}} p^{o(\omega)} (1-p)^{|E|-o(\omega)} q^{k(\omega)} \\ &= \frac{(1-p)^{|E|}}{Z_{p,q,G}} \left(\frac{p}{1-p} \right)^{o(\omega)} q^{k(\omega)} \\ &= \frac{(1-p)^{|E|}}{Z_{p,q,G}} \left(\frac{p}{1-p} \right)^{|\eta(\omega)|} q^{k(\omega)}. \end{aligned}$$

Usando 2.15 na equação (2.16) obtemos $k(\omega) = |V| - |\eta(\omega)| + k(\omega^*) - 1$. Usando esta identidade no lado direito da equação acima ficamos com

$$\begin{aligned} \phi_{p,q,G}(\omega) &= \frac{(1-p)^{|E|}}{Z_{p,q,G}} \left(\frac{p}{1-p} \right)^{|\eta(\omega)|} q^{|V|-|\eta(\omega)|+k(\omega^*)-1} \\ &= \frac{(1-p)^{|E|} q^{|V|-1}}{Z_{p,q,G}} \left(\frac{p}{(1-p)q} \right)^{|\eta(\omega)|} q^{k(\omega^*)}. \end{aligned}$$

Aplicando (2.17) para o expoente $|\eta(\omega)|$ na igualdade acima obtemos

$$\begin{aligned} \phi_{p,q,G}(\omega) &= \frac{(1-p)^{|E|} q^{|V|-1}}{Z_{p,q,G}} \times \left(\frac{p}{(1-p)q} \right)^{|E|} \times \left(\frac{(1-p)q}{p} \right)^{|\eta(\omega^*)|} q^{k(\omega^*)} \\ &= C(p, q, |V|, |E|) \left(\frac{(1-p)q}{p} \right)^{|\eta(\omega^*)|} q^{k(\omega^*)}, \end{aligned}$$

onde $C(p, q, |V|, |E|) \equiv \frac{(1-p)^{|E|} q^{|V|-1}}{Z_{p,q,G}} \times \left(\frac{p}{(1-p)q} \right)^{|E|}$.

Tomando p^* como a única solução da equação

$$\frac{p^*}{1-p^*} = \frac{(1-p)q}{p}, \quad \text{ou seja} \quad p^* = p^*(p, q) = \frac{(1-p)q}{(1-p)q + p} \quad (2.18)$$

ficamos com

$$\begin{aligned}\phi_{p,q,G}(\omega) &= C(p, q, |V|, |E|) \left(\frac{p^*}{1-p^*} \right)^{|\eta(\omega^*)|} q^{k(\omega^*)} \\ &= C(p, q, |V|, |E|) \times Z_{p^*,q,G^*} \times \frac{1}{(1-p^*)^{|E|}} \times \phi_{p^*,q,G^*}(\omega^*).\end{aligned}$$

Usando que $\phi_{p,q,G}(\omega)$ e $\phi_{p^*,q,G^*}(\omega^*)$ são medidas de probabilidade e somando sobre $\omega \in \Omega$, na equação acima obtemos a seguinte igualdade

$$C(p, q, |V|, |E|) \times Z_{p^*,q,G^*} \times \frac{1}{(1-p^*)^{|E|}} = 1.$$

De onde segue que

$$\phi_{p,q,G}(\omega) = \phi_{p^*,q,G^*}(\omega^*). \quad (2.19)$$

OBSERVAÇÃO 2.3. O parâmetro $p^* \in [0, 1]$.

OBSERVAÇÃO 2.4. Para cada $q \geq 1$ fixo, a função $p \rightarrow p^*(p, q)$ é decrescente em $p \in (0, 1)$.

O ponto auto-dual

DEFINIÇÃO 2.7. O ponto auto-dual $p_{sd} = p_{sd}(q)$ é a única solução da equação $p^*(p_{sd}, q) = p_{sd}$, isto é

$$p_{sd}(q) = \frac{\sqrt{q}}{1 + \sqrt{q}}. \quad (2.20)$$

Como mencionado anteriormente, quando o parâmetro de dependência q toma o valor 1, o modelo de aglomerados aleatórios torna-se o modelo percolação de Bernoulli de arestas independentes. Pelo Teorema 2.4 do Capítulo 1, o ponto crítico do modelo de percolação de arestas independentes em duas dimensões é $1/2$, coincidindo com $p_{sd}(1)$ e portanto o problema principal deste trabalho está resolvido neste caso. O grande problema agora, será provar este mesmo resultado para valores de $q > 1$.

Dualidade planar e condições de fronteira livre-conectada

Nesta seção vamos considerar subgrafos finitos da rede bi-dimensional \mathbb{Z}^2 . Fixado $n \in \mathbb{N}$, vamos olhar para $\Lambda(n) = [-n, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2$ como um subgrafo de \mathbb{Z}^2 .

Vamos mostrar agora como construir $\Lambda(n)^*$. Primeiro consideramos a caixa $[-n-1, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2)$, visto como subgrafo de $\mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2)$. Em seguida, definimos o grafo $H(n)$ como sendo a caixa $[-n-1, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2)$ sem as arestas entre os pontos de sua fronteira (interna). Veja Figura 2.13.

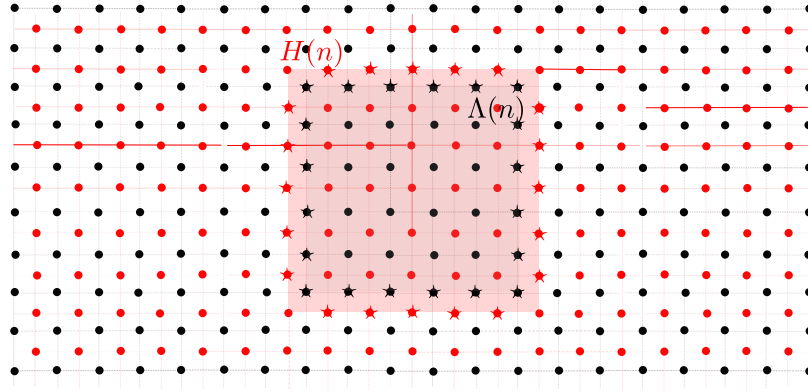


Figura 2.13: Construção do grafo $H(n)$. Os vértices do grafo $H(n)$ são dados pelos pontos vermelhos e arestas dadas pelos segmentos tracejados vermelhos dentro da caixa rosa. Observe que ele possui quatro vértices isolados e não possui arestas entre os vértices da fronteira.

Por último identificamos todos os vértices da fronteira de $H(n)$. Este novo grafo que denotamos por $\tilde{H}(n)$ é claramente isomorfo ao grafo $\Lambda(n)^*$.

Esta construção sugere que o modelo de aglomerados aleatórios em $\Lambda(n)$ com condições de fronteira livre esteja relacionado com o modelo de aglomerados aleatórios em $\Lambda(n)^*$ com condição de fronteira conectada.

Pelas definições 2.13 e 2.14 temos, para todo $\omega \in \{0, 1\}^{E(\Lambda(n))}$, que

$$\phi_{p,q,\Lambda(n)}^0(\omega) = \phi_{p,q,\Lambda(n)}(\omega).$$

Aplicando 2.19 no lado direito da igualdade acima ficamos com

$$\phi_{p,q,\Lambda(n)}(\omega) = \phi_{p^*,q,\Lambda(n)^*}(\omega^*).$$

Por construção $\tilde{H}(n)$ é isomorfo a $\Lambda(n)^*$, portanto podemos identificar de maneira natural $E(\Lambda(n)^*)$ com $E(\tilde{H}(n))$. Pensando em ω^* como elemento de $\{0, 1\}^{E(\tilde{H}(n))}$ podemos escrever $\phi_{p^*,q,\Lambda(n)^*}(\omega^*) = \phi_{p^*,q,\tilde{H}(n)}(\omega^*)$. Usando agora a definição 2.14, olhando para $H(n)$ como subgrafo de $\mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2)$ temos que

$$\phi_{p^*,q,\tilde{H}(n)}(\omega^*) = \phi_{p^*,q,H(n)}^1(\omega^*).$$

Portanto provamos a seguinte relação de dualidade

$$\phi_{p,q,\Lambda(n)}^0(\omega) = \phi_{p^*,q,H(n)}^1(\omega^*). \quad (2.21)$$

Dualidade planar e condições de fronteira periódicas

O modelo de aglomerados aleatórios com condições de fronteira periódicas, ou equivalentemente o modelo dos aglomerados aleatórios definidos sobre um toro, (sem condições de fronteira) é um pouco mais complicado do ponto de vista de dualidade. A principal razão é que a medida de probabilidade dual deste modelo não é necessariamente uma medida de probabilidade de um modelo de aglomerados aleatórios. Mas porém ela não é muito diferente de ser deste tipo. Para estabelecer a fórmula de dualidade neste caso, um novo parâmetro terá que ser introduzido.

Como antes, seja $f(\omega)$ o número de faces determinado pela configuração ω , lembramos que $f(\omega)$ coincide com o número de componentes conexas de ω^* . O novo parâmetro a que nos referimos acima, será denotado por $\delta(\omega)$ e para dar sua definição, precisamos antes introduzir alguns novos conceitos.

DEFINIÇÃO 2.8 (Rede). Denote por \mathbb{T}_n o grafo do toro bi-dimensional de tamanho n . Seja $\omega \in \{0, 1\}^{E(\mathbb{T}_n)}$ uma configuração arbitrária e $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ a lista de todas as componentes maximais conexas de \mathbb{T}_n , determinada pela configuração ω . Uma componente \mathcal{C}_i da configuração ω é chamada uma rede, se existem $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}_i$ caminhos fechados de arestas abertas, que vistos como curvas suaves por partes no toro pertencem à duas classes distintas de homotopia.

DEFINIÇÃO 2.9 (Ciclo). Mantendo a notação da definição anterior, dizemos que uma componente conexa maximal \mathcal{C}_i , de uma configuração ω é chamada de ciclo, se \mathcal{C}_i não é uma rede e também se existe um caminho fechado $\gamma \in \mathcal{C}_i$, de arestas abertas em ω , que visto como curva suave por partes no toro não é contratível a um ponto.

Observamos que qualquer configuração ω é exatamente de um dos três tipos listados abaixo e definimos o parâmetro $\delta(\omega)$ segundo esta classificação como segue:

- Um dos aglomerados \mathcal{C}_i de ω é uma rede. Logo nenhum outro aglomerado de ω pode ser uma rede ou um ciclo. Neste caso, $\delta(\omega) = 2$.
- Um dos aglomerados de ω , digamos \mathcal{C}_i é um ciclo. Logo nenhum outro aglomerado pode ser uma rede, mas outros aglomerados também podem ser ciclos desde que os caminhos fechados destes aglomerados sejam da mesma classe homotópica dos caminhos fechados de \mathcal{C}_i . Neste caso, $\delta(\omega) = 1$.
- Nenhum dos aglomerados de ω é uma rede ou um ciclo. Neste caso, $\delta(\omega) = 0$.

LEMA 2.3. Seja \mathbb{T}_n o grafo do toro bi-dimensional de tamanho n . Seja $\omega \in \{0, 1\}^{E(\mathbb{T}_n)}$. Considere o subgrafo $(V(\mathbb{T}_n), \eta(\omega))$ de \mathbb{T}_n , onde $\eta(\omega)$ é como antes o conjunto das arestas abertas em \mathbb{T}_n . Se $o(\omega), f(\omega), k(\omega)$ denotam os números de arestas, faces e componentes conexas de $(\mathbb{T}_n, \eta(\omega))$, respectivamente. Então

$$|V(\mathbb{T}_n)| - o(\omega) + f(\omega) = k(\omega) + 1 - \delta(\omega). \quad (2.22)$$

O lema acima pode ser provado por indução sobre o número de arestas seguindo os mesmos passos da demonstração da 1ª Fórmula de Euler.

PROPOSIÇÃO 2.4. O dual de um modelo de aglomerado aleatório com condições de fronteira periódica não é exatamente um modelo de aglomerado aleatório no parâmetro dual.

Demonstração. Pela definição de dualidade e pela Proposição 2.3 temos que

$$o(\omega) + o(\omega^*) = |E(\mathbb{T}_n)| \quad e \quad f(\omega) = k(\omega^*). \quad (2.23)$$

Também segue da dualidade que se $\delta(\omega) = 0$ então $\delta(\omega^*) = 2$, se $\delta(\omega) = 1$ então $\delta(\omega^*) = 1$ e se $\delta(\omega) = 2$ então $\delta(\omega^*) = 0$ para toda configuração $\omega \in \Omega$. Veja Figura 2.14.

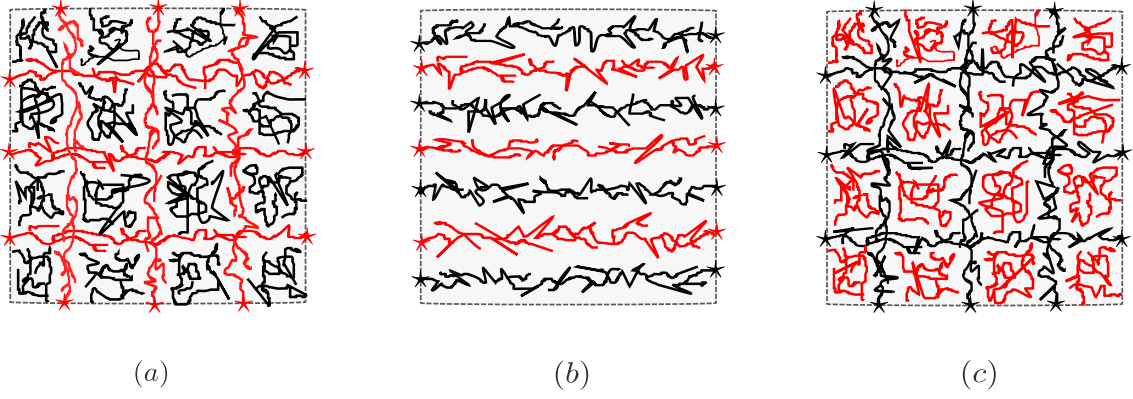


Figura 2.14: (a) $\delta(\omega) = 0$ (linhas pretas) e seu dual $\delta(\omega^*) = 2$ (linhas vermelhas). (b) $\delta(\omega) = 1$ e seu dual $\delta(\omega^*) = 1$. (c) $\delta(\omega) = 2$ e seu dual $\delta(\omega^*) = 0$, dada uma configuração ω sobre \mathbb{T}_n .

Logo

$$\delta(\omega) + \delta(\omega^*) = 2 \quad (2.24)$$

Do Lema 2.3 e das identidades (2.23) e (2.24) segue que

$$|V(\mathbb{T}_n)| - (|E(\mathbb{T}_n)| - o(\omega^*)) + k(\omega^*) = k(\omega) + 1 - (2 - \delta(\omega^*)).$$

Explicitando $k(\omega)$ na igualdade acima, obtemos a seguinte relação:

$$k(\omega) = |V(\mathbb{T}_n)| - |E(\mathbb{T}_n)| + o(\omega^*) + k(\omega^*) + 1 - \delta(\omega^*) \quad (2.25)$$

Pela definição da medida de probabilidade do modelo de aglomerados aleatórios com condição de fronteira periódicas, temos para todo $\omega \in \Omega$ que

$$\phi_{p,q,n}^P(\omega) = \frac{1}{Z_{p,q,n}^P} p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)} q^{k(\omega,n)}.$$

Como $o(\omega) + c(\omega) = |E(\mathbb{T}_n)|$, o lado direito da igualdade acima é dado por

$$\frac{(1-p)^{|E(\mathbb{T}_n)|}}{Z_{p,q,n}^P} \times \left[\frac{p}{(1-p)} \right]^{o(\omega)} q^{k(\omega)}.$$

Usando (2.23) e (2.25), esta expressão pode ser reescrita como

$$\frac{(1-p)^{|E(\mathbb{T}_n)|}}{Z_{p,q,n}^P} \times \left[\frac{p}{1-p} \right]^{|E(\mathbb{T}_n)| - o(\omega^*)} \times q^{|V(\mathbb{T}_n)| - |E(\mathbb{T}_n)| + o(\omega^*) + k(\omega^*) + 1 - \delta(\omega^*)}$$

Rearranjando os fatores na expressão acima, ficamos com

$$\frac{p^{|E(\mathbb{T}_n)|} \times q^{|V(\mathbb{T}_n)| - |E(\mathbb{T}_n)| + 1 - \delta(\omega^*)}}{Z_{p,q,n}^P} \times \underbrace{\left[\frac{q(1-p)}{p} \right]^{o(\omega^*)}}_{= p^*/(1-p^*)} q^{k(\omega^*)}.$$

Multiplicando e dividindo pela constante de normalização $Z_{p^*,q,n}^P$ temos

$$\frac{p^{|E(\mathbb{T}_n)|} \times q^{|V(\mathbb{T}_n)| - |E(\mathbb{T}_n)| + 1 - \delta(\omega^*)}}{Z_{p,q,n}^P} \times \frac{Z_{p^*,q,n}^P}{Z_{p^*,q,n}^P} \times \left[\frac{p^*}{(1-p^*)} \right]^{o(\omega^*)} q^{k(\omega^*)}. \quad (2.26)$$

Definindo a constante $Z = \left[\frac{p^{|E(\mathbb{T}_n)|} \times q^{|V(\mathbb{T}_n)| - |E(\mathbb{T}_n)|} \times Z_{p^*,q,n}^P}{Z_{p,q,n}^P} \right]^{-1}$ e substituindo na expressão acima ficamos com

$$\frac{q^{1-\delta(\omega^*)}}{Z} \times \frac{\left[\frac{p^*}{(1-p^*)} \right]^{o(\omega^*)} q^{k(\omega^*)}}{Z_{p^*,q,n}^P}.$$

Observe que pela definição de medidas de probabilidades do modelo de aglomerados aleatórios com condições de fronteira periódicas, temos que

$$\phi_{p^*,q,n}^P(\omega^*) = \frac{\left[\frac{p^*}{(1-p^*)} \right]^{o(\omega^*)} q^{k(\omega^*)}}{Z_{p^*,q,n}^P}.$$

Em resumo temos que (2.26) pode ser reescrito como

$$\frac{q^{1-\delta(\omega^*)}}{Z} \times \phi_{p^*,q,n}^P(\omega^*)$$

e portanto

$$\phi_{p,q,n}^P(\omega) = \frac{q^{1-\delta(\omega^*)}}{Z} \times \phi_{p^*,q,n}^P(\omega^*), \quad (2.27)$$

onde Z é a constante de normalização definida acima. ■

2.2.2 Alguns resultados básicos para este modelo.

O objetivo desta seção é mostrar alguns resultados de dominação estocástica que nos ajudará a fazer comparações de medidas (deste modelo) com diferentes valores de p , como também com diferentes condições de fronteira, para valores fixos do parâmetro q .

Associação positiva quando $q \geq 1$.

Sejam $G = (V, E)$ um grafo finito e $\Omega = \{0, 1\}^E$ o espaço de configurações. Lembramos que $\Omega = \{0, 1\}^E$ é um conjunto parcialmente ordenado pela relação de ordem parcial \preceq , onde $\omega_1 \preceq \omega_2$ se $\omega_1(e) \leq \omega_2(e)$ para todo $e \in E$. Uma variável aleatória $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada crescente se $X(\omega_1) \leq X(\omega_2)$ sempre que $\omega_1 \preceq \omega_2$. Um evento $A \in \mathcal{F}$ é chamado crescente (resp. decrescente) se sua função indicadora 1_A é crescente (resp. decrescente); Isto é, um evento $A \in \mathcal{F}$ é crescente se toda vez que $\omega_1 \preceq \omega_2$ e $\omega_1 \in A$ então $\omega_2 \in A$. O conjunto Ω , equipado com a topologia dos conjuntos abertos gerados pelos eventos cilíndricos, é um espaço metrizável e nós dizemos que a variável aleatória $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, se esta é uma função contínua sobre este espaço métrico. Já que Ω é compacto, qualquer função contínua definida sobre Ω é limitada. Pela definição da ordem parcial de Ω temos que $0 \preceq \omega \preceq 1$, onde a notação 0 (resp. 1) é usada para denotar a configuração ω de Ω tal que $\omega(e) = 0$ (resp. $\omega(e) = 1$) para todo $e \in E$. Logo uma função crescente $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e além do mais $X(0) \leq X(\omega) \leq X(1)$ para $\omega \in \Omega$.

Dizemos que uma medida μ definida sobre Ω tem a propriedade de "Associação positiva" se satisfaz

$$\mu(XY) \geq \mu(X)\mu(Y)$$

para todo par de variáveis aleatórias crescentes $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

A associação positiva nos permitirá comparar medidas de aglomerados aleatórios com diferentes valores de p com o mesmo parâmetro q . Isto será usado para deduzir uma desigualdade de correlação importante que generaliza a Desigualdade de FKG (Teorema 2.1) provada para o modelo de percolação de Bernoulli.

Dada uma variável aleatória X e μ uma medida de probabilidade denotamos por $\mu(X)$ a esperança de X (caso exista), isto é,

$$\mu(X) = \int_{\Omega} X d\mu.$$

DEFINIÇÃO 2.10. *Sejam $\mu_1, \mu_2 : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ duas medidas de probabilidades. Nós escrevemos $\mu_1 \preceq \mu_2$ (ou $\mu_2 \succeq \mu_1$) e dizemos que μ_1 é dominada estocasticamente por μ_2 , se $\mu_1(X) \leq \mu_2(X)$, para toda variável aleatória contínua e crescente X sobre Ω .*

DEFINIÇÃO 2.11. *Uma medida de probabilidade $\mu : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ é positiva se $\mu(\omega) > 0$ para cada ω em Ω .*

Começamos discutindo e desigualdades de correlação e ordenamento estocástico para medidas gerais. Para isso, para cada aresta $e \in E$ definimos

$$(\omega_1 \vee \omega_2)(e) = \max\{\omega_1(e), \omega_2(e)\} \quad e \quad (\omega_1 \wedge \omega_2)(e) = \min\{\omega_1(e), \omega_2(e)\}.$$

TEOREMA 2.5 (Desigualdade de Holley). *Se $\mu_1, \mu_2 : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ são duas medidas de probabilidades tais que*

$$\mu_1(\omega_1 \vee \omega_2)\mu_2(\omega_1 \wedge \omega_2) \geq \mu_1(\omega_1)\mu_2(\omega_2) \quad (2.28)$$

então

$$\mu_1(A) \geq \mu_2(A) \quad (2.29)$$

para cada evento $A \in \mathcal{F}$ crescente.

A prova deste teorema pode ser encontrada na referência [13], Teorema 2.1, pag. 20.

DEFINIÇÃO 2.12. *Fixadas duas arestas distintas e, f em E . Para cada $k \in E$ e para cada configuração $\omega \in \Omega$ definimos as seguintes configurações:*

$$\omega_f(k) := \begin{cases} \omega(k) & \text{se } k \neq f \\ 0 & \text{se } k = f \end{cases} \quad \omega^e(k) := \begin{cases} \omega(k) & \text{se } k \neq e \\ 1 & \text{se } k = e \end{cases}$$

$$\omega_e^f(k) := \begin{cases} \omega(k) & \text{se } k \neq e \wedge k \neq f \\ 0 & \text{se } k = e \\ 1 & \text{se } k = f \end{cases} \quad \omega_f^e(k) := \begin{cases} \omega(k) & \text{se } k \neq e \wedge k \neq f \\ 0 & \text{se } k = f \\ 1 & \text{se } k = e \end{cases}$$

$$\omega_{e,f}(k) := \begin{cases} \omega(k) & \text{se } k \neq e \wedge k \neq f \\ 0 & \text{se } k = e \wedge k = f \end{cases} \quad \omega^{e,f}(k) := \begin{cases} \omega(k) & \text{se } k \neq e \wedge k \neq f \\ 1 & \text{se } k = e \wedge k = f. \end{cases}$$

O próximo teorema é uma simplificação elegante da Desigualdade de Holley. Ele nos diz que não é necessário fazer comparações do tipo (2.28) para qualquer configuração ω , basta com comparar configurações tipo da Definição 2.12, para obter a desigualdade 2.29.

TEOREMA 2.6 (Ref. [13]). *Se para qualquer configuração ω em Ω e para qualquer aresta $e \in E$ são satisfeitas as desigualdades:*

$$\begin{aligned} \mu_1(\omega^e)\mu_2(\omega_e) &\geq \mu_1(\omega_e)\mu_2(\omega^e) \\ &\quad e \\ \mu_1(\omega_e^f)\mu_2(\omega_f^e) &\leq \mu_1(\omega^{ef})\mu_2(\omega_{ef}), \end{aligned}$$

então

$$\mu_1(A) \geq \mu_2(A)$$

para todo $A \in \mathcal{F}$ crescente.

TEOREMA 2.7 (Condição FKG, [13]). *Seja $\mu : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ uma medida de probabilidade positiva. Se para toda configuração $\omega \in \Omega$ e todo par de arestas $e, f \in E$ temos*

$$\mu(\omega_e^f)\mu(\omega_f^e) \leq \mu(\omega^{ef})\mu(\omega_{ef}). \quad (2.30)$$

Então

$$\mu(A \cap B) \geq \mu(A)\mu(B) \quad (2.31)$$

para todo evento $A, B \in \mathcal{F}$ crescente.

Demonstração. Fixado um evento $B \in \mathcal{F}$ crescente, defina as seguintes medidas de probabilidades

$$\mu_1(\cdot) = \mu(\cdot|B) \quad e \quad \mu_2(\cdot) = \mu(\cdot).$$

Já que $\omega_e \preceq \omega^e$, temos as seguintes possibilidades, $\omega_e \notin B$ ou $\omega_e \in B$. Se $\omega_e \notin B$

$$\mu_1(\omega_e)\mu_2(\omega^e) = \mu(\omega_e|B)\mu(\omega^e) = 0 \overset{\mu > 0}{<} = \mu_1(\omega^e)\mu_2(\omega_e). \quad (2.32)$$

Já que B é um evento crescente, $\omega_e \in B$ implica que $\omega^e \in B$ e portanto

$$\mu_1(\omega_e)\mu_2(\omega^e) = \mu(\omega_e|B)\mu(\omega^e) \overset{B \text{ crescente}}{=} \mu(\omega_e)\mu(\omega^e|B) = \mu_1(\omega^e)\mu_2(\omega_e). \quad (2.33)$$

De (2.32) e (2.33) concluímos que

$$\mu_1(\omega_e)\mu_2(\omega^e) \leq \mu_1(\omega^e)\mu_2(\omega_e). \quad (2.34)$$

Por outro lado, é sempre verdadeiro que $\omega_e^f \preceq \omega^{ef}$. Novamente analisamos os dois casos $\omega_e^f \notin B$ ou $\omega_e^f \in B$. Se $\omega_e^f \notin B$, então

$$\mu_1(\omega_e^f)\mu_2(\omega_f^e) = \mu(\omega_e^f|B)\mu(\omega_f^e) = 0 \overset{\mu > 0}{<} \mu_1(\omega^{ef})\mu_2(\omega_{ef}).$$

No caso em que $\omega_e^f \in B$ temos

$$\begin{aligned} \mu_1(\omega_e^f)\mu_2(\omega_f^e) &= \mu(\omega_e^f|B)\mu(\omega_f^e) = \frac{\mu(\omega_e^f)\mu(\omega_f^e)}{\mu(B)} \stackrel{\text{hipótese}}{\leq} \frac{\mu(\omega^{ef})\mu(\omega_{ef})}{\mu(B)} \\ &\stackrel{B: \text{ crescente}}{\cong} \mu(\omega^{ef}|B)\mu(\omega_{ef}) = \mu_1(\omega^{ef})\mu_2(\omega_{ef}). \end{aligned}$$

Das duas desigualdades anteriores segue que

$$\mu_1(\omega_e^f)\mu_2(\omega_f^e) \leq \mu_1(\omega^{ef})\mu_2(\omega_{ef}). \quad (2.35)$$

Assim de (2.34) , (2.35) e pelo Teorema 2.6 temos que $\mu_1(A) \geq \mu_2(A)$. Usando as definições de μ_1 e μ_2 concluí-se que $\mu(A \cap B) \geq \mu(A)\mu(B)$. ■

Agora apresentamos um resultado muito importante da Mecânica Estatística, conhecido como a “Desigualdade FKG”. Esta desigualdade diz que as medidas de aglomerados aleatórios tem a propriedade de associação positiva. Ela é uma generalização da Desigualdade FKG (Teorema 2.1) do modelo de arestas independentes, já que no modelo de aglomerados aleatórios temos o parâmetro de dependência $q \geq 1$. Esta desigualdade é crucial neste trabalho, pois muitos resultados importantes se derivam de sua aplicação. Cabe ressaltar que esta desigualdade não é válida para valores de $q < 1$, veja [13].

COROLÁRIO 2.3 (Desigualdade FKG). *Sejam Λ um subgrafo de \mathbb{Z}^2 , $p \in [0, 1]$, $q \geq 1$ e ξ uma condição de fronteira arbitrária. Se A, B são eventos crescentes na σ -álgebra das partes de Ω_Λ^ξ então*

$$\phi_{p,q,\Lambda}^\xi(A \cap B) \geq \phi_{p,q,\Lambda}^\xi(A)\phi_{p,q,\Lambda}^\xi(B).$$

Demonstração. Para não carregar a notação escrevemos $k(\omega)$ para denotar $k(\omega, \Lambda)$. Pelo Teorema 2.7 (condição FKG) é suficiente provar a condição 2.30, isto é, que

$$\begin{aligned} p^{o(\omega^{ef})+o(\omega_{ef})}(1-p)^{c(\omega^{ef})+c(\omega_{ef})} q^{k(\omega^{ef})+k(\omega_{ef})} \\ \geq p^{o(\omega_e^f)+o(\omega_f^e)}(1-p)^{c(\omega_e^f)+c(\omega_f^e)} q^{k(\omega_e^f)+k(\omega_f^e)}. \end{aligned}$$

Em direção de provar esta desigualdade, observamos que

$$\begin{aligned} o(\omega^{ef}) + o(\omega_{ef}) &= [o(\omega) + 2] + o(\omega) \\ &= [o(\omega) + 1] + [o(\omega) + 1] \\ &= o(\omega_e^f) + o(\omega_f^e) \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} c(\omega^{ef}) + c(\omega_{ef}) &= c(\omega) + [c(\omega) + 2] \\ &= [c(\omega) + 1] + [c(\omega) + 1] \\ &= c(\omega_e^f) + c(\omega_f^e). \end{aligned}$$

Assim, só resta provar que

$$q^{k(\omega^{ef})+k(\omega_{ef})} \geq q^{k(\omega_e^f)+k(\omega_f^e)}. \quad (2.36)$$

Fixadas as arestas $e = \{u, v\}$ e $f = \{x, y\}$, onde $u, v, x, y \in V$ e observando que a configuração ω está definida sobre o conjunto de arestas $E \setminus \{e, f\}$, daremos um esboço da prova da desigualdade (2.36), considerando simplesmente alguns casos especiais, já que a técnica para provar todos os outros casos é a mesma. Em quase todos os casos, como é simples de verificar, em (2.36) temos a igualdade. Abaixo mostramos como obter (2.36) em três casos onde vale a igualdade e um caso onde a desigualdade é estrita.

i. Quando u, v, x e y pertencem a aglomerados disjuntos em $(V, \eta(\omega))$.

$$\begin{aligned} k(\omega^{ef}) + k(\omega_{ef}) &= [k(\omega) - 2] + k(\omega) \\ &= [k(\omega) - 1] + [k(\omega) - 1] \\ &= k(\omega_e^f) + k(\omega_f^e). \end{aligned}$$

ii. Quando u, v pertencem a dois aglomerados disjuntos e x, y estão em um mesmo aglomerado em $(V, \eta(\omega))$.

$$\begin{aligned} k(\omega^{ef}) + k(\omega_{ef}) &= [k(\omega) - 1] + k(\omega) \\ &= k(\omega) + [k(\omega) - 1] \\ &= k(\omega_e^f) + k(\omega_f^e). \end{aligned}$$

iii. Quando u, v, x pertencem um aglomerado e y não pertence a este aglomerado em $(V, \eta(\omega))$.

$$\begin{aligned} k(\omega^{ef}) + k(\omega_{ef}) &= [k(\omega) - 1] + k(\omega) \\ &= k(\omega_f^e) + k(\omega_e^f). \end{aligned}$$

iv. Quando u, x estão em um mesmo aglomerado disjunto ao aglomerado onde estão v, y , em $(V, \eta(\omega))$.

$$\begin{aligned} k(\omega^{ef}) + k(\omega_{ef}) &= [k(\omega) - 1] + k(\omega) \\ &> [k(\omega) - 1] + [k(\omega) - 1] \\ &= k(\omega_e^f) + k(\omega_f^e). \end{aligned}$$

Procedendo analogamente para os outros casos, obtemos que

$$k(\omega^{ef}) + k(\omega_{ef}) \geq k(\omega_e^f) + k(\omega_f^e),$$

donde se conclui a prova. ■

Observamos que as desigualdades que estamos apresentando nesta seção são sempre para eventos crescentes.

A próxima desigualdade que apresentamos será muito útil neste trabalho e nos permite comparar medidas de aglomerados aleatórios com diferentes parâmetros $p \in [0, 1]$ para $q \geq 1$ fixado. Além do mais, para estas medidas sobre subgrafos finitos de \mathbb{Z}^2 a comparação também é válida para quaisquer condições de fronteira.

COROLÁRIO 2.4 (Comparação em p , [13]). *Sejam Λ um subgrafo finito de \mathbb{Z}^2 , ξ uma condição de fronteira fixada e $q \geq 1$. Então para quaisquer $p_1 \leq p_2$ temos que*

$$\phi_{p_1, q, \Lambda}^\xi(A) \leq \phi_{p_2, q, \Lambda}^\xi(A),$$

para todo evento A crescente na σ -álgebra das partes de Ω_Λ^ξ .

Demonstração. Para todo $\omega \in \Omega_\Lambda^\xi$, considere a variável aleatória

$$Y(\omega) = \left[\frac{p_2/(1-p_2)}{p_1/(1-p_1)} \right]^{o(\omega)}.$$

Note que Y é uma variável aleatória crescente pois

$$\left[\frac{p_2/(1-p_2)}{p_1/(1-p_1)} \right] \geq 1.$$

Seja X uma variável aleatória arbitraria. Pela definição de esperança da variável aleatória XY com respeito a medida de probabilidade $\phi_{p_1, q, \Lambda}^\xi$ temos que

$$\begin{aligned} \phi_{p_1, q, \Lambda}^\xi(XY) &= \int_{\Omega} X(\omega)Y(\omega)d\phi_{p_1, q, \Lambda}^\xi(\omega) \\ &= \frac{\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^\xi} X(\omega) \overbrace{\left[\frac{p_2/(1-p_2)}{p_1/(1-p_1)} \right]^{o(\omega)}}^Y [p_1/(1-p_1)]^{o(\omega)} q^{k(\omega, \Lambda)}}{Z_{p_1, q, \Lambda}}. \end{aligned}$$

Simplificando, multiplicando e dividindo pela constante de normalização $Z_{p_2, q, \Lambda}$, a expressão anterior se reescreve como

$$\frac{\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^\xi} X(\omega) [p_2/(1-p_2)]^{o(\omega)} q^{k(\omega, \Lambda)}}{Z_{p_2, q, \Lambda}} \times \frac{Z_{p_2, q, \Lambda}}{Z_{p_1, q, \Lambda}}.$$

Novamente, pela definição de esperança da variável aleatória X com respeito à medida de probabilidade $\phi_{p_2, q, \Lambda}^\xi$ obtemos que

$$\begin{aligned} \phi_{p_1, q, \Lambda}^\xi(XY) &= \int_{\Omega_\Lambda^\xi} X(\omega)d\phi_{p_2, q, \Lambda}^\xi(\omega) \times \frac{Z_{p_2, q, \Lambda}}{Z_{p_1, q, \Lambda}} \\ &= \phi_{p_2, q, \Lambda}^\xi(X) \times \frac{Z_{p_2, q, \Lambda}}{Z_{p_1, q, \Lambda}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, calculando a esperança da variável aleatória Y com respeito à medida de probabilidade $\phi_{p_1, q, \Lambda}^\xi$ temos

$$\begin{aligned} \phi_{p_1, q, \Lambda}^\xi(Y) &= \int_{\Omega_\Lambda^\xi} Y(\omega)d\phi_{p_1, q, \Lambda}^\xi(\omega) \\ &= \frac{\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^\xi} \overbrace{\left[\frac{p_2/(1-p_2)}{p_1/(1-p_1)} \right]^{o(\omega)}}^Y [p_1/(1-p_1)]^{o(\omega)} q^{k(\omega, \Lambda)}}{Z_{p_1, q, \Lambda}} \\ &= \frac{Z_{p_2, q, \Lambda}}{Z_{p_1, q, \Lambda}}. \end{aligned}$$

Das duas igualdades acima segue que

$$\phi_{p_1, q, \Lambda}^\xi(XY) = \phi_{p_2, q, \Lambda}^\xi(X)\phi_{p_1, q, \Lambda}^\xi(Y),$$

para toda variável aleatória X . Como caso particular consideremos $X = 1_A$ onde A é um evento crescente e aplicando a desigualdade FKG obtemos

$$\phi_{p_2, q, \Lambda}^\xi(A) = \frac{\phi_{p_1, q, \Lambda}^\xi(1_A Y)}{\phi_{p_1, q, \Lambda}^\xi(Y)} \geq \phi_{p_1, q, \Lambda}^\xi(A),$$

concluindo-se a prova. ■

Propriedades de Domínio de Markov e Energia Finita

Considere um subgrafo finito $\Gamma = (\Gamma, E(\Gamma))$ (o abuso de notação cometido aqui é que identificamos Γ com seu conjunto de vértices $V(\Gamma)$) de \mathbb{Z}^2 e seja Λ um subgrafo de Γ . A próxima proposição, chamada *Domínio de Markov*, nos mostra como a medida de probabilidade do modelo de aglomerados aleatórios em Λ , pode ser obtida através da medida de probabilidade deste modelo definida em Γ com condições de fronteira adequadas.

Antes de prosseguir, relembremos uma propriedade elementar da esperança condicional. Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade. Suponha que X seja uma variável aleatória neste espaço. Se $A \in \mathcal{F}$ então a esperança condicional de X dada a σ -álgebra gerada por A , tem a seguinte expressão para todo $\omega \in \Omega$:

$$\mathbb{E}[X|A, A^c, \emptyset, \Omega](\omega) = \frac{1}{P(A)}\mathbb{E}[X \cdot 1_A]1_A(\omega) + \frac{1}{P(A^c)}\mathbb{E}[X \cdot 1_{A^c}]1_{A^c}(\omega).$$

Para demonstrar a próxima proposição deste texto vamos precisar introduzir uma nova notação para falarmos de algumas condições de fronteira que surgem naturalmente quando consideramos as equações DLR.

Sejam $\Lambda \subset \Gamma \subset \mathbb{Z}^2$ subgrafos finitos. Dada uma condição de fronteira ξ em Γ e uma configuração $\omega \in \{0, 1\}^{E(\Gamma)}$, podemos definir uma nova condição de fronteira em Λ que será denotada por $\xi \cup \omega$ e definida da seguinte maneira: $\{x, y\} \in \xi \cup \omega$, se e somente se, $x, y \in \partial\Lambda$ e além do mais x e y pertencem a mesma componente conexa no grafo cujo conjunto de vértices é formado por $(V(\Gamma) \setminus V(\Lambda)) \cup \partial\Lambda$ e o conjunto de arestas é dada por todas as arestas abertas da configuração ω tais que seus pontos terminais estejam no conjunto de vértices que acabamos de definir, unido ao conjunto das arestas ξ . Em outras palavras, $\{x, y\} \in (\xi \cup \omega)$ se eles estão no mesmo aglomerado aberto determinado por ω e ξ “fora” de Λ . A aspas no fora se refere ao fato de que o aglomerado ou as arestas mencionadas acima podem conter vértices ou arestas da fronteira de Λ . Veja Figura (2.15).

Usando a notação introduzida acima e tomando a aresta $e = \{x, y\}$, podemos escrever a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \phi_{p, q, \Gamma}^\xi(\{\omega(e) = 0\}) &= \frac{1}{Z_{p, q, \Gamma}^\xi} \sum_{\substack{\omega \in \{0, 1\}^{E(\Gamma)} \\ \omega(e) = 0}} p^{o(\omega_e)} (1-p)^{c(\omega_e)} q^{k(\omega_e, \Gamma)} \\ &= \frac{1}{Z_{p, q, \Gamma}^\xi} \times Z_{p, q, \Gamma \setminus \{x, y\}}^{\xi \cup 0}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Analogamente

$$\phi_{p,q,\Gamma}^{\xi}(\{\omega(e) = 1\}) = \frac{1}{Z_{p,q,\Gamma}^{\xi}} \times Z_{p,q,\Gamma \setminus \{x,y\}}^{\xi \cup 1}. \quad (2.38)$$

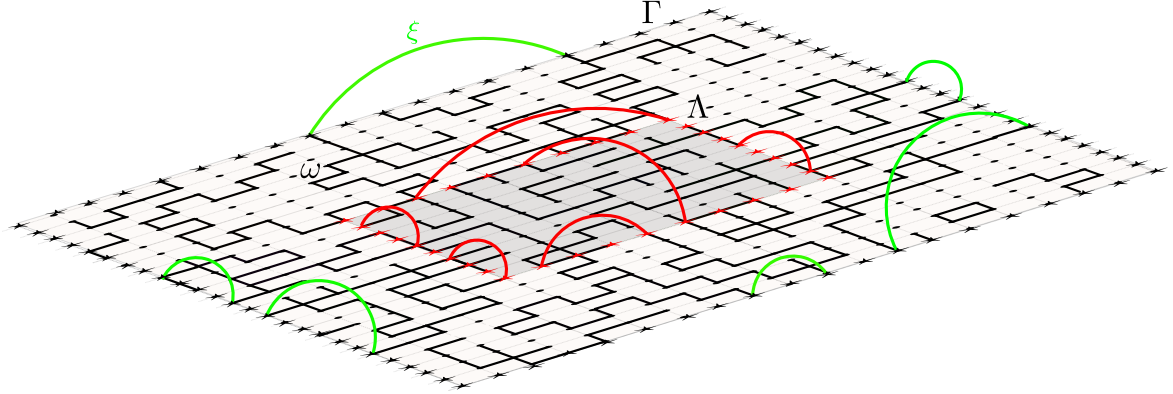


Figura 2.15: representação da configuração $\xi \cup \omega$, representada pelas componentes conexas (incluindo vértices isolados) formados pela condição de fronteira ξ , a configuração ω e as arestas de vermelho em Γ . Observe que a condição de fronteira ξ sobre Γ induz uma condição de fronteira (em linhas vermelhas) sobre a caixa Λ .

PROPOSIÇÃO 2.5 (Propriedade do Domínio de Markov). *Seja $\Lambda \subset \Gamma$, X uma variável aleatória que depende apenas dos estados das arestas de $E(\Lambda)$. Denotamos por $\mathcal{F}_{\Gamma \setminus \Lambda} = \sigma(\omega(e) : e \in E(\Gamma) \setminus E(\Lambda))$ à σ -álgebra gerada pelas variáveis aleatórias $\omega(e)$ com $e \in E(\Gamma) \setminus E(\Lambda)$. Então*

$$\phi_{p,q,\Gamma}^{\xi}(X | \mathcal{F}_{\Gamma \setminus \Lambda})(\omega) = \phi_{p,q,\Lambda}^{\xi \cup \omega}(X).$$

Demonstração. Vamos primeiro fazer esta prova em um caso mais simples. Seja $e = \{x, y\}$ uma aresta em Γ e tome $\Lambda = \Gamma \setminus \{x, y\}$. Então

$$\mathcal{F}_{\Gamma \setminus (\Gamma \setminus \{x,y\})} = \mathcal{F}_{\{x,y\}} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega(e) = 0\}, \{\omega(e) = 1\}\}.$$

Portanto

$$\phi_{p,q,\Gamma}^{\xi}(X | \mathcal{F}_{\Gamma \setminus \Lambda}) = \frac{\phi_{p,q,\Gamma}^{\xi}(1_{\{\omega(e)=0\}} X)}{\phi_{p,q,\Gamma}^{\xi}(1_{\{\omega(e)=0\}})} 1_{\{\omega(e)=0\}} + \frac{\phi_{p,q,\Gamma}^{\xi}(1_{\{\omega(e)=1\}} X)}{\phi_{p,q,\Gamma}^{\xi}(1_{\{\omega(e)=1\}})} 1_{\{\omega(e)=1\}}.$$

Usando as identidades (2.37) e (2.38) ficamos com

$$\phi_{p,q,\Gamma}^{\xi}(X | \mathcal{F}_{\Gamma \setminus \Lambda}) = \phi_{p,q,\Gamma \setminus \{x,y\}}^{\xi \cup 0}(X) 1_{\{\omega(e)=0\}} + \phi_{p,q,\Gamma \setminus \{x,y\}}^{\xi \cup 1}(X) 1_{\{\omega(e)=1\}}.$$

Aplicando a função acima em um ponto arbitrário $\omega \in \{0, 1\}^{E(\Gamma)}$ ficamos com

$$\phi_{p,q,\Gamma}^{\xi}(X | \mathcal{F}_{\Gamma \setminus (\Gamma \setminus \{x,y\})})(\omega) = \phi_{p,q,\Gamma \setminus \{x,y\}}^{\xi \cup \omega}(X).$$

Usando as propriedades da esperança condicional e repetindo o procedimento acima concluímos a prova. \blacksquare

A seguinte propriedade é uma importante propriedade das medidas de probabilidade definidas pelo modelo de aglomerados aleatórios.

PROPOSIÇÃO 2.6 (Propriedade da Energia Finita). *Sejam Λ subgrafo de \mathbb{Z}^2 e $e = \{x, y\} \in E(\Lambda)$. Denotamos por K_e o evento que x e y estão conectados por um caminho aberto que não usa a aresta e . Se $p \in (0, 1)$ e $q \geq 1$ temos que*

$$\phi_{p,q,\Lambda}^\xi(\omega(e) = 1 | \mathcal{F}_{\Lambda \setminus \{x,y\}}) = \begin{cases} p, & \text{se } x \text{ e } y \text{ pertencem a mesma} \\ & \text{componente em } (\Lambda, \eta(\omega) \setminus e); \\ \frac{p}{p + q(1-p)}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Usando a propriedade de domínio de Markov para Λ e $\{x, y\}$ temos que

$$\phi_{p,q,\Lambda}^\xi(\omega(e) = 1 | \mathcal{F}_{\Lambda \setminus \{x,y\}})(\psi) = \phi_{p,q,\{x,y\}}^{\xi \cup \psi}(\omega(e) = 1).$$

Se x e y pertencem a mesma componente em $(\Lambda, \eta(\omega) \setminus e)$ a condição de fronteira acima é a condição de fronteira conectada. Logo

$$\begin{aligned} \phi_{p,q,\{x,y\}}^{\xi \cup \psi}(\omega(e) = 1) &= \phi_{p,q,\{x,y\}}^1(\omega(e) = 1) \\ &= \frac{p^1(1-p)^0q^1}{p^1(1-p)^0q^1 + p^0(1-p)^1q^1} \\ &= p. \end{aligned}$$

Por outro lado, se x e y não pertencem a mesma componente em $(\Lambda, \eta(\omega) \setminus e)$ a condição de fronteira $\xi \cup \psi$ seria a condição de fronteira livre, logo

$$\phi_{p,q,\{x,y\}}^{\xi \cup \psi}(\omega(e) = 1) = \phi_{p,q,\{x,y\}}^0(\omega(e) = 1).$$

Para calcular o lado direito acima, se procede analogamente ao caso anterior. \blacksquare

Com estas ferramentas a nossa disposição, agora podemos provar a desigualdade seguinte, que consiste em comparar medidas de probabilidade do modelo de aglomerados aleatórios com respeito as condições de fronteira.

COROLÁRIO 2.5 (Comparação entre condições de fronteira). *Sejam $p \in [0, 1]$, $q \geq 1$. Se $\xi \preceq \psi$ (toda aresta de ξ é uma aresta de ψ) então*

$$\phi_{p,q,\Lambda}^\xi(A) \leq \phi_{p,q,\Lambda}^\psi(A),$$

para qualquer evento crescente A na σ -álgebra das partes de $\{0, 1\}^{E(\Lambda)}$.

Demonstração. Sejam ξ e ψ duas condições de fronteira sobre Λ . Suponha que $\xi \preceq \psi$. Seja Λ_0 o grafo obtido a partir de Λ adicionando as arestas de ψ . Seja B o evento dado por todos os elementos $\omega \in \{0, 1\}^{E(\Lambda_0)}$ tais que $\omega(e) = 0$ para todo $e \in \psi$ (lembrando que ψ é um conjunto de arestas). Pelas propriedades da esperança condicional para todo evento A e todo ω tal que $\omega(e) = 0$ para todo $e \in \psi$ temos

$$\phi_{p,q,\Lambda_0}^\xi(A | \mathcal{F}_{\Lambda_0 \setminus \Lambda})(\omega) = \phi_{p,q,\Lambda_0}^\xi(A | \omega(e) = 0 \text{ para todo } e \in \psi) = \phi_{p,q,\Lambda_0}^\xi(A | B).$$

Usando a propriedade de domínio de Markov no lado esquerdo da igualdade acima ficamos com

$$\phi_{p,q,\Lambda_0}^\xi(A | \mathcal{F}_{\Lambda_0 \setminus \Lambda})(\omega) = \phi_{p,q,\Lambda}^{\xi \cup \omega}(A) = \phi_{p,q,\Lambda}^\xi(A),$$

onde na última igualdade usamos que $\xi \cup \omega$ induz a mesma condição de fronteira que ξ em Λ . Seja C o evento dado por todos os elementos $\omega \in \{0, 1\}^{E(\Lambda_0)}$ tais que $\omega(e) = 1$ para todo $e \in \psi$. Analogamente tomando ω tal que $\omega(e) = 1$ para todo $e \in \psi$, temos

$$\phi_{p,q,\Lambda_0}^\xi(A|\mathcal{F}_{\Lambda_0 \setminus \Lambda})(\omega) = \phi_{p,q,\Lambda_0}^\xi(A|C).$$

Aplicando a propriedade de domínio de Markov no lado esquerdo da igualdade acima ficamos agora com

$$\phi_{p,q,\Lambda_0}^\xi(A|\mathcal{F}_{\Lambda_0 \setminus \Lambda})(\omega) = \phi_{p,q,\Lambda}^{\xi \cup \omega}(A) = \phi_{p,q,\Lambda}^\psi(A),$$

onde na última igualdade usamos que $\xi \cup \omega = \psi$. Pela definição de probabilidade condicional e pela Desigualdade de FKG temos que

$$\phi_{p,q,\Lambda_0}^\xi(A|B) = \frac{\phi_{p,q,\Lambda_0}^\xi(A \cap B)}{\phi_{p,q,\Lambda_0}^\xi(B)} \leq \frac{\phi_{p,q,\Lambda_0}^\xi(A)\phi_{p,q,\Lambda_0}^\xi(B)}{\phi_{p,q,\Lambda_0}^\xi(B)} = \phi_{p,q,\Lambda_0}^\xi(A).$$

Note que B é um evento decrescente, por isto invertemos o sentido da Desigualdade FKG na linha acima. Com as relações obtidas acima podemos então concluir que

$$\phi_{p,q,\Lambda}^\xi(A) \leq \phi_{p,q,\Lambda_0}^\xi(A). \quad (2.39)$$

Pela definição de esperança condicional temos

$$\phi_{p,q,\Lambda_0}^\xi(A) = \phi_{p,q,\Lambda_0}^\xi(A|C)\phi_{p,q,\Lambda_0}^\xi(C) = \phi_{p,q,\Lambda}^\psi(A)\phi_{p,q,\Lambda_0}^\xi(C) \leq \phi_{p,q,\Lambda}^\psi(A),$$

onde na segunda igualdade usamos a propriedade de domínio de Markov como mostrado acima. Com esta desigualdade concluimos a prova do teorema já que vale (2.39). ■

Este corolário é importante, pois dele se deduz que as medidas $\phi_{p,q,\Lambda}^0$ e $\phi_{p,q,\Lambda}^1$ são medidas extremas (no sentido de dominação estocástica), isto é,

$$\phi_{p,q,\Lambda}^0(A) \leq \phi_{p,q,\Lambda}^\xi(A) \leq \phi_{p,q,\Lambda}^1(A),$$

para qualquer condição de fronteira ξ e A evento crescente.

2.2.3 O Limite Termodinâmico e a existência de transição de fase.

Estamos interessados em estudar o que acontece com as medidas de probabilidade do modelo de aglomerados aleatórios quando nosso grafo finito começa a crescer monotonicamente para um grafo infinito, o chamado "Limite Termodinâmico".

A definição de uma medida de aglomerados aleatórios sobre \mathbb{Z}^2 não pode ser feita diretamente, a partir da definição dada para subgrafos de \mathbb{Z}^2 , pois pode acontecer que o número de arestas abertas como fechadas sejam infinitos.

Existem basicamente duas formas de definir estes tipos de medidas sobre espaços infinitos. A primeira (e a mais importante para nós) é definida indiretamente tomando limites (fracos) das medidas de aglomerados aleatórios sobre grafos finitos (como por

exemplo uma sequência de caixas crescentes que tendem a \mathbb{Z}^2) com condições de fronteira apropriadas, veja [13]. A segunda forma é inspirada pelos trabalhos de Dobrushin, Lanford e Ruelle para estados de Gibbs, veja [11].

Um dos conceitos fundamentais para compreender o que é o limite termodinâmico é o conceito de convergência fraca de medidas. Existem vários conceitos de convergência de medidas de probabilidade. Como já mencionamos, a topologia gerada pelos cilindros finito dimensionais em $\{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^2)}$ é metrizável e além do mais este espaço com esta topologia é um espaço métrico compacto. Este fato permite usar um importante teorema de Análise que garante a compacidade do espaço de medidas de probabilidade definidas sobre os borelianos de $\{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^2)}$. Antes de enunciar este teorema vamos dar a definição de convergência fraca.

DEFINIÇÃO 2.13 (Convergência Fraca). *Seja (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável. Uma sequência $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de medidas de probabilidade definidas neste espaço converge fracamente para μ se para toda função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, temos*

$$\int_{\Omega} f d\mu_n \longrightarrow \int_{\Omega} f d\mu,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Esta noção de convergência define de maneira natural uma topologia no conjunto de todas as probabilidades que denotaremos por $\mathcal{M}_1(\Omega)$. No caso em que Ω também tem estrutura de espaço métrico denotamos por $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ o conjunto de todas as medidas de probabilidade definidas sobre a σ -álgebra de Borel de Ω , isto é, a σ -álgebra gerada pelos abertos de Ω . A topologia induzida em $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ pela convergência fraca é metrizável e além do mais com respeito a esta métrica o espaço $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ é um espaço topológico compacto, se e somente se, Ω é compacto, veja Teorema 6.4 da referência [15]. Um caso particular de bastante interesse em nosso trabalho é quando $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$. Com a topologia produto, temos pelo teorema de Tychonoff que este espaço é compacto. Podemos mostrar também que esta topologia é metrizável e assim segue do teorema citado anteriormente que $\mathcal{M}_1(\{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^2)}, \mathcal{B}(\{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^2))})$ é um espaço métrico compacto.

Para definirmos o limite termodinâmico, lembramos que podemos olhar para as medidas do modelo de aglomerados aleatórios com condições de fronteira, no sentido da Definição 2.5 da página 26, em cada $\Lambda_n \subset \mathbb{Z}^2$ (finito) como medidas de probabilidade definidas na σ -álgebra de borel de $\{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^2)}$. De fato, neste contexto de condições de fronteira a medida de probabilidade $\phi_{p,q,\Lambda_n}^{\xi}$ é dada por

$$\phi_{p,q,\Lambda_n}^{\xi}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{Z_{p,q,\Lambda_n}^{\xi}} p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)} q^{k(\omega, \Lambda_n)}, & \text{se } \omega \in \Omega_{\Lambda_n}^{\xi}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Esta construção motiva a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2.14 (Limite Termodinâmico). *A medida de probabilidade ϕ_{p,q,\mathbb{Z}^2} definida sobre o conjunto de configurações $\Omega = \{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^2)}$ associado ao grafo infinito \mathbb{Z}^2 , é chamada a medida de aglomerados aleatórios a volume infinito com parâmetros p e q ,*

se existe uma condição de fronteira $\xi \in \Omega$, no sentido da Definição 2.5, e uma sequência crescente de subgrafos finitos $\{(\Lambda_n, E(\Lambda_n))\}_{n \geq 1}$ satisfazendo $\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^2$ quando $n \rightarrow \infty$ e

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\Lambda_n}^\xi,$$

onde a convergência acima deve ser entendida no sentido da Definição 2.13.

Para cada $\Lambda_n \subset \mathbb{Z}^2$ a medida de probabilidade ϕ_{p,q,Λ_n}^ξ de aglomerados aleatórios com condição de fronteira $\xi(e) = 1$ para todo $e \in E(\mathbb{Z}^2)$, tem um papel importante no nosso trabalho.

Observamos que alguns resultados, como a Desigualdade de FKG, a Desigualdade de Comparação com o parâmetro p , a monotonicidade com respeito às condições de fronteira, propriedade de Domínio de Markov e a propriedade da Energia Finita permanecem válidas, com as naturais adaptações, no limite termodinâmico.

TEOREMA 2.8. *Existem duas medidas de probabilidade $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0$ e $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1$ chamadas medidas do modelo de aglomerados aleatórios a volume infinito com condições de fronteira livre e conectada respetivamente. Para todo evento $A \in \mathcal{F}$ crescente que depende de um número finito de arestas tais medidas satisfazem:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\Lambda_n}^1(A) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(A)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\Lambda_n}^0(A) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0(A),$$

onde $\Lambda_n = [-n, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2$.

Demonstração. Já que A depende apenas do estado de um número finito de arestas então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A \in \mathcal{F}_{\Lambda_N}$. Observe que para cada condição de fronteira ψ temos para todo $n \geq N$ que

$$\phi_{p,q,\Lambda_{n+1}}^1(A | \mathcal{F}_{\Lambda_{n+1} \setminus \Lambda_n})(\psi) = \phi_{p,q,\Lambda_n}^{1 \cup \psi}(A) \leq \phi_{p,q,\Lambda_n}^1(A), \quad (2.40)$$

onde na igualdade acima usamos a propriedade do Domínio de Markov, e na desigualdade a condição de comparação entre condições de fronteira. Assim temos que

$$\begin{aligned} \phi_{p,q,\Lambda_{n+1}}^1(A) &= \phi_{p,q,\Lambda_{n+1}}^1 \left(\phi_{p,q,\Lambda_{n+1}}^1(A | \mathcal{F}_{\Lambda_{n+1} \setminus \Lambda_n}) \right) \\ &\stackrel{\text{por (2.40)}}{\leq} \underbrace{\phi_{p,q,\Lambda_{n+1}}^1}_{\leq} [\phi_{p,q,\Lambda_n}^1(A)] \\ &= \phi_{p,q,\Lambda_n}^1(A). \end{aligned}$$

Logo $\phi_{p,q,\Lambda_{n+1}}^1(A)$ é decrescente. Como esta sequência de números reais é limitada ela é convergente. Claramente este limite é independente da escolha de Λ_n e portanto podemos definir

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(A) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\Lambda_n}^1(A).$$

Já que a coleção dos eventos crescentes que depende de um número finito de variáveis é uma classe de determinação de convergência, veja [3], existe uma medida de probabilidade $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1$ tal que ϕ_{p,q,Λ_n}^1 converge fracamente para $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1$.

Analogamente temos que $\phi_{p,q,\Lambda_{n+1}}^0(A)$ é uma sequência limitada crescente ($n \geq N$) de números reais e portanto converge. Usando novamente argumentos similares ao caso

anterior, temos que $\phi_{p,q,\Lambda_{n+1}}^0$ converge fracamente a uma medida de probabilidade que será denotada por $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0$. ■

Observamos que o teorema acima garante a existência de ambos limites termodinâmicos, mas ele não menciona nada sobre a unicidade de tais medidas.

OBSERVAÇÃO 2.5. *Todos os limites termodinâmicos do modelo de aglomerados aleatórios sobre \mathbb{Z}^2 são estocasticamente dominados por $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1$ e dominam $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0$.*

Esta observação é consequência direta da desigualdade de comparação entre condições de fronteira a volumes finitos (Teorema 2.5).

Um problema que continua em aberto atualmente é identificar todos os pares (p, q) tais que

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1 = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0.$$

O próximo teorema nos dá certa informação (parcial) sobre o conjunto dos parâmetros $p \in [0, 1]$ para o qual a igualdade falha.

TEOREMA 2.9 (Teorema 4.60 da referência [13]). *Para $q \geq 1$, o conjunto $\{p \in [0, 1] : \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0 \neq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1\}$ dos parâmetros $p \in [0, 1]$ para o qual a unicidade falha é no máximo enumerável.*

Ergodicidade das medidas de aglomerados aleatórios a volume infinito.

A seguinte propriedade está relacionada com o conceito de medidas ergódicas (ver apêndice). Esta propriedade nos diz que as medidas a volume infinito do modelo de aglomerados aleatórios extremais (no sentido de espaços convexos, isto é, estas medidas não podem ser escritas como combinação convexa de duas medidas distintas) são ergódicas com respeito as translações da rede \mathbb{Z}^2 .

Esta propriedade é importante para nós porque é usada em muitas oportunidades ao decorrer do trabalho. Alertamos que este resultado não diz nada sobre as medidas obtidas pelo limite termodinâmico com condições de fronteira diferentes de 0 e 1.

TEOREMA 2.10 (Corolário 4.23 da referência [13]). *Fixado $p \in [0, 1]$ e $q \in (0, \infty)$. As medidas de aglomerado aleatório extremais a volume infinito $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b$, $b = 0, 1$ são ergódicas com respeito as translações de \mathbb{Z}^2 .*

Transição de fase

A transição de fase para o modelo de aglomerados aleatórios a volume infinito é similar a transição de fase para a percolação de Bernoulli, esta semelhança é descrita precisamente no teorema abaixo.

TEOREMA 2.11. *Para todo $q \geq 1$ fixado, existe um ponto crítico $p_c(q) \equiv p_c \in [0, 1]$ tal que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall p < p_c, \text{ qualquer medida de aglomerados aleatórios sobre } \mathbb{Z}^2, \text{ não têm} \\ \quad \text{aglomerados aleatórios infinitos quase certamente.} \\ \\ \forall p > p_c, \text{ qualquer medida de aglomerados aleatórios sobre } \mathbb{Z}^2, \text{ tem pelo} \\ \quad \text{menos um aglomerado aleatório infinito quase certamente.} \end{array} \right.$$

Demonstração. Fixe $q \geq 1$ e $N \in \mathbb{N}$. Denote por $[-N, N]^2 \equiv [-N, N]^2 \cap \mathbb{Z}^2$, a caixa de centro na origem e lado $2N$. Pelo Teorema 2.8, para todo $N > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,[-n,n]^2}^1(0 \leftrightarrow \partial[-N, N]^2) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(0 \leftrightarrow \partial[-N, N]^2).$$

A quantidade a esquerda na igualdade acima é não decrescente em p , pelo Corolário 2.4, logo o limite também é monótono no parâmetro p . Uma vez que

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} \{0 \leftrightarrow \partial[-N, N]^2\} = \{0 \leftrightarrow \infty\}.$$

Da observação acima temos que

$$\phi_{p_1,q,\mathbb{Z}^2}^1(0 \leftrightarrow \partial[-N, N]^2) \leq \phi_{p_2,q,\mathbb{Z}^2}^1(0 \leftrightarrow \partial[-N, N]^2),$$

sempre que $p_1 \leq p_2$. Pela continuidade das medidas de probabilidade esta desigualdade implica que para todo $p_1 \leq p_2$ que

$$\phi_{p_1,q,\mathbb{Z}^2}^1(0 \leftrightarrow \infty) \leq \phi_{p_2,q,\mathbb{Z}^2}^1(0 \leftrightarrow \infty).$$

Analogamente a mesma desigualdade é valida para a condição de fronteira livre. Portanto podemos definir

$$p_c^1 = \inf\{p \in [0, 1] : \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(0 \leftrightarrow \infty) > 0\}$$

e

$$p_c^0 = \inf\{p \in [0, 1] : \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0(0 \leftrightarrow \infty) > 0\}.$$

Vamos mostrar agora que segue do Teorema 2.9 que $p_c^1 = p_c^0$. De fato, suponha por contradição que $p_c^1 > p_c^0$. Então existe algum $p \in (p_c^0, p_c^1)$ tal que

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(0 \leftrightarrow \infty) = 0 \quad (\text{pela definição de } p_c^1).$$

Já que $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0 \preceq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1$ e $\{0 \leftrightarrow \infty\}$ é um evento crescente segue que $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0(0 \leftrightarrow \infty) = 0$. Mas isto contradiz a definição de p_c^0 .

Este ponto crítico comum será denotado por p_c . No restante da prova, para simplificar a notação, vamos escrever

$$\exists \text{AAI} = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^2} \{x \leftrightarrow \infty\},$$

para denotar o evento existe pelo menos um aglomerado aleatório infinito. Note que este evento é crescente e invariante por translações, pois uma translação de \mathbb{Z}^2 leva aglomerados aleatórios infinitos em aglomerados aleatórios infinitos na configuração ω transladada, por causa da invariância translacional da rede \mathbb{Z}^2 .

Por outro lado, as medidas de aglomerados aleatórios extremas a volume infinito $\{\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b : b = 0, 1\}$ são ergódicas, logo

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(\exists \text{AAI}) \in \{0, 1\}.$$

Por dominação estocástica, σ -aditividade e invariância translacional das medidas $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b$ com $b = 0, 1$ temos para todo $p < p_c$ que

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^\xi(\exists \text{AAI}) \leq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(\exists \text{AAI}) \leq \sum_{x \in V(\mathbb{Z}^2)} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(x \leftrightarrow \infty) \stackrel{\text{def. de } p_c}{=} 0.$$

Este último fato conclui a demonstração da primeira parte do teorema.

Observe que se $p > p_c$ então devemos ter $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0(\exists\text{AAI}) = 1$ pois, caso contrário

$$0 = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0(\exists\text{AAI}) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0\left(\bigcup_{x \in V(\mathbb{Z}^2)} \{x \leftrightarrow \infty\}\right) \geq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0(x \leftrightarrow \infty) \stackrel{\text{def. de } p_c}{>} 0,$$

onde novamente na última desigualdade fizemos uso da invariância translacional do modelo e da definição de ponto crítico. E assim chegamos a uma contradição.

Portanto $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0(\exists\text{AAI}) = 1$. Usando a dominação estocástica da medida extremal conectada, temos a desigualdade

$$1 = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0(\exists\text{AAI}) \leq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^\xi(\exists\text{AAI}),$$

que conclui a prova. ■

O fato de que $p_c \in (0, 1)$ não é de maneira nenhuma óbvio. Este resultado pode ser provado usando um argumento similar ao argumento de Peierls feito no Teorema 2.2 para percolação de Bernoulli. Não nos preocupamos com este detalhe pois, no capítulo 3 provaremos diretamente que o ponto crítico coincide com o ponto

$$p_{sd} = \frac{\sqrt{q}}{1 + \sqrt{q}}$$

em duas dimensões com $q \geq 1$, o que implicará que o ponto crítico é não trivial.

2.2.4 Unicidade do Aglomerado Aleatório Infinito

Pelo Teorema 2.11 temos que na fase supercrítica (isto é, quando $p > p_c$) existe pelo menos um aglomerado aleatório infinito quase certamente. A pergunta é: este aglomerado aleatório infinito é único? A resposta é sim. Para provar este fato, primeiro daremos algumas definições e provaremos alguns resultados auxiliares.

DEFINIÇÃO 2.15. *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo. Um vértice $x \in V$ é denominado "ponto triplo" para G se:*

- a) *Existem apenas três arestas de E incidentes a x e*
- b) *O grafo $G \setminus \{x\} = (V \setminus \{x\}, E \setminus \{e_1, e_2, e_3\})$, onde e_1, e_2, e_3 são arestas incidentes a x , tem exatamente três componentes conexas. Chamaremos de ramos os conjuntos de vértices destas três componentes conexas e usaremos a notação $E_1(x), E_2(x), E_3(x)$ para designá-los.*

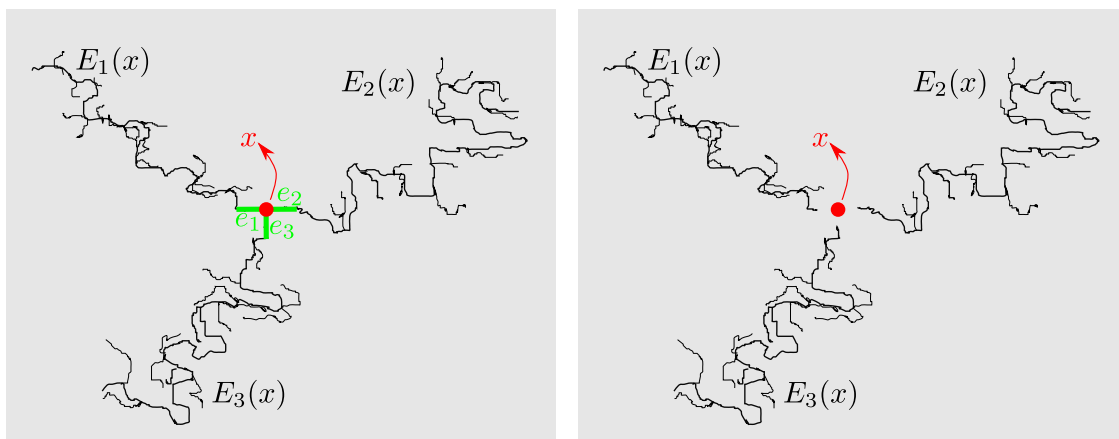


Figura 2.16: ao lado esquerdo exemplificamos um ponto triplo x , incidente a três arestas (únicas) e_1, e_2 e e_3 junto com seus ramos $E_1(x), E_2(x)$ e $E_3(x)$. No lado direito, temos o deletamento das arestas incidentes ao ponto triplo gerando três componentes conexas disjuntas.

LEMA 2.4 (Referência [9]). *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo.*

- i) Se x_1, \dots, x_n são pontos triplos distintos de G . Então para algum i , dois de três ramos em x_i , digamos $E_2(x_i)$ e $E_3(x_i)$, não contêm nenhum dos outros pontos triplos $\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\}$.*
- ii) Seja $G' = (V \setminus E_3(x_i), E \setminus E[E_3(x_i)])$ o subgrafo de G onde $E[E_3(x_i)]$ é o conjunto de todas as arestas incidentes aos vértices do conjunto $E_3(x_i)$. Então $\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\}$ são pontos triplos para G .*
- iii) Sejam x_1, \dots, x_n pontos triplos distintos para G . Entre os $3n$ ramos $E_i(x_1), E_i(x_2), \dots, E_i(x_n)$, $i = 1, 2, 3$ se pode achar pelo menos $n + 2$ ramos disjuntos.*

DEFINIÇÃO 2.16. *Um ponto triplo é um “ponto triplo especial” se seus ramos são infinitos.*

O próximo teorema nos fornece a unicidade do aglomerado aleatório infinito quase certamente para medidas de aglomerados aleatórios com condições de fronteira extremas. Ele diz que para valores de p maiores que o ponto crítico, existe um único aglomerado aleatório infinito quase certamente, isto é,

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(\text{Existe um único aglomerado aleatório infinito}) = 1, \quad \text{onde } b = 0, 1.$$

Mais precisamente

TEOREMA 2.12 (Unicidade do aglomerado infinito). *Para todo $p \in [0, 1]$ o número de aglomerados aleatórios infinitos é igual a 0 ou 1 quase certamente.*

Vamos denotar por N a variável aleatória que conta o número de aglomerados aleatórios infinitos. Claramente N é invariante por translações, pois as translações das configurações de Ω não alteram seu número de aglomerados aleatórios. Pela ergodicidade das medidas extremas $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b$, $b = 0, 1$ (veja o Teorema 2.10), temos que $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(N = n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\})$ é igual a zero ou um.

Daí a prova da unicidade do aglomerado aleatório infinito, pode ser deduzida como consequência dos dois seguintes lemas:

LEMA 2.5. Para cada $p \in [0, 1]$ e $q \geq 1$ temos que

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(N \in \{0, 1, \infty\}) = 1.$$

Demonstração. Desejamos provar que $N \in \{0, 1, \infty\}$ quase certamente. Vamos fazer a prova por contradição. Fixe $n_0 \neq 0, 1$ e ∞ e suponha por contradição que

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(N = n_0) = 1. \quad (2.41)$$

Defina o evento

$$A_k = \{n_0 \text{ aglomerados aleatórios infinitos em } \mathbb{Z}^2 \setminus \Lambda_k \text{ interceptam } \Lambda_k\},$$

onde $\Lambda_k = [-k, k]^2 \cap \mathbb{Z}^2$ é a caixa centrada na origem de lado $2k$, veja a Figura 2.17.



Figura 2.17: no lado esquerdo representamos a realização do evento A_k , com $n_0 = 3$. No lado direito, observa-se que ao abrir todas as arestas em Λ_k , conseguimos a união das três componentes conexas diferentes (fora de Λ_k) e exatamente um aglomerado aleatório infinito.

Observe que a sequência de conjuntos $\{A_k : k > 0\}$ é crescente e que $\bigcup_{k>0} A_k = \{N = n_0\}$ o que implica (pelo teorema da continuidade da probabilidade) que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(A_k) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b\left(\bigcup_{k>0} A_k\right) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(N = n_0) = 1.$$

Portanto podemos escolher um $k > 0$ tal que

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(A_k) > \frac{1}{2}. \quad (2.42)$$

Observe que

$$A_k \cap \{\forall e \in E(\Lambda_k) : \omega(e) = 1\} \subset \{N = 1\}$$

pois no evento acima os n_0 aglomerados estão unidos pela caixa Λ_k já que todas suas arestas estão abertas, veja a Figura 2.17.

Daí temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(N = 1) &\geq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(A_k \cap \overbrace{\{\forall e \in E(\Lambda_k) : \omega(e) = 1\}}^{\equiv F}) \\ &= \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(F|A_k) \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(A_k) \\ &> 0, \end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade simplesmente usamos inclusão de conjuntos, e na última desigualdade usamos a Propriedade da Energia Finita (ver Proposição 2.6) e a equação (2.42). Chegando assim a uma contradição com (2.41). ■

LEMA 2.6. *Para cada $p \in [0, 1]$ e $q \geq 1$ temos que*

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(N = \infty) = 0.$$

Demonstração. É suficiente provar que $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(N \geq 3) = 0$. Suponha que

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(N \geq 3) > 0.$$

Defina Q_{n-1} como a caixa centrada na origem de lado $2n - 1$ e o evento

$$F_n = \left\{ \begin{array}{l} \text{Pelo menos 3 aglomerados aleatórios} \\ \text{infinitos (abertos) distintos interceptam } Q_{n-1} \end{array} \right\}.$$

Observe que $\{N \geq 3\} = \bigcup_{n \geq 1} F_n$ e que $F_n \subset F_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, logo pelo teorema da continuidade da probabilidade temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(F_n) = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(N \geq 3).$$

Portanto existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(F_n) > 0. \quad (2.43)$$

Dados três pontos distintos y_1, y_2 , e y_3 em ∂Q_{n_0-1} , defina o evento

$$F_{n_0}(y_1, y_2, y_3) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Os pontos } y_1, y_2, y_3 \text{ pertencem a aglomerados} \\ \text{aleatórios infinitos (abertos) distintos,} \\ \text{usando apenas arestas exteriores a } Q_{n_0-1} \end{array} \right\}$$

Como

$$F_{n_0} \subset \bigcup_{y_1, y_2, y_3} F_{n_0}(y_1, y_2, y_3),$$

então por (2.43) temos que: para algum y_1, y_2, y_3

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(F_{n_0}(y_1, y_2, y_3)) > 0. \quad (2.44)$$

Dados y_1, y_2, y_3 existe $x \equiv x(y_1, y_2, y_3) \in Q_{n_0-1}$ tal que existem três caminhos de arestas disjuntas no interior da caixa Q_{n_0-1} ligando x a y_1, y_2 e y_3 , veja a Figura 2.18. Denotando estes três caminhos por: α, β , e θ , respectivamente, definimos o seguinte evento

$$F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3) = \left\{ \begin{array}{l} \text{os caminhos } \alpha, \beta \text{ e } \theta \text{ estão abertos} \\ \text{e as demais arestas do interior} \\ \text{da caixa } Q_{n_0-1} \text{ estão fechadas} \end{array} \right\}.$$

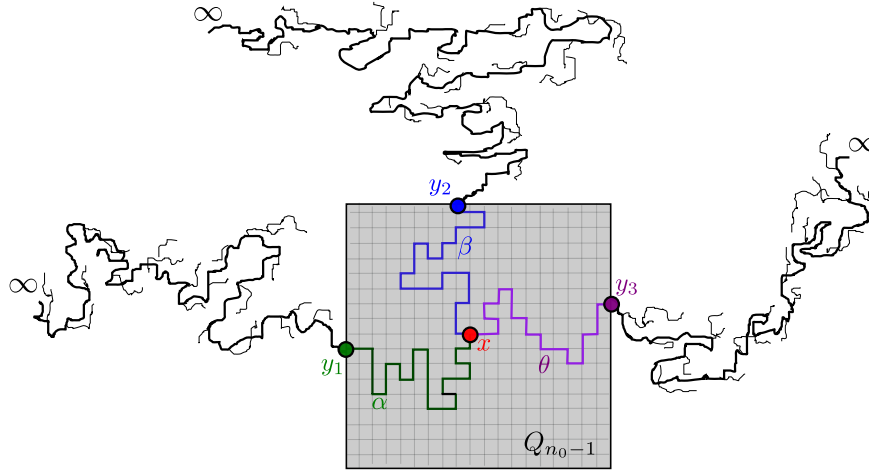


Figura 2.18: Construção dos caminhos abertos disjuntos α , β e θ no interior caixa Q_{n_0-1} ligando x a y_1, y_2, y_3 .

Pela propriedade da Energia Finita temos que

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3)) > 0. \quad (2.45)$$

Defina $P_T = \{x \text{ é "ponto triplo especial" no interior da caixa } Q_{n_0-1}\}$. Note que

$$\{x \in P_T\} \supset F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3) \cap F_{n_0}(y_1, y_2, y_3). \quad (2.46)$$

Como $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(F_{n_0}(y_1, y_2, y_3)) > 0$, aplicando a propriedade da Energia Finita temos que

$$0 < \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3) | F_{n_0}(y_1, y_2, y_3)) = \frac{\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3) \cap F_{n_0}(y_1, y_2, y_3))}{\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(F_{n_0}(y_1, y_2, y_3))}.$$

Usando equação (2.46) segue que

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(x \in P_T) > 0.$$

Por invariância translacional, temos que a probabilidade de qualquer ponto ser um ponto triplo é constante, isto é, existe uma constante positiva ρ tal que

$$0 < \rho = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(x \in P_T), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{Z}^2.$$

Seja X_n a variável aleatória que representa o número de pontos triplos dentro da caixa Q_{n-1} . Então

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(X_n) = \sum_{x \in Q_{n-1}} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(x \in P_T) = (2n-1)^2 \rho.$$

Já que X_n é uma variável aleatória integrável, então $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(X_n \geq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(X_n)) > 0$ pois, caso contrário

$$1 = \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(X_n < \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(X_n)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b\left(\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(X_n) - X_n \geq \frac{1}{k}\right) \stackrel{\text{D. Chebyshev}}{\leq} 0,$$

o que é uma contradição. Assim temos

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(X_n \geq (2n-1)^2 \rho) > 0. \quad (2.47)$$

Por outro lado, afirmamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$X_n \leq 4(2n - 1). \quad (2.48)$$

Para verificar esta afirmação, considere as componentes conexas dos pontos triplos especiais usando apenas arestas no interior da caixa Q_{n-1} . Suponha que cada componente contenha n_1, n_2, \dots pontos triplos especiais, logo $n_1 + n_2 + \dots$ é o número total de pontos triplos especiais no interior da caixa Q_{n-1} . Do Lema 2.4 temos que existem pelo menos $n_i + 2$ ramos distintos dentro das $3n_i$ possibilidades. Portanto podemos achar $\sum_{i \geq 1} (n_i + 2)$ ramos distintos de todos os pontos triplos. E como cada ramo de cada ponto triplo toca pelo menos um ou mais vértices em algum lado de ∂Q_{n-1} , temos necessariamente que

$$X_n = \sum_{i \geq 1} n_i \leq \sum_{i \geq 1} n_i + 2 \leq \#\partial Q_{n-1} = 4(2n - 1),$$

provando a desigualdade 2.48. Usando (2.47) e (2.48) obtemos a seguinte cota

$$(2n - 1)\rho \leq (2n - 1)^{-1}X_n \leq 4,$$

válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando o limite quando n tende ao infinito obtemos a contradição. ■

Demonstração do Teorema 2.12.

Segue dos Lemas 2.5 e 2.6 que

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^b(N \in \{0, 1\}) = 1, \quad (2.49)$$

concluindo a prova. ■

A Equação (2.49) nos diz que se existe um aglomerado aleatório infinito então ele é único quase certamente. Portanto na fase supercrítica existe um único aglomerado aleatório infinito quase certamente.

TEOREMAS FUNDAMENTAIS: PROBABILIDADES DE CRUZAMENTO

3.1 - Generalização da Fórmula de Russo

Nesta seção $G = (V, E)$ denotará um subgrafo finito de \mathbb{Z}^2 . Nosso objetivo agora é obter uma estimativa para medidas de aglomerados aleatórios com condições de fronteira periódica. Para isso, primeiro vamos entender o comportamento da função $p \rightarrow \phi_{p,q,G}^\xi(A)$ para um evento crescente não-trivial. Esta função crescente é igual a 0 em $p = 0$ e a 1 em $p = 1$, portanto estamos interessados nos casos em que p toma valores entre ϵ e $1 - \epsilon$ para algum número positivo ϵ .

Inicialmente vamos deduzir uma cota inferior para derivadas de probabilidades de eventos crescentes. No caso de percolação de Bernoulli existe um resultado clássico equivalente chamado de “Fórmula de Russo” a qual não discutiremos aqui. Para maiores detalhes veja [5], [9], [12].

DEFINIÇÃO 3.1. *Seja ω uma configuração em Ω . Uma aresta “ e ” $\in E$ é chamada de pivotal para o evento $A \in \mathcal{F}$ se $\omega^e \in A$ e $\omega_e \notin A$.*

PROPOSIÇÃO 3.1 (Fórmula de Russo, Veja [5],[9], [12]). *No modelo de Percolação de Bernoulli, para todo evento $A \in \mathcal{F}$ crescente que depende de um conjunto finito de arestas de E temos*

$$\frac{d}{dp} P_p(A) = \sum_{e \in E} P_p(\text{“}e\text{” é pivotal para } A).$$

Intuitivamente, a derivada de $\phi_{p,q,G}^\xi(A)$, com respeito a p , é governada pela influência de algumas arestas especiais. A seguinte definição é portanto natural neste contexto. A influência condicional da aresta “ e ” $\in E$ sobre A , denotada por $I_A(e)$, é definida por

$$I_A(e) = \phi_{p,q,G}^\xi(A|\omega(e) = 1) - \phi_{p,q,G}^\xi(A|\omega(e) = 0).$$

PROPOSIÇÃO 3.2. *Sejam $q \geq 1$, $\epsilon > 0$. Logo existe uma constante $c = c(q, \epsilon) > 0$ tal que para todo $p \in [\epsilon, 1 - \epsilon]$ e para todo evento $A \in \mathcal{F}$ crescente,*

$$\frac{d}{dp} \phi_{p,q,G}^\xi(A) \geq c \sum_{e \in E} I_A(e).$$

Demonstração. Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória. Pela definição de esperança da variável X , com respeito a medida de probabilidade $\phi_{p,q,G}^\xi$, temos

$$\begin{aligned}\phi_{p,q,G}^\xi(X) &= \int_{\Omega} X(\omega) d\phi_{p,q,G}^\xi(\omega) \\ &= \frac{1}{Z_{p,q,G}} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)} q^{k(\omega,G)}.\end{aligned}$$

Como a soma acima tem um número finito de parcelas podemos derivá-la termo-a-termo com respeito a p obtendo a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}\frac{d}{dp} \phi_{p,q,G}^\xi(X) &= \sum_{\omega \in \Omega} \left[\frac{o(\omega) p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)}}{p} - \frac{c(\omega) p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)}}{1-p} \right] X(\omega) q^{k(\omega,G)} \\ &\quad - \frac{\frac{d}{dp} Z_p}{Z_p} \times \underbrace{\frac{1}{Z_{p,q,G}} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)} q^{k(\omega,G)}}_{= \int_{\Omega} X(\omega) d\phi_{p,q,G}^\xi(\omega)} \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \left[\left(\frac{o(\omega)}{p} - \frac{c(\omega)}{1-p} \right) X(\omega) \right] p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)} q^{k(\omega,G)} \\ &\quad - \frac{\frac{d}{dp} Z_p}{Z_p} \times \phi_{p,q,G}^\xi(X) \\ &= \phi_{p,q,G}^\xi \left[\left(\frac{o}{p} - \frac{c}{1-p} \right) X \right] - \frac{\frac{d}{dp} Z_p}{Z_p} \times \phi_{p,q,G}^\xi(X) \\ &= \frac{1}{p(1-p)} \phi_{p,q,G}^\xi((o-p|E|)X) - \frac{\frac{d}{dp} Z_p}{Z_p} \times \phi_{p,q,G}^\xi(X).\end{aligned}$$

Assim

$$\frac{d}{dp} \phi_{p,q,G}^\xi(X) = \frac{1}{p(1-p)} \phi_{p,q,G}^\xi((o-p|E|)X) - \frac{\frac{d}{dp} Z_p}{Z_p} \times \phi_{p,q,G}^\xi(X). \quad (3.1)$$

Tomando $X = 1$ na Equação (3.1) ficamos com

$$0 = \frac{1}{p(1-p)} \phi_{p,q,G}^\xi((o-p|E|)) - \frac{\frac{d}{dp} Z_p}{Z_p}.$$

Explicitando Z'_p/Z_p na identidade acima e substituindo em (3.1) obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}\frac{d}{dp} \phi_{p,q,G}^\xi(X) &= \frac{1}{p(1-p)} \left[\phi_{p,q,G}^\xi((o-p|E|)X) - \phi_{p,q,G}^\xi(o-p|E|) \times \phi_{p,q,G}^\xi(X) \right] \\ &= \frac{1}{p(1-p)} \left[\phi_{p,q,G}^\xi(o \cdot X) - \phi_{p,q,G}^\xi(o) \times \phi_{p,q,G}^\xi(X) \right] \\ &= \frac{1}{p(1-p)} \text{cov}_p(o, X).\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{d}{dp} \phi_{p,q,G}^\xi(X) = \frac{1}{p(1-p)} \text{cov}_p(o, X), \quad (3.2)$$

onde $\text{cov}_p(X, Y)$ representa a covariância das variáveis aleatórias X, Y com respeito à medida de aglomerados aleatórios $\phi_{p,q,G}^\xi$.

Aplicando a fórmula acima para a variável aleatória $X = 1_A$ com A um evento crescente, e observando que $o(\omega) = \sum_{e \in E} \omega(e)$, temos da equação (3.2) que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \phi_{p,q,G}^\xi(A) &= \frac{1}{p(1-p)} \sum_{e \in E} \text{cov}_p(\omega(e), 1_A) \\ &= \frac{1}{p(1-p)} \sum_{e \in E} \overbrace{\left[\phi_{p,q,G}^\xi(1_A \cdot \omega(e)) - \phi_{p,q,G}^\xi(\omega(e)) \cdot \phi_{p,q,G}^\xi(A) \right]}^{\equiv M_e}. \end{aligned}$$

Pela definição de $I_A(e)$, temos que $M_e = I_A(e) \phi_{p,q,G}^\xi(\omega(e)) \left[1 - \phi_{p,q,G}^\xi(\omega(e)) \right]$. Portanto

$$\frac{d}{dp} \phi_{p,q,G}^\xi(A) = \sum_{e \in E} \frac{\phi_{p,q,G}^\xi(\omega(e)) \left[1 - \phi_{p,q,G}^\xi(\omega(e)) \right]}{p(1-p)} I_A(e). \quad (3.3)$$

Por outro lado, pela Propriedade da Energia Finita temos que $\phi_{p,q,G}^\xi(\omega(e)) \in (0, 1)$ portanto $1 - \phi_{p,q,G}^\xi(\omega(e)) \in (0, 1)$ e como por hipótese $\epsilon^{-1} \leq [p(1-p)]^{-1}$, logo existe uma constante $c = c(q, \epsilon) > 0$, tal que

$$\frac{\phi_{p,q,G}^\xi(\omega(e)) \left[1 - \phi_{p,q,G}^\xi(\omega(e)) \right]}{p(1-p)} \geq c.$$

Usando esta estimativa na equação (3.3) temos

$$\frac{d}{dp} \phi_{p,q,G}^\xi(A) \geq c \sum_{e \in E} I_A(e).$$

■

Observe que quando $q = 1$, $I_A(e) = P_p(\text{"e" é pivotal para } A)$ obtemos uma versão mais fraca da Fórmula de Russo (Fórmula 3.1).

DEFINIÇÃO 3.2. Se $A \in \mathcal{F}$ é um evento crescente ou decrescente e $\omega \in \Omega$, definimos a distância de Hamming de ω a A como:

$$H_A(\omega) = \begin{cases} \inf \left\{ \sum_e [\omega'(e) - \omega(e)] : \omega \leq \omega', \omega' \in A \right\} & \text{se } A \text{ é crescente.} \\ \inf \left\{ \sum_e [\omega(e) - \omega'(e)] : \omega' \leq \omega, \omega' \in A \right\} & \text{se } A \text{ é decrescente.} \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO 3.1. Supondo que o evento A é crescente (resp. decrescente), temos os seguintes fatos com respeito à distância H_A .

(i) H_A é uma variável aleatória decrescente (resp. crescente).

(ii) A função $o + H_A$ é crescente, já que a adição de uma única aresta aberta à configuração ω causa um incremento em $o(\omega)$ de uma unidade e $H_A(\omega)$ decresce pelo menos de uma unidade.

(iii) Para cada $\omega \in \Omega$, $H_A(\omega) \cdot 1_A(\omega) = 0$.

PROPOSIÇÃO 3.3. *Seja $q \geq 1$. Para qualquer medida de aglomerados aleatórios $\phi_{p,q,G}^\xi$ com $p \in (0, 1)$ e qualquer evento $A \in \mathcal{F}$ crescente,*

$$\frac{d}{dp} \phi_{p,q,G}^\xi(A) \geq 4 \phi_{p,q,G}^\xi(A) \phi_{p,q,G}^\xi(H_A),$$

onde $H_A(\omega)$ é a distância de Hamming entre a configuração ω e o evento A .

Demonstração. Seja A um evento crescente, pela equação (3.2) obtemos

$$\frac{d}{dp} \phi_{p,q,G}^\xi(A) = \frac{1}{p(1-p)} \left[\phi_{p,q,G}^\xi(o \cdot 1_A) - \phi_{p,q,G}^\xi(o) \times \phi_{p,q,G}^\xi(A) \right]. \quad (3.4)$$

onde $o(\omega)$ é a variável aleatória que representa o número de arestas abertas na configuração ω .

Por simples adição e subtração da mesma quantidade, pela Observação 3.1 e pela Desigualdade FKG, podemos reescrever (3.4) como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \phi_{p,q,G}^\xi(A) &= \frac{1}{p(1-p)} \left[\underbrace{\phi_{p,q,G}^\xi((o + H_A) 1_A) - \phi_{p,q,G}^\xi(o + H_A) \times \phi_{p,q,G}^\xi(A)}_{\geq 0} \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{\phi_{p,q,G}^\xi(H_A \cdot 1_A)}_{=0} + \phi_{p,q,G}^\xi(H_A) \times \phi_{p,q,G}^\xi(A) \right] \\ &\geq \frac{1}{p(1-p)} \phi_{p,q,G}^\xi(H_A) \times \phi_{p,q,G}^\xi(A) \\ &\geq 4 \phi_{p,q,G}^\xi(H_A) \times \phi_{p,q,G}^\xi(A), \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos que $p(1-p) \leq 1/4$, sempre que $p \in (0, 1)$. ■

Esta proposição tem uma importante reformulação: integrando a fórmula entre p_1 e $p_2 > p_1$, obtemos a seguinte desigualdade

$$\phi_{p_1,q,G}^\xi(A) \leq \phi_{p_2,q,G}^\xi(A) e^{-4(p_2-p_1)\phi_{p_2,q,G}^\xi(H_A)}. \quad (3.5)$$

Esta fórmula é muito importante para nós, pois ela será usada no Capítulo 3 para provar uns dos teoremas fundamentais deste trabalho, que é o Teorema de Decaimento Exponencial com respeito à distancia entre dois pontos (veja o Teorema 4.2).

COROLÁRIO 3.1 (Ref. [14]). *Seja $q \geq 1$ e $\epsilon > 0$. Então existe uma constante positiva $c = c(q, \epsilon)$ tal que para todo $p \in [\epsilon, 1 - \epsilon]$ e para qualquer evento $A \in \mathcal{F}$ crescente,*

$$I_A(e) \geq c \phi_{p,q,G}^\xi(A) [1 - \phi_{p,q,G}^\xi(A)] \frac{\log |E|}{|E|}.$$

Existe uma forma poderosa de usar o Corolário 3.1 e a Proposição 3.2. No caso de eventos invariantes por translações no toro de tamanho n , as arestas horizontais e verticais desempenham papel simétrico, isto é, a influência é a mesma para todas as arestas independentemente de seu tipo (horizontal ou vertical). Em particular, o Corolário 3.1 junto com a Proposição 3.2 nos fornece a seguinte desigualdade diferencial:

TEOREMA 3.1. *Sejam $q \geq 1$, $\epsilon > 0$, logo existe uma constante positiva $c = c(q, \epsilon)$ tal que para todo $p \in [\epsilon, 1 - \epsilon]$ e para qualquer evento $A \in \mathcal{F}$ crescente e invariante por translações sobre o Toro de dimensão “ n ”, \mathbb{T}_n ,*

$$\frac{d}{dp} \phi_{p,q,G}^P(A) \geq c \phi_{p,q,G}^P(A) [1 - \phi_{p,q,G}^P(A)] \log n.$$

Demonstração. Basta somar sobre todas arestas na desigualdade fornecida pelo Corolário 3.1 e usar também a desigualdade dada pela Proposição 3.2. \blacksquare

Finalmente enunciamos o teorema mais importante desta seção, que nos dá uma boa estimativa para medidas de aglomerados aleatórios com condição de fronteira periódica. Este teorema é vital em nosso trabalho, já que na próxima seção será usado para estimar probabilidades de cruzamento num retângulo definido sobre um toro de tamanho n .

TEOREMA 3.2. *Seja $A \in \mathcal{F}$ um evento crescente e invariante por translações sobre o toro de tamanho n (isto é \mathbb{T}_n). Se existe uma constante $c^* > 0$ tal que $\phi_{p_1,q,n}^P(A) > c^*$, então existe uma constante $c' > 0$ tal que*

$$\phi_{p_2,q,n}^P(A) \geq 1 - c' n^{-c(p_2-p_1)}, \quad (3.6)$$

para todo par $p_1, p_2 \in (0, 1)$ tal que $p_1 < p_2$.

Demonstração. Para um evento $A \in \mathcal{F}$ crescente e invariante por translações, temos que

$$\frac{d}{dp} \left[\log \left(\frac{\phi_{p,q,n}^P(A)}{1 - \phi_{p,q,G}^P(A)} \right) \right] = \frac{\frac{d}{dp} \phi_{p,q,n}^P(A)}{\phi_{p,q,n}^P(A) (1 - \phi_{p,q,n}^P(A))} \stackrel{\text{teor. 3.1}}{\geq} c \log n = \log n^c.$$

Logo integrando entre os parâmetros $p_1 < p_2$ temos

$$\log \left[\frac{\frac{\phi_{p_2,q,n}^P(A)}{1 - \phi_{p_2,q,n}^P(A)}}{\frac{\phi_{p_1,q,n}^P(A)}{1 - \phi_{p_1,q,n}^P(A)}} \right] \geq \log n^{c(p_2-p_1)},$$

o que implica que

$$\frac{1 - \phi_{p_1,q,n}^P(A)}{\phi_{p_1,q,n}^P(A)} \geq \frac{1 - \phi_{p_2,q,n}^P(A)}{\phi_{p_2,q,n}^P(A)} n^{c(p_2-p_1)}. \quad (3.7)$$

Por outro lado, temos da hipótese que existe uma constante $c^* > 0$ tal que $\phi_{p_1,q,n}^P(A) > c^*$, então

$$\frac{\phi_{p_1,q,n}^P(A)}{1 - \phi_{p_1,q,n}^P(A)} \geq \frac{c^*}{1 - c^*} = \underbrace{\frac{1}{\frac{1 - c^*}{c^*}}}_{\equiv c'} = \frac{1}{c'}. \quad (3.8)$$

Das desigualdades (3.7) e (3.8) temos que

$$\begin{aligned} \phi_{p_2,q,n}^P(A) &\geq (1 - \phi_{p_2,q,n}^P(A)) \left[\frac{\phi_{p_1,q,n}^P(A)}{1 - \phi_{p_1,q,n}^P(A)} \right] n^{c(p_2-p_1)} \\ &\stackrel{\text{por (3.8)}}{\geq} (1 - \phi_{p_2,q,n}^P(A)) \frac{1}{c'} n^{c(p_2-p_1)} \\ &= (1 - \phi_{p_2,q,n}^P(A)) \frac{1}{c' n^{-c(p_2-p_1)}}, \end{aligned}$$

logo

$$\phi_{p_2,q,n}^P(A) [c' n^{-c(p_2-p_1)}] \geq 1 - \phi_{p_2,q,n}^P(A),$$

o que implica que

$$-c' n^{-c(p_2-p_1)} \leq -c' \phi_{p_2,q,n}^P(A) n^{-c(p_2-p_1)} \leq \phi_{p_2,q,n}^P(A) - 1.$$

Portanto

$$\phi_{p_2,q,n}^P(A) \geq 1 - c' n^{-c(p_2-p_1)}.$$

■

3.2 - Probabilidades de Cruzamento de Retângulos no Ponto Auto-dual

Por razões técnicas, nesta seção será conveniente rotacionar a rede \mathbb{Z}^2 por um ângulo de $\frac{\pi}{4}$. Veja a Figura 3.1.

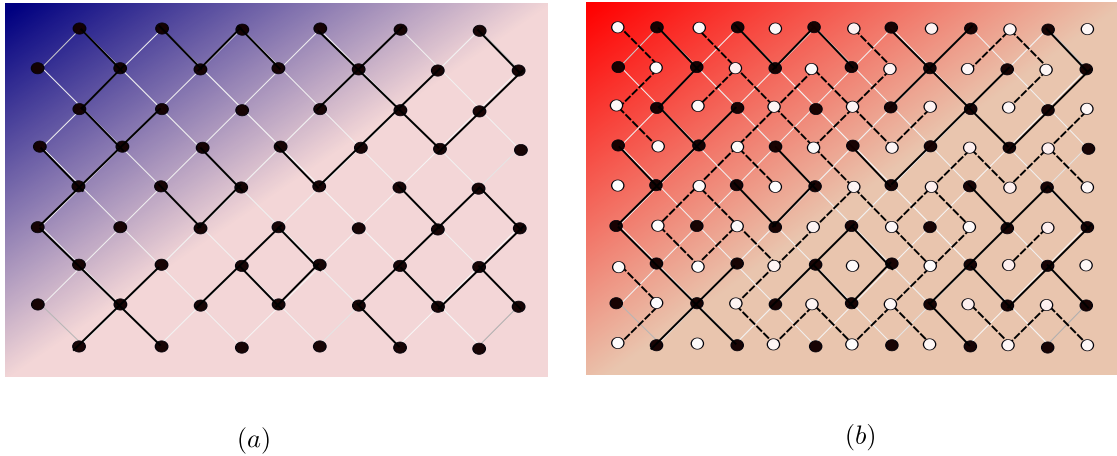


Figura 3.1: (a) Exemplo de uma configuração sobre a rede rotacionada de um ângulo de $\pi/4$. (b) Uma configuração junto com sua configuração dual rotacionadas.

Para um retângulo R , seja $\mathcal{C}_v(R)$ o evento onde existe um caminho (aberto) entre os lados de cima e de baixo de R , totalmente contido em R . Tal caminho é chamado de um *cruzamento vertical (aberto)* no retângulo. Analogamente, definimos $\mathcal{C}_h(R)$ como o evento onde existe um cruzamento horizontal (aberto) entre os lados esquerdo e direito

do retângulo totalmente contido em R . Finalmente, $\mathcal{C}_v^*(R^*)$ denota o evento onde existe um cruzamento aberto-dual entre o lado de cima e o lado de baixo no grafo dual R^* de R .

Em todo restante deste texto vamos usar a notação

$$[0, n]^2 \equiv [0, n] \times [0, n] \cap e^{i\pi/4}(\mathbb{Z}^2),$$

onde $e^{i\pi/4}(\mathbb{Z}^2)$ é a rede \mathbb{Z}^2 rodada por um ângulo de $\pi/4$, vista também como subconjunto de \mathbb{R}^2 . Veja Figura 3.2.

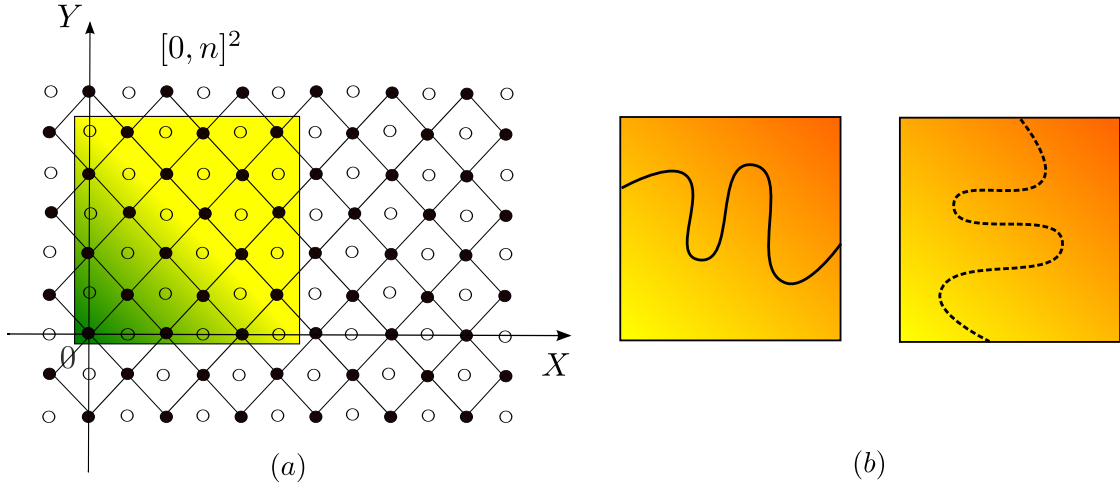


Figura 3.2: (a) O quadrado $[0, n]^2$ (todos os vértices estão dentro da região sombreada) e seu dual têm a mesma estrutura de grafo. (b) Os eventos $\mathcal{C}_h([0, n]^2)$ e $\mathcal{C}_v^*([0, n]^2)$.

No que segue, vamos também considerar as identificações óbvias entre os eventos em $\{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^2)}$ e seus respectivos eventos em $\{0, 1\}^{E(e^{i\pi/4}(\mathbb{Z}^2))}$.

Dessa nova perspectiva podemos formar o grafo do toro \mathbb{T}_n simplesmente usando o quadrado (contínuo) $[0, n] \times [0, n]$ de \mathbb{R}^2 fazendo a identificação de seus lados opostos e olhando para o grafo induzido pelo reticulado rotacionado contido neste quadrado.

LEMA 3.1. *Para $q \geq 1$, existe uma constante $c = c(q) > 0$ tal que para todo $m > n \geq 1$ temos que*

$$\phi_{p_{sd}, q, m}^P(\mathcal{C}_h([0, n]^2)) \geq c.$$

Demonstração. Pela construção explicada acima temos que o dual do grafo $[0, n]^2$ é isomorfo a $[0, n]^2$. Assim ao invés de escrever $([0, n]^2)^*$ vamos simplesmente escrever $[0, n]^2$.

Se não existe um cruzamento aberto da direita para esquerda em $[0, n]^2$ necessariamente vai existir um cruzamento de cima para baixo no dual de $[0, n]^2$. Considere $\mathcal{C}_v^*([0, n]^2)$ como um evento no espaço $\{0, 1\}^{E([0, n]^2)}$. Pela observação acima podemos afirmar que $\mathcal{C}_h([0, n]^2)$ e $\mathcal{C}_v^*([0, n]^2)$ são complementares, isto é,

$$\phi_{p_{sd}, q, m}^P(\mathcal{C}_h([0, n]^2)) + \phi_{p_{sd}, q, m}^P(\mathcal{C}_v^*([0, n]^2)) = 1. \quad (3.9)$$

Vamos trabalhar agora um pouco na equação (2.27). Esta equação nos fornece a seguinte relação:

$$\phi_{p, q, n}^P(\omega) = \frac{q^{1-\delta(\omega^*)}}{Z} \times \phi_{p^*, q, n}^P(\omega^*).$$

Queremos agora mostrar que a constante Z de normalização não depende de n . Isto pode ser feito da seguinte maneira. Somamos esta equação sobre ω e em seguida, usamos que $\phi_{p,q,n}^P$ é uma medida de probabilidade e assim obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{\omega^* \in \{0,1\}^{E([0,n]^2)}} \frac{q^{1-\delta(\omega^*)}}{Z} \times \phi_{p^*,q,n}^P(\omega^*) \\ &= \frac{1}{Z} \int_{\{0,1\}^{E([0,n]^2)}} q^{1-\delta(\omega^*)} d\phi_{p^*,q,n}^P(\omega^*). \end{aligned}$$

Já que $q \geq 1$ temos que $q^{-1} \leq q^{1-\delta(\omega^*)} \leq q$. Usando esta desigualdade e a equação acima segue que $q^{-1} \leq Z \leq q$, isto é a constante Z de normalização não depende de n . Assim, observe que

$$\frac{1}{q^2} \phi_{p^*,q,n}^P(\omega^*) \leq \phi_{p,q,n}^P(\omega) \leq q^2 \phi_{p^*,q,n}^P(\omega^*).$$

Portanto

$$\frac{1}{q^2} \phi_{p^*,q,n}^P(\mathcal{C}_v^*([0,n]^2)) \leq \phi_{p,q,n}^P(\mathcal{C}_h([0,n]^2)) \leq q^2 \phi_{p^*,q,n}^P(\mathcal{C}_v^*([0,n]^2)).$$

Usando a primeira das desigualdades acima e a equação 3.9 temos que

$$c(q) \equiv \frac{1}{1+q^2} \leq \phi_{p,q,n}^P(\mathcal{C}_h([0,n]^2)).$$

■

Agora com a dualidade pretendemos estender as estimativas de cruzamento para uma família muito grande de domínios simétricos da forma $G(\gamma_1, \gamma_2)$, onde γ_1 e γ_2 são dois caminhos satisfazendo uma certa propriedade que será chamada de Hipótese (*)

As condições de fronteira sobre este tipo de grafo serão tomadas como mistas; conectadas sobre γ_1 , conectadas sobre γ_2 e livres em outras partes. A medida sobre $G(\gamma_1, \gamma_2)$ com parâmetro (p_{sd}, q) e condições de fronteira mista é denotada por $\phi_{p_{sd},q,\gamma_1,\gamma_2}$ ou simplesmente por ϕ_{γ_1,γ_2} . Mais precisamente. Defina a reta $d = \frac{-\sqrt{2}}{4} + i\mathbb{R}$ e seja σ_d a reflexão com respeito esta reta d .

DEFINIÇÃO 3.3 (Hipótese (*)). *Os caminhos γ_1 e γ_2 satisfazem a Hipótese (*) se:*

- i) O caminho γ_1 está no lado esquerdo da reta d e o caminho γ_2 está no lado direito da reta d .*
- ii) O caminho γ_2 começa na origem "0" e o caminho γ_1 começa em um vértice de $e^{i\pi/4}(\mathbb{Z}^2) \cap (\frac{-\sqrt{2}}{4} + i\mathbb{R})$.*
- iii) O caminho γ_1 e o caminho $\sigma_d(\gamma_2)$ não se intersectam.*
- iv) O caminho γ_1 e o caminho $\sigma_d(\gamma_2)$ terminam em dois vértices, um primal e outro dual, os quais estão a distância de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ um do outro.*

Observe que, se seguimos os caminhos em sentido anti-horário, podemos criar um circuito unindo por segmentos de reta: os pontos final de $\sigma_d(\gamma_2)$ e inicial γ_2 ; os pontos final γ_2 e inicial de $\sigma_d(\gamma_1)$; os pontos final de $\sigma_d(\gamma_1)$ e inicial de γ_1 e os pontos final de γ_1 e inicial de $\sigma_d(\gamma_2)$.

O circuito $(\gamma_1, \sigma_d(\gamma_2), \gamma_2, \sigma_d(\gamma_1))$ envolve um conjunto de vértices de $e^{i\pi/4}(\mathbb{Z}^2)$. Usando este conjunto definimos o grafo $G(\gamma_1, \gamma_2)$, cujo conjunto de vértices é composto pelos vértices de $e^{i\pi/4}(\mathbb{Z}^2)$ que estão na região de \mathbb{R}^2 limitada pelo circuito $(\gamma_1, \sigma_d(\gamma_2), \gamma_2, \sigma_d(\gamma_1))$ e as arestas são aquelas herdadas do grafo $e^{i\pi/4}(\mathbb{Z}^2)$ cujos vértices incidentes permanecem inteiramente na região limitada por este circuito, incluindo a fronteira.

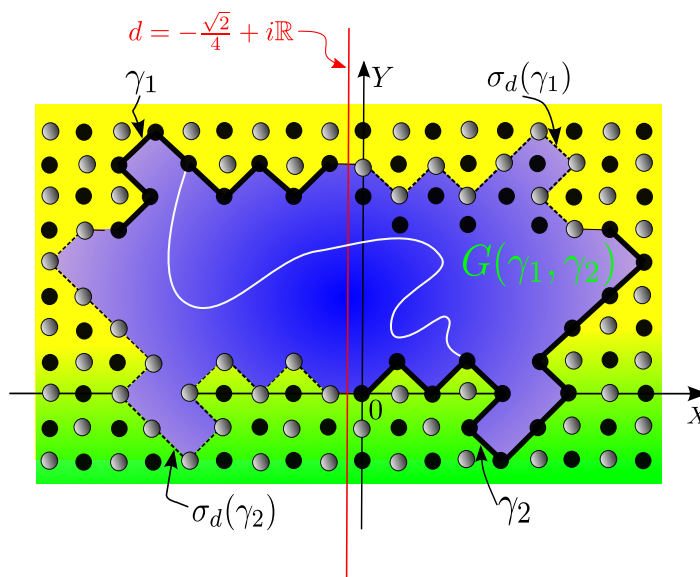


Figura 3.3: Dois caminhos γ_1 e γ_2 satisfazendo a Hipóteses (*) e o grafo $G(\gamma_1, \gamma_2)$.

LEMA 3.2. *Para qualquer par de caminhos satisfazendo a Hipótese (*), temos a seguinte estimativa*

$$\phi_{\gamma_1, \gamma_2}(\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2) \geq \frac{1}{1 + q^2}.$$

Demonstração. Optamos por não apresentar a prova deste lema, por ser um lema técnico, cujo resultado nos é de grande importância. Para maiores detalhes, veja Lema 3.11 de [2], pag. 33. ■

Para a prova do próximo teorema, surgem duas dificuldades. A primeira é com respeito às condições de fronteira, pois este resultado pode ser falso com condições de fronteira arbitrárias, como por exemplo, as condições de fronteira livre. De fato, é bem conhecido que para valores de q suficientemente grandes, a probabilidade de cruzamento do retângulo no ponto auto-dual, decai exponencialmente. A segunda dificuldade é a falta de independência no modelo já que os resultados conhecidos na literatura para o modelo de percolação de Bernoulli usam de forma crucial a independência. No caso dos modelos de aglomerados aleatórios, essa é claramente uma hipótese não disponível. Para superar estas dificuldades vamos nos valer da auto-dualidade.

Seguindo a notação adotada para um quadrado na rede rotacionada, definimos um retângulo na rede rotacionada por

$$[0, \alpha n] \times [0, n] \equiv ([0, \alpha n] \times [0, n]) \cap e^{i\pi/4}(\mathbb{Z}^2),$$

onde $\alpha \geq 1$. Veja a Figura 3.2.

PROPOSIÇÃO 3.4. *Seja $q \geq 1$. Então existe uma constante $c > 0$ tal que para todo m, n tal que $0 < \frac{3}{2}n < m$ temos que*

$$\phi_{p_{sd}, q, m}^P \left(\mathcal{E}_h \left(\left[0, \frac{3}{2}n \right] \times [0, n] \right) \right) \geq c.$$

Demonstração. A ideia para provar esta proposição consiste em criar dois caminhos que cruzem caixas quadradas para em seguida provar que estes caminhos estão conectados com boa probabilidade (isto é, existe uma constante $c \in (0, 1)$ independente do tamanho n do toro bidimensional \mathbb{T}_n tal que a probabilidade do evento é cotada inferiormente pela constante c). Para isso considere os seguintes retângulos:

$$R = \left[0, \frac{3n}{2} \right] \times [0, n], \quad R_1 = [0, n]^2, \quad R_2 = \left[\frac{n}{2}, \frac{3n}{2} \right] \times [0, n].$$

Seja A o evento definido pelas seguintes condições:

- Os quadrados R_1 e R_2 são cruzados horizontalmente por um caminho, isto é, o quadrado R_1 é cruzado horizontalmente por um caminho (aberto) λ_1 e o quadrado R_2 também é cruzado horizontalmente por um caminho (aberto) λ_3 . Pelo Lema 3.1 estes eventos têm probabilidade maior que alguma constante $c > 0$.
- O segmento $[n/2, n] \times \{0\}$ está conectado, por um caminho (aberto) λ_2 , à parte de cima do retângulo R_2 , dentro do quadrado R_2 .

Afirmamos que o evento A tem probabilidade maior que $c^3/2$.

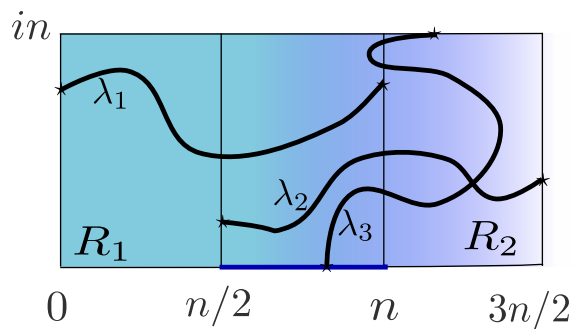


Figura 3.4: Os retângulos R , R_1 , R_2 e o evento A .

De fato, para $i = 1, 2$ definimos os seguintes eventos:



\equiv existe um cruzamento direita-esquerda dentro do quadrado R_i .



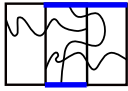
\equiv existe um cruzamento cima-baixo dentro do quadrado R_i .



$\equiv [\frac{n}{2}, n] \times \{0\}$ está conectado dentro do quadrado R_2 ao lado de cima de R_2 .



$\equiv [n, \frac{3n}{2}] \times \{0\}$ está conectado dentro do quadrado R_2 ao lado de cima de R_2 .



\equiv evento A .

Temos que

$$\left[\text{Diagram 1} \right] \subset \left[\text{Diagram 2} \right] \cup \left[\text{Diagram 3} \right]$$

Pelo uso da inclusão anterior, da simetria e do Lema 3.1 segue que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned} 0 < c &\leq \phi_{p_{sd}, q, m}^P \left(\left[\text{Diagram 1} \right] \right) = \phi_{p_{sd}, q, m}^P \left(\left[\text{Diagram 2} \right] \right) \leq \phi_{p_{sd}, q, m}^P \left(\left[\text{Diagram 3} \right] \right) \\ &\quad + \phi_{p_{sd}, q, m}^P \left(\left[\text{Diagram 4} \right] \right) \\ &= 2\phi_{p_{sd}, q, m}^P \left(\left[\text{Diagram 3} \right] \right). \end{aligned}$$

Isto é

$$\phi_{p_{sd}, q, m}^P \left(\left[\text{Diagram 3} \right] \right) \geq \frac{c}{2}.$$

Usando simetria, a desigualdade FKG e a desigualdade anterior temos que

$$\begin{aligned}
\phi_{p_{sd},q,m}^P(A) &= \phi_{p_{sd},q,m}^P \left(\text{Diagram 1} \right) \\
&\geq \phi_{p_{sd},q,m}^P \left(\text{Diagram 2} \right) \phi_{p_{sd},q,m}^P \left(\text{Diagram 3} \right) \phi_{p_{sd},q,m}^P \left(\text{Diagram 4} \right) \\
&\geq \frac{c^3}{2}.
\end{aligned}$$

Em resumo

$$\phi_{p_{sd},q,m}^P(A) \geq \frac{c^3}{2}. \quad (3.10)$$

Quando o evento A ocorre podemos definir os caminhos aleatórios Γ_1 e Γ_2 da seguinte maneira:

- Γ_1 é o cruzamento horizontal mais alto do quadrado R_1 .
- Γ_2 é o cruzamento vertical mais a direita do quadrado R_2 , que une o segmento $[\frac{n}{2}, n] \times \{0\}$ à parte de cima do quadrado R_2 .

Já que A ocorre, existe um caminho em A cruzando o retângulo R_2 da direita para esquerda que intercepta caminho Γ_2 . Se os caminhos Γ_1 e Γ_2 estão conectados então vai existir um cruzamento horizontal do retângulo R com probabilidade positiva, e assim não há nada a ser provado.

No que segue vamos provar que os caminhos Γ_1 e Γ_2 estão conectados com boa probabilidade.

O Processo de Exploração em R e existência de Γ_1 e Γ_2

Existe uma maneira padrão de construir um processo de exploração em R que descubra os caminhos Γ_1 e Γ_2 . Inicie um caminho de exploração no canto superior esquerdo do retângulo R ; este caminho é representado pela linha (em \mathbb{R}^2) celeste dada na Figura 3.5. Neste caminho as arestas abertas da configuração devem ficar à direita do caminho e as fechadas a sua esquerda e além do mais, este caminho deve permanecer sempre dentro de R_1 . Desta maneira se A ocorre então este caminho deverá tocar o lado direito de R_1 antes de tocar a parte de baixo deste quadrado. Paramos a exploração assim que atingirmos o lado direito. Note que este caminho de exploração será um conjunto de \mathbb{R}^2 que está entre a rede $e^{i\pi/4}(\mathbb{Z}^2)$ e sua rede dual. Por esta construção as arestas abertas adjacentes a este caminho de exploração formam o cruzamento horizontal mais alto de R_1 , isto é Γ_1 . Ao final do processo de exploração, teremos descoberto informações sobre os estados das arestas que estão acima de Γ_1 as que estão abaixo não serão “descobertas”.

Consideramos também um outro processo de exploração, agora nosso caminho inicia em $(n, 0)$ e deixa as arestas abertas sempre a esquerda e as fechadas a direita. Desta forma conseguimos explorar todo quadrado R_2 . Se A ocorre então este caminho termina no lado de cima de R_2 . As arestas abertas adjacentes ao caminho de exploração constituem o caminho Γ_2 . E desta maneira as arestas “descobertas” por esta exploração estarão todas à direita de Γ_2 . Veja as Figuras 3.5 e 3.6.

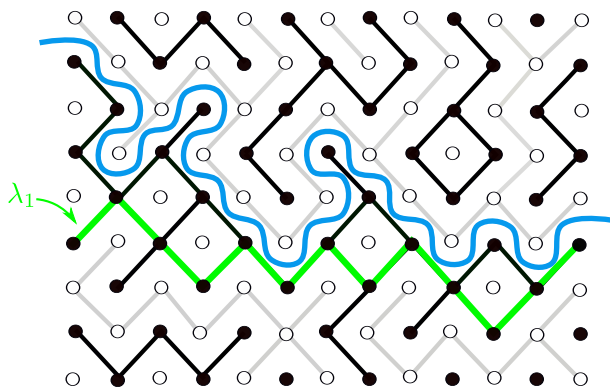


Figura 3.5: realização do evento A em R_1 , representado pelo cruzamento horizontal em verde.

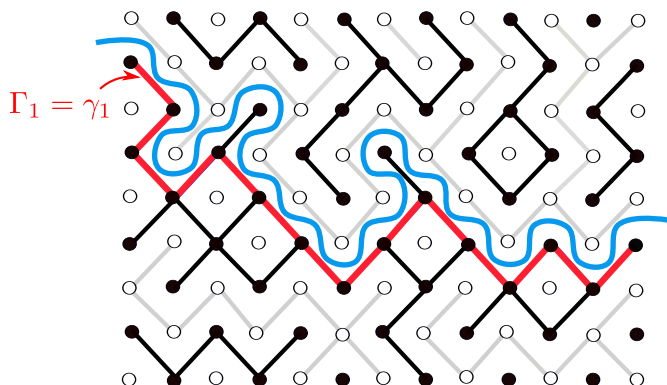


Figura 3.6: resultado do processo de exploração do caminho Γ_1 em R_1 : o cruzamento horizontal mas alto $\Gamma_1 = \gamma_1$ (representado por uma linha poligonal em vermelha), dado que ocorreu o evento A .

O Argumento da Reflexão

Assuma que $\Gamma_1 = \gamma_1$ e $\Gamma_2 = \gamma_2$ e que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ pois, caso contrário estes caminhos se interceptariam e o cruzamento do retângulo seria obtido imediatamente. Assim a probabilidade deste cruzamento seria positiva e acabaria o problema.

Seja x o ponto final do caminho γ_1 , isto é, o único ponto sobre o lado direito de R_1 . Desejamos definir o conjunto simétrico $G(\gamma_1, \gamma_2)$ como havíamos comentado antes. Para isso procedemos da seguinte forma:

- tomamos os caminhos $\sigma_d(\gamma_1)$ e $\sigma_d(\gamma_2)$ sendo a reflexão de γ_1 e γ_2 respectivamente com respeito à reta $d = (n - \frac{\sqrt{2}}{4}) + i\mathbb{R}$.
- parametrize o caminho $\sigma_d(\gamma_1)$ pelo comprimento de arco, começando do ponto $\sigma_d(x)$ e defina $\hat{\gamma}_1 \subset \gamma_1$ tal que $\sigma_d(\hat{\gamma}_1)$ é a parte de $\sigma_d(\gamma_1)$ entre o início do caminho e o primeiro tempo que ele intercepta γ_2 . Como antes os caminhos são considerados como curvas do plano. Denotamos por z o ponto de interseção destas duas curvas. Note que γ_1 e γ_2 não se interceptam forçando assim a interseção entre $\sigma_d(\gamma_1)$ e γ_2 .
- parametrize o caminho γ_2 pelo comprimento de arco, começando do ponto $(n, 0)$. Seja y o último ponto visitado em $e^{i\pi/4}(\mathbb{Z}^2)$ antes da interseção com o ponto z .

Defina $\widehat{\gamma}_2$ como a parte do caminho γ_2 compreendida entre o último ponto de interseção de γ_2 com a reta $n + i\mathbb{R}$ antes de y e o próprio y .

- os caminhos $\widehat{\gamma}_1$ e $\widehat{\gamma}_2$ satisfazem a Hipótese (*), assim podemos definir o grafo $G(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)$.
- construa um subgrafo $G_0(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)$ de $G(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)$ como segue: as arestas são dadas pelas arestas de $e^{i\pi/4}(\mathbb{Z}^2)$ contidas na componente conexa de $G(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2) \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2)$ (isto é, $G(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)$ menos o conjunto $(\gamma_1 \cup \gamma_2)$) contendo a reta d (isto é, a componente conexa que contém $x - \epsilon i$, onde ϵ é um número suficientemente pequeno) e os vértices são dados pelos pontos incidentes a estas arestas.

Um fato importante, já mencionado anteriormente, é que o grafo $G_0(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)$ construído acima, possui uma propriedade muito útil: nenhuma de suas arestas foram descobertas pelo processo de exploração Γ_1 e Γ_2 . De fato, $\sigma_d(\widehat{\gamma}_1)$ e $\sigma_d(x)$ estão contidos na componente conexa não explorada em $R \setminus R_1$ ou mais precisamente em $G_0(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2) \cap (R \setminus R_1)$. As arestas de $G_0(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)$ em R_1 estão na mesma componente conexa de $R \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2)$ que possui $x - \epsilon i$, e assim localizadas abaixo de γ_1 .

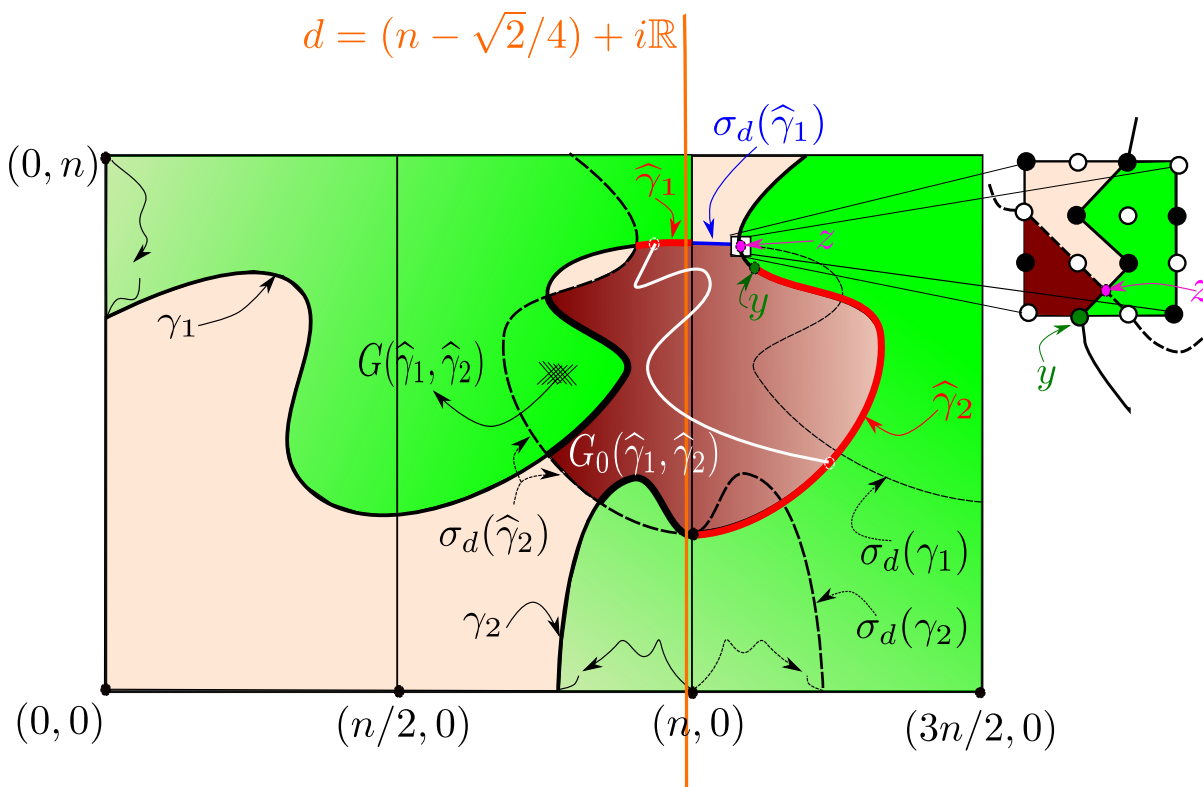


Figura 3.7: A região em verde é a parte do retângulo R que a priori foi descoberta pelo processo de exploração. A região em vermelho escuro é o domínio $G_0(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)$. Todos os caminhos envolvidos na construção são representados nesta figura. Observe que as curvas tracejadas, são os caminhos da rede dual obtidos pela reflexão σ_d : elas não são necessariamente abertas no dual.

Estimativa da probabilidade condicional

Continuamos assumindo que os caminhos γ_1 e γ_2 não se interceptam. Desejamos estimar a probabilidade de que os caminhos γ_1 e γ_2 estejam conectados por um caminho dado que $\Gamma_1 = \gamma_1$ e $\Gamma_2 = \gamma_2$.

Pelo processo de exploração de caminhos descrito acima, podemos encontrar os caminhos γ_1 e γ_2 sem tocar nenhuma aresta do interior do domínio $G_0(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)$. As condições de fronteira do domínio $G_0(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)$ podem ser divididas em sub-arcos de diferentes tipos (veja figura 3.7): alguns serão sub-arcos do caminho γ_1 ou do caminho γ_2 , enquanto que outros serão sub-arcos das imagens simétricas $\sigma_d(\gamma_1)$ e $\sigma_d(\gamma_2)$.

Condiccionando a $\Gamma_1 = \gamma_1$ e $\Gamma_2 = \gamma_2$ garantimos que as arestas ao longo dos sub-arcos do primeiro tipo estejam abertas. A conexão ao longo dos outros sub-arcos depende muito da configuração explorada e tem uma descrição um pouco mais complicada, porém em qualquer caso, as condições de fronteira impostas sobre a configuração interna do domínio $G(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)$ irão dominar estocasticamente as condições de fronteira mista. Lembramos também que qualquer condição de fronteira domina a condição de fronteira livre e que $\widehat{\gamma}_1$ e $\widehat{\gamma}_2$ são sub-arcos do primeiro tipo, portanto $\widehat{\gamma}_1$ e $\widehat{\gamma}_2$ são caminhos abertos. Das observações feitas acima, deduzimos que para o evento crescente $\{\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2 \text{ em } G_0(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)\}$ (que depende somente dos estados das arestas do domínio $G_0(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)$) a probabilidade condicional

$$\phi_{p_{sd}, q, m}^P(\{\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2 \text{ em } G_0(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)\} | \Gamma_1 = \gamma_1, \Gamma_2 = \gamma_2)$$

é maior ou igual que

$$\phi_{\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2}(\{\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2 \text{ em } G_0(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)\}).$$

Esta desigualdade é obtida aplicando a propriedade de Domínio de Markov e a monotonicidade com respeito as condições de fronteira. Note que se os caminhos $\widehat{\gamma}_1$ e $\widehat{\gamma}_2$ estão conectados dentro do domínio $G(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)$, então γ_1 e γ_2 estão conectados dentro do domínio $G_0(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)$ pois, caso contrário existiria um caminho de arestas abertas acima de Γ_1 . Portanto

$$\phi_{p_{sd}, q, m}^P(\{\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2 \text{ em } G_0(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)\} | \Gamma_1 = \gamma_1, \Gamma_2 = \gamma_2)$$

é cotado inferiormente por

$$\begin{aligned} \phi_{\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2}(\{\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2 \text{ em } G_0(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)\}) &\geq \phi_{\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2}(\{\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2 \text{ em } G(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)\}) \\ &\geq \frac{1}{1 + q^2}, \end{aligned}$$

onde na segunda desigualdade, usamos a estimativa fornecida pelo Lema 3.2. Daí obtemos

$$\phi_{p_{sd}, q, m}^P(\{\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2 \text{ em } G_0(\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)\} | \Gamma_1 = \gamma_1, \Gamma_2 = \gamma_2) \geq \frac{1}{1 + q^2}. \quad (3.11)$$

Note que se os caminhos γ_1 e γ_2 se interceptam, então a probabilidade de que estes caminhos estejam conectados entre si, dado $\Gamma_1 = \gamma_1$ e $\Gamma_2 = \gamma_2$ é um. Em particular, esta probabilidade também é maior que $1/(1 + q^2)$.

Conclusão da prova da Proposição 3.4

Agora pelas estimativas feitas acima obtemos que

$$\begin{aligned}
\phi_{p_{sd},q,m}^P(\mathcal{C}_h(R)) &\geq \phi_{p_{sd},q,m}^P(\mathcal{C}_h(R) \cap A) \\
&\geq \phi_{p_{sd},q,m}^P(\{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2\} \cap A) \\
&= \phi_{p_{sd},q,m}^P(\phi_{p_{sd},q,m}^P(\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2 | \Gamma_1, \Gamma_2) 1_A) \\
&\geq \frac{1}{1+q^2} \phi_{p_{sd},q,m}^P(A) \\
&\geq \frac{c^3}{2(1+q^2)},
\end{aligned}$$

onde nas duas primeiras desigualdades usamos simplesmente inclusão de conjuntos, na igualdade a definição de esperança condicional e nas duas últimas desigualdades usamos as equações (3.10) e (3.11) respectivamente. ■

3.3 - Generalização do Teorema de Russo-Seymour-Welsh

Nesta seção provamos uma generalização do clássico Teorema de Russo-Seymour-Welsh, para modelos de arestas independentes, usando a Proposição 3.4 da seção anterior. O próximo teorema é uma extensão do Teorema de Russo-Seymour-Welsh para o modelo de aglomerados aleatórios com condições de fronteira periódica.

TEOREMA 3.3 (Teorema de Russo-Seymour-Welsh). *Dados $\alpha > 1$, $q \geq 1$. Existe uma constante $c(\alpha) > 0$ tal que para todo $m > \alpha n > 0$*

$$\phi_{p_{sd},q,m}^P(\mathcal{C}_h([0, \alpha n] \times [0, n])) \geq c(\alpha).$$

Demonstração. Seja

$$R = \mathcal{T}_{(\frac{n}{2}, 0)}([0, n] \times [0, \alpha n]),$$

o retângulo que se obtêm transladando, por um vetor $(\frac{n}{2}, 0)$, o retângulo rotacionado $[0, n] \times [0, \alpha n]$. Consideramos agora retângulos não rotacionados em \mathbb{R}^2 definidos por

$$\left\{ \begin{array}{l} R_j^v = [j\frac{n}{2}, (j+1)\frac{n}{2}] \times [j\frac{n}{2}, (j+\frac{3}{2})\frac{n}{2}] \\ R_j^h = [j\frac{n}{2}, (j+\frac{3}{2})\frac{n}{2}] \times [(j+\frac{1}{2})\frac{n}{2}, (j+\frac{3}{2})\frac{n}{2}] \end{array} \right.,$$

para $j \in [0, [2\alpha] - 1]$, onde $[x]$ denota o maior inteiro menor que x . Observamos mais uma vez, que na definição tanto de R_j^v quanto R_j^h o produto cartesiano que os define não obedece a convenção feita no início do capítulo, isto é, estes produtos cartesianos não denotam retângulos rotacionados e sim retângulos na rede \mathbb{Z}^2 .

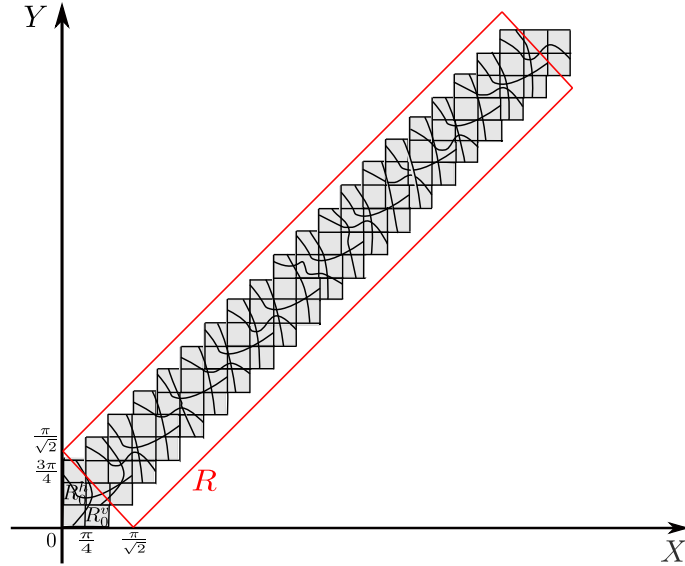


Figura 3.8: Uma combinação de cruzamentos dos retângulos pequenos criando um cruzamento no retângulo $R = \mathcal{T}_{(\frac{\pi}{2}, 0)}([0, \alpha n] \times [0, n])$.

Observando que

$$\bigcap_{j \in [0, \lfloor 2\alpha \rfloor - 1]} [\mathcal{C}_h(R_j^h) \cap \mathcal{C}_v(R_j^v)] \subset \{\text{Cruzamento ao longo de } R\}, \quad (3.12)$$

temos a seguinte estimativa para o cruzamento horizontal de R

$$\begin{aligned} \phi_{p_{sd}, q, m}^P(\mathcal{C}_h([0, \alpha n] \times [0, n])) &= \phi_{p_{sd}, q, m}^P(\text{Cruzamento ao longo de } R) \\ &\geq \prod_{j \in [0, \lfloor 2\alpha \rfloor - 1]} \phi_{p_{sd}, q, m}^P(\mathcal{C}_h(R_j^h)) \phi_{p_{sd}, q, m}^P(\mathcal{C}_v(R_j^v)) \\ &\geq c^{2(\lfloor 2\alpha \rfloor - 1)} \\ &= c(\alpha), \end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade usamos a equação (3.12) e a Desigualdade FKG. Na última desigualdade usamos a Proposição (3.4). \blacksquare

O próximo teorema nos diz que se $p > p_{sd}$, a probabilidade de cruzar horizontalmente um retângulo contido no toro de tamanho n é próxima de um para toros de tamanho n arbitrariamente grandes.

TEOREMA 3.4. *Sejam $q \geq 1$ e $p \geq p_{sd}$. Então existe uma constante $c'(p) > 0$ tal que para todo $n > 0$, temos que*

$$\phi_{p, q, 8n}^P(\mathcal{C}_h([0, 4n] \times [0, n])) \geq 1 - n^{-c'(p)}.$$

Demonstração. Considere o evento

$$B = \{\text{existe um cruzamento vertical do retângulo } [0, \frac{n}{2}] \times [0, 8n] \text{ no toro } \mathbb{T}_{8n}\}.$$

Observe que o evento B é invariante por translações no toro e também satisfaz

$$\phi_{p,q,8n}^P(B) \stackrel{\text{por simetria}}{=} \phi_{p_{sd},q,8n}^P \left(\mathcal{C}_h \left([0, 8n] \times \left[0, \frac{n}{2} \right] \right) \right) \stackrel{\text{Teorema 3.3}}{\geq} c(16).$$

Suponha que $p > p_{sd}$. Uma vez que o evento B é crescente e invariante por translações, então pelo Teorema (3.2), existe $\epsilon = \epsilon(p, q)$ e $c = c(p, q)$ tal que

$$\phi_{p_{sd},q,8n}^P(B) \geq 1 - cn^{-\epsilon}. \quad (3.13)$$

Se o evento B ocorre, então algum dos 32 retângulos

$$[j4n, (j+1)4n] \times \left[i\frac{n}{2}, i\frac{n}{2} + n \right], \quad (i, j) \in \{0, 1\} \times \{0, 1, \dots, 15\},$$

deve ser cruzados de cima para baixo. Denote estes eventos por A_{ij} . Assim temos que

$$B \subset \bigcup_{(i,j) \in \{0,1\} \times \{0,1,\dots,15\}} A_{ij}$$

e

$$A_{ij} = \mathcal{T}(\mathcal{C}_h([0, 4n] \times [0, n]))$$

$\forall (i, j) \in \{0, 1\} \times \{0, 1, \dots, 15\}$ e para alguma translação \mathcal{T} . Usando (3.13) e a Desigualdade FKG segue que

$$\begin{aligned} 1 - cn^{-\epsilon} &\leq \phi_{p,q,8n}^P(B) \\ &= 1 - \phi_{p,q,8n}^P(B^c) \\ &\leq 1 - \phi_{p,q,8n}^P \left(\bigcap_{(i,j) \in \{0,1\} \times \{0,1,\dots,15\}} A_{ij}^c \right) \\ &\leq 1 - \prod_{(i,j) \in \{0,1\} \times \{0,1,\dots,15\}} \phi_{p,q,8n}^P(A_{ij}^c) \\ &= 1 - \left[1 - \phi_{p,q,8n}^P(\mathcal{C}_h([0, 4n] \times [0, n])) \right]^{32}. \end{aligned}$$

Isto implica que $\phi_{p,q,8n}^P(\mathcal{C}_h([0, 4n] \times [0, n])) \geq 1 - (cn^{-\epsilon})^{\frac{1}{32}}$. ■

CÁLCULO DO PONTO CRÍTICO p_c

O próximo teorema é o núcleo deste trabalho. Deduções rigorosas do cálculo do ponto crítico eram previamente conhecidas em três casos.

Para $q = 1$ (percolação de Bernoulli) foi provado por *Kesten* em 1980 que o ponto crítico é $p_c(1) = 1/2$. Para $q = 2$, o modelo pode ser relacionado com o modelo de Ising, cujo cálculo de *Baxter* e *Yang* permite obter o valor de $p_c(2)$. Finalmente, para q suficientemente grande, a prova conhecida é baseada no fato de que o modelo de aglomerados aleatórios exibe uma transição de fase de primeiro ordem. A prova é validada para valores de q maiores que 25.72. Mencionamos também que deduções não rigorosas da temperatura crítica do modelo de *Potts* foram feitas com $q \geq 4$, em 1978, usando argumentos não-geométricos baseados nas propriedades analíticas do Hamiltoniano.

Para $q \geq 1$, sabemos do Capítulo 1 que o parâmetro crítico existe. Nossa meta agora é explorar a dualidade do modelo de aglomerados aleatórios para calcular o valor do ponto crítico.

TEOREMA 4.1 (V. Beffara, Duminil-Copin [2]). *Seja $q \geq 1$. O ponto crítico $p_c = p_c(q)$ do modelo de aglomerado aleatório com parâmetro q definido sobre a rede \mathbb{Z}^2 satisfaz:*

$$p_c = p_{sd} \equiv \frac{\sqrt{q}}{1 + \sqrt{q}}$$

onde p_{sd} é o ponto auto-dual definido no Capítulo 2, Definição 2.7, pag. 31.

A prova deste teorema será feita como consequência dos dois seguintes lemas.

4.1 - Cota inferior para o ponto crítico: $p_c \geq p_{sd}$

A prova desta desigualdade é ligeiramente fácil. Esta prova usa uma construção clássica conhecida como *Argumento de Zhang*. Este argumento foi inicialmente usado no caso do modelo de arestas independentes mas estende-se facilmente para o modelo de aglomerados aleatórios. A heurística para a validade desta desigualdade é a seguinte: se assumimos que $p_c < p_{sd}$, a configuração em p_{sd} deve conter um aglomerado aleatório infinito primal e um aglomerado aleatório infinito dual, já que o modelo de aglomerados aleatórios dual está na fase supercrítica também. Intuitivamente a coexistência destes

aglomerados implica a existência de mais de um aglomerado aleatório infinito, o que contradiz o Teorema da unicidade do aglomerado aleatório infinito (Teorema (2.12)).

LEMA 4.1 (Argumento de Zhang). *Se $q \geq 1$, então*

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(0 \leftrightarrow \infty) = 0.$$

Como consequência, $p_c \geq p_{sd}$.

Demonstração. Suponha que $\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(0 \leftrightarrow \infty) > 0$. Então este modelo com $p = p_{sd}$ está na fase supercrítica, isto é, $p_c > p_{sd}$. Portanto

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(N = 1) = 1, \quad (4.1)$$

onde N é a variável aleatória que conta a quantidade de aglomerados aleatórios abertos infinitos. Defina o evento

$$R_n = \left\{ \begin{array}{l} \text{O único aglomerado aleatório (aberto)} \\ \text{infinito em } \mathbb{Z}^2 \setminus [-n, n]^2 \text{ intercepta } [-n, n]^2 \end{array} \right\}.$$

Note que a sequência de eventos $\{R_n : n > 0\}$ é crescente, logo pelo teorema da continuidade da medida temos

$$1 = \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(N = 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(R_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0([-n, n]^2 \leftrightarrow \infty).$$

Assim dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então

$$|\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0([-n, n]^2 \leftrightarrow \infty) - 1| < \epsilon.$$

Logo podemos escolher m suficientemente grande de maneira que

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0([-m, m]^2 \leftrightarrow \infty) > 1 - \epsilon. \quad (4.2)$$

Fixando $m_0 \geq n_0$, seja A_e (resp. A_d, A_c, A_b) o evento :

- O segmento $\{-m_0\} \times [-m_0, m_0]$ (resp. $\{m_0\} \times [-m_0, m_0]$, $[-m_0, m_0] \times \{m_0\}$, $[-m_0, m_0] \times \{-m_0\}$) está em um aglomerado infinito em $\mathbb{Z}^2 \setminus [-m_0, m_0]^2$,

onde $e \equiv$ esquerda, $d \equiv$ direita, $c \equiv$ cima, $b \equiv$ baixo. Por invariância por rotação do modelo de aglomerados aleatórios temos

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_e \cap A_d) = \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_c \cap A_b). \quad (4.3)$$

Por outro lado, segue de (4.2) que

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_e \cup A_d \cup A_c \cup A_b) = \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0([-m_0, m_0]^2 \leftrightarrow \infty) > 1 - \epsilon. \quad (4.4)$$

Usando o “Truque da Raiz Quadrada” (veja apêndice) temos

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_u) \geq 1 - [1 - \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_e \cup A_d \cup A_c \cup A_b)]^{\frac{1}{4}}, \quad u = e, d, c, b. \quad (4.5)$$

Segue das desigualdades (4.4) e (4.5) que

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_u) \geq 1 - \epsilon^{\frac{1}{4}}, \quad u = e, d, c, b. \quad (4.6)$$

Observe que os eventos A_u , onde $u = e, d, c, b$ são eventos crescentes, logo por (4.6) e pela Desigualdade FKG

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_e \cap A_d) \geq \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_e)\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_d) \geq (1 - \epsilon^{\frac{1}{4}})^2 \geq 1 - 2\epsilon^{\frac{1}{4}}. \quad (4.7)$$

Usando a identidade (4.3) e que $\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0$ é estocasticamente dominado por $\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^1$, obtemos

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^1(A_c \cap A_b) \geq 1 - 2\epsilon^{\frac{1}{4}}. \quad (4.8)$$

Antes de prosseguir lembramos dois fatos importantes sobre este modelo

a) o ponto auto-dual é dado por $p^*(p_{sd}) = p_{sd}$;

b) a medida dual de $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^0$ é $\phi_{p^*,q,\mathbb{Z}^{2*}}^1$.

Seja A_c^* (resp. A_b^*) o evento a face $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + [1 - n, n - 1] \times \{n - 1\}$ (resp. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + [1 - n, n - 1] \times \{1 - n\}$) está em um aglomerado infinito na configuração dual, no exterior do quadrado $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + [1 - n, n - 1]^2$. Usando a dualidade, as observações a) e b) e as estimativas feitas acima, podemos afirmar que para todo $n \geq m + 1$

$$\begin{aligned} \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_e \cap A_d \cap A_c^* \cap A_b^*) &\geq \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_e \cap A_d) \phi_{p^*(p_{sd}),q,\mathbb{Z}^{2*}}^1(A_c^* \cap A_b^*) \\ &\geq \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_e \cap A_d) \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^{2*}}^1(A_c^* \cap A_b^*) \\ &\geq (1 - 2\epsilon^{\frac{1}{4}})^2 \\ &> 1 - 4\epsilon^{\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade usamos a Desigualdade FKG e o fato b), na segunda desigualdade o fato a) e na terceira desigualdade usamos as equações (4.7) e (4.8) simultaneamente. Isto é,

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(A_e \cap A_d \cap A_c^* \cap A_b^*) > 1 - 4\epsilon^{\frac{1}{4}}. \quad (4.9)$$

Agora considere o evento

$$B = \{\text{toda aresta dual em } (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + [1 - n, n - 1]^2 \text{ está aberta}\}$$

Note que os eventos B e $A_e \cap A_d \cap A_c^* \cap A_b^*$ dependem de estados de arestas disjuntas. Usando a estimativa (4.9) e aplicando as propriedades de Domínio de Markov e Energia Finita, temos que

$$\phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(B) > 0 \quad \text{e} \quad \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(B|A_e \cap A_d \cap A_c^* \cap A_b^*) > 0, \quad (4.10)$$

consequentemente

$$\begin{aligned} \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(N \geq 2) &\geq \phi_{p_{sd},q,\mathbb{Z}^2}^0(B \cap A_e \cap A_d \cap A_c^* \cap A_b^*) \\ &> 0. \end{aligned}$$

chegando assim a uma contradição com (4.1), que garante a unicidade do aglomerado aleatório infinito na fase supercrítica quase certamente. \blacksquare

A Figura (4.1) nos fornece um algoritmo elegante da demonstração anterior.

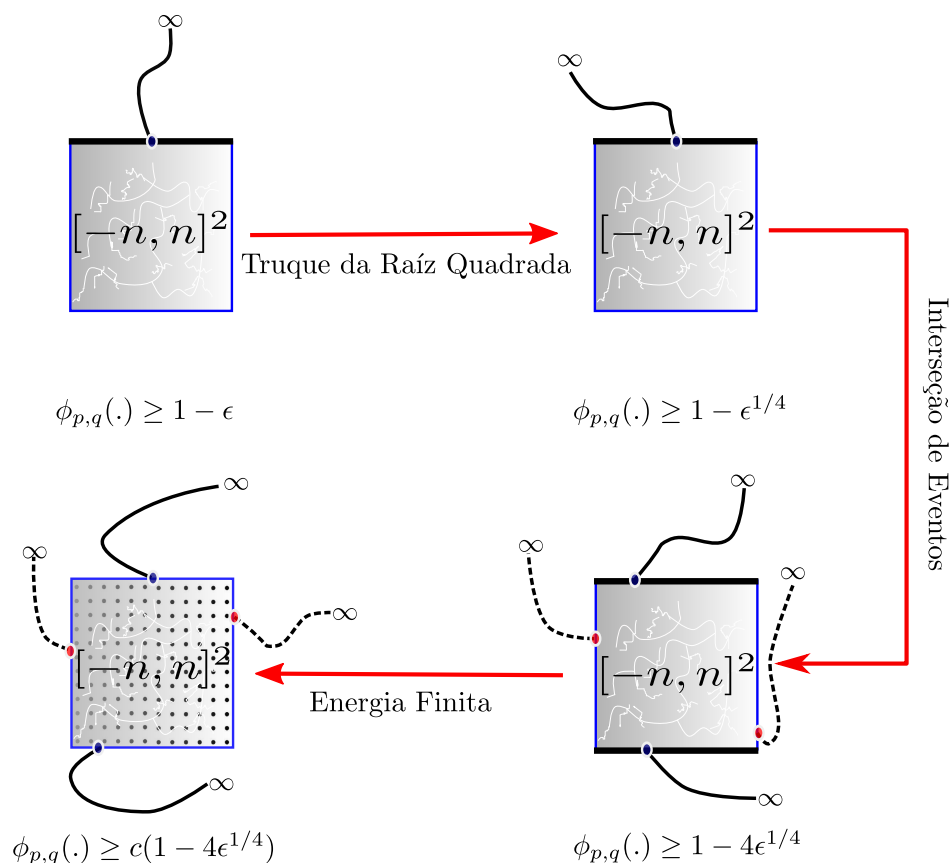


Figura 4.1: Passos da prova de que $p_c \geq p_{sd}$.

4.2 - Cota superior para o ponto crítico: $p_c \leq p_{sd}$

Para a prova do lema que segue, vamos usar o Teorema 3.3 para construir um caminho que conecte a origem ao infinito, quando $p > p_{sd}$ com uma probabilidade positiva. Existe uma grande dificuldade para fazer tal construção, pois precisamos transformar estimativas dentro do toro em estimativas que sejam válidas em toda rede \mathbb{Z}^2 . Para superar estas dificuldades usamos as desigualdade de comparação entre condições de fronteiras que nos permitirá substituir condições de fronteira periódicas por condições de fronteira conectadas.

LEMA 4.2. *Se $q \geq 1$, então*

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(0 \leftrightarrow \infty) > 0,$$

para todo $p > p_{sd}$. Como consequência $p_c \leq p_{sd}$.

Demonstração. Seja $\alpha > 1$ fixo. Para cada $n \geq 1$, defina: a caixa centrada na origem

$$\Lambda(n) = [-\alpha^n, \alpha^n]^2 \cap \mathbb{Z}^2,$$

e o anel

$$A_n^\alpha = \Lambda(n+1) \setminus \Lambda(n).$$

Observamos que um circuito aberto num anel será um caminho aberto que circula a

origem. Definindo o evento:

$$\mathcal{A}_n^\alpha = \left\{ \begin{array}{l} \text{Existe um circuito (aberto) no anel } A_n^\alpha \text{ circulando} \\ \text{a origem e também um caminho (aberto)} \\ \text{ligando este circuito à fronteira da caixa } \Lambda(n+2) \end{array} \right\}$$

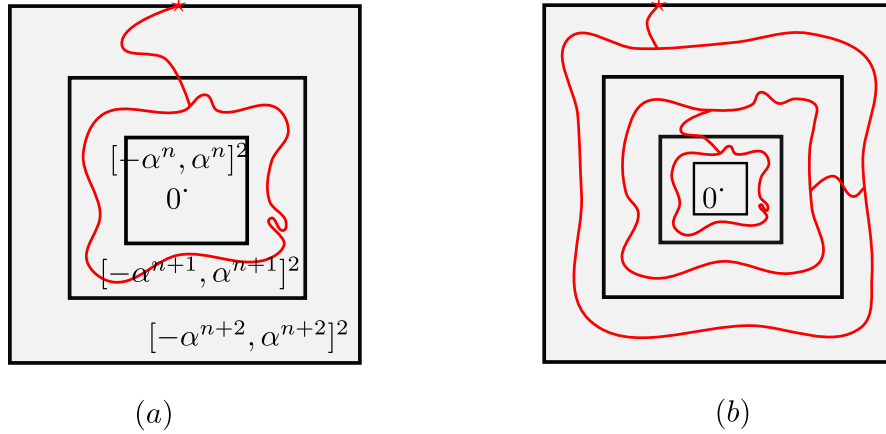


Figura 4.2: (a) O evento \mathcal{A}_n^α . (b) Combinação dos eventos \mathcal{A}_n^α ; isto é construção de um caminho da origem ao infinito.

Primeiro, observe que o evento \mathcal{A}_n^α ocorre sempre que os seguintes eventos ocorrem simultaneamente:

- Os seguintes retângulos são cruzados horizontalmente:

$$R_1 = [-\alpha^{n+1}, \alpha^{n+1}] \times [\alpha^n, \alpha^{n+1}],$$

$$R_2 = [-\alpha^{n+1}, \alpha^{n+1}] \times [-\alpha^{n+1}, -\alpha^n],$$

$$R_3 = [-\alpha^n, \alpha^n] \times [0, \alpha^{n+2}];$$

- Os seguintes retângulos são cruzados verticalmente:

$$R_4 = [\alpha^n, \alpha^{n+1}] \times [-\alpha^{n+1}, \alpha^{n+1}],$$

$$R_5 = [-\alpha^{n+1}, \alpha^n] \times [-\alpha^{n+1}, \alpha^{n+1}].$$

Isto é, temos

$$\mathcal{C}_h(R_1) \cap \mathcal{C}_h(R_2) \cap \mathcal{C}_h(R_3) \cap \mathcal{C}_v(R_4) \cap \mathcal{C}_v(R_5) \subset \mathcal{A}_n^\alpha.$$

Definimos também o retângulo

$$R_6 = [0, \alpha^n] \times [0, \alpha^{n+2}].$$

Observe que os eventos $\mathcal{C}_h(R_i)$ $i = 1, 2, 3$ e $\mathcal{C}_v(R_j)$ $j = 4, 5, 6$ são crescentes. Assim, usando a simetria dos quatro primeiros eventos na interseção acima e o fato de que o

evento $\mathcal{C}_v(R_5)$ contém o evento $\mathcal{C}_v(R_6)$, temos que para qualquer grafo G contendo a caixa $\Lambda(n+2)$ e qualquer condição de fronteira ξ (nos sentidos 1 e 2)

$$\begin{aligned} \phi_{p,q,G}^\xi(\mathcal{A}_n^\alpha) &\geq \left[\phi_{p,q,G}^\xi(\mathcal{C}_h(R_1)) \right]^4 \phi_{p,q,G}^\xi(\mathcal{C}_v(R_6)) \\ &\geq \left\{ \phi_{p,q,G}^\xi(\mathcal{C}_h([0, \alpha^{n+2}] \times [0, \alpha^n])) \right\}^5, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde na primeira desigualdade usou-se a Desigualdade FKG e na segunda desigualdade a simetria dos eventos envolvidos no produto.

Observe que $\forall N \geq 1$, os eventos $\{\bigcap_{k=N}^n \mathcal{A}_k^\alpha : n \geq N\}$ são decrescentes, logo pelo teorema da continuidade da medida e pela invariância translacional do modelo temos

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(0 \leftrightarrow \infty) \geq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1\left(\bigcap_{k \geq N} \mathcal{A}_k^\alpha\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1\left(\bigcap_{k=N}^n \mathcal{A}_k^\alpha\right). \quad (4.12)$$

Note que se cotamos $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(\bigcap_{k=N}^n \mathcal{A}_k^\alpha)$ inferiormente, de maneira uniforme em n , nosso problema acaba. Portanto nos concentraremos em estimar a dita probabilidade. Para cada $n \geq 1$, pelas propriedades elementares da probabilidade condicional temos

$$\begin{aligned} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1\left(\bigcap_{k=N}^n \mathcal{A}_k^\alpha\right) &= \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1\left(\mathcal{A}_1^\alpha \mid \bigcap_{j=N+1}^n \mathcal{A}_j^\alpha\right) \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1\left(\mathcal{A}_2^\alpha \mid \bigcap_{j=N+2}^n \mathcal{A}_j^\alpha\right) \dots \\ &\quad \dots \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1\left(\mathcal{A}_{n-2}^\alpha \mid \bigcap_{j=n-1}^n \mathcal{A}_j^\alpha\right) \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(\mathcal{A}_{n-1}^\alpha \mid \mathcal{A}_n^\alpha) \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(\mathcal{A}_n^\alpha) \\ &= \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(\mathcal{A}_n^\alpha) \prod_{k=N}^{n-1} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(\mathcal{A}_k^\alpha \mid \mathcal{A}_j^\alpha, \quad k < j \leq n). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Fixe $k \in [N, n-1]$. No evento $\bigcap_{k < j \leq n} \mathcal{A}_j^\alpha$, considere o circuito aberto mais exterior Γ em \mathcal{A}_{k+1}^α , note que tal circuito pode ser descoberto por um processo de exploração feito fora do domínio que delimita o circuito existente em \mathcal{A}_{k+1}^α .

Condicionando sobre $\Gamma = \gamma$, onde γ é uma possível realização de Γ . Podemos observar que uma configuração no interior de γ tem condições de fronteira conectada (já que γ é um circuito aberto) e que a probabilidade condicional de existir um circuito em \mathcal{A}_k^α conectado por um caminho aberto ao circuito γ é maior que a probabilidade de existir um circuito em \mathcal{A}_k^α conectado a fronteira da caixa $\Lambda(k+2)$ com condições de fronteira conectada. Daí temos que quase certamente

$$\begin{aligned} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(\mathcal{A}_k^\alpha \mid \mathcal{A}_j^\alpha, \quad k < j \leq n) &= \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(\mathcal{A}_k^\alpha \mid \Gamma)) \\ &\geq \phi_{p,q,\Lambda(k+2)}^1(\mathcal{A}_k^\alpha) \\ &\geq \phi_{p,q,2\alpha^{k+2}}^P(\mathcal{A}_k^\alpha) \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} &\geq \phi_{p,q,2\alpha^{k+2}}^P(\mathcal{C}_h([0, \alpha^{k+2}] \times [0, \alpha^k]))^5 \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{4} \alpha^{-c'(p)(k+2)}\right)^5. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Na primeira desigualdade, usamos a cota inferior uniforme sobre a probabilidade condicional. Na segunda desigualdade usamos a desigualdade de comparação entre fronteiras sobre a caixa $\Lambda(k+2)$ de lado $2\alpha^{k+2}$ com condição de fronteira conectada e sobre o toro de tamanho $2\alpha^{k+2}$ com condição de fronteira periódica. A terceira desigualdade é devido à (4.11). A última desigualdade segue do Teorema 3.4 do capítulo anterior (com $n = \frac{1}{4}\alpha^{(k+2)}$), onde $c'(p)$ é uma constante positiva.

Substituindo este resultado em (4.13), obtemos

$$\begin{aligned} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1 \left(\bigcap_{k=N}^n \mathcal{A}_k^\alpha \right) &\geq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(\mathcal{A}_n^\alpha) \prod_{k=N}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{4} \alpha^{-c'(p)(k+2)} \right)^5 \\ &\geq \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(\mathcal{A}_n^\alpha) \prod_{k=N}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4} \alpha^{-c'(p)(k+2)} \right)^5. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Para mostrar que (4.16) é positivo basta mostrar que

$$\prod_{k=N}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4} \alpha^{-c'(p)(k+2)} \right) > 0. \quad (4.17)$$

Pode-se verificar (por indução) facilmente que se $0 < a_j < 1$ e $N \geq 1$ então

$$\prod_{j=N}^n (1 - a_j) > 1 - a_N - a_{N+1} - \dots - a_n, \quad \forall n = N+1, N+2, \dots \quad (4.18)$$

Mediante um cálculo simples podemos ver que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $N \geq n_0$ então

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{4} \alpha^{-c'(p)(k+2)} = \frac{\alpha^{-c'(p)(N+2)}}{4(1 - \alpha^{-c'(p)})} < 1.$$

Desta igualdade segue que 4.17 é positivo para todo N . De fato, basta notar que os n_0 primeiros fatores são positivos e para os demais termos basta usar a desigualdade acima, junto com 4.18. Assim podemos afirmar que existe $c = c(p, \alpha)$ tal que

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1 \left(\bigcap_{k=N}^n \mathcal{A}_k^\alpha \right) \geq c \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(\mathcal{A}_n^\alpha). \quad (4.19)$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \phi_{p,q,[-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}]^2}^1(\mathcal{E}_h([0, \alpha^2(\alpha^n)] \times [0, \alpha^n])) &\geq \phi_{p,q,m}^P(\mathcal{E}_h([0, \alpha^2(\alpha^n)] \times [0, \alpha^n])) \\ &\stackrel{p > p_{sd}}{\geq} \phi_{p_{sd},q,m}^P(\mathcal{E}_h([0, \alpha^2(\alpha^n)] \times [0, \alpha^n])) \\ &\stackrel{\text{Teorema (3.3)}}{\geq} c(\alpha^2). \end{aligned}$$

Na primeira desigualdade usamos a desigualdade de comparação entre condições de fronteira sobre a caixa $[-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}]^2$ de lado m com condição de fronteira conectada e sobre o toro de tamanho m com condições de fronteira periódica. Na segunda desigualdade usamos a monotonicidade das medidas de probabilidade do modelo de aglomerados aleatórios com respeito ao parâmetro p . Na terceira desigualdade usamos a generalização

do Teorema de Russo-Seymour-Welsh (Teorema (3.3)) com α substituído por α^2 , onde $c(\alpha^2)$ é uma constante positiva.

Na estimativa anterior, tomando o limite quando $m \rightarrow \infty$, pela definição das medidas de aglomerados aleatórios a volume infinito, temos que para todo $n \geq N$

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(\mathcal{C}_h([0, \alpha^2(\alpha^n)] \times [0, \alpha^n])) \geq c(\alpha^2). \quad (4.20)$$

Usando (4.20) em (4.19), temos que $\forall N \geq 1$

$$\begin{aligned} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1 \left(\bigcap_{k=N}^n \mathcal{A}_k^\alpha \right) &\stackrel{(4.19)}{\geq} c \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(\mathcal{A}_n^\alpha) \\ &\stackrel{(4.11)}{\geq} c [\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(\mathcal{C}_h([0, \alpha^2(\alpha^n)] \times [0, \alpha^n]))]^5 \\ &\stackrel{(4.20)}{\geq} c \cdot c(\alpha^2)^5. \end{aligned}$$

Considerando $N = 1$, pela desigualdade anterior

$$\begin{aligned} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(0 \leftrightarrow \infty) &\stackrel{(4.12)}{\geq} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1 \left(\bigcap_{k=1}^n \mathcal{A}_k^\alpha \right) \\ &\stackrel{(4.20)}{\geq} c \cdot c(\alpha^2)^5 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Portanto $\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}^1(0 \leftrightarrow \infty) > 0 \quad \forall p > p_{sd}$, em consequência $p_c \leq p_{sd}$, concluindo a prova. \blacksquare

Um subproduto da demonstração dada acima, basicamente usando (4.19) e (4.20) nos fornece também a prova do seguinte resultado

PROPOSIÇÃO 4.1. *Dados $\alpha > 1$, $q \geq 1$ e $p > p_{sd}$. Existem $c, c_1, \epsilon_1 > 0$ (dependendo de p, q e α) tais que para todo $N \geq 1$,*

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2} \left(\bigcap_{k \geq N} \mathcal{A}_k^\alpha \right) \geq c \prod_{k=N}^{\infty} (1 - c_1 e^{-\epsilon_1 k}) > 0.$$

Observamos que na prova do Lema 4.2 usamos a condição de fronteira conectada, mas como é bem conhecido se $p \neq p_c$ então todas as medidas a volume infinito do modelo de aglomerados aleatórios coincidem. Por isto não escrevemos nenhuma condição de fronteira no enunciado acima.

Sabemos que na fase sub-crítica do modelo de percolação de Bernoulli de arestas independentes, a probabilidade de que dois pontos x e y sejam conectados por um caminho decai exponencialmente com respeito à distância entre os pontos x e y , veja [5],[9], [12]. Abaixo apresentamos uma generalização deste fato para o modelo de aglomerados aleatórios.

TEOREMA 4.2 (Decaimento Exponencial). *Seja $q \geq 1$. Para todo $p < p_c(q)$, existem $0 < C(p, q), c(p, q) < \infty$ tais que para todo $x, y \in \mathbb{Z}^2$,*

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}(x \leftrightarrow y) \leq C(p, q)e^{-c(p,q)|x-y|},$$

onde $|\cdot|$ denota a norma euclidiana em \mathbb{Z}^2 .

Demonstração. Seja x um vértice do grafo $\mathbb{Z}^2 = (V(\mathbb{Z}^2), E(\mathbb{Z}^2))$ e seja C_x o aglomerado de x , isto é, $C_x(\omega) = \{y \in V(\mathbb{Z}^2) : x \leftrightarrow y \text{ em } \omega\}$. Denotaremos por $|C_x|$ sua cardinalidade (ou volume). Primeiro provaremos que a variável aleatória $|C_x|$ tem momentos finitos de qualquer ordem. Logo deduziremos que a probabilidade de $\{\omega \in \Omega : |C_x|(\omega) \geq n\}$ (que por simplicidade denotamos por $\{|C_x| \geq n\}$) decai exponencialmente em n .

Passo 1: Momentos finitos para $|C_x|$

Considere $r \geq 1$ e $p < p_{sd}$; desejamos provar que:

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}(|C_x|^r) < \infty. \quad (4.21)$$

Inicialmente considere a caixa de tamanho n centrada na origem: $\Lambda_n = [-n, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2$. A caixa de tamanho n centrada no ponto x será denotada por $\Lambda_n(x) = x + \Lambda_n$. Sejam $p_1 := (p + p_{sd})/2 \in (p, p_{sd})$ e

$$D_n := \{\omega \in \Omega : x \leftrightarrow \mathbb{Z}^2 \setminus \Lambda_n(x) \text{ em } \omega\},$$

denote por H_n a distância de Hamming, definida em (3.2). Observe que H_n é o número mínimo de arestas fechadas que devemos cruzar para ir de x a fronteira da caixa $\Lambda_n(x)$. Seja

$$\alpha := e^{\frac{p_1 - p}{2r+3}} > 1.$$

Na fase subcrítica, isto é, para $p < p_{sd}$, usando a propriedade de Domínio de Markov as equações (4.14) e (4.15), a Desigualdade de Bernoulli e a continuidade da probabilidade, podemos verificar que para cada $\alpha > 1$ fixado, se N é suficientemente grande, então

$$\phi_{p^*,q,(\mathbb{Z}^2)^*} \left(\bigcap_{k \geq N} (\mathcal{A}_k^\alpha)^* \right) > \frac{1}{2},$$

onde o evento $(\mathcal{A}_N^\alpha)^*$ é a ocorrência do evento \mathcal{A}_N^α no modelo dual. Observamos também que as desigualdades citadas acima se aplicam neste caso pois $p^* = p^*(p, q) > p^*(p_{sd}, q) = p_{sd}$. Como $p_1 < p_{sd}$ para N grande temos

$$\phi_{p_1^*,q,(\mathbb{Z}^2)^*} \left(\bigcap_{k \geq N} (\mathcal{A}_k^\alpha)^* \right) > \frac{1}{2}.$$

Note que se N é suficientemente grande então $H_n \geq (\log n / \log \alpha) - N$. Logo

$$\phi_{p_1,q,\mathbb{Z}^2}(H_n) \geq \left(\frac{\log n}{\log \alpha} - N \right) \phi_{p_1^*,q,(\mathbb{Z}^2)^*} \left(\bigcap_{k \geq N} (\mathcal{A}_k^\alpha)^* \right) \geq \frac{\log n}{4 \log \alpha},$$

para n suficientemente grande. Finalmente, pelo uso da Desigualdade 3.5 e da desigualdade anterior, encontramos que para cada $p < p_1 < p_{sd}$

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}(D_n) \leq \phi_{p_1,q,\mathbb{Z}^2}(D_n) e^{-4(p_1-p)\phi_{p_1,q,\mathbb{Z}^2}(H_n)} \leq n^{-(2r+3)}, \quad (4.22)$$

para n suficientemente grande. Usando a desigualdade acima temos

$$\begin{aligned} \phi_{p_1,q,\mathbb{Z}^2}(|C_x|^r \geq n) &= \phi_{p_1,q,\mathbb{Z}^2}(|C_x| \geq n^{\frac{1}{r}}) \\ &\leq \phi_{p_1,q,\mathbb{Z}^2}\left(D_{n^{\frac{1}{r}}}\right) \\ &\leq n^{\frac{-(2r+3)}{2r}}. \end{aligned}$$

Afirmamos que $\phi_{p_1,q,\mathbb{Z}^2}(|C_x|^r = \infty) = 0$, pois pelo teorema de continuidade da probabilidade temos

$$\begin{aligned} \phi_{p_1,q,\mathbb{Z}^2}(|C_x|^r = \infty) &= \phi_{p_1,q,\mathbb{Z}^2}(|C_x| = \infty) \\ &= \phi_{p_1,q,\mathbb{Z}^2}(x \leftrightarrow \infty) \\ &\leq \phi_{p_1,q,\mathbb{Z}^2}(x \leftrightarrow \mathbb{Z}^2 \setminus \Lambda_n(x)) \\ &= \phi_{p_1,q,\mathbb{Z}^2}(D_n) \\ &\stackrel{(4.22)}{\longrightarrow} 0 \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Já que $|C_x|^r$ é uma variável aleatória não negativa e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_{p_1,q,\mathbb{Z}^2}(|C_x|^r \geq n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{-(2r+3)}{2r}} < \infty.$$

Segue das desigualdades acima que $\phi_{p_1,q,\mathbb{Z}^2}(|C_x|^r) < \infty$.

Passo 2: Decaimento exponencial

Afirmamos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{n} \geq c \quad \text{quase certamente.} \quad (4.23)$$

Usando (4.23) na primeira desigualdade de (4.22) ficamos com

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}(D_n) \leq e^{-4n(p_1-p)\phi_{p_1,q,\mathbb{Z}^2}(H_n)/n} \leq e^{-4n(p_1-p)c}$$

para todo n suficientemente grande. Esta desigualdade implica imediatamente que para todo n suficientemente grande

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}(|C_x| \geq n) \leq e^{-4n(p_1-p)c},$$

consequentemente existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\phi_{p,q,\mathbb{Z}^2}(x \leftrightarrow y) \leq e^{-4n(p_1-p)c} \quad \forall y \in \partial D_n, \quad \forall n \geq n_0.$$

Tomando $c(p, q) = 4(p_1 - p)c > 0$ e $C(p, q) = 1$ encerramos a prova.

Nesta direção agora nos concentraremos em provar a Desigualdade (4.23) que nos dá uma cota inferior uniforme em n da variável aleatória H_n .

Consideremos um caminho (não necessariamente aberto), auto-evitante γ saindo da origem e indo até a fronteira da caixa de comprimento $2n$, $B(n) = [-n, n]^2$. Definimos K_n o número de aglomerados aleatórios abertos de γ , mais precisamente, K_n é o número de componentes conexas obtidas a partir de γ removendo todas as suas arestas fechadas. Para cada $x \in \gamma$, definimos $(C_n)_x$ sendo o aglomerado aleatório aberto de γ contendo x , isto é, removemos todas as arestas fechadas de γ e denotamos por $(C_n)_x$ a componente conexa do grafo contendo o vértice x . Como é usual, nos escrevemos $|(C_n)_x|$ para o número de vértices de $(C_n)_x$.

Note que

$$|C_x|^{-1} \leq |(C_n)_x|^{-1} \quad \text{para todo } x \in \gamma \quad (4.24)$$

logo

$$\sum_{x \in \gamma} |(C_n)_x|^{-1} = K_n. \quad (4.25)$$

Esta igualdade é válida pela seguinte razão. Seja Π um aglomerado aleatório aberto de γ . Cada vértice x de Π contribui $|\Pi|^{-1}$ para a soma (4.25), de modo que a contribuição agregada dos vértices de Π é exatamente 1.

Logo por (4.24) e (4.25) temos que

$$\frac{1}{|\gamma|} K_n \geq \frac{1}{|\gamma|} \sum_{x \in \gamma} |C_x|^{-1}. \quad (4.26)$$

Definindo $T(\gamma)$ como o número de arestas fechadas no caminho γ , por (4.26) obtemos a seguinte desigualdade

$$\frac{T(\gamma)}{n} \geq \frac{1}{|\gamma|} T(\gamma) \geq \frac{1}{|\gamma|} \sum_{x \in \gamma} \frac{1}{|C_x|} \geq \left(\frac{1}{|\gamma|} \sum_{x \in \gamma} |C_x| \right)^{-1},$$

já que $T(\gamma) \geq K_n$, isto é, o número de arestas fechadas em γ é maior que o número de aglomerados aleatórios distintos interceptando γ . A última desigualdade acima é obtida pela convexidade da função $1/x$. Por outro lado, como H_n pode ser reescrito como: $H_n = \inf \{ \sum_{e \in \pi} [1 - \omega(e)] : \pi \in \Pi \}$, onde Π representa a família de caminhos (não necessariamente abertos) da origem à fronteira da caixa $B(n) = [-n, n]^2$, temos que

$$\frac{H_n}{n} \geq \inf_{\gamma: 0 \leftrightarrow \mathbb{Z}^2 \setminus B(n)} \left(\frac{1}{|\gamma|} \sum_{x \in \gamma} |C_x| \right)^{-1}. \quad (4.27)$$

A ideia nesta parte é obter uma cota inferior, quase certamente, na direção da desigualdade anterior, para isso necessitamos transformar as variáveis aleatórias $|C_x|$ em variáveis aleatórias independentes.

Seja $(\tilde{C}_x)_{x \in B(n)}$ uma família de subconjuntos independentes de \mathbb{Z}^2 com a propriedade de que \tilde{C}_x tem a mesma distribuição que C_x .

Afirmção: A família $(\tilde{C}_x)_{x \in B(n)}$ é estocasticamente dominada pela família $(M_x)_{x \in B(n)}$ definida como:

$$M_x := \sup_{y \in \mathbb{Z}^2: x \in \tilde{C}_y} |\tilde{C}_y|.$$

Provaremos esta afirmação indutivamente. Seja v_1, v_2, \dots um ordenamento determinístico de \mathbb{Z}^2 . Dada a família (\tilde{C}_x) construiremos a família $(D_x)_{x \in B(n)}$ tendo a mesma distribuição que $(C_x)_{x \in B(n)}$ e satisfazendo a seguinte condição: Para cada x , existe y tal que $D_x \subset \tilde{C}_y$. Definindo $D_{v_1} = \tilde{C}_{v_1}$. Dados $D_{v_1}, D_{v_2}, \dots, D_{v_n}$, definimos $E = \cup_{i=1}^n D_{v_i}$. Se $v_{n+1} \in E$, temos que $D_{v_{n+1}} = D_{v_i}$ para algum j tal que $v_{n+1} \in D_{v_j}$. Se $v_{n+1} \notin E$, procedemos como segue. Seja $\Delta_e E$ o conjunto de arestas de \mathbb{Z}^2 tendo exatamente um vértice em E . Um subconjunto aleatório F de $\tilde{C}_{v_{n+1}}$ pode ser obtido de tal modo que F tem a distribuição condicional de $C_{v_{n+1}}$ dado que todas as arestas em $\Delta_e E$ são fechadas; logo $D_{v_{n+1}} = F$. A propriedade do Domínio de Markov e a associação positiva pode ser usado para para mostrar que a distribuição de $C_{v_{n+1}}$ dado $C_{v_1}, C_{v_2}, \dots, C_{v_n}$ depende só de $\Delta_e E$, e está estocásticamente dominada pela distribuição do aglomerado aleatório em todo E sem nenhum condicionamento. Obtendo a requerida dominação estocástica. Em particular, $|C_x| \leq M_x$ e M_x tem todos seus momentos finitos.

De (4.27) e da dominação estocástica obtida acima, temos que

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{n} &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{\gamma: 0 \leftrightarrow \mathbb{Z}^2 \setminus B(n)} \left(\frac{1}{|\gamma|} \sum_{x \in \gamma} |C_x| \right)^{-1} \\ &\geq \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\gamma: 0 \leftrightarrow \mathbb{Z}^2 \setminus B(n)} \frac{1}{|\gamma|} \sum_{x \in \gamma} M_x \right)^{-1}. \end{aligned}$$

O segundo passo é substituir M_x por variáveis aleatórias que sejam independentes. Podemos aproveitar o Lema 2 de [10] para provar que

$$\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\gamma: 0 \leftrightarrow \mathbb{Z}^2 \setminus B(n)} \frac{1}{|\gamma|} \sum_{x \in \gamma} M_x \right)^{-1} \geq \left(2 \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{|\Gamma| \geq n} \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{x \in \Gamma} |\tilde{C}_x|^2 \right)^{-1},$$

onde os supremos são tomado sob todos os grafos conexos finitos Γ de cardinalidade maior que n contendo a origem (também chamados de animais).

Já que $|\tilde{C}_x|^2$ são independentes e têm momentos finitos de qualquer ordem, o principal resultado de [6], garante que

$$2 \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{|\Gamma| \geq n} \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{x \in \Gamma} |\tilde{C}_x|^2 \leq C \quad q.c.,$$

para alguma constante $C > 0$. Daí com probabilidade positiva, $\liminf H_n/n$ é maior que uma certa constante positiva, o que conclui a prova. ■

APÊNDICE

DEFINIÇÃO 5.1. *Seja (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável. Dizemos que um evento $A \in \mathcal{F}$ é invariante por automorfismos, se para todo automorfismo $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega$, temos que $\Phi^{-1}(A) = A$.*

Por exemplo, cada automorfismo $\tilde{\Phi} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ induz naturalmente um automorfismo em $\Omega = \{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^2)}$, onde $\Phi(\omega)$ é a configuração dada por $\Phi(\omega)(e) = \omega(\tilde{\Phi}(e))$. Assim

$$\Xi(n) = \{\text{Existem exatamente } n \text{ aglomerados aleatórios (abertos) infinitos}\}$$

é invariante por Φ .

A proposição abaixo mostra que qualquer evento, no modelo de percolação de Bernoulli, invariante por automorfismos têm probabilidade 0 ou 1.

PROPOSIÇÃO 5.1 (Ref. [5]). *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$ o espaço de probabilidade do modelo de percolação de Bernoulli. Se $A \in \mathcal{F}$ e um evento invariante por translação então a probabilidade do evento A é 0 ou 1.*

Demonstração. Considere o grafo $\mathbb{Z}^2 = (\mathbb{Z}^2, E(\mathbb{Z}^2))$ Seja $x_0 \in \mathbb{Z}^2$. Já que \mathbb{Z}^2 é um grafo invariante por translações, existe um número infinito de vértices x tal que $\Phi^{-1}(x) = x_0$, para alguma translação Φ de \mathbb{Z}^2 . Como $A \in \mathcal{F}$, logo existe um subconjunto finito de arestas F de $E(\mathbb{Z}^2)$ e um evento cilíndrico E_F , que só depende dos estados das arestas em F , tal que

$$P_p(A \Delta E_F) \leq \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0. \quad (5.1)$$

Defina $M = \max\{\|x_0 - y\| : y \in F\}$. Como $M < \infty$, $B_{2M} = \{z : \|x_0 - z\| \leq 2M\} < \infty$, logo existe um vértice x e um automorfismo Φ de \mathbb{Z}^2 tal que $\Phi^{-1}(x_0) = x$.

Para todo $y \in F$ temos: Se $x_0 = \Phi^{-1}(y) \Rightarrow \Phi^{-1}(y) \notin F$. Pois caso contrario, $\|x_0 - \Phi^{-1}(y)\| \leq M < 2M \Rightarrow x_0 \neq \Phi^{-1}(y)$. Se $x_0 \neq \Phi^{-1}(y) \Rightarrow \Phi^{-1}(y) \notin F$. Pois $\|x_0 - \Phi^{-1}(y)\| \geq \|x_0 - \Phi^{-1}(x_0)\| - \|\Phi^{-1}(x_0) - \Phi^{-1}(y)\| = \|x_0 - x\| - \|x_0 - y\| > M \Rightarrow \Phi^{-1}(y) \notin F$. Portanto $F \cap \Phi^{-1}(F) = \emptyset \Rightarrow E_F$ e $\Phi^{-1}(F)$ dependem de estados de arestas distintas, portanto E_F e $\Phi^{-1}(F)$ são eventos independentes.

Ora, da equação (5.1) obtemos

$$|P_p(A) - P_p(E_F)| \leq \epsilon, \quad (5.2)$$

pois $|P_p(A) - P_p(E_F)| \leq P_p(A\Delta E_F)$. Além disso temos que

$$P_p(A) = P_p(A \cap A) = P_p(A \cap \Phi^{-1}(A)). \quad (5.3)$$

Usando a independência obtemos

$$P_p(E_F) = P_p(E_F)P_p(\Phi^{-1}(E_F)) \stackrel{\text{por indep.}}{=} P_p(E_F \cap \Phi^{-1}(E_F)). \quad (5.4)$$

Pelas propriedades elementares de probabilidade segue que $P_p(A \cap \Phi^{-1}(A))$ é igual a

$$P_p(E_F \cap \Phi^{-1}(A)) + P_p((A \cap E_F^c) \cap \Phi^{-1}(A)) - \overbrace{P_p((E_F \cap A^c) \cap \Phi^{-1}(A))}^{=0}. \quad (5.5)$$

Analogamente temos que $P_p(E_F \cap \Phi^{-1}(A))$ é dado por

$$P_p(E_F \cap \Phi^{-1}(E_F)) + P_p(E_F \cap \Phi^{-1}(A \cap E_F^c)) - P_p(E_F \cap \Phi^{-1}(E_F \cap A^c)). \quad (5.6)$$

Das identidades (5.3), (5.4), (5.5) e (5.6) segue que $|P_p(A) - P_p^2(E_F)|$ é igual

$$\begin{aligned} &= |P_p(A \cap \Phi^{-1}(A)) - P_p(E_F \cap \Phi^{-1}(A))| \\ &= |P_p((A \cap E_F^c) \cap \Phi^{-1}(A)) + P_p(E_F \cap \Phi^{-1}(A \cap E_F^c)) - P_p(E_F \cap \Phi^{-1}(E_F \cap A^c))| \\ &= |P_p(\underbrace{\Phi^{-1}(A \cap E_F^c)}_{L_1}) + P_p(\underbrace{E_F \cap \Phi^{-1}(A \cap E_F^c)}_{L_2}) - P_p(\underbrace{E_F \cap \Phi^{-1}(E_F \cap A^c)}_{L_3})|. \end{aligned}$$

Isto é,

$$|P_p(A) - P_p^2(E_F)| = |P_p(L_1) + P_p(L_2) + P_p(L_3)|. \quad (5.7)$$

Para cada um dos termos do lado direito da igualdade acima temos as seguinte estimativas:

$$P_p(L_1) = P_p(\Phi^{-1}(A \cap E_F^c)) = P_p(A \cap E_F^c) \leq P_p(A\Delta E_F) \stackrel{\text{por (5.1)}}{\leq} \epsilon.$$

Para L_2 temos

$$P_p(L_2) = P_p(E_F \cap \Phi^{-1}(A \cap E_F^c)) \leq P_p(\Phi^{-1}(A \cap E_F^c)) = P_p(L_1) \leq \epsilon.$$

Finalmente para o evento L_3 temos

$$\begin{aligned} P_p(L_3) &= P_p(E_F \cap \Phi^{-1}(E_F \cap A^c)) \\ &\leq P_p(\Phi^{-1}(E_F \cap A^c)) = P_p(E_F \cap A^c) \\ &\leq P_p(A\Delta E_F) \stackrel{\text{por (5.1)}}{\leq} \epsilon. \end{aligned}$$

Usando as desigualdades acima temos as seguinte cotas

$$-2\epsilon \leq -P_p(L_2) - P_p(L_3) \leq P_p(L_1) + P_p(L_2) - P_p(L_3) \leq P_p(L_1) + P_p(L_2) \leq 2\epsilon.$$

Esta desigualdade implica que $|P_p(L_1) + P_p(L_2) + P_p(L_3)| \leq 2\epsilon$. Assim em (5.7) temos

$$|P_p(A) - P_p^2(E_F)| \leq 2\epsilon. \quad (5.8)$$

Finalmente por (5.1), (5.7), (5.8) e pela desigualdade triangular obtemos

$$\begin{aligned} |P_p(A) - P_p^2(A)| &\leq |P_p(A) - P_p^2(E_F)| + |P_p^2(E_F) - P_p^2(A)| \\ &\leq 2\epsilon + |P_p(E_F) + P_p(A)| |P_p(E_F) - P_p(A)| \\ &\leq 2\epsilon + |P_p(E_F) + P_p(A)|\epsilon \\ &\leq 4\epsilon. \end{aligned}$$

e como $\epsilon > 0$ foi arbitrário $\Rightarrow P_p(A) = P_p^2(A) \Rightarrow P_p(A) \in \{0, 1\}$. ■

Como o evento $\Xi(n)$ é invariante por automorfismos, segue diretamente do teorema acima que $P_p(\Xi(n)) \in \{0, 1\}$. Na fase supercrítica, $P_p(0 \leftrightarrow \infty) > 0$, dai

$$P_p(\Xi(n)) \geq P_p(x \leftrightarrow \infty) = P_p(0 \leftrightarrow \infty) > 0 \Rightarrow P_p(\Xi(n)) = 1,$$

onde na primeira igualdade usamos o fato de que \mathbb{L}^2 é um grafo invariante por translações. Assim temos que na fase supercrítica existe pelo menos um aglomerado aleatório infinito quase certamente. A unicidade desse aglomerado pode ser deduzido, como caso particular, do Teorema 2.12. A prova da unicidade do aglomerado infinito para o modelo de percolação de arestas independentes pode ser encontrada também em [9] e [12].

DEFINIÇÃO 5.2. *Uma variável aleatória $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é invariante por automorfismos se $\Phi X = X$ para cada automorfismo Φ . Um evento $A \in \mathcal{F}$ é invariante por automorfismos se a variável aleatória 1_A é invariante por automorfismos.*

DEFINIÇÃO 5.3. *Seja $\mu : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ uma medida de probabilidade. A medida de probabilidade μ é chamada invariante por automorfismos, se para todo evento $A \in \mathcal{F}$, $\mu(\Phi A) = \mu(A)$, para todo automorfismo Φ .*

Se consideramos o espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) definido no trabalho, a medida de percolação de Bernoulli P_p é invariante por automorfismos. Como caso particular de automorfismos, temos as translações.

DEFINIÇÃO 5.4. *Seja $\mu : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ medida de probabilidade. A medida de probabilidade μ é ergódica se para qualquer variável aleatória $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ invariante por translações, $\mu(X) \in \{0, 1\}$.*

PROPOSIÇÃO 5.2. *A medida de probabilidade μ é ergódica se para qualquer evento invariante por translações $A \in \mathcal{F}$, $\mu(A) \in \{0, 1\}$ ou equivalentemente a medida de probabilidade μ é ergódica se para qualquer variável aleatória $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ invariante por translações, $\mu(X = k) = 1$, onde “ k ” é uma constante.*

Observamos que pela Proposição 5.1 a medida de probabilidade do modelo de percolação de Bernoulli P_p é ergódica.

Truque da raiz quadrada

Sejam A_1, A_2, \dots, A_n eventos crescentes e equiprováveis tal que $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, então

$$P_p(A_i) \geq 1 - [1 - P_p(A)]^{\frac{1}{n}}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} 1 - P_p(A) &= 1 - P_p\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \\ &= P_p\left(\bigcap_{i=1}^n A_i^c\right) \\ &\geq \prod_{i=1}^n P_p(A_i^c) \quad \text{Pela Desigualdade FKG} \\ &= (1 - P_p(A_i))^n, \quad \text{eventos equiprováveis.} \end{aligned}$$

De onde se deduz que $P_p(A_i) \geq 1 - [1 - P_p(A)]^{\frac{1}{n}}$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] R. BARTLE, *The elements of Integration*, John Wiley and Sons, New York, 1966.
- [2] V. BEFFARA AND H. DUMINIL COPIN, *The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for $q \geq 1$* , Prob. Theory Related Fields, 153(2012), pp.511-542.
- [3] P. BILLINGSLEY *Convergence of Probability Measures*. Wiley, New York, 1968.
- [4] B. BOLLOBÁS, *Modern Graph Theory*, Springer, GTM 184, 1998.
- [5] B. BOLLOBÁS AND O. RIORDAN, *Percolation*, University of Cambridge, New York, 2006.
- [6] J.T. COX, P. GRIFFIN AND H. KESTEN, *Greedy lattice animals I: upper bounds*. Advances in Applied Probability, 3 (1151-1169), 1993.
- [7] H. DUMINIL COPIN , *Phase Transition in Random-cluster and $O(n)$ -models*, PhD. Thesis, Université de Genève, 2011.
- [8] W. FELLER, *An introduction to probability theory and its applications*, volume 2, pp. 234-238. Wiley, New York, 1966.
- [9] L.R. FONTES , *Notas em Percolação*, IMPA, Rio de Janeiro, 1996.
- [10] L.R. FONTES AND C.M. NEWMAN , *First-passage percolation for random colorings of \mathbb{Z}^d* . Annals of Applied Probability, 3 (746-762), erratum 4 254, 1993.
- [11] H.O. GEORGII, *Gibbs measures and phase transitions*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol.9, EDITION Second, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011.
- [12] G.R. GRIMMETT, *Percolation* (second edition). Springer, Berlin, 1999.
- [13] G.R. GRIMMETT, *The random-cluster model*, vol. 333 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Math. Sciences], Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [14] G.R. GRIMMETT AND GRAHAM , *Influence and sharp-threshold theorems for monotonic measures*, Ann. Probab., 34 (2006), pp. 1726-1745.
- [15] K.R. PARTHASARATHY *Probability Measures on Metric Spaces*. A.M.S., Providence 2005.