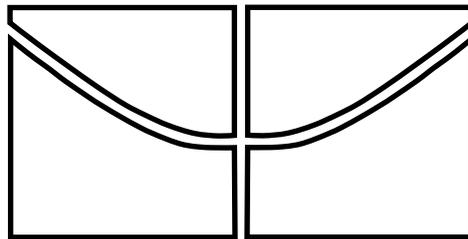


A continuidade da transição de fase do Modelo de Ising tridimensional



Leandro Chiarini Medeiros

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Esta dissertação é submetida para o grau de
Mestre em Matemática

Leandro Chiarini Medeiros

A continuidade da transição de fase do Modelo de Ising tridimensional

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília como requisito parcial à obtenção do Título de **Mestre em Matemática**.

Orientador(a): Leandro Martins Cioletti

Brasília
2017

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

A continuidade da transição de fase do Modelo de Ising tridimensional

por

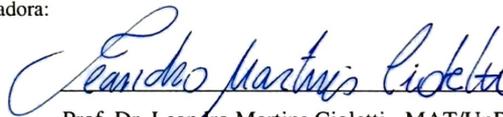
Leandro Chiarini Medeiros *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 05 de julho de 2017.

Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Leandro Martins Cioletti - MAT/UnB (Orientador)



Profa. Dra. Chang Chung Yu Dorea - MAT/UnB (Membro)



Prof. Dr. Marcelo Richard Hilário - UFMG (Membro)

* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

CM488c Chiarini Medeiros, Leandro
A continuidade da transição de fase do Modelo de Ising tridimensional / Leandro Chiarini Medeiros; orientador Leandro Martins Cioletti. -- Brasília, 2017.
178 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2017.

1. Modelo de Ising. 2. Correntes Aleatórias. 3. Mecânica Estatística. 4. Física-Matemática. 5. Probabilidade. I. Martins Cioletti, Leandro, orient. II. Título.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a toda minha família que sempre me encorajou a seguir a carreira que escolhi, mesmo nos momentos em que isso significasse que não pudessemos estar fisicamente juntos. Gostaria de agradecer, em especial, a minha mãe, Lucia Helena Chiarini, pela ajuda emocional e prática desde sempre. Sobretudo, seu auxílio foi fundamental para que este texto chegasse à qualidade desejada. Só tenho a confiança para seguir nesta jornada devido ao seu apoio.

Gostaria de fazer um agradecimento especial ao meu orientador Leandro Martins Cioletti, que começou a trabalhar comigo no meu quarto semestre da graduação. Leandro sempre me tratou como um igual e fez questão de que eu sentisse que o nosso trabalho juntos, não era apenas importante para mim, era, também, relevante para ele. Agradeço profundamente a oportunidade de trabalhar com você todos esses anos e por todos os ensinamentos sobre a matemática, a carreira de matemático e sobre a vida.

Agradeço também aos meus colegas Carol, Jatobá, Guilherme, Gustavo, Rebeca, Rodrigo e Yerko. Obrigado por tornar os momentos do café em algo mais do que simples intervalo. Agradeço também por, em diversas situações, me fazerem dar um tempo para comemorar ou descansar em meio aos longos dias de estudos. Ao longo dos próximos anos, não estaremos nas mesmas cidades, ou países, sentirei a falta de cada um de vocês.

Agradeço, em particular, aos membros da banca e ao meu colega Jamer por inúmeras sugestões e correções em versões preliminares deste texto.

Gostaria de agradecer também ao CNPq pelo suporte financeiro que foi vital para que eu pudesse me dedicar aos meus estudos.

Agradeço, também, ao Departamento de Matemática da UnB e todos os seus professores e funcionários que contribuíram de forma direta ou indireta para minha formação.

Agradeço, em especial, àqueles com quem tive mais contato ao longo desses últimos anos: meus irmãos Rafael e Thalita, meu cunhado André, meu pai Fernando, meu tio Celso, Edriana e meus queridos sobrinhos Bernardo, Tomás, Nina e Bento.

Um agradecimento mais do que especial vai à minha namorada Hannah. Sem ela eu não teria sequer a metade do ímpeto e satisfação que nos meus dias. Muito obrigado por tudo.

Resumo

Nesta dissertação, expomos em detalhes a prova da continuidade da transição de fase para o Modelo de Ising de primeiros vizinhos em dimensão $d \geq 3$. Seguimos a demonstração apresentada em [ADCS15].

Com o objetivo de manter o texto autocontido, provamos as propriedades mais básicas do Modelo de Ising a volume finito. Em seguida, construímos o modelo a volume infinito e caracterizamos exatamente para quais pontos do semiplano $\beta \times h$ existe transição de fase. Por fim, estudamos minuciosamente a magnetização espontânea à temperatura crítica com o auxílio da representação por correntes aleatórias.

Este texto não apresenta contribuições originais, porém, expõe detalhadamente as demonstrações dos resultados aqui apresentados.

Palavras-chave: Modelo de Ising, Transição de fase, Continuidade da transição de fase, *Sharpness* da transição de fase, Plano de Fase, Representação por correntes aleatórias.

Abstract

In this Master dissertation, we present in detail the proof of the continuity of the phase transition for the Ising Model with nearest neighbors interaction on dimension $d \geq 3$. We follow the proof given in [ADCS15].

With the objective of keeping this text self-contained, we prove the very basic properties of the Ising Model on a finite volume. Then, we construct the model in a infinite volume and characterize exactly in what points of the semi-plane $\beta \times h$ it exhibits a phase transition. Finally, we study meticulously the spontaneous magnetization at the critical temperature with the assistance of the random-current representation.

This text does not present any original results, nevertheless, we give detailed proofs of the subject discussed here.

Keywords: Ising Model, Phase transition, Continuity of the phase transition, Sharpness of the phase transition, Random-Current Representation.

Sumário

Introdução	1
1 O Modelo de Ising	7
1.1 Definição do modelo a volume finito	7
1.2 Polinômios e Correntes Aleatórias	12
1.3 As desigualdades de correlação	24
1.3.1 Consequências das desigualdades de correlação	39
1.4 O Limite Termodinâmico	44
1.5 As medidas no volume infinito	60
2 O problema da existência de transição de fase	69
2.1 Equivalências de transição de fase	70
2.2 Não unicidade em baixas temperaturas: o Argumento de Peierls	76
2.3 A unicidade em altas temperaturas: Expansão em Polímeros	83
2.4 A unicidade sob campo magnético: Análise Convexa	88
2.5 Uma convergência importante	89
3 A transição de fase é <i>sharp</i>	93
3.1 Teorema Principal	95
3.2 Prova do Item 1.	96
3.3 Representação por Espinhas Dorsais	106
3.4 Prova dos Itens 2. e 3.	115
4 Continuidade da transição de fase: as Correntes Aleatórias a volume infinito	119
4.1 Correntes aleatórias a volume infinito	121
4.2 Uma condição suficiente para a continuidade da transição de fase	135
4.3 A cota infravermelha	140
4.4 A prova da Continuidade da Transição de Fase	161

5	Considerações finais	165
Apêndice A	Definições elementares de Teoria de Grafos	169
	Referências Bibliográficas	171
	Lista de símbolos e abreviações	176
	Índice Remissivo	177

Introdução

Mecânica Estatística é uma área da Física Matemática que usa ferramentas probabilísticas para estudar situações nas quais fenômenos clássicos (não quânticos, e, portanto, determinísticos) não podem ser estudados diretamente. A necessidade de introduzir aleatoriedade neste estudo decorre da ordem de grandeza do número de partículas envolvidas. Ao estudar, por exemplo, as propriedades magnéticas de uma liga metálica, devemos considerar que a magnetização da liga é a soma das magnetizações de cada uma de suas partículas. Porém, o problema é que uma única liga metálica é constituída por algo na ordem de grandeza de 10^{22} átomos. Conseqüentemente, a tentativa de prever como cada um desses átomos se comporta, torna-se impraticável. Sendo assim, escolhemos medidas de probabilidade que atribuam grande probabilidade aos resultados fisicamente esperados e uma baixa probabilidade (ou, até mesmo, nula) aos resultados que não se comportem conforme os princípios físicos em questão. Discutiremos, a seguir, o que isso significa.

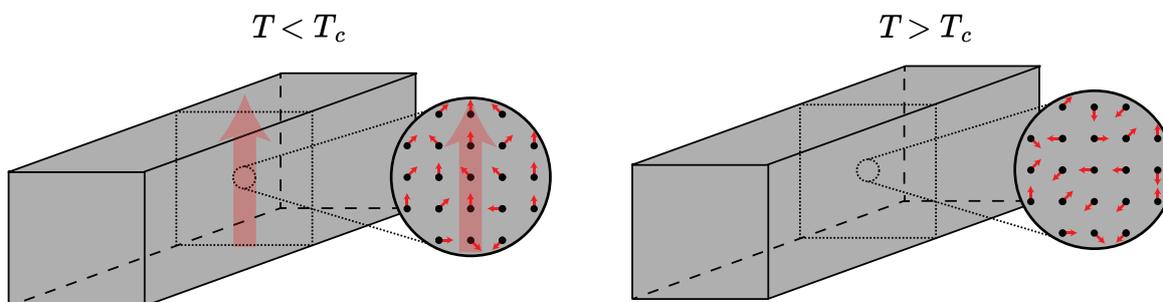


Figura 1: Representação da magnetização de uma liga metálica como soma das magnetizações de seus átomos. À esquerda, em baixas temperaturas, a interação dos átomos faz com elas fiquem alinhadas e, portanto, a liga apresenta magnetização. À direita, em altas temperaturas, a interação dos átomos não é o suficiente para garantir alinhamento e, conseqüentemente, a liga não apresenta magnetização.

Cabe enfatizar que estamos lidando com Mecânica Estatística de Equilíbrio, isto é, deixamos o sistema evoluir por tempo suficientemente longo, de modo, que este sistema encontre um equilíbrio e suas propriedades não se alterem em função do tempo. Um fator importante é que um sistema isolado e em equilíbrio é fundamentalmente descrito por algumas quanti-

dades macroscópicas, que, no nosso caso, serão a **temperatura** T e a **intensidade do campo magnético** h . Isto é, duas barras metálicas que alcancem equilíbrio termodinâmico e que possuam a mesma temperatura e estejam sujeitas ao mesmo campo magnético comportam-se, de maneira quase idêntica, mesmo quando as estudamos em um nível microscópico.

Especificamente, estudaremos, sob o ponto de vista da Mecânica Estatística, a **transição de fase** que ocorre com certos materiais ferromagnéticos. Um fenômeno conhecido é que, ao elevar a temperatura de um ímã, este eventualmente perderá todas as suas propriedades magnéticas. Em particular, dado certo ímã, existe uma temperatura crítica T_c , por vezes referida como **Temperatura de Curie**, sob a qual o ímã apresenta propriedade magnética para toda a temperatura $T < T_c$ e perde seu magnetismo para $T > T_c$. O sistema, então, sofre uma mudança abrupta em seu comportamento entre as fases $T < T_c$ e $T > T_c$. Por sua vez, se este mesmo sistema está submetido a um campo magnético não nulo $h \neq 0$, o sistema sempre apresentará magnetismo, por mais alta que seja a temperatura. Por fim, resta descobrir o que acontece exatamente quando $T = T_c$. O entendimento matemático e rigoroso das situações anteriores é o objetivo desta dissertação.

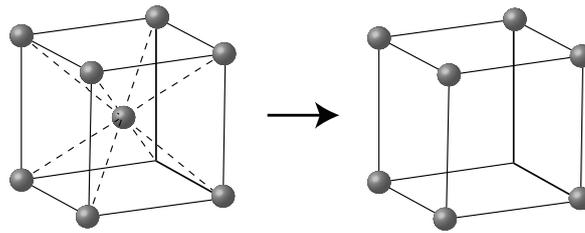


Figura 2: Simplificação sobre a disposição espacial dos átomos.

Para atingirmos esse objetivo, tentaremos descrever um modelo que aproxime de modo simplificado o comportamento de ferromagnetos. A primeira simplificação a ser feita é assumir que o metal o qual estamos modelando apresenta uma estrutura cristalina cúbica. Isto é, assumiremos que seus átomos são dispostos formando cubos no espaço. Tal simplificação não é distante da realidade, uma vez que, por exemplo, uma liga de ferro (Fe) apresenta uma estrutura muito similar, como pode ser visto no lado esquerdo da Figura 1. Com interesse estritamente matemático, podemos estender essa estrutura para qualquer dimensão $d \geq 1$. Dessa forma, assumiremos que os átomos (os quais, daqui por diante, serão referidos como partículas) serão identificados com elementos em \mathbb{Z}^d , o qual equiparemos com uma estrutura de grafo. Vale notar que muitos dos resultados que provaremos aqui são válidos para grafos mais gerais, como por exemplo nos artigos [HSS00, JS99, Lyo89].

Uma vez definidas a estrutura espacial do modelo a ser estudado, resta definir o que ocorre em cada elemento de \mathbb{Z}^d . Assim, como discutido anteriormente, a magnetização de uma liga metálica é dada como a soma das magnetizações de suas partículas. A magnetização

aqui referida é a direção para a qual o seu polo norte aponta e, portanto, é descrita por um vetor em três dimensões. Neste momento, adotamos a segunda simplificação do modelo, ao assumirmos que cada partícula só pode ter seu polo norte apontado para "cima" ou para "baixo". Para dar um caráter matemático, faremos a seguinte identificação: se o polo norte de uma determinada partícula está apontado para cima, diremos que seu *spin* é $+1$; caso contrário, diremos que seu *spin* será definido como -1 . Essa simplificação é mostrada na Figura 3.

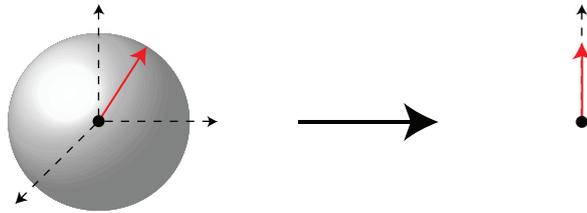


Figura 3: Simplificação sobre as possibilidades de posições do polo norte.

Como referido, em Mecânica Estatística, abordamos os estados de equilíbrio a partir das medidas de probabilidade. Dessa forma, precisamos escolher uma medida de probabilidade a ser utilizada. Vamos supor, por um instante, que temos um número N finito de estados aos quais atribuiremos probabilidade positiva. Se não tivéssemos informação alguma do modelo, simplesmente supomos que todos possuem probabilidade igual, isto é, $p(\sigma) = 1/N$ para todo σ .

Vale introduzir, brevemente, o conceito de entropia de uma medida de probabilidade, que servirá apenas para motivar essa discussão inicial. Se μ é uma medida de probabilidade no espaço $\Omega := \{\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(N)}\}$, definimos a entropia de μ como

$$h(\mu) := \sum_{k=1}^N -\mu(\sigma^{(k)}) \cdot \log(\mu(\sigma^{(k)})),$$

onde $0 \cdot \log 0 := 0$. A entropia, grosseiramente, mede o quão concentrada uma medida de probabilidade está. Isto é, se existe k' tal que $\mu(\sigma^{(k')}) = 1$, então $h(\mu) = 0$. Por sua vez, se μ é uma distribuição uniforme em $\{\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(N)}\}$, então sua entropia atinge o supremo da entropia entre todas as medidas de probabilidade em Ω . Então, reescrevendo uma afirmação do parágrafo anterior, se não tivéssemos informação alguma do modelo, escolheríamos a medida de probabilidade com maior entropia.

Por outro lado, do ponto de vista da Física, introduzimos uma função $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ chamada **função energia**, que mede justamente a energia em cada elemento de σ . A natureza tende a minimizar a energia. Portanto, os elementos mais prováveis, são aqueles que apresentam a menor energia possível. Dessa forma, gostaríamos que μ atribuísse uma baixa

probabilidade a elementos com uma grande energia. Um modo de conseguir tal feito, é procurar μ tal que $\int_{\Omega} -U d\mu$ seja a maior possível.

Para satisfazer, simultaneamente, as considerações dos dois últimos parágrafos, escolheremos uma medida que atinja o seguinte supremo

$$\sup_{\mu} \left\{ h(\mu) + \int_{\Omega} -U d\mu \right\}, \quad (1)$$

onde o supremo é calculado sobre todas as medidas de probabilidade sobre Ω . O problema de encontrar medidas que satisfaçam tal supremo, denominado **Problema Variacional**, é estudado em cenários bem mais complexos do que Ω finito (como pode ser visto em [BC75]), porém, este caso será o suficiente para nós.

Em nosso caso, toda medida de probabilidade em Ω pode ser identificada com um vetor em $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^N$ tal que $p_i \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, N$ e $p_1 + \dots + p_N = 1$. Portanto, podemos aplicar o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange para mostrar que o supremo é atingido quando

$$p_i = \mu(\sigma^{(i)}) = \frac{e^{-U(\sigma^{(i)})}}{\sum_{\sigma' \in \Omega} e^{-U(\sigma')}}. \quad (2)$$

A última simplificação do modelo é a escolha da função de energia, que será dada como $U = \beta H_{\Lambda, J, h}$, onde $\beta = \frac{1}{T}$, conforme será apresentado no Capítulo 1. A função de energia que escolhermos só leva em consideração a interação individual entre pares de *spins*.

O leitor pode pensar que o número de simplificações que fizemos pode gerar grande distância entre os fenômenos aqui estudados e a realidade. Porém, o Modelo de Ising, apesar da sua simplicidade, ajusta-se suficientemente bem à realidade. Esse modelo abriu o caminho para diversas técnicas em Mecânica Estatística e serve como base para outros modelos, onde a estrutura espacial, os possíveis valores para os *spins* e a função de energia são muito mais gerais.

Por fim, lembramos do fenômeno denominado transição de fase, que, em simples palavras, é a mudança abrupta do comportamento do modelo em relação a pequenas variações dos parâmetros β, h . O problema é que a medida de probabilidade definida por (2) é uma função C^∞ das variáveis β e h . Logo, suas variações em função dos parâmetros sempre serão suaves. Para fazer com que o modelo apresente uma transição de fase, precisaremos calcular o limite quando o número de partículas vai para infinito.

Restam algumas observações sobre esta dissertação. A primeira é, como o leitor notará, que a maior parte das funções as quais estudaremos depende de uma grande quantidade de parâmetros. Portanto, sempre que for possível omitir um desses parâmetros sem causar

alguma ambiguidade, assim o faremos. Destacamos que proposições, teoremas, corolários e lemas são enumerados consecutivamente; porém, definições, exemplos e observações são enumerados independentemente. Isto é, o leitor poderá encontrar a seguinte ordem no texto:

Teorema 0.1.

Proposição 0.2.

Definição 0.1.

Lema 0.3.

Observação 0.1.

Apesar de tentarmos manter esta dissertação autocontida, assumimos que o leitor possui conhecimentos básicos em Teoria de Grafos, um primeiro curso em Teoria de Probabilidade (com Teoria da Medida) e um primeiro curso em Análise Funcional. Essa escolha é para evitar que este texto se torne demasiadamente longo.

Finalmente, a Mecânica Estatística é uma área recente e cuja pesquisa é muito ativa. Em particular, os Capítulos 3 e 4 são baseados em artigos publicados a menos de dois anos da data de conclusão desta dissertação. Nosso propósito é introduzir todo o conhecimento básico do Modelo de Ising nos primeiros Capítulos 1 e 2, com suficiente generalidade para que seja interessante àqueles que já possuem um primeiro curso na área. Em seguida, nos capítulos finais, nós nos limitaremos a hipóteses mais restritivas, para facilitar a demonstração dos teoremas desejados, de maneira a permitir que esses resultados sejam acessíveis aos não especialistas. Ao ler esses capítulos e, com um pouco de esforço adicional, o leitor será capaz de ler os artigos originais e compreender seus resultados na íntegra.

Capítulo 1

O Modelo de Ising

Neste capítulo, construiremos em detalhes o Modelo de Ising, provando suas propriedades básicas e as suas questões mais importantes de convergência. Um leitor que já estiver familiarizado com o Modelo de Ising para primeiros vizinhos, pode achar interessante a leitura do capítulo para ver as demonstrações básicas para interações mais gerais. O leitor que por sua vez já está familiarizado com essa generalidade, pode se sentir mais a vontade em simplesmente pulando a leitura deste capítulo, vale notar porém, que a Seção 1.2 se refere a chamada Representação por Correntes Aleatórias, que não é apresentada no curso padrão do Modelo de Ising, mas que será umas das ferramentas principais nos capítulos finais desta dissertação.

A estrutura deste capítulo é dada da seguinte forma: primeiro, formalizaremos a definição do Modelo de Ising em um número finito de partículas; em seguida, estudaremos suas propriedades básicas, provando as chamadas desigualdades de correlação e suas consequências, que nos permitem caracterizar melhor o comportamento para um volume finito; e, por fim, caracterizaremos o a extensão do Modelo de Ising para todo \mathbb{Z}^d e assim definiremos de modo preciso o que é transição de fase.

1.1 Definição do modelo a volume finito

O Modelo de Ising é definido sobre o denominado Espaço de Configurações que, em nosso caso, será dado por $\Omega := \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$, $d \geq 1$. Esse espaço representa cada possível configuração de orientações (positiva ou negativa) dos *spins* posicionados nos pontos de \mathbb{Z}^d .

Para o estudo de convergências nesse espaço, consideremos a função

$$d : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\sigma, \omega) \longmapsto \inf \left\{ \frac{1}{2I} : \sigma_x = \omega_x, \forall x \in \mathbb{Z}^d, \|x\|_1 \leq I \right\}.$$

É fácil verificar que (Ω, d) é, de fato, um espaço métrico. A partir dessa métrica, definimos \mathcal{F} a σ -álgebra de Borel em Ω , isto é, a σ -álgebra gerada pelos cilindros quando consideramos Ω como um produto cartesiano.

Nosso objetivo é estudar o Modelo de Ising sobre o espaço Ω . Para isso, existem duas abordagens padrão. A primeira é conhecida como "Formalismo DLR" que não será explorada nesta dissertação. A segunda, denominada **Limite Termodinâmico** que, por questão de simplicidade, foi escolhida como abordagem para este texto, consiste em construir o Modelo de Ising com *spins* posicionados em um subconjunto finito Λ de \mathbb{Z}^d , e em estudar os limites quando fazemos " $\Lambda \longrightarrow \mathbb{Z}^d$ ", essa noção de limite será propriamente definida na Seção 1.4.

O Modelo de Ising depende de diversos parâmetros que possuem suas interpretações físicas. Consideremos $h \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{J} = (J_{x,y})_{x,y \in \mathbb{Z}^d}$ tal que $J_{x,x} = 0, \forall x \in \mathbb{Z}^d$. O parâmetro h representa o campo magnético sob o qual o ferromagneto está submetido, e os elementos da coleção \mathbf{J} , as constantes de acoplamento, isto é, cada $J_{x,y}$ modela a intensidade de influência gerada entre o par de *spins* em x e em y .

Como mencionado acima, vamos definir inicialmente o modelo de Ising em um subconjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito. O espaço das configurações no volume Λ com condição de fronteira livre é definido como sendo o seguinte produto cartesiano

$$\Omega_\Lambda^0 := \{-1, +1\}^\Lambda.$$

Considere, então, o espaço mensurável $(\Omega_\Lambda^0, \mathcal{F}_\Lambda^0)$, onde \mathcal{F}_Λ^0 é a σ -álgebra das partes. Para possibilitar uma abordagem geométrica, vamos equipar Λ com uma estrutura de grafo. Para isso, considere o grafo $(V(\Lambda), E(\Lambda))$ dado por $V(\Lambda) := \Lambda$ e com as arestas induzidas pela coleção \mathbf{J} , isto é, $E = E(\Lambda) := \{\{x, y\} \subset \Lambda : J_{x,y} > 0\}$. Da mesma forma, seja $E(\mathbb{Z}^d) := \{\{x, y\} \subset \mathbb{Z}^d : J_{x,y} > 0\}$.

Denotamos por $\mathbb{1}[\cdot]$ a função indicadora, isso é, $\mathbb{1}[\cdot]$ é igual a 1, se a condição entre colchetes é atingida, e 0, caso contrário. Por vezes, denotaremos $\mathbb{1}_{[\cdot]}$ ao invés de $\mathbb{1}[\cdot]$.

Dessa forma, considere o exemplo com os seguintes valores $d = 2$, $\Lambda = [0, 5]^2 \cap \mathbb{Z}^2$, $J > 0$ e $J_{x,y} = J \mathbb{1}[|x - y|_1 = 1]$, teremos o grafo apresentado na figura 1.1.

Seja $\sigma' = (\sigma'_y)_{y \in \Lambda} \in \Omega_\Lambda$, definimos a variável aleatória da projeção no sítio x , dada por $\sigma_x(\sigma') = \sigma'_x$. No estudo de Mecânica Estatística, é usual denotar σ_x como variável aleatória

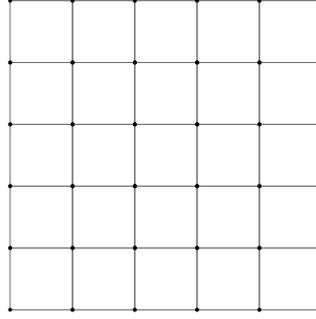


Figura 1.1: O Grafo dado pela coleção $\mathbf{J} = \left\{ J_{x,y} = J \mathbb{1}_{[|x-y|=1]} \right\}_{x,y}$

e, também, como projeção nas coordenadas dos elementos do espaço amostral. Apesar de gerar ambiguidades será sempre claro pelo contexto qual é a interpretação correta. Com isto é possível reduzir consideravelmente a pesada notação da área.

Considere o **Hamiltoniano com condição de fronteira livre**

$$H_{\Lambda,h}^0(\sigma) := - \sum_{\{x,y\} \in E(\Lambda)} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y - h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x. \quad (1.1)$$

Em geral, omitimos a dependência em \mathbf{J} , a menos em casos de possível ambiguidade.

Sob o prisma da Física, o Hamiltoniano representa a energia total do sistema físico associado ao nosso modelo no volume Λ . A partir de (1.1), temos que a coleção \mathbf{J} nos fornece a informação de como a "interação" entre pares de *spins* será contabilizada no cálculo da energia total. Agora, enfrentamos um problema comum em qualquer processo de modelagem: a escolha da complexidade do modelo. Um modelo mais complexo tende a ser uma representação mais realística do fenômeno estudado. Por outro lado, ao considerar um modelo mais complexo podemos ficar incapacitados de provar qualquer resultado interessante. No modelo de Ising, em geral, assumimos que \mathbf{J} é admissível, isto é, \mathbf{J} satisfaz as seguintes condições:

J1 Invariância por translação: $J_{x,y} = J(\|x-y\|_1), \forall x, y \in \mathbb{Z}^d$;

J2 Ferromagnetismo: $J_{x,y} \geq 0, \forall x \in \mathbb{Z}^d$;

J3 Interação regular: $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} J_{0,x} < \infty$;

J4 Interação aperiódica: $\forall x \in \mathbb{Z}^d$; existem $0 = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x$ tais que $J_{x_0,x_1} J_{x_1,x_2} \dots J_{x_{n-1},x_n} > 0$.

Nos próximos capítulos, nosso estudo ficará restrito ao caso em que $J_{x,y} = J \mathbb{1}_{[|x-y|_1=1]}$, onde $J > 0$, chamado **Modelo de Ising de primeiros vizinhos**. Nessas condições, o Ha-

miltoniano contabilizará apenas a interação entre vértices com distância 1. Em particular, nosso objetivo é tratar dos resultados recentes no caso $d = 3$, por ser evidentemente o caso de maior apelo físico.

Apesar de parecer desnecessária a introdução de tamanha generalidade de parâmetros, precisaremos da liberdade de adaptá-los de acordo com a situação de cada resultado. Dessa forma, evitamos a necessidade de redefinir o modelo a cada vez que fizermos um argumento de comparação.

Seja $\beta > 0$ (que é interpretado como o inverso da temperatura do sistema), usaremos a expressão (1.1) para definir para toda função $f : \Omega_\Lambda^0 \rightarrow \mathbb{R}$ a seguinte quantidade **medida de Gibbs do Modelo de Ising a volume Λ com condição de fronteira livre**

$$\langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0 := \frac{\sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda^0} f(\sigma) e^{-\beta H_{\Lambda, h}^0(\sigma)}}{Z_{\Lambda, \beta, h}^0}, \quad (1.2)$$

onde

$$Z_{\Lambda, \beta, h}^0 := \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda^0} e^{-\beta H_{\Lambda, h}^0(\sigma)}$$

é a chamada **função de partição**, que serve como uma constante de normalização, para que a expressão (1.2) defina uma medida de probabilidade $\mu_{\Lambda, \beta, h}^0$, dada por

$$\mu_{\Lambda, \beta, h}^0(E) := \langle \mathbb{1}_E \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0, \forall E \in \mathcal{F}_\Lambda^0.$$

A função de partição não é uma mera constante sem significado. À medida que estendemos o modelo ao volume \mathbb{Z}^d , diversas propriedades importantes são codificadas em termos de propriedades dessa função.

Note que, se \mathbf{J} é admissível e $h = 0$, o sistema apresentará menos energia quando todos os *spins* σ_x possuírem a mesma orientação (sinal). Logo, temos que as configurações $+$:= $(+1)_{x \in \Lambda}$ e $-$:= $(-1)_{x \in \Lambda}$ são aquelas que apresentam a menor quantidade de energia. Para $h > 0$ (para $h < 0$), temos que o sistema apresentará menos energia apenas na configuração $+$ (configuração $-$). Consequentemente, por (1.2), teremos de acordo com a medida $\mu_{\Lambda, \beta, 0}^0$ que os eventos $\{+\}, \{-\} \in \mathcal{F}_\Lambda^0$ possuem probabilidade maior do que quaisquer outros eventos unitários $\{\sigma\}$, onde $\sigma \in \Omega_\Lambda^0$.

Para o Hamiltoniano com condição de fronteira livre, temos que as únicas parcelas da energia total são dadas pela interação entre os elementos de Λ e as interações dos elementos Λ com o campo h . De modo similar, podemos montar um sistema ligeiramente mais complexo

no qual levamos em consideração a interação entre os elementos de Λ e os elementos no exterior de Λ .

Seja $\tau \in \Omega$, e $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito, considere o espaço

$$\Omega_\Lambda^\tau := \{\sigma \in \Omega : \sigma_y = \tau_y, \forall y \notin \Lambda\},$$

que é o espaço das configurações no volume Λ com condição de fronteira τ . Considere \mathcal{F}_Λ^τ a σ -álgebra das partes em Ω_Λ^τ . Para cada elemento $\sigma \in \Omega_\Lambda^\tau$, definimos o **Hamiltoniano com condição de fronteira τ**

$$\begin{aligned} H_{\Lambda,h}^\tau(\sigma) &:= - \sum_{\{x,y\} \in E(\Lambda)} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y - h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x - \sum_{\substack{x \in \Lambda \\ y \notin \Lambda}} J_{x,y} \sigma_x \tau_y \\ &:= - \sum_{\{x,y\} \cap \Lambda \neq \emptyset} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y - h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Esse Hamiltoniano leva em conta as interações entre os *spins* dentro de Λ com os elementos fora de Λ , mas não considera a interação entre pares de *spins* fora de Λ . Analogamente às condições de fronteira livre, para qualquer função para $f : \Omega_\Lambda^\tau \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a **medida de Gibbs do Modelo de Ising a volume Λ com condição de fronteira τ** como

$$\langle f \rangle_{\Lambda,\beta,h}^\tau := \frac{\sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda^\tau} f(\sigma) e^{-\beta H_{\Lambda,h}^\tau(\sigma)}}{Z_{\Lambda,\beta,h}^\tau}, \quad (1.4)$$

onde

$$Z_{\Lambda,\beta,h}^\tau := \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda^\tau} e^{-\beta H_{\Lambda,h}^\tau(\sigma)},$$

e, por fim,

$$\mu_{\Lambda,\beta,h}^\tau(E) := \langle \mathbb{1}_E \rangle_{\Lambda,\beta,h}^\tau, \forall E \in \mathcal{F}_\Lambda^\tau.$$

Existem certas condições de fronteira particularmente importantes, como, por exemplo, as condições geradas pela configuração $+$ $:= (+1)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ e pela configuração $-$ $:= (-1)_{x \in \mathbb{Z}^d}$. A partir dessas duas, extrairemos resultados sobre todo conjunto $\{\langle \cdot \rangle_{\Lambda,\beta,h}^\tau\}_{\tau \in \mathbb{Z}^d}$.

Denotaremos por $\#$ uma **condição de fronteira em geral**, seja livre ou definida a partir de uma configuração $\tau \in \Omega$. Dessa maneira, $\# \in \{0\} \cup \{\tau : \tau \in \Omega\}$.

Como referido, nosso objetivo é estudar o comportamento das medidas $\mu_{\Lambda,\beta,h}^\#$ quando $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$. Dedicaremos as próximas duas seções a propriedades do modelo a volume finito.

1.2 Polinômios e Correntes Aleatórias

A habilidade de entender as propriedades de $\mu_{\Lambda, \beta, h}^{\#}(\cdot)$ está diretamente relacionada à capacidade de avaliar $\langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^{\#}$, onde $f : \Omega_{\Lambda} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, o que também é uma tarefa árdua. Portanto, assim como em \mathbb{R} , estudar f na classe dos polinômios é mais simples. Apesar disso, essa classe é suficientemente grande para que possamos aproximar qualquer função contínua por polinômios. Consequentemente, os resultados a respeito dos valores esperados de polinômios serão amplamente utilizados para entender melhor as propriedades de $\mu_{\Lambda, \beta, h}^{\#}(\cdot)$. Nesta seção, desenvolveremos parte da teoria necessária para avaliar o valor esperado de polinômios. Para cada subconjunto $A \subset \mathbb{Z}^d$ finito tal que $A \neq \emptyset$ definimos

$$\sigma_A := \prod_{x \in A} \sigma_x. \quad (1.5)$$

Em algumas situações, será conveniente considerar

$$\eta_A := \prod_{x \in A} \eta_x, \quad (1.6)$$

onde $\eta_x := \frac{1}{2}(1 + \sigma_x)$. Para $A = \emptyset$ definimos $\sigma_{\emptyset} := 1$ e $\eta_{\emptyset} := 1$. Além disso, definiremos o que é uma função local.

Definição 1.1. *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é uma função local se existe um subconjunto $A \subset \mathbb{Z}^d$ finito de modo que para todo $\sigma, \sigma' \in \Omega$ com $\sigma_x = \sigma'_x$ para todo $x \in A$, temos que $f(\sigma) = f(\sigma')$. O menor conjunto que satisfaz tal propriedade é denominado **suporte de f** e será denotado por $\text{supp } f$. Um evento \mathcal{A} é dito um evento local se sua função indicadora é uma função local e seu suporte $\text{supp } \mathcal{A}$ é definido como sendo $\text{supp } \mathbb{1}_{\mathcal{A}}$, onde $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ denota sua função indicadora.*

Intuitivamente, dizemos que f é local se ela depende apenas de um número finito de coordenadas, e o $\text{supp } f$ é exatamente o conjunto de coordenadas do qual a função depende. Se f é local e $\text{supp } f \subset \Lambda$, então podemos definir a função $f : \Omega_{\Lambda}^{\#} \rightarrow \mathbb{R}$, para qualquer $\#$. De fato, dado $\sigma \in \Omega_{\Lambda}^{\#}$ seja $\sigma' \in \Omega$ qualquer elemento tal que $\sigma_x = \sigma'_x$ para todo $x \in \Lambda$. A função $\sigma \mapsto f(\sigma) = f(\sigma')$ está bem definida, isto é, não depende da escolha de σ' . A seguir, classificaremos todas as funções locais.

Proposição 1.1. *Para cada função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{supp}(f) \subset \mathbb{Z}^d$ é finito, existem duas coleções de números reais $(\hat{f}_A)_{A \subset \text{supp}(f)}$ e $(\tilde{f}_A)_{A \subset \text{supp}(f)}$ tais que*

$$f = \sum_{A \subset \text{supp}(f)} \hat{f}_A \sigma_A, \quad f = \sum_{A \subset \text{supp}(f)} \tilde{f}_A \eta_A.$$

Demonstração. Para mostrar o resultado, precisamos provar a seguinte identidade: para qualquer par $\sigma, \sigma' \in \Omega$, temos que

$$2^{-|B|} \sum_{A \subset B} \sigma_A \sigma'_A = \mathbb{1}_{[\sigma_x = \sigma'_x, \forall x \in B]}. \quad (1.7)$$

A fim de provar essa igualdade, vamos separá-la em casos. Primeiro, suponha que $\sigma_x = \sigma'_x$, para todo $x \in B$, então evidentemente ambos os lados de (1.7) são iguais a 1. Agora suponha que existe $x \in B$ tal que $\sigma_x \neq \sigma'_x$, então

$$\begin{aligned} \sum_{A \subset B} \sigma_A \sigma'_A &= \sum_{A \subset B \setminus \{x\}} \left(\sigma_A \sigma'_A + \sigma_{A \cup \{x\}} \sigma'_{A \cup \{x\}} \right) \\ &= \sum_{A \subset B \setminus \{x\}} \left(\sigma_A \sigma'_A + \sigma_x \sigma'_x \sigma_A \sigma'_A \right) \\ &= \sum_{A \subset B \setminus \{x\}} \left((\sigma_A \sigma'_A (1 + \sigma_x \sigma'_x)) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como o lado direito da equação também é nulo, temos que a identidade é válida.

Agora, como f depende apenas de variáveis em $\text{supp}(f)$, podemos expressar unicamente f em função de coordenadas $\sigma \in \Omega_{\text{supp}(f)}^\#$, obtendo

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= \sum_{\sigma' \in \Omega_{\text{supp}(f)}^\#} f(\sigma') \mathbb{1}_{[\sigma_x = \sigma'_x, \forall x \in \text{supp}(f)]} \\ &= \sum_{\sigma' \in \Omega_{\text{supp}(f)}^\#} f(\sigma') \left(2^{-|\text{supp}(f)|} \sum_{A \subset \text{supp}(f)} \sigma_A \sigma'_A \right), \text{ por (1.7)} \\ &= \sum_{A \subset \text{supp}(f)} \left(2^{-|\text{supp}(f)|} \sum_{\sigma' \in \Omega_{\text{supp}(f)}^\#} \sigma'_A f(\sigma') \right) \sigma_A. \end{aligned}$$

Consequentemente, basta adotar $\hat{f}_A = 2^{-|\text{supp}(f)|} \sum_{\sigma' \in \Omega_{\text{supp}(f)}^\#} \sigma'_A f(\sigma')$.

Fazendo a mudança de variável $\sigma_A = \prod_{x \in A} (2\eta_x - 1)$, conseguimos os coeficientes \tilde{f}_A . \square

A Proposição 1.1 mostra que podemos calcular o valor esperado de funções a volume finito a partir do valores esperados dos σ_A 's. Para abordar esse problema, introduziremos novas ferramentas.

Nessa, assim como em muitas situações, é necessária a análise de outros modelos capazes de traduzir as propriedades do Modelo de Ising em termos geométricos ou combinatórios. A capacidade de introduzir tais representações, que, em geral, não são triviais, constitui uma abordagem versátil para os problemas de Mecânica Estatística.

Aqui, adotaremos a primeira representação alternativa do Modelo de Ising, conhecida como Representação por Correntes Aleatórias. Tal representação será utilizada para mostrar os principais resultados deste trabalho.

Com o intuito de introduzir o conceito de corrente aleatória, precisaremos fazer uma pequena simplificação no Modelo de Ising. Para tanto, introduzimos o **sítio fantasma** g , que terá o papel de uniformizar a natureza das parcelas do Hamiltoniano. Considere $g \notin \mathbb{Z}^d$, $\# \in \{0, +\}$ e, para $x \in \Lambda$,

$$J_{x,g} := \begin{cases} h + \sum_{y \notin \Lambda} J_{x,y}, & \text{se } \# = + \\ h, & \text{se } \# = 0, \end{cases}$$

e $J_{g,g} = 0$.

Com tais escolhas o Hamiltoniano $H_{\Lambda,h}^{\#}$ pode ser reescrito como

$$H_{\Lambda,h}^{\#}(\sigma) = - \sum_{\{x,y\} \in E(\Lambda^g)} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y, \quad (1.8)$$

onde $\sigma_g := 1$ e $\Lambda^g := \Lambda \cup \{g\}$ e $E(\Lambda^g) := \{\{x,y\} : x,y \in \Lambda^g \setminus \{g\}, J_{x,y} > 0\}$.

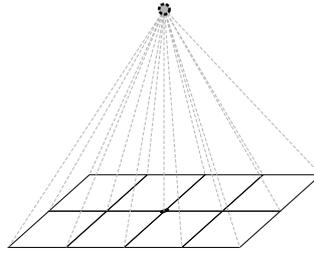


Figura 1.2: Uma representação do sítio fantasma g , para o caso $d = 2$.

Observe que, se $h = 0$ e $\# = 0$, temos que $J_{g,x} = 0$, para todo $x \in \Lambda$. Neste caso não é necessário fazer uso do sítio fantasma. Porém, a fim de uniformizar a notação nos resultados a seguir vamos trabalhar sempre em Λ^g . Agora, definiremos uma corrente aleatória.

Definição 1.2 (Corrente a volume finito). *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito, $h \geq 0, \# \in \{0, +\}$, $\mathbf{J} = \{J_{x,y}\}_{\{x,y\} \in E(\Lambda)}$. Uma função $\mathbf{n} : E(\Lambda^g) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ é chamada uma corrente a volume Λ^g . O conjunto $\partial \mathbf{n} = \{x \in \Lambda : \sum_{y \in \Lambda^g : y \neq x} \mathbf{n}_{x,y} \text{ é ímpar}\}$ é denominado o conjunto das*

fontes de \mathbf{n} . Para cada corrente \mathbf{n} definimos

$$w(\mathbf{n}) = w_{\Lambda}^{\#}(\mathbf{n}, \beta, h) = \prod_{\{x,y\} \in E(\Lambda^g)} \frac{(\beta J_{x,y})^{\mathbf{n}_{x,y}}}{\mathbf{n}_{x,y}!}, \quad (1.9)$$

onde adotamos a convenção $0^0 := 1$. Nesse contexto, $\mathcal{C}_{\Lambda^g}^{\#}$ denotará o conjunto de todas as correntes a volume Λ^g e a soma $\sum_{y \in \Lambda^g : y \neq x} \mathbf{n}_{x,y}$ é chamada de multigrau do vértice x na corrente \mathbf{n} .

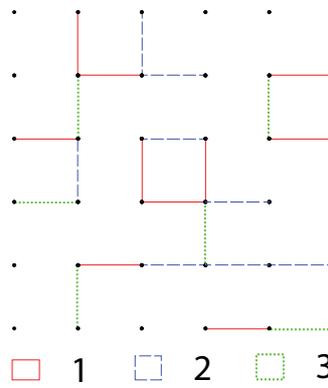


Figura 1.3: Uma corrente aleatória com os valores dados, conforme a legenda.

De ponto de vista mais geométrico, podemos considerar \mathbf{n} como multigrafos. De fato, uma corrente \mathbf{n} pode ser vista como conjunto de ciclos disjuntos e caminhos disjuntos (em arestas) e autoevitantes (também em arestas) conectando os elementos de multigrau ímpar. Por exemplo, na Figura 1.4 mostramos o multigrafo associado a \mathbf{n} e sua respectiva decomposição em ciclos e caminhos autoevitantes, onde \mathbf{n} é dada conforme a Figura 1.3.

Para formalizarmos o parágrafo acima, dizemos que $x, y \in \Lambda^g$ estão conectados através da corrente \mathbf{n} , se existe um caminho $\gamma = (\{x_1, y_1\}, \dots, \{x_m, y_m\})$, em Λ^g , de modo que todos $\mathbf{n}_{x_i, y_i} > 0$, para todo $i = 1, \dots, m$. Pelo Lema do Aperto de Mãos, qualquer elemento $x \in \partial \mathbf{n}$ sempre se conecta a outro elemento $z \in \Lambda^g$ de multigrau ímpar. Tal observação, apesar de trivial, é fundamental para as propriedades geométricas dessa representação.

Observação 1.1. *Observe que a frase anterior não é equivalente a "todo elemento de $\partial \mathbf{n}$ está conectado a outro elemento de $\partial \mathbf{n}$ ", uma vez que, por definição, $\partial \mathbf{n} \subset \Lambda$. O Lema do Aperto de Mãos faz com que a paridade de $|\partial \mathbf{n}|$ determine se o multigrau de g em \mathbf{n} é par ou ímpar. Portanto, não perdemos informação ao definirmos $\partial \mathbf{n}$ como um subconjunto de Λ . Pelo contrário, essa notação nos permite usar as correntes para expressar igualdades para o*

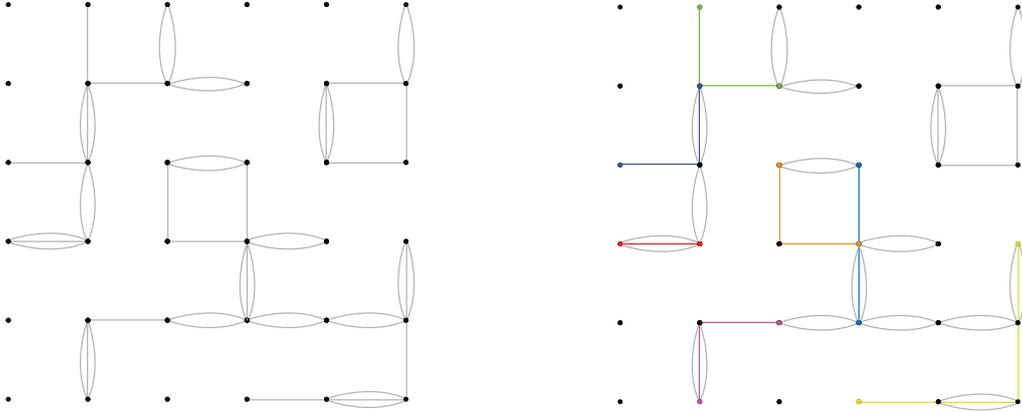


Figura 1.4: **À esquerda**, apresentamos o multigrafo associado a \mathbf{n} dada na Figura 1.3. **À direita**, colorimos os pares de fontes de \mathbf{n} e as arestas que formam o conjunto de caminhos disjuntos e autoevitantes de diferentes cores.

Modelo de Ising de modo versátil, removendo a necessidade de analisar a paridade de $|\partial\mathbf{n}|$ a cada linha de argumento. Porém, existem dois casos em que é conveniente considerar $g \in \partial\mathbf{n}$. O primeiro é quando estivermos interessados somente na natureza das correntes em geral, como um objeto combinatório, e não, em um argumento relacionado ao Modelo de Ising. O segundo é quando houver necessidade de enfatizar que o multigrafo de g é ímpar. Em ambos os casos, deixaremos explícita tal exceção.

Antes de apresentarmos o resultado central desta seção, precisamos introduzir mais uma notação. Para $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito, $\beta > 0$, $h \geq 0$ e $\# \in \{0, +\}$, denotamos

$$Z_{\Lambda}^{\#}(A, \beta, h) := \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^{\#}} \sigma_A e^{-\beta H_{\Lambda}^{\#}(\sigma)}. \quad (1.10)$$

Para facilitar a demonstração da Proposição 1.3, provaremos o seguinte lema técnico.

Lema 1.2. $\prod_{\{x,y\} \in E(\Lambda^g)} (\sigma_x \sigma_y)^{\mathbf{n}_{x,y}} = \prod_{x \in \Lambda^g} \sigma_x^{\sum_{y \neq x} \mathbf{n}_{x,y}}$

Demonstração. Denote $\Lambda^g = \{i_1, \dots, i_n\}$, faremos a prova por indução sobre n . No caso $n = 2$, a identidade em questão vale trivialmente pois

$$\prod_{\{x,y\} \in E(\Lambda^g)} (\sigma_x \sigma_y)^{\mathbf{n}_{x,y}} = (\sigma_{i_1} \sigma_{i_2})^{\mathbf{n}_{i_1,i_2}} = \sigma_{i_1}^{\mathbf{n}_{i_1,i_2}} \sigma_{i_2}^{\mathbf{n}_{i_2,i_1}}.$$

Suponha que a afirmação vale para todo conjunto de vértices $\Delta^g \subset \mathbb{Z}^d \cup \{g\}$ com n vértices. Seja Λ^g um subconjunto de $\mathbb{Z}^d \cup \{g\}$ possuindo $n + 1$ vértices. Então

$$\begin{aligned}
\prod_{\{x,y\} \in E(\Lambda^g)} (\sigma_x \sigma_y)^{\mathbf{n}_{x,y}} &= \prod_{\{i_{n+1}, y\} \in E(\Lambda^g)} (\sigma_{i_{n+1}} \sigma_y)^{\mathbf{n}_{i_{n+1}, y}} \prod_{\{x,y\} \in E(\Lambda^g \setminus \{i_{n+1}\})} (\sigma_x \sigma_y)^{\mathbf{n}_{x,y}} \\
&= \prod_{\{i_{n+1}, y\} \in E(\Lambda^g)} (\sigma_{i_{n+1}} \sigma_y)^{\mathbf{n}_{i_{n+1}, y}} \prod_{x \in \Lambda^g \setminus \{i_{n+1}\}} \sigma_x^{\sum_{y \neq x, i_{n+1}} \mathbf{n}_{x,y}} \\
&= \sigma_{i_{n+1}}^{\sum_{y \neq i_{n+1}} \mathbf{n}_{i_{n+1}, y}} \prod_{x \in \Lambda^g \setminus \{i_{n+1}\}} \sigma_x^{\sum_{y \neq x, i_{n+1}} \mathbf{n}_{x,y} + \mathbf{n}_{i_{n+1}, y}} \\
&= \prod_{x \in \Lambda^g} \sigma_x^{\sum_{y \neq x} \mathbf{n}_{x,y}},
\end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos a hipótese de indução. \square

Finalmente, segue o resultado que mostra a relação entre Correntes Aleatórias e o Modelo de Ising.

Proposição 1.3. *Para as condições de fronteira $\# \in \{0, +\}$ temos que*

$$Z_{\Lambda}^{\#}(A, \beta, h) = 2^{|\Lambda|} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda^g}^{\#} \\ \partial \mathbf{n} = A}} w(\mathbf{n}). \quad (1.11)$$

Demonstração. Podemos expressar

$$\exp\left(-\beta H_{\Lambda, \beta, h}^{\#}\right) = \exp\left(\beta \sum_{\{x,y\} \in E(\Lambda^g)} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y\right) = \prod_{\{x,y\} \in E(\Lambda^g)} e^{\beta J_{x,y} \sigma_x \sigma_y}.$$

Agora, expandindo o fator $e^{\beta J_{x,y} \sigma_x \sigma_y}$ em Taylor, temos que

$$e^{\beta J_{x,y} \sigma_x \sigma_y} = \sum_{\mathbf{n}_{x,y}=0}^{\infty} \frac{(\beta J_{x,y} \sigma_x \sigma_y)^{\mathbf{n}_{x,y}}}{\mathbf{n}_{x,y}!} = \sum_{\mathbf{n}_{x,y}=0}^{\infty} \frac{(\beta J_{x,y})^{\mathbf{n}_{x,y}}}{\mathbf{n}_{x,y}!} (\sigma_x \sigma_y)^{\mathbf{n}_{x,y}}.$$

Usando essa expansão, temos que

$$\begin{aligned}
Z_{\Lambda}^{\#}(A, \beta, h) &= \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^{\#}} \sigma_A \prod_{\{x,y\} \in E(\Lambda^g)} \sum_{\mathbf{n}_{x,y}=0}^{\infty} \frac{(\beta J_{x,y})^{\mathbf{n}_{x,y}}}{\mathbf{n}_{x,y}!} (\sigma_x \sigma_y)^{\mathbf{n}_{x,y}} \\
&= \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^{\#}} \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda^g}^{\#}} \sigma_A \left(\prod_{\{x,y\} \in E(\Lambda^g)} \frac{(\beta J_{x,y})^{\mathbf{n}_{x,y}}}{\mathbf{n}_{x,y}!} \right) \prod_{\{x,y\} \in E(\Lambda^g)} (\sigma_x \sigma_y)^{\mathbf{n}_{x,y}}.
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 1.2 acima e escrevendo $\sigma_A = \prod_{x \in \Lambda} \sigma_x^{\mathbb{1}_{[x \in A]}}$, obtemos

$$\begin{aligned} Z_{\Lambda}^{\#}(A, \beta, h) &= \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda^g}^{\#}} \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda^g}^{\#}} \left(\prod_{\{x,y\} \in E(\Lambda^g)} \frac{(\beta J_{x,y})^{\mathbf{n}_{x,y}}}{\mathbf{n}_{x,y}!} \right) \prod_{x \in \Lambda^g} \sigma_x^{\sum_{y \neq x} \mathbf{n}_{x,y} + \mathbb{1}_{[x \in A]}} \\ &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda^g}^{\#}} \left(\prod_{\{x,y\} \in E(\Lambda^g)} \frac{(\beta J_{x,y})^{\mathbf{n}_{x,y}}}{\mathbf{n}_{x,y}!} \right) \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^{\#}} \prod_{x \in \Lambda^g} \sigma_x^{\sum_{y \neq x} \mathbf{n}_{x,y} + \mathbb{1}_{[x \in A]}} \\ &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda^g}^{\#}} w(\mathbf{n}) \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda^g}^{\#}} \prod_{x \in \Lambda^g} \sigma_x^{\sum_{y \neq x} \mathbf{n}_{x,y} + \mathbb{1}_{[x \in A]}}. \end{aligned}$$

Finalmente, se para algum $z \in \Lambda^g$, tivermos que $\sum_{y \neq z} \mathbf{n}_{y,z} + \mathbb{1}_{[z \in A]}$ é um número ímpar, então

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda^g}^{\#}} \prod_{x \in \Lambda^g} \sigma_x^{\sum_{y \neq x} \mathbf{n}_{x,y} + \mathbb{1}_{[x \in A]}} &= \sum_{\sigma_z \in \{-1, +1\}} \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda^g \setminus \{z\}}^{\#}} \prod_{x \in \Lambda^g} \sigma_x^{\sum_{y \neq x} \mathbf{n}_{x,y} + \mathbb{1}_{[x \in A]}} \\ &= \sum_{\sigma_z \in \{-1, +1\}} \sigma_z^{\sum_{y \neq z} \mathbf{n}_{z,y} + \mathbb{1}_{[z \in A]}} \left(\sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda^g \setminus \{z\}}^{\#}} \prod_{x \in \Lambda^g \setminus \{z\}} \sigma_x^{\sum_{y \neq x} \mathbf{n}_{x,y} + \mathbb{1}_{[x \in A]}} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Porém, se $\sum_{y \neq x} \mathbf{n}_{x,y} + \mathbb{1}_{[x \in A]}$ é par, para todo $x \in \Lambda^g$, temos que essa é uma soma de $2^{|\Lambda|}$ termos iguais a 1 (pois podemos escolher $\sigma_x \in \{-1, 1\}$ para cada coordenada $x \in \Lambda$, mas σ_g é sempre igual a 1). Portanto, para qualquer parcela não nula, temos que $\sum_{y \neq x} \mathbf{n}_{x,y}$ é par para todo elemento de $\Lambda \setminus A$, e $\sum_{y \neq x} \mathbf{n}_{x,y}$ é ímpar para todo elemento de A e, conseqüentemente, obtemos a identidade

$$Z_{\Lambda}^{\#}(A, \beta, h) = 2^{|\Lambda|} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda^g}^{\#} \\ \partial \mathbf{n} = A}} w(\mathbf{n}).$$

conforme desejado. □

Observe que $Z_{\Lambda}^{\#}(\emptyset, \beta, h) = Z_{\Lambda}^{\#}(\beta, h)$, e, portanto, temos o seguinte corolário.

Corolário 1.4. *Sob as condições da Proposição 1.3, temos que*

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, h}^{\#} = \frac{Z_{\Lambda}^{\#}(A, \beta, h)}{Z_{\Lambda}^{\#}(\emptyset, \beta, h)} = \frac{\sum_{\partial \mathbf{n} = A} w(\mathbf{n})}{\sum_{\partial \mathbf{n} = \emptyset} w(\mathbf{n})}, \quad (1.12)$$

onde na segunda igualdade omitimos tanto no numerador quanto denominador que a soma é realizada sobre todas as correntes $\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda^g}^{\#}$.

Observação 1.2. *É importante que o leitor tenha em mente a Observação 1.1. Definimos $\partial\mathbf{n}$ como subconjunto de Λ exatamente para que não precisemos separar (1.12) em casos, de acordo com a paridade de $|A|$. Uma consequência imediata dessa observação é que*

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, 0}^0 = \frac{\sum_{\partial\mathbf{n}=A} w(\mathbf{n})}{\sum_{\partial\mathbf{n}=\emptyset} w(\mathbf{n})} = 0,$$

sempre que a cardinalidade de A for ímpar, uma vez que $J_{x,g} = 0$ para todo $x \in \Lambda$. Consequentemente, $\mathbf{n}_{x,g} = 0$ para toda corrente \mathbf{n} que satisfaça $w(\mathbf{n}) > 0$. Logo, g não pode se conectar a elementos de $\partial\mathbf{n}$ e, portanto, a soma do lado direito é nula.

A identidade (1.12) representa o principal motivo pelo qual o modelo de Correntes Aleatórias é relevante para o estudo do Modelo de Ising. De fato, o Corolário 1.4 vale para outros casos além de $\# \in \{0, +\}$, porém o objetivo é futuramente usar tal representação como uma distribuição de probabilidade, o que não pode ser feito se as parcelas da soma deixam de ser não negativas.

Agora, sabemos como podemos representar grandezas do Modelo de Ising por meio de correntes aleatórias, mas ainda não sabemos a vantagem de prosseguir desta maneira. Existem duas poderosas ferramentas que justificam a importância dessa representação. A primeira é o *Switching Lemma* (SL), que será apresentado a seguir e utilizado na próxima seção para provar duas **Desigualdades de Correlação** de maneira simplificada. Essas desigualdades são resultados fundamentais para o estudo do Modelo de Ising. A segunda técnica é a denominada **Condicionamento em Aglomerados**, porém só a utilizaremos no Capítulo 3.

É de grande interesse definir a ideia de conectividade por meio de uma corrente \mathbf{n} , que será necessária para descrever não somente o *Switching Lemma*, mas também para introduzir argumentos importantes para os próximos capítulos.

Definição 1.3 (Conexão por correntes). *Sejam $\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda^g}^\#$ uma corrente, e $x, y \in \Delta \subset \Lambda^g$. Dizemos que x está conectado a y em Δ se existe um caminho $\gamma = \{e_1, \dots, e_k\}$ no grafo $(\Delta, E(\Delta))$ que conecte x a y e satisfaça $\mathbf{n}_e > 0$ para toda aresta $e \in \gamma$. Para indicar este fato usaremos a notação $x \xleftrightarrow{\mathbf{n}} y$ em Δ . Dados $A, B \subset \Delta \subset \Lambda^g$, dizemos que $A \xleftrightarrow{\mathbf{n}} B$ em Λ se existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $x \xleftrightarrow{\mathbf{n}} y$ em Δ . Quando $\Delta = \Lambda$ usamos a notação $x \xleftrightarrow{\mathbf{n}} y$ (ou $A \xleftrightarrow{\mathbf{n}} B$).*

Intuitivamente, dizemos que $x \xleftrightarrow{\mathbf{n}} y$ em Δ se x está conectado a y no múltigrafo que \mathbf{n} induz em Δ .

Antes de demonstrar o *Switching Lemma* (Lema 1.6), provaremos o importante Lema 1.5, que captura a natureza combinatória do SL, mas que também será usado para demonstrar a Desigualdade GHS (Teorema 1.8).

Lema 1.5. *Sejam $\Lambda_2 \subset \mathbb{Z}^d \cup \{g\}$ finito e $A \subset \Lambda_2$ um subconjunto de cardinalidade par. Seja $\mathbf{m} \in \mathcal{C}_{\Lambda_2}^\#$ tal que $\partial\mathbf{m} = A \triangle B \subset \Lambda_2$ (possivelmente contendo g), onde \triangle denota a diferença simétrica. Então, para $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, temos que*

$$\sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda_1}^\# : \partial\mathbf{n} = A \\ \mathbf{n} \leq \mathbf{m}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} = I(\mathbf{m}, A, \Lambda_1) \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda_1}^\# : \partial\mathbf{n} = \emptyset \\ \mathbf{n} \leq \mathbf{m}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}, \quad (1.13)$$

onde adotamos as notações $\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} := \prod_{\{x,y\} \in E(\Lambda^g)} \binom{m_{x,y}}{n_{x,y}}$, $\mathbf{n} \leq \mathbf{m}$ denota que $n_{x,y} \leq m_{x,y}$ para todo $\{x,y\} \in E(\Lambda^g)$ e

$$I(\mathbf{m}, A, \Lambda_1) = \begin{cases} 1, & \text{se } \forall x \in A, \exists y \neq x \text{ tal que } x \overset{\mathbf{m}}{\longleftrightarrow} y \text{ em } \Lambda_1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso, em (1.13) $\partial\mathbf{n}$ pode conter g .

Demonstração. Separaremos a demonstração de (1.13) em dois casos. Primeiro, para o caso mais simples, suponha que $I(\mathbf{m}, A, \Lambda_1) = 0$, isso implica que o lado direito da equação (1.13) seja nulo. Para que o lado esquerdo de (1.13) seja não nulo, deveria existir $\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda_1}^\#$ tal que $\partial\mathbf{n} = A$, $\mathbf{n} \leq \mathbf{m}$. Já que $I(\mathbf{m}, A, \Lambda_1) = 0$, existe $x \in A$ que não se conecta a outra fonte de \mathbf{n} através de \mathbf{m} , mas isso implica que x também não se conecta a outra fonte de \mathbf{n} através de \mathbf{n} , o que pelo Teorema do Aperto de Mãos, é um absurdo. Logo, a soma da esquerda não possui parcelas, e, conseqüentemente, também é nula.

Para o segundo caso, onde $I(\mathbf{m}, A, \Lambda_1) = 1$, adotemos a seguinte estratégia: encontrar dois conjuntos distintos, cujas cardinalidades sejam, respectivamente, os valores dos lados direito e esquerdo de (1.13) e construir uma bijeção entre estes conjuntos.

Considere o multigrafo \mathcal{M} com o conjunto de vértices Λ_2 tal que para todo $x, y \in \Lambda_1$, existam $\mathbf{m}_{x,y}$ arestas entre x e y . Para um subgrafo \mathcal{N} de \mathcal{M} , denote por $\partial\mathcal{N}$ o conjunto de vértices de \mathcal{N} com um número ímpar de arestas. Como os elementos de A estão conectados em \mathbf{m} dois a dois, existe \mathcal{K} um subgrafo dado pela união de caminhos disjuntos (em arestas) tais que cada caminho conecta dois elementos de A .

Considere os conjuntos

$$\mathcal{K}_\emptyset = \{\mathcal{N} \text{ subgrafo de } \mathcal{M} : \partial\mathcal{N} = \emptyset\},$$

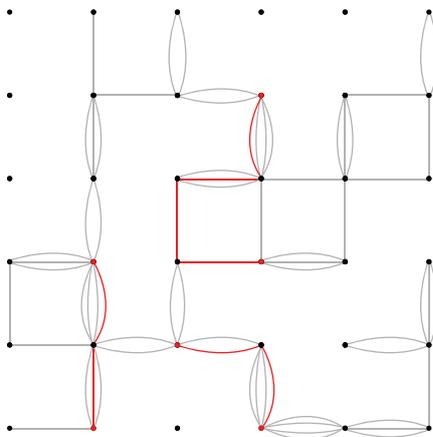


Figura 1.5: Considere \mathcal{M} dado por uma corrente \mathbf{m} , destacamos o conjunto A e as arestas de \mathcal{K} em vermelho.

$$\mathcal{K}_A = \{ \mathcal{N} \text{ subgrafo de } \mathcal{M} : \partial \mathcal{N} = A \}.$$

Defina a seguinte função $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ dada por $\phi(\mathcal{N}) = \mathcal{N} \triangle \mathcal{K}$. Note que $\phi^2(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$ para todo \mathcal{N} subgrafo de \mathcal{M} , e, conseqüentemente, ϕ é bijeção. Por sua vez, perceba que $\phi(\mathcal{K}_\emptyset) = \mathcal{K}_A$ e, portanto, $|\mathcal{K}_A| = |\mathcal{K}_\emptyset|$.

Resta mostrar que

$$|\mathcal{K}_A| = \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda_1}^\# : \partial \mathbf{n} = A \\ \mathbf{n} \leq \mathbf{m}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}, \quad |\mathcal{K}_\emptyset| = \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda_1}^\# : \partial \mathbf{n} = \emptyset \\ \mathbf{n} \leq \mathbf{m}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}.$$

Agora, seja $\mathcal{N} \in \mathcal{K}_A$, para cada par de vértices $x, y \in \mathcal{M}$ podemos associar um número $\mathbf{n}_{x,y}$ dado pelo número de arestas entre x e y . Observe que isso define uma corrente \mathbf{n} em Λ_1 , e, como $\partial \mathcal{N} = A$, temos que $\partial \mathbf{n} = A$. Por sua vez, como $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, obtemos $\mathbf{n} \leq \mathbf{m}$. Por fim, observamos que a aplicação $\mathcal{N} \mapsto \mathbf{n}$ é sobrejetiva sobre o conjunto $\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda_1}^\# : \partial \mathbf{n} = A, \mathbf{n} \leq \mathbf{m}$, mas não é injetiva. De fato, em \mathcal{M} , sabemos que existem $\mathbf{m}_{x,y}$ arestas entre os vértices $x, y \in \mathcal{M}$. Agora, restrito ao subgrafo \mathcal{N} com $\mathbf{n}_{x,y}$ arestas entre x e y , temos $\binom{\mathbf{m}_{x,y}}{\mathbf{n}_{x,y}}$ formas de escolher quais arestas de \mathcal{M} usaremos. Sendo assim, para cada \mathbf{n} , temos $\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$ subgrafos

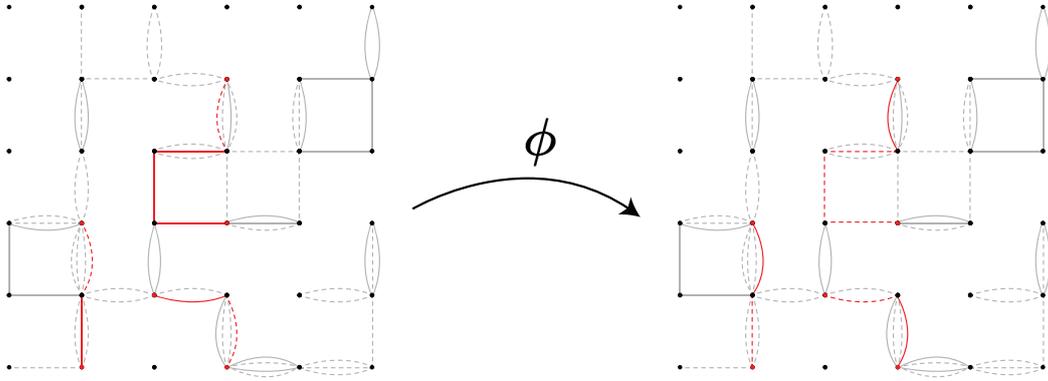


Figura 1.6: Aqui, aplicamos ϕ em $\mathcal{N} \in \mathcal{K}_A$, onde \mathcal{M} e \mathcal{K} são dados pela Figura 1.5. As arestas de \mathcal{M} são denotadas por linhas contínuas e pontilhadas para representar, respectivamente, se a aresta pertence ou não ao subgrafo.

de \mathcal{M} associados. Somando sobre o conjunto de todos os $\mathcal{N} \in \mathcal{K}_A$, temos que

$$|\mathcal{K}_A| = \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda_1}^{\#} : \partial \mathbf{n} = A \\ \mathbf{n} \leq \mathbf{m}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}.$$

De modo análogo, conseguimos o valor de \mathcal{K}_{\emptyset} . E, com isso, concluímos (1.13). \square

O Lema 1.5 foi originalmente provado em [GHS70] e revisitado em [Aiz82], de modo a chegar ao resultado que hoje conhecemos como *Switching Lemma*.

Lema 1.6 (Switching Lemma). *Sejam $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \mathbb{Z}^d \cup \{g\}$ finitos de modo que $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, sejam $A \subset \Lambda_1$, $B \subset \Lambda_2$ (possivelmente contendo g) e $F : \mathcal{C}_{\Lambda_2}^{\#} \rightarrow \mathbb{R}$, então vale a identidade*

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_1}^{\#} : \partial \mathbf{n}_1 = A \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_2}^{\#} : \partial \mathbf{n}_2 = B}} F(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) = \sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_1}^{\#} : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_2}^{\#} : \partial \mathbf{n}_2 = A \triangle B}} F(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) I(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2, A, \Lambda_1). \quad (\text{SL})$$

onde $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$ é definida aresta a aresta.

Antes da demonstração do Lema, daremos um argumento heurístico para a necessidade da função indicadora no lado direito da Equação (SL). Essa igualdade mostra que podemos "passar as fontes de uma corrente para a outra". Assim, alguém poderia imaginar que a equação poderia ser válida sem a função indicadora do lado direito. Porém, no lado esquerdo

da equação, se $x \in A \cap B$, implica que x é fonte de \mathbf{n}_1 , e, pelo Lema do Aperto de Mãos, temos que x está conectado, por \mathbf{n}_1 , a outra fonte y em Λ_1 , em particular, $x \xleftrightarrow{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2} y$, em Λ_1 . O que não necessariamente ocorre em cada uma das parcelas do lado direito. Logo, a função $I(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2, A, \Lambda_1)$ e o Lema 1.5 farão o papel de reparar essa "inconsistência".

Demonstração. Primeiro, podemos tratar \mathbf{n}_1 como uma corrente em Λ_2 , onde $(\mathbf{n}_1)_{x,y} = 0$, sempre que $\{x, y\}$ não esteja contido em Λ_1 . Isso não altera o conjunto de fontes de \mathbf{n}_1 . Para provar o lema, faremos uma mudança de variáveis $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$, $\mathbf{m} = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$. Dessa forma, $\mathbf{n} \leq \mathbf{m}$. Note que $\partial \mathbf{m} = A \triangle B$. De fato, basta analisar a paridade de $\sum_{y \neq x} (\mathbf{n}_1)_{x,y}$, $\sum_{y \neq x} (\mathbf{n}_2)_{x,y}$ nos casos $x \notin \partial \mathbf{n}_1 \cup \partial \mathbf{n}_2$, $x \in \partial \mathbf{n}_1 \triangle \partial \mathbf{n}_2$ e $x \in \partial \mathbf{n}_1 \cap \partial \mathbf{n}_2$. Desse modo, o lado direito da equação será igual a

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_1}^\# : \partial \mathbf{n}_1 = A \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_2}^\# : \partial \mathbf{n}_2 = B}} F(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) = \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_1}^\# : \partial \mathbf{n}_1 = A \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_2}^\# : \partial \mathbf{n}_2 = B}} F(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) \prod_{\{x,y\} \in E(\Lambda^g)} \frac{(\beta J_{x,y})^{\mathbf{n}_{1,x,y}}}{\mathbf{n}_{1,x,y}!} \prod_{\{x,y\} \in E(\Lambda^g)} \frac{(\beta J_{x,y})^{\mathbf{n}_{2,x,y}}}{\mathbf{n}_{2,x,y}!} \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_1}^\# : \partial \mathbf{n}_1 = A \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_2}^\# : \partial \mathbf{n}_2 = B}} F(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) \prod_{\{x,y\} \in E(\Lambda^g)} \frac{(\beta J_{x,y})^{\mathbf{n}_{1,x,y} + \mathbf{n}_{2,x,y}}}{\mathbf{n}_{1,x,y}! \mathbf{n}_{2,x,y}!} \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_1}^\# : \partial \mathbf{n}_1 = A \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_2}^\# : \partial \mathbf{n}_2 = B}} F(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) \prod_{\{x,y\} \in E(\Lambda^g)} \frac{(\beta J_{x,y})^{\mathbf{n}_{1,x,y} + \mathbf{n}_{2,x,y}}}{(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2)_{x,y}!} \binom{(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2)_{x,y}}{\mathbf{n}_{1,x,y}} \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_1}^\# : \partial \mathbf{n}_1 = A \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_2}^\# : \partial \mathbf{n}_2 = B}} F(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) \prod_{\{x,y\} \in E(\Lambda^g)} \frac{(\beta J_{x,y})^{\mathbf{n}_{1,x,y} + \mathbf{n}_{2,x,y}}}{(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2)_{x,y}!} \prod_{\{x,y\} \in E(\Lambda^g)} \binom{(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2)_{x,y}}{\mathbf{n}_{1,x,y}} \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_1}^\# : \partial \mathbf{n}_1 = A \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_2}^\# : \partial \mathbf{n}_2 = B}} F(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) w(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) \binom{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\mathbf{n}_1} \\
&= \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{C}_{\Lambda_2}^\# : \partial \mathbf{m} = A \triangle B} F(\mathbf{m}) w(\mathbf{m}) \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda_1}^\# : \partial \mathbf{n} = A \\ \mathbf{n} \leq \mathbf{m}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}.
\end{aligned}$$

Analogamente, temos que o lado direito da equação (SL), pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_1}^\# : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_2}^\# : \partial \mathbf{n}_2 = A \triangle B}} F(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) I(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2, A, \Lambda_1) \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathcal{C}_{\Lambda_2}^\# \\ \partial \mathbf{m} = A \triangle B}} F(\mathbf{m}) w(\mathbf{m}) I(\mathbf{m}, A, \Lambda_1) \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda_1}^\# : \partial \mathbf{n} = \emptyset \\ \mathbf{n} \leq \mathbf{m}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}. \end{aligned}$$

Com isso, temos que (SL) segue do Lema 1.5. \square

Então, podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# \rangle^2 & \stackrel{(\text{Corolário 1.4})}{=} \frac{\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = A \\ \partial \mathbf{n}_2 = A}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2)}{\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2)} \\ & \stackrel{(SL)}{=} \frac{\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) I(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2, A, \Lambda_1)}{\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2)} \end{aligned}$$

Portanto, podemos representar o quadrado do valor esperado de qualquer polinômio como a probabilidade de determinadas conexões pela corrente $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$. Isso motiva diversas técnicas que aparecem neste texto, sobretudo, no Capítulo 4

1.3 As desigualdades de correlação

Uma vez definidas as medidas a volume finito e estabelecida a Representação por Correntes Aleatórias, aplicaremos essa representação (e outras técnicas) para extrairmos propriedades a respeito do comportamento das medidas de Gibbs a volume finito. Nesta seção, provaremos quatro desigualdades extremamente úteis para o estudo do Modelo de Ising, conhecidas como **desigualdades de correlação**. Tais desigualdades não são exclusivas do Modelo de Ising. Na verdade, existe uma grande classe de modelos de Mecânica Estatística que satisfazem a chamada **Desigualdade FKG**. Existem outros modelos que satisfazem de-

sigualdades que não existem no Modelo de Ising, como, por exemplo, a **Desigualdade BK** presente no Modelo de Percolação de Bernoulli (veja [VDBK85]).

Como as demonstrações das Desigualdades FKG e GHS são extensas, elas podem ser omitidas em uma primeira leitura, mas recomendamos a leitura da demonstração das Desigualdades GKS. Na seção 1.3.1, faremos o uso extenso das desigualdades para caracterizarmos diversas propriedades do Modelo de Ising, que serão fundamentais no estudo do Limite Termodinâmico.

Em um estudo sistemático de Mecânica Estatística, dado um novo modelo, a existência e a caracterização de desigualdades é uma das primeiras informações a serem estudadas. A quantidade e a "qualidade" das desigualdades de correlação de um modelo podem ser o passo fundamental entre meramente sabermos definir o modelo e podermos estudar profundamente suas propriedades mais complexas.

Em seguida, provaremos as desigualdades (GKS-I) e (GKS-II), cujos nomes são referentes aos autores Griffiths, Kelly e Sherman. Essas desigualdades foram introduzidas nos artigos [Gri67a, Gri67b, Gri67c, KS68]

Teorema 1.7 (Desigualdades GKS). *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito, $\beta > 0, h \geq 0, \# \in \{0, +\}$ e \mathbf{J} admissível, temos que, para todo $A, B \subset \Lambda$, valem as seguintes desigualdades*

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, h}^{\#} \geq 0, \quad (\text{GKS-I})$$

$$\langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda, \beta, h}^{\#} \geq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, h}^{\#} \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda, \beta, h}^{\#} \quad (\text{GKS-II})$$

Demonstração. Pelo Corolário 1.4, temos que

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, h}^{\#} = \frac{\sum_{\partial \mathbf{n}=A} w(\mathbf{n})}{\sum_{\partial \mathbf{n}=\emptyset} w(\mathbf{n})},$$

como no lado direito da equação, o numerador é não negativo e o denominador é positivo, segue (GKS-I).

Agora, mostraremos (GKS-II). Tem-se que

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# &= \frac{\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = A \\ \partial \mathbf{n}_2 = B}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2)}{\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2)} \\
&\stackrel{(SL)}{=} \frac{\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = A \triangle B \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) I(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2, A, \Lambda_1)}{\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2)} \\
&\leq \frac{\sum_{\partial \mathbf{n}_1 = A \triangle B} w(\mathbf{n}_1) \sum_{\cancel{\partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_2)}{\sum_{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset} w(\mathbf{n}_1) \sum_{\cancel{\partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_2)} = \langle \sigma_{A \triangle B} \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# = \langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\#.
\end{aligned}$$

Na última igualdade, usamos a seguinte relação

$$\langle \sigma_{A \triangle B} \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# \langle \sigma_{A \setminus B} \sigma_{B \setminus A} \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# = \langle \sigma_{A \setminus B} (\sigma_{A \cap B})^2 \sigma_{B \setminus A} \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# = \langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\#.$$

□

Observação 1.3. Apesar de a demonstração das Desigualdades GKS ser uma simples consequência do *Switching Lemma*, suas demonstrações originais foram um grande marco na história da Mecânica Estatística. A possibilidade de fazer tamanha redução em sua demonstração mostra o quão poderosa é a representação por Correntes Aleatórias.

A seguir, demonstraremos da Desigualdade GHS (Griffiths, Hurst e Sherman) como no artigo [GHS70]. O objetivo principal é demonstrá-la em sua forma original, por seu caráter histórico, utilizando, porém, a notação atual de Correntes Aleatórias. Essa demonstração faz uso do Lema 1.5 em vez de *Switching Lemma*, dado que o SL não seria diretamente aplicável.

Teorema 1.8 (Desigualdade GHS). *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $\beta > 0$, $h \geq 0$, $\# \in \{0, +\}$ e \mathbf{J} admissível, para quaisquer $x, y, z \in \Lambda$, temos que*

$$\begin{aligned}
u_3(x, y, z) &:= \langle \sigma_x \sigma_y \sigma_z \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# - \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# \langle \sigma_y \sigma_z \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# - \langle \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# \langle \sigma_x \sigma_z \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# \\
&\quad - \langle \sigma_z \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# + 2 \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# \langle \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# \langle \sigma_z \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# \\
&\leq 0.
\end{aligned} \tag{GHS}$$

Apesar de sua extensão, temos que u_3 aparecerá, de modo natural, quando calcularmos a derivada segunda da função $h \mapsto \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\#$.

Voltamos a ressaltar que [GHS70] foi o primeiro artigo a considerar a representação por Correntes Aleatórias. No entanto, o termo "Corrente Aleatória" e a notação atual foram introduzidas posteriormente, em [Aiz82], onde a representação foi amplamente estudada.

Antes de demonstrar a Desigualdade GHS, precisamos provar um lema técnico sobre multigrafos.

Lema 1.9. *Seja \mathcal{M} um multigrafo (com arestas distinguíveis) e $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ subgrafos de \mathcal{M} com arestas disjuntas, e de modo que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$. Sejam $a, b \in V(\mathcal{M})$ com $a \neq b$, e $w \in V(\mathcal{M}_1)$. Defina*

$$C_w := \{\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{M}_2 : a \leftrightarrow w \text{ em } \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{H}_2\} \cup \{\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{M}_2 : b \leftrightarrow w \text{ em } \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{H}_2\},$$

isto é, o conjunto dos subgrafos de \mathcal{M}_2 que "completam" caminhos de \mathcal{M}_1 de modo que w conecte-se com a ou com b . Defina como no Lema 1.5 para $A \subset V(\mathcal{M}_2)$

$$\mathcal{H}_A(\mathcal{M}_2) := \{\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{M}_2 : \partial \mathcal{H}_2 = A\}.$$

Então, se $\mathcal{H}_{\{a,b\}}(\mathcal{M}_2) \neq \emptyset$, temos que

$$|\mathcal{H}_\emptyset(\mathcal{M}_2) \cap C_w| \leq |\mathcal{H}_{\{a,b\}}(\mathcal{M}_2) \cap C_w| \tag{1.14}$$

Demonstração do Lema. Primeiramente, simplicaremos o problema. Defina

$$D_w := \{\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{M}_2\} \setminus C_w,$$

temos que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{H}_\emptyset(\mathcal{M}_2) \cap C_w| + |\mathcal{H}_\emptyset(\mathcal{M}_2) \cap D_w| &= |\mathcal{H}_\emptyset(\mathcal{M}_2)| \\
&\stackrel{\text{(Lema 1.5)}}{=} |\mathcal{H}_{\{a,b\}}(\mathcal{M}_2)| = |\mathcal{H}_{\{a,b\}}(\mathcal{M}_2) \cap C_w| + |\mathcal{H}_{\{a,b\}}(\mathcal{M}_2) \cap D_w|.
\end{aligned}$$

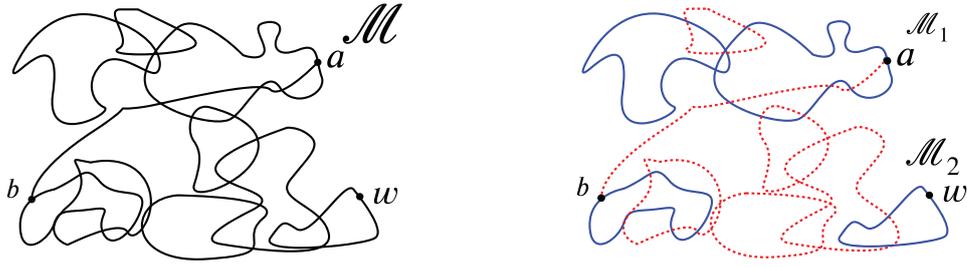


Figura 1.7: Um exemplo de grafo \mathcal{M} com partição $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$. Onde \mathcal{M}_1 está representado pela linha contínua azul e \mathcal{M}_2 , pela linha pontilhada vermelha.

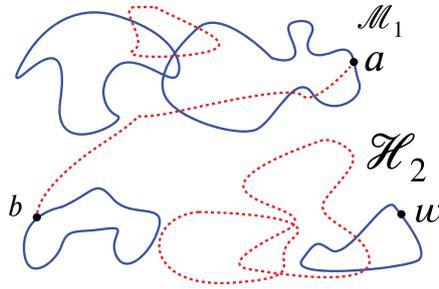


Figura 1.8: Um exemplo de $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{H}_2$, com $\mathcal{H}_2 \in D_w$, seguindo o exemplo da Figura 1.7. Onde \mathcal{M}_1 está representado pela linha contínua azul e \mathcal{H}_2 , pela linha pontilhada vermelha.

Portanto, para demonstrarmos o lema, basta mostrar que

$$|\mathcal{K}_{\{a,b\}}(\mathcal{M}_2) \cap D_w| \leq |\mathcal{K}_{\emptyset}(\mathcal{M}_2) \cap D_w|. \quad (1.15)$$

Agora, faremos uma partição conveniente do conjunto D_w e provaremos que a desigualdade acima vale para cada elemento dessa partição e, em seguida, somaremos sobre os elementos da partição. Para tanto, seja $\mathcal{H}_2 \in D_w$, seja \mathcal{O}_w a componente conexa de w em $\mathcal{H}_2 \cup \mathcal{M}_1$. Como $\mathcal{H}_2 \in D_w$, temos que a, b não pertencem a $V(\mathcal{O}_w)$. Defina

$$\bar{\mathcal{M}} = \{e \in E(\mathcal{M}) : e \cap \mathcal{O}_w = \emptyset\}.$$

Além disso, escreva $\bar{\mathcal{M}}_2 = \mathcal{M}_2 \cap \bar{\mathcal{M}}$. Nesse caso, podemos expressar

$$\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_2^w \cup \mathcal{H}_2^{w^c},$$

onde $\mathcal{H}_2^w = \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{O}_w$ e $\mathcal{H}_2^{w^c} = \mathcal{H}_2 \cap \bar{\mathcal{M}}$ e, evidentemente, tal união é disjunta (em arestas). Por sua vez, $\mathcal{H}_2^{w^c}$ é subgrafo de $\bar{\mathcal{M}}_2$.

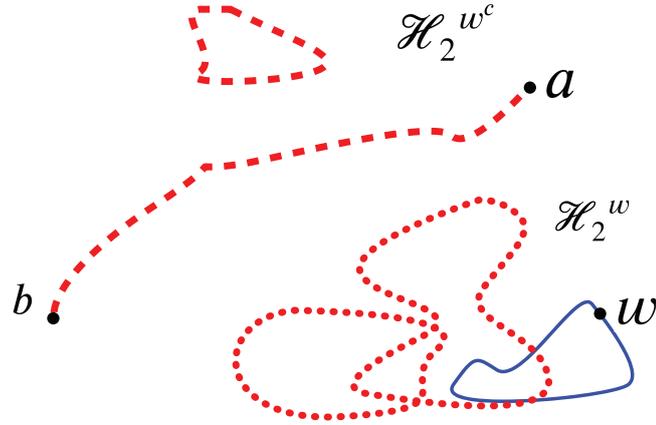


Figura 1.9: Decomposição de \mathcal{H}_2 , em \mathcal{H}_2^w e $\mathcal{H}_2^{w^c}$, seguindo o exemplo da Figura 1.8, onde \mathcal{H}_2^w está representado pela linha pontilhada vermelha formada pelos pequenos círculos e $\mathcal{H}_2^{w^c}$ pela linha pontilhada vermelha formada pelos pequenos retângulos. Mantivemos o aglomerado de w em \mathcal{M}_1 para ajudar a visualização.

Agora, aplicaremos tal decomposição para separar D_w em conjuntos menores, dados por

$$D_w(\mathcal{H}) = \{\mathcal{H}_2 \in D_w : \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{O}_w = \mathcal{H}\}.$$

Dessa forma, em vez de demonstrar (1.15), podemos mostrar que, para cada \mathcal{H} , vale a seguinte desigualdade

$$|\mathcal{H}_{\{a,b\}}(\mathcal{M}_2) \cap D_w(\mathcal{H})| \leq |\mathcal{H}_{\emptyset}(\mathcal{M}_2) \cap D_w(\mathcal{H})| \quad (1.16)$$

e depois somar sobre todas as possibilidades para \mathcal{H} .

Para tanto, seja \mathcal{H} tal que o lado esquerdo de (1.16) seja não nulo, pois do contrário a desigualdade é trivial. Nesse caso, existe $\mathcal{H}_2 \in \mathcal{H}_{\{a,b\}}(\mathcal{M}_2) \cap D_w(\mathcal{H})$. Como

$$\partial\mathcal{H}_2 = \{a, b\} = \partial(\mathcal{H}_2^w \cup \mathcal{H}_2^{w^c}) = \partial(\mathcal{H}_2^w) \Delta \partial(\mathcal{H}_2^{w^c})$$

e $a, b \notin V(\mathcal{O}_w)$, pois $V(\mathcal{O}_w) \cap \bar{\mathcal{M}} = \emptyset$, temos que $\partial\mathcal{H}_2^w = \partial\mathcal{H} = \emptyset$ e $\partial\mathcal{H}_2^{w^c} = \{a, b\}$. Portanto, $\mathcal{H}_2^{w^c} \in \mathcal{H}_{\{a,b\}}(\bar{\mathcal{M}}_2)$. Além disso, para todo $\mathcal{H}_2^{w^c} \in \mathcal{H}_{\{a,b\}}(\bar{\mathcal{M}}_2)$, temos que $\mathcal{H}_2^{w^c} \cup \mathcal{H} \in \mathcal{H}_{\{a,b\}}(\mathcal{M}_2) \cap D_w(\mathcal{H})$. Dessa forma, temos que

$$|\mathcal{H}_{\{a,b\}}(\mathcal{M}_2) \cap D_w(\mathcal{H})| = |\mathcal{H}_{\{a,b\}}(\bar{\mathcal{M}}_2)|,$$

de maneira análoga, obtemos

$$|\mathcal{K}_\emptyset(\mathcal{M}_2) \cap D_w(\mathcal{H})| = |\mathcal{K}_\emptyset(\bar{\mathcal{M}}_2)|.$$

Consequentemente, nesse caso, o Lema 1.5 garante que

$$|\mathcal{K}_{\{a,b\}}(\bar{\mathcal{M}})| = |\mathcal{K}_\emptyset(\bar{\mathcal{M}})|,$$

e, em particular, (1.16) é válida. \square

Prova da Desigualdade GHS. Denote $Z' := \sum_{\partial \mathbf{n} = \emptyset} w(\mathbf{n})$. Então, temos pela Proposição 1.3

$$\begin{aligned} (Z')^3 u(x, y, z) &= \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x, y, z, g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) w(\mathbf{n}_3) - \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x, g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{y, z\} \\ \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) w(\mathbf{n}_3) \\ &- \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{y, g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{x, z\} \\ \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) w(\mathbf{n}_3) - \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{z, g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{x, y\} \\ \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) w(\mathbf{n}_3) \\ &+ 2 \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x, g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{y, g\} \\ \partial \mathbf{n}_3 = \{z, g\}}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) w(\mathbf{n}_3). \end{aligned}$$

Para demonstrar a Desigualdade GHS, faremos considerações similares às usadas na demonstração do *Switching Lemma*. Primeiro, para três correntes quaisquer $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$, seja $\mathbf{m} = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3$, temos que

$$w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) w(\mathbf{n}_3) = w(\mathbf{m}) \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3},$$

onde

$$\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} := \prod_{\{i,j\} \in E(\Lambda^g)} \binom{\mathbf{m}_{i,j}}{(\mathbf{n}_1)_{i,j}, (\mathbf{n}_2)_{i,j}, (\mathbf{n}_3)_{i,j}} := \prod_{\{i,j\} \in E(\Lambda^g)} \frac{\mathbf{m}_{i,j}!}{(\mathbf{n}_1)_{i,j}! (\mathbf{n}_2)_{i,j}! (\mathbf{n}_3)_{i,j}!}$$

Além disso, $\partial \mathbf{m} = \partial \mathbf{n}_1 \triangle \partial \mathbf{n}_2 \triangle \partial \mathbf{n}_3$. Sendo assim, podemos escrever a expressão de $(Z')^3 u_3(x, y, z)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \sum_{\partial \mathbf{m}=\{x,y,z,g\}} w(\mathbf{m}) \left(\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1=\{x,y,z,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2=\emptyset, \partial \mathbf{n}_3=\emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} - \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1=\{x,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2=\{y,z\}, \partial \mathbf{n}_3=\emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \right. \\ - \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1=\{y,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2=\{x,z\}, \partial \mathbf{n}_3=\emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} - \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1=\{z,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2=\{x,y\}, \partial \mathbf{n}_3=\emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \\ \left. + 2 \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1=\{x,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2=\{y,g\}, \partial \mathbf{n}_3=\{z,g\}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \right), \end{aligned}$$

onde, em todas as somas, supomos $\mathbf{m} = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3$.

Ao longo do restante da demonstração, fixamos \mathbf{m} e sempre supomos que $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ satisfazem $\mathbf{m} = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3$. Logo, para provar (GHS), basta mostrar que para cada \mathbf{m} fixado

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1=\{x,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2=\{y,g\}, \partial \mathbf{n}_3=\{z,g\}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} &\leq \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1=\{x,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2=\{y,z\}, \partial \mathbf{n}_3=\emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} + \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1=\{y,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2=\{x,z\}, \partial \mathbf{n}_3=\emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \\ &+ \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1=\{z,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2=\{x,y\}, \partial \mathbf{n}_3=\emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} - \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1=\{x,y,z,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2=\emptyset, \partial \mathbf{n}_3=\emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Primeiramente, escrevemos

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1=\{x,y,z,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2=\emptyset, \partial \mathbf{n}_3=\emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} &= \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1=\{x,y,z,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2=\emptyset, \partial \mathbf{n}_3=\emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g] \\ &+ \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1=\{x,y,z,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2=\emptyset, \partial \mathbf{n}_3=\emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2}{\nrightarrow} g]. \end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x,y,z,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g] &= \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x,y,z,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g] \binom{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\mathbf{n}_1} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_3} \\
&= \sum_{\partial \mathbf{n}_3 = \emptyset} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_3} \left(\mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g] \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x,y,z,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} \binom{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\mathbf{n}_1} \right) \\
&= \sum_{\partial \mathbf{n}_3 = \emptyset} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_3} \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x,y\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{z,g\}}} \binom{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\mathbf{n}_1} \\
&= \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x,y\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{z,g\}, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3}.
\end{aligned}$$

Na primeira igualdade, usamos que $\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} = \binom{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\mathbf{n}_1} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_3}$, e, na penúltima, aplicamos o Lema 1.5. Como \mathbf{m} está fixado e $\mathbf{m} = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3$, temos que, para cada \mathbf{n}_3 fixado, $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$ também é fixado.

Se $z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g$, temos exatamente duas possibilidades mutuamente exclusivas: $x \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g$ ou $y \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g$. Desse modo, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x,y,z,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g] &= \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x,y,z,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g, x \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g] \\
&+ \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x,y,z,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g, y \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g]
\end{aligned}$$

Podemos usar o Lema 1.5 para mostrar que

$$\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x,y,z,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g, x \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g] = \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{y,z\}, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g] \tag{1.18}$$

e

$$\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x,y,z,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g, y \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g] = \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{y,g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{x,z\}, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g]. \tag{1.19}$$

Da mesma forma, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x, g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{y, z\}, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} &= \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x, g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{y, z\}, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g] \\ &+ \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x, g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{y, z\}, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Analogamente, vale a expressão similar à acima onde trocamos x e y de lugar. Aplicando (1.18), (1.19) e (1.20) em (1.17), temos que (1.17) fica reduzida a

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x, g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{y, g\}, \partial \mathbf{n}_3 = \{z, g\}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} &\leq \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x, g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{y, z\}, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g] \\ &+ \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{y, g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{x, z\}, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Porém, usando o Lema 1.5 três vezes, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x, g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{y, z\}, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g] &= \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x, z\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{y, g\}, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \\ &= \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{y, g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{x, z\}, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[x \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} y] \\ &\leq \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{y, z\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{x, g\}, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \\ &= \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{y, g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{x, z\}, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g]. \end{aligned}$$

De modo análogo, conseguimos a desigualdade contrária e, portanto,

$$\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x, g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{y, z\}, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g] = \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{y, g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{x, z\}, \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g]. \quad (1.22)$$

Por sua vez, pelo Lema 1.5, temos que

$$\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x, g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{y, g\}, \partial \mathbf{n}_3 = \{z, g\}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} = \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x, z\}, \partial \mathbf{n}_2 = \{y, g\} \\ \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_3}{\longleftrightarrow} g]. \quad (1.23)$$

Usando (1.22) e (1.23), reduzimos (1.21) a

$$\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x, z\}, \partial \mathbf{n}_2 = \{y, g\} \\ \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_3}{\longleftrightarrow} g] \leq \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x, z\}, \partial \mathbf{n}_2 = \{y, g\} \\ \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} \mathbb{1}[z \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g]. \quad (1.24)$$

Finalmente, para mostrar (1.24), considere \mathcal{M} o multigrafo associado com a corrente \mathbf{m} , assim como na demonstração do *Switching Lemma*. Temos que o lado direito da equação é a cardinalidade do seguinte conjunto

$$\mathcal{K} = \left\{ (\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3) : \begin{array}{l} \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3 \text{ subgrafos de } \mathcal{M}, \\ \mathcal{M} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3 \text{ disjuntos em arestas} \\ \partial \mathcal{N}_1 = \{x, z\}, \partial \mathcal{N}_2 = \{y, g\}, \partial \mathcal{N}_3 = \emptyset, \\ z \longleftrightarrow g \text{ em } \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_3. \end{array} \right\}$$

O lado esquerdo é a cardinalidade do conjunto

$$\mathcal{K}' = \left\{ (\mathcal{N}'_1, \mathcal{N}'_2, \mathcal{N}'_3) : \begin{array}{l} \mathcal{N}'_1, \mathcal{N}'_2, \mathcal{N}'_3 \text{ subgrafos de } \mathcal{M}, \\ \mathcal{M} = \mathcal{N}'_1 \cup \mathcal{N}'_2 \cup \mathcal{N}'_3 \text{ disjuntos em arestas} \\ \partial \mathcal{N}'_1 = \{x, z\}, \partial \mathcal{N}'_2 = \{y, g\}, \partial \mathcal{N}'_3 = \emptyset, \\ z \longleftrightarrow g \text{ em } \mathcal{N}'_1 \cup \mathcal{N}'_2. \end{array} \right\}$$

Para mostrar (1.24), mostraremos que $|\mathcal{K}| \leq |\mathcal{K}'|$. Para isso, aplicaremos o Lema 1.9 com $\mathcal{M}_1 = \mathcal{N}_1$, e $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M} \setminus \mathcal{N}_1$ e $a = g$, $b = y$ e $w = z$.

Como $|\mathcal{K}|$ é o número de maneiras de escolher um subgrafo $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{M}_2$ tal que $\partial \mathcal{N}_2 = \{y, g\}$ e $z \longleftrightarrow g$ em $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_3$, e que \mathcal{N}_3 fica completamente determinado, uma vez que escolhemos \mathcal{N}_1 e \mathcal{N}_2 . De maneira similar, $|\mathcal{K}'|$ é o número de maneiras de escolher \mathcal{N}'_3 em \mathcal{M}_2 ta que $\partial \mathbf{n}_3 = \emptyset$ e $z \longleftrightarrow g$ em $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}'_3 = \mathcal{N}'_1 \cup \mathcal{N}'_2$.

Por fim, resta-nos esclarecer uma pequena diferença entre as desigualdades (1.14) dada pelo Lema 1.9 e a desigualdade (1.24) que desejamos provar: no Lema 1.9, permitimos que os elementos do lado esquerdo satisfaçam $g \longleftrightarrow y$ em $\mathcal{N}'_1 \cup \mathcal{N}'_2$ em vez de $z \longleftrightarrow y$ em $\mathcal{N}'_1 \cup \mathcal{N}'_2$, mas como $y \longleftrightarrow g$ em \mathcal{N}'_2 , temos que $z \longleftrightarrow g$ em $\mathcal{N}'_1 \cup \mathcal{N}'_2$. Logo, o lado direito de (1.9) com essa interpretação é igual ao lado direito de (1.24), enquanto o lado esquerdo

de (1.9) é maior ou igual ao lado esquerdo de (1.24). Isso nos permite concluir que (1.24) é válida e, assim, concluímos a demonstração da Desigualdade GHS. \square

Observação 1.4. *O motivo pelo qual não nos interessa aplicar o Switching Lemma na expressão de $(Z')^3 u(x, y, z)$ é a sua última parcela. Note que, se aplicássemos uma vez o Switching Lemma, teríamos*

$$\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x, g\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{y, g\} \\ \partial \mathbf{n}_3 = \{z, g\}}} w(\mathbf{n}_1)w(\mathbf{n}_2)w(\mathbf{n}_3) = \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{x, z\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{y, g\} \\ \partial \mathbf{n}_3 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1)w(\mathbf{n}_2)w(\mathbf{n}_3) \mathbb{1}(x \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_3}{\longleftrightarrow} z),$$

mas, não podemos aplicar novamente o Switching Lemma, uma vez que o fator $\mathbb{1}(x \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_3}{\longleftrightarrow} z)$ não é função de $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$.

Em seguida, provaremos a Desigualdade FKG (Fortuin, Kasteleyn, e Ginibre) que pode ser considerada uma das propriedades mais fundamentais do Modelo de Ising ferromagnético. Tal desigualdade foi provada originalmente em [FKG71] para o Modelo de Ising e para o *Modelo de Aglomerados Aleatórios*, mas existem diversos modelos que gozam de tal característica.

Definição 1.4. *Seja $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito, para $\sigma, \sigma' \in \Omega_\Lambda$, dizemos que $\sigma \leq \sigma'$ se $\sigma_i \leq \sigma'_i$, para todo $i \in \Lambda$, tal relação define uma ordem parcial em Ω_Λ . Agora, seja $f : \Omega_\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que f é não decrescente se $\sigma \leq \sigma'$ implica $f(\sigma) \leq f(\sigma')$. De forma análoga, definimos uma função não crescente em Ω . Se uma função f for não crescente ou não decrescente, dizemos que f é uma função monótona.*

Exemplo 1.1. *A função η_A como definida em (1.6) é não decrescente, para todo $A \subset \mathbb{Z}^d$ finito. De fato,*

$$\eta_A = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma_x = 1, \forall x \in A \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com isso, se $\eta_A = 1$, para uma configuração σ , é evidente que, para qualquer σ' tal que $\sigma \leq \sigma'$, temos $\eta'_A = 1$. Por sua vez, para $\eta_A = 0$ para uma configuração σ , temos que, para qualquer outra configuração σ' , $\eta_A \leq \eta'_A$.

Exemplo 1.2. *As funções σ_x com $x \in \mathbb{Z}^d$ são evidentemente não decrescentes.*

Exemplo 1.3. *A função $\sigma_{\{x, y\}}$ como definida em (1.5) não é monótona para qualquer $x, y \in \mathbb{Z}^d$.*

Exemplo 1.4. Dado $A \subset \mathbb{Z}^d$ finito, a função $g(\sigma) = \sum_{x \in A} \eta_x(\sigma) - \eta_A(\sigma)$ é não decrescente. De fato, sejam $\sigma, \sigma' \in \Omega$, consideremos primeiramente o caso $\sigma'_x = +1$, para todo $x \in A$, temos que

$$g(\sigma') = |A| - 1 \geq g(\sigma), \forall \sigma \in \Omega.$$

Por sua vez, se existe $x_0 \in A$ tal que $\sigma'_{x_0} = -1$, então o mesmo vale para $\sigma_{x_0} = -1$. Nesse caso, $g(\sigma') = \sum_{x \in A} \eta_x(\sigma')$ e $g(\sigma) = \sum_{x \in A} \eta_x(\sigma)$ e, portanto, $g(\sigma') \geq g(\sigma)$.

Observação 1.5. O leitor notará que não utilizaremos a representação por Correntes Aleatórias para provar o próximo teorema. De fato, não se espera que seja possível usar tal modelo para provar essa Desigualdade FKG, uma vez que as correntes são naturalmente associadas ao valor esperado de monômios, o que não nos permite tratar de modo apropriado a hipótese de monotonicidade. Ao longo do restante deste capítulo e do próximo, não voltaremos a usar a representação por Correntes Aleatórias.

No entanto, é recomendável que o leitor não esqueça essa poderosa ferramenta! Tendo em vista que nos Capítulos 3 e 4, essa representação será parte central de todos os nossos argumentos. Decidimos introduzir tal representação no primeiro capítulo para podermos apresentar as desigualdades de correlação acima sem postergar suas demonstrações.

Teorema 1.10 (Desigualdade FKG). Sejam $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito, # qualquer, $h \in \mathbb{R}$ e $f, g : \Omega_\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ funções não decrescentes, então temos que

$$\langle fg \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# - \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# \langle g \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# \geq 0. \quad (\text{FKG})$$

Em seguida, apresentaremos uma demonstração concisa e geral introduzida em [Hol74], a conhecida Condição de Holley. Essa é uma condição suficiente para que um modelo apresente a Desigualdade FKG. Portanto, primeiramente provaremos uma versão mais fraca da Condição de Holley. É importante ressaltar que a formulação da Condição de Holley pode ser construída de modo muito mais geral, mas mostraremos apenas a mais conveniente para o nosso estudo.

Teorema 1.11. Seja $\mu = \otimes_{x \in \Lambda} \mu_x$ uma medida produto em Ω_Λ , sejam $f_1, f_2, f_3, f_4 : \Omega_\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ funções não negativas tais que

$$f_1(\sigma)f_2(\sigma') \leq f_3(\sigma \wedge \sigma')f_4(\sigma \vee \sigma'), \quad (1.25)$$

onde o máximo entre duas configurações é definido por $\sigma \wedge \sigma' := (\max\{\sigma_x, \sigma'_x\})_{x \in \Lambda}$ e o mínimo por $\sigma \vee \sigma' := (\min\{\sigma_x, \sigma'_x\})_{x \in \Lambda}$ então, temos que

$$\mu(f_1)\mu(f_2) \leq \mu(f_3)\mu(f_4), \quad (1.26)$$

onde $\mu(f)$ a integral de f com respeito à medida μ .

Demonstração da Desigualdade FKG. Podemos assumir f e g não negativas, pois do contrário bastaria escolher $\bar{g} = g - \min_{\sigma \in \Omega_\Lambda} g(\sigma)$, $\bar{f} = f - \min_{\sigma \in \Omega_\Lambda} f(\sigma)$ e notar que

$$\langle fg \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# - \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# \langle g \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# = \langle \bar{f} \bar{g} \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# - \langle \bar{f} \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# \langle \bar{g} \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\#.$$

Apresentaremos a demonstração para $\# = \tau \in \Omega$, o caso $\# = 0$ é, de fato, ainda mais simples. Defina $\mu_x(\{\sigma_x\}) := e^{\beta h \sigma_x + \beta \sum_{y \notin \Lambda} J_{x,y} \sigma_x \tau_y}$ e

$$p(\sigma) = \frac{e^{\beta \sum_{x,y \in \Lambda} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y}}{Z_{\Lambda, \beta, h}^\tau}.$$

Sejam $f_1 = pf$, $f_2 = pg$, $f_3 = p$, $f_4 = pfg$, note que $\mu(f_1) = \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\tau$, $\mu(f_2) = \langle g \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\tau$, $\mu(f_3) = \langle 1 \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\tau = 1$ e $\mu(f_4) = \langle fg \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\tau$. Como f e g são não decrescentes, temos que $f(\sigma)g(\sigma') \leq f(\sigma \vee \sigma')g(\sigma \vee \sigma')$. Logo, para satisfazer (1.25), basta mostrar

$$p(\sigma)p(\sigma') \leq p(\sigma \wedge \sigma')p(\sigma \vee \sigma').$$

Para isso, é suficiente verificar a desigualdade nos expoentes

$$\sigma_x \sigma_y + \sigma'_x \sigma'_y \leq (\sigma_x \wedge \sigma'_x)(\sigma_y \wedge \sigma'_y) + (\sigma_x \vee \sigma'_x)(\sigma_y \vee \sigma'_y). \quad (1.27)$$

Note que a desigualdade é trivialmente satisfeita se ambos os termos do lado direito da equação são iguais a 1. Dessa maneira, vamos supor que um dos termos é igual a -1 , mas, isto não pode ocorrer se $\sigma_x \neq \sigma'_x$ e $\sigma_y \neq \sigma'_y$, sendo assim, suponha, sem perda de generalidade, que $\sigma_x = \sigma'_x$, nesse caso, uma vez que

$$\begin{aligned} \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma'_y &= \sigma_x(\sigma_y + \sigma'_y) \\ &= \sigma_x((\sigma_y \wedge \sigma'_y) + (\sigma_y \vee \sigma'_y)) = \sigma_x(\sigma_y \wedge \sigma'_y) + \sigma_x(\sigma_y \vee \sigma'_y). \end{aligned}$$

E, portanto, (1.27) é satisfeita, e, pelo Teorema 1.11, concluímos a Desigualdade FKG. \square

Demonstração do Teorema 1.11. Seja $x \in \Lambda$, para qualquer $\sigma \in \Omega_\Lambda$ fixado, podemos escrever $\sigma = (\tilde{\sigma}, \sigma_x)$, onde $\tilde{\sigma} \in \Omega_{\Lambda \setminus \{x\}}$. Mostraremos que

$$f_1(\sigma)f_2(\sigma') \leq f_3(\sigma \wedge \sigma')f_4(\sigma \vee \sigma') \quad (1.28)$$

implica

$$\tilde{f}_1(\tilde{\sigma})\tilde{f}_2(\tilde{\sigma}') \leq \tilde{f}_3(\tilde{\sigma} \wedge \tilde{\sigma}')\tilde{f}_4(\tilde{\sigma} \vee \tilde{\sigma}'), \quad (1.29)$$

onde para cada $k \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\tilde{f}_k(\tilde{\sigma}) := \mu_x \langle f_k(\tilde{\sigma}, \cdot) \rangle_{\mu_x}^\# = \sum_{s=\pm 1} f_x(\tilde{\sigma}, s) \mu_x(s),$$

onde $\langle \cdot \rangle_\mu$ denota o valor esperado com respeito à medida μ

Aplicando reiteradamente essa implicação $|\Lambda|$ vezes, temos exatamente (1.26). Sendo assim, o lado esquerdo de (1.29) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \langle f_1(\tilde{\sigma}, s)f_2(\tilde{\sigma}', v) \rangle_{\mu_x \otimes \mu_x} &= \langle \mathbb{1}[s = v]f_1(\tilde{\sigma}, s)f_2(\tilde{\sigma}', v) \rangle_{\mu_x \otimes \mu_x} \\ &\quad + \langle \mathbb{1}[s < v] \underbrace{(f_1(\tilde{\sigma}, s)f_2(\tilde{\sigma}', v))}_{:=A} + \underbrace{(f_1(\tilde{\sigma}, v)f_2(\tilde{\sigma}', s))}_{:=B} \rangle_{\mu_x \otimes \mu_x}. \end{aligned}$$

Por sua vez, o lado direito de (1.29) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \langle f_3(\tilde{\sigma} \wedge \tilde{\sigma}', s)f_4(\tilde{\sigma} \vee \tilde{\sigma}', v) \rangle_{\mu_x \otimes \mu_x} &= \langle \mathbb{1}[s = v]f_3(\tilde{\sigma} \wedge \tilde{\sigma}', s)f_4(\tilde{\sigma} \vee \tilde{\sigma}', v) \rangle_{\mu_x \otimes \mu_x} \\ &\quad + \langle \mathbb{1}[s < v] \underbrace{(f_3(\tilde{\sigma} \wedge \tilde{\sigma}', s)f_4(\tilde{\sigma} \vee \tilde{\sigma}', v))}_{:=C} + \underbrace{(f_3(\tilde{\sigma} \wedge \tilde{\sigma}', v)f_4(\tilde{\sigma} \vee \tilde{\sigma}', s))}_{:=D} \rangle_{\mu_x \otimes \mu_x}. \end{aligned}$$

E, portanto, temos que

$$\begin{aligned} &\tilde{f}_3(\tilde{\sigma} \wedge \tilde{\sigma}')\tilde{f}_4(\tilde{\sigma} \vee \tilde{\sigma}') - \tilde{f}_1(\tilde{\sigma})\tilde{f}_2(\tilde{\sigma}') \\ &= \left\langle \mathbb{1}[s = v] \left(f_3(\tilde{\sigma} \wedge \tilde{\sigma}', s)f_4(\tilde{\sigma} \vee \tilde{\sigma}', v) - f_1(\tilde{\sigma}, s)f_2(\tilde{\sigma}', v) \right) \right\rangle_{\mu_x \otimes \mu_x} \\ &\quad + \left\langle \mathbb{1}[s < v](C + D - A - B) \right\rangle_{\mu_x \otimes \mu_x}. \end{aligned}$$

Agora, por (1.25) a primeira parcela da soma acima é não negativa. Consequentemente, para concluir esta demonstração, basta provarmos que $A + B \leq C + D$. Primeiramente, como f_1, f_2, f_3, f_4 são não negativas, temos que $A, B, C, D \geq 0$. Além disso, (1.25) implica que

$A, B \leq C$ e

$$\begin{aligned}
AB &= \left(f_1(\tilde{\sigma}, v) f_2(\tilde{\sigma}', s) \right) \left(f_1(\tilde{\sigma}, v) f_2(\tilde{\sigma}', s) \right) \\
&= \left(f_1(\tilde{\sigma}, v) f_2(\tilde{\sigma}', v) \right) \left(f_1(\tilde{\sigma}, s) f_2(\tilde{\sigma}', s) \right) \\
&\stackrel{(1.25)}{\leq} \left(f_3(\tilde{\sigma} \wedge \tilde{\sigma}', s) f_4(\tilde{\sigma} \vee \tilde{\sigma}', s) \right) \left(f_3(\tilde{\sigma} \wedge \tilde{\sigma}', v) f_4(\tilde{\sigma} \vee \tilde{\sigma}', v) \right) \\
&= \left(f_3(\tilde{\sigma} \wedge \tilde{\sigma}', v) f_4(\tilde{\sigma} \vee \tilde{\sigma}', s) \right) \left(f_3(\tilde{\sigma} \wedge \tilde{\sigma}', v) f_4(\tilde{\sigma} \vee \tilde{\sigma}', s) \right) = CD.
\end{aligned}$$

Se $C = 0$, temos que $A = B = 0$ e $A + B \leq C + D$ é trivialmente satisfeita. Agora, se $C > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{C + D - A - B}{C} &= 1 + \frac{CD}{C^2} - \frac{A + B}{C} \\
&\geq 1 + \frac{AB}{C^2} - \frac{A + B}{C} \\
&= \left(1 - \frac{A}{C} \right) \left(1 - \frac{B}{C} \right) \geq 0.
\end{aligned}$$

E, portanto, $A + B \leq C + D$, e o Teorema segue. \square

Com as desigualdades de correlação em mãos, passaremos a estudar suas implicações para o Modelo de Ising.

1.3.1 Consequências das desigualdades de correlação

Nos próximos dois lemas, consideraremos o Hamiltoniano dado por um campo variável $\mathbf{h} = \{h_x\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$.

$$H_{\Lambda, \mathbf{h}}^0(\sigma) := - \sum_{\{x, y\} \in E(\Lambda)} J_{x, y} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in \Lambda} h_x \sigma_x. \quad (1.30)$$

Todos os resultados apresentados nas seções anteriores podem ser provados de modo análogo. E, da mesma forma, vale para o Hamiltoniano $H_{\Lambda, \mathbf{h}}^r(\sigma)$. A razão pela qual decidimos não introduzir um campo \mathbf{h} não necessariamente uniforme foi para não carregar desnecessariamente a notação. Usaremos essa versão do Hamiltoniano apenas nos Lemas 1.12 e 1.14. Para o restante desta dissertação, consideraremos apenas o Hamiltoniano com campo uniforme h .

Lema 1.12. *Sejam $A \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito, \mathbf{J} admissível, $\mathbf{h} = \{h_x\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ onde $h_x \in \mathbb{R}$, # qualquer condição de fronteira e $\beta > 0$. Se $f : \Omega_\Lambda^\# \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não decrescente, então*

$$\mathbf{h} \mapsto \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}}^\#$$

é uma função não decrescente em cada entrada h_x .

Demonstração. Basta notar que

$$\frac{d}{dh_x} \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}}^\# = \beta (\langle f \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}}^\# - \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}}^\# \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}}^\#) \stackrel{\text{(FKG)}}{\geq} 0.$$

□

Lema 1.13. *Sejam $A \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito, \mathbf{J} admissível, $h \geq 0$ e $\# \in \{0, +\}$, e $\beta > 0$*

$$h \mapsto \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\#$$

é uma função não decrescente.

Demonstração. Temos que

$$\frac{\partial}{\partial h} \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# = \beta \sum_{x \in \Lambda} (\langle \sigma_A \sigma_x \rangle_{\beta, h}^\# - \langle \sigma_A \rangle_{\beta, h}^\# \langle \sigma_x \rangle_{\beta, h}^\#) \stackrel{\text{(GKS-II)}}{\geq} 0,$$

Logo, o resultado segue. □

Lema 1.14. *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito, \mathbf{J} admissível, $h \geq 0$, $\# \in \{0, +\}$, e $\beta > 0$, temos que, para todo $x \in \Lambda$,*

$$h \mapsto \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\#$$

é uma função côncava.

Demonstração. Considere o novamente o Hamiltoniano $H_{\Lambda, \mathbf{h}}^\#(\sigma)$ onde, $h_w = h$, para todo $w \in \mathbb{Z}^d$, sejam $y, z \in \Lambda$ quaisquer, temos que

$$\frac{\partial^2}{\partial h_y \partial h_z} \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}}^\# = \beta^2 u_3(x, y, z) \stackrel{\text{(GHS)}}{\leq} 0,$$

onde $u_3(x, y, z)$ é dado como em (GHS). Logo,

$$\frac{d^2}{dh^2} \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}}^\# = \sum_{y, z \in \Lambda} \frac{\partial^2}{\partial h_y \partial h_z} \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}}^\# \leq 0.$$

E, portanto, o resultado segue. \square

Lema 1.15. *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito, \mathbf{J} admissível, $h \in \mathbb{R}$, $\# \in \{0, +\}$ e $\beta > 0$. Para todo $A \subset \Lambda$ temos que*

$$\mathbf{J} \mapsto \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, h}^{\#}$$

é uma função crescente em cada entrada $J_{x,y}$.

Demonstração. Basta notar que

$$\frac{d}{dJ_{x,y}} \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, h}^{\#} = \beta (\langle \sigma_A \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, h}^{\#} - \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, h}^{\#} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, h}^{\#}) \stackrel{\text{(GKS-II)}}{\geq} 0.$$

\square

Proposição 1.16 (Propriedade de Markov). *Sejam $\Lambda \subset \Delta \subset \mathbb{Z}^d$ finitos, $\tau \in \Omega$ e $\tau' \in \Omega_{\Delta}^{\tau}$, temos que*

$$\mu_{\Delta, \beta, h}^{\tau}(\cdot | \sigma_x = \tau'_x, \forall x \in \Delta \setminus \Lambda) = \mu_{\Lambda, \beta, h}^{\tau'}(\cdot).$$

Demonstração. Provaremos o caso sem campo ($h = 0$) para simplificar a demonstração, mas o leitor se convencerá de que a demonstração é análoga para o caso geral. Considere o evento $E := [\sigma_x = \tau'_x, \forall x \in \Delta \setminus \Lambda]$, então, temos que

$$\begin{aligned} \langle f | \sigma_x = \tau'_x, \forall x \in \Delta \setminus \Lambda \rangle_{\Delta, \beta, 0}^{\tau} &= \frac{\langle f \mathbb{1}_E \rangle_{\Delta, \beta, 0}^{\tau}}{\langle \mathbb{1}_E \rangle_{\Delta, \beta, 0}^{\tau}} \\ &= \frac{\sum_{\sigma \in \Omega_{\Delta}^{\tau}} f(\sigma) \mathbb{1}_E(\sigma) \exp\left(\beta \left(\sum_{x,y \in \Lambda} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y + \sum_{\substack{x \in \Delta \\ y \notin \Lambda}} J_{x,y} \sigma_x \tau_y + \sum_{x,y \notin \Lambda} J_{x,y} \tau'_x \tau'_y \right)\right)}{\sum_{\sigma \in \Omega_{\Delta}^{\tau}} \mathbb{1}_E(\sigma) \exp\left(\beta \left(\sum_{x,y \in \Lambda} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y + \sum_{\substack{x \in \Delta \\ y \notin \Lambda}} J_{x,y} \sigma_x \tau_y + \sum_{x,y \notin \Lambda} J_{x,y} \tau'_x \tau'_y \right)\right)} \\ &= \frac{\sum_{\sigma \in \Omega_{\Delta}^{\tau}} f(\sigma) \exp\left(\beta \left(\sum_{x,y \in \Lambda} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y + \sum_{\substack{x \in \Delta \\ y \notin \Lambda}} J_{x,y} \sigma_x \tau'_y \right)\right)}{\sum_{\sigma \in \Omega_{\Delta}^{\tau}} \exp\left(\beta \left(\sum_{x,y \in \Lambda} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y + \sum_{\substack{x \in \Delta \\ y \notin \Lambda}} J_{x,y} \sigma_x \tau'_y \right)\right)} \frac{\exp\left(\beta \left(\sum_{x,y \notin \Lambda} J_{x,y} \tau'_x \tau'_y \right)\right)}{\exp\left(\beta \left(\sum_{x,y \notin \Lambda} J_{x,y} \tau'_x \tau'_y \right)\right)} \\ &= \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, 0}^{\tau'}, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, usamos que $\tau'_y = \tau_y$ para todo $y \notin \Delta$. \square

Proposição 1.17. *Sejam $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ uma função não decrescente, então, para todo $\beta > 0$, $\Lambda \subset \Delta \subset \mathbb{Z}^d$ finitos*

$$\langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+ \geq \langle f \rangle_{\Delta, \beta, h}^+.$$

Analogamente, se f é não crescente, então

$$\langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^- \geq \langle f \rangle_{\Delta, \beta, h}^-.$$

Demonstração. Basta notar que

$$\begin{aligned} \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+ &\stackrel{(Markov)}{=} \frac{\langle f \mathbb{1}_{[\sigma_x=1, \forall x \in \Delta \setminus \Lambda]} \rangle_{\Delta, \beta, h}^+}{\langle \mathbb{1}_{[\sigma_x=1, \forall x \in \Delta \setminus \Lambda]} \rangle_{\Delta, \beta, h}^+} \\ &\stackrel{(FKG)}{\geq} \frac{\langle f \rangle_{\Delta, \beta, h}^+ \langle \mathbb{1}_{[\sigma_x=1, \forall x \in \Delta \setminus \Lambda]} \rangle_{\Delta, \beta, h}^+}{\langle \mathbb{1}_{[\sigma_x=1, \forall x \in \Delta \setminus \Lambda]} \rangle_{\Delta, \beta, h}^+} = \langle f \rangle_{\Delta, \beta, h}^+. \end{aligned}$$

De modo similar, o resultado para condição de fronteira $-$.

□

Resultados de monotonicidade a respeito aos valores esperados referentes ao volume serão úteis para garantirmos a existência dos limites de $\langle \cdot \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\#$ quando " $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$ " (a ser definido na próxima seção). A seguir, mostraremos um resultado de monotonicidade para condição de fronteira livre.

Proposição 1.18. Para todo $\beta > 0$, $h \geq 0$, \mathbf{J} admissível e $A \subset \Lambda \subset \Delta \subset \mathbb{Z}^d$ finitos,

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0 \leq \langle \sigma_A \rangle_{\Delta, \beta, h}^0.$$

Demonstração. Considere \mathbf{J}' dado por

$$J'_{x,y} = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \Lambda \text{ e } y \in \Delta \setminus \Lambda, \text{ ou } y \in \Lambda \text{ e } x \in \Delta \setminus \Lambda \\ J_{x,y}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.31)$$

Isto é, as interações \mathbf{J}' são dadas por \mathbf{J} , exceto entre os elementos de Λ e $\Delta \setminus \Lambda$ que agora estão desconectados. Dessa forma, temos que

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Delta, \mathbf{J}', \beta, h}^0 = \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \mathbf{J}, \beta, h}^0.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_A \rangle_{\Delta, J', \beta, h}^0 &= \frac{\sum_{\sigma \in \Omega_{\Delta}^0} \sigma_A e^{\beta \sum_{\{x,y\} \in \Lambda} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y + \beta \sum_{\{x,y\} \in \Delta \setminus \Lambda} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y + \beta h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x + \beta h \sum_{x \in \Delta \setminus \Lambda} \sigma_x}}{\sum_{\sigma \in \Omega_{\Delta}^0} e^{\beta \sum_{\{x,y\} \in \Lambda} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y + \beta \sum_{\{x,y\} \in \Delta \setminus \Lambda} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y + \beta h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x + \beta h \sum_{x \in \Delta \setminus \Lambda} \sigma_x}} \\
&= \frac{\sum_{\sigma'' \in \Omega_{\Delta \setminus \Lambda}^0} e^{\beta \sum_{\{x,y\} \in \Delta \setminus \Lambda} J_{x,y} \sigma''_x \sigma''_y + \beta h \sum_{x \in \Delta \setminus \Lambda} \sigma''_x} \sum_{\sigma' \in \Omega_{\Lambda}^0} \sigma'_A e^{\beta \sum_{\{x,y\} \in \Lambda} J_{x,y} \sigma'_x \sigma'_y + \beta h \sum_{x \in \Lambda} \sigma'_x}}}{\sum_{\sigma'' \in \Omega_{\Delta \setminus \Lambda}^0} e^{\beta \sum_{\{x,y\} \in \Delta \setminus \Lambda} J_{x,y} \sigma''_x \sigma''_y + \beta h \sum_{x \in \Delta \setminus \Lambda} \sigma''_x} \sum_{\sigma' \in \Omega_{\Lambda}^0} e^{\beta \sum_{\{x,y\} \in \Lambda} J_{x,y} \sigma'_x \sigma'_y + \beta h \sum_{x \in \Lambda} \sigma'_x}} \\
&= \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, J, \beta, h}^0.
\end{aligned}$$

Como $J'_{x,y} \leq J_{x,y}$ para todo par $x, y \in \mathbb{Z}^d$, temos que o resultado segue do Lema 1.15. \square

Para explorar argumentos de comparação entre medidas distintas, precisamos introduzir a ideia de **dominação estocástica** entre duas medidas. Essa ideia será particularmente útil quando quisermos estudar propriedades de todas as medidas $\mu_{\Lambda, \beta, h}^{\#}$ a partir das medidas $\mu_{\Lambda, \beta, h}^+$ e $\mu_{\Lambda, \beta, h}^-$.

Definição 1.5 (Dominação estocástica). *Seja μ_1 e μ_2 duas medidas de probabilidade definidas sobre um mesmo espaço mensurável. Dizemos que μ_1 domina estocasticamente μ_2 , se para toda a função f mensurável e crescente, temos*

$$\langle f \rangle_{\mu_2} \leq \langle f \rangle_{\mu_1}.$$

Vamos escrever simplesmente $\mu_2 \leq \mu_1$ para indicar que μ_1 domina estocasticamente μ_2 .

Finalmente, o próximo lema nos dará um modo de comparar as medidas $\mu_{\Lambda, \beta, h}^{\#}$ para as diferentes condições de fronteira $\#$. Tal resultado é bastante útil para a análise do comportamento de todas essas medidas apenas estudando $\mu_{\Delta, \beta, h}^+$ e $\mu_{\Delta, \beta, h}^-$.

Proposição 1.19 (Dominação estocástica a volume finito). *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito, $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ uma função não decrescente com $\text{supp}(f) \subset \Lambda$. Então para todo $\beta > 0$, $h \geq 0$,*

$$\langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^- \leq \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^{\tau} \leq \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+.$$

Já que $\text{supp}(f) \subset \Lambda$ a função $f|_{\Omega_{\Lambda}}$ está bem definido e valem as seguintes desigualdades

$$\langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^- \leq \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0 \leq \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+.$$

Demonstração. Seja $\tau \in \Omega$, considere a função $g^{\tau}(\sigma) = e^{\beta \sum_{x \in \Lambda, y \notin \Lambda} J_{x,y} \sigma_x (1 - \tau_y)}$, note que

$$\sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^{\tau}} g^{\tau}(\sigma) e^{-\beta H_{\Lambda,h}^{\tau}(\sigma)} = \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^{+}} e^{-\beta H_{\Lambda,h}^{+}(\sigma)}. \quad (1.32)$$

Além disso, temos que, para f não decrescente,

$$\sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^{\tau}} f(\sigma) g^{\tau}(\sigma) e^{-\beta H_{\Lambda,h}^{\tau}(\sigma)} \leq \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^{+}} f(\sigma) e^{-\beta H_{\Lambda,h}^{+}(\sigma)}, \quad (1.33)$$

onde a desigualdade decorre da possibilidade de que $\text{supp}(f)$ não esteja contida em Λ . Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \langle f \rangle_{\Lambda,\beta,h}^{+} &= \frac{\sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^{+}} f(\sigma) e^{-\beta H_{\Lambda,h}^{+}(\sigma)}}{\sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^{+}} e^{-\beta H_{\Lambda,h}^{+}(\sigma)}} \stackrel{(1.32)}{\geq} \frac{\sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^{\tau}} f(\sigma) g^{\tau}(\sigma) e^{-\beta H_{\Lambda,h}^{\tau}(\sigma)}}{\sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^{\tau}} g^{\tau}(\sigma) e^{-\beta H_{\Lambda,h}^{\tau}(\sigma)}} \\ &= \frac{\langle f g^{\tau} \rangle_{\Lambda,\beta,h}^{\tau}}{\langle g^{\tau} \rangle_{\Lambda,\beta,h}^{\tau}} \stackrel{\text{(FKG)}}{\geq} \frac{\langle f \rangle_{\Lambda,\beta,h}^{\tau} \langle g^{\tau} \rangle_{\Lambda,\beta,h}^{\tau}}{\langle g^{\tau} \rangle_{\Lambda,\beta,h}^{\tau}} = \langle f \rangle_{\Lambda,\beta,h}^{\tau} \end{aligned}$$

De modo análogo, provamos $\langle f \rangle_{\Lambda,\beta,h}^{-} \leq \langle f \rangle_{\Lambda,\beta,h}^{\tau}$. Por fim, para o caso da condição de fronteira livre, usamos o mesmo argumento com a função $g^{\tau}(\sigma) = e^{\beta \sum_{x \in \Lambda, y \notin \Lambda} J_{x,y} \sigma_x}$.

□

1.4 O Limite Termodinâmico

Até este momento, estudamos unicamente o Modelo de Ising em subconjuntos finitos Λ de \mathbb{Z}^d . Nesta seção, começaremos a estudar os fenômenos no limite $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$.

Para tanto, iniciaremos o estudo do comportamento assintótico da Função de Partição $Z_{\Lambda,\mathbf{J},\beta,h}^{\#}$ quando $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$. Em particular, será útil definir a seguinte função.

Definição 1.6 (Pressão). *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito, \mathbf{J} admissível, $h, \#$ quaisquer, e $\beta > 0$, definimos a **pressão no volume** Λ como*

$$p_{\Lambda}^{\#}(\mathbf{J}, \beta, h) := |\Lambda|^{-1} \log Z_{\Lambda,\mathbf{J},\beta,h}^{\#}.$$

É usual omitir a dependência em \mathbf{J} , quando este estiver bem entendido.

Conforme referido anteriormente, a função de partição $Z_{\Lambda,\beta,h}^{\#}$ codifica diversas informações importantes do modelo, e podemos usar a pressão para traduzir essas propriedades. Antes de prosseguirmos, provaremos algumas propriedades da pressão.

Proposição 1.20. *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito, \mathbf{J} admissível e $\beta > 0$, temos que para todo $h \in \mathbb{R}$,*

$$p_{\Lambda}^0(\beta, h) = p_{\Lambda}^0(\beta, -h)$$

e

$$p_{\Lambda}^+(\beta, h) = p_{\Lambda}^-(\beta, -h)$$

Demonstração. Para provar a primeira igualdade, observe que

$$\begin{aligned} p_{\Lambda}^0(\beta, -h) &= \frac{1}{|\Lambda|} \log \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^0} e^{-\beta(-\sum_{\{x,y\} \in E(\Lambda)} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y - (-h) \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x)} \\ &= \frac{1}{|\Lambda|} \log \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^0} e^{-\beta(-\sum_{\{x,y\} \in E(\Lambda)} J_{x,y} (-\sigma_x)(-\sigma_y) - h \sum_{x \in \Lambda} (-\sigma_x))} \\ &= \frac{1}{|\Lambda|} \log \sum_{\sigma' \in \Omega_{\Lambda}^0} e^{-\beta(-\sum_{\{x,y\} \in E(\Lambda)} J_{x,y} \sigma'_x \sigma'_y - h \sum_{x \in \Lambda} \sigma'_x)}, \text{ onde } \sigma' := -\sigma \\ &= p_{\Lambda}^0(\beta, h). \end{aligned}$$

A segunda igualdade segue de modo análogo e será deixado como exercício para o leitor. \square

Proposição 1.21. *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito, \mathbf{J} admissível, $\#$ qualquer e $\beta \geq 0$, temos que $p_{\Lambda}^{\#}(\beta, h)$ é uma função convexa de h*

Demonstração. Sejam $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$, note que podemos ver a função de partição $\log Z_{\Lambda, \mathbf{J}, \beta, h}^{\#}$ como a integral da função $\sigma \mapsto e^{-\beta H^{\#}(\sigma)}$ com respeito à medida da contagem. Logo, temos que, para todo $t \in (0, 1)$, pela Desigualdade de Hölder, com $p = 1/t$ e $q = 1/(1-t)$,

$$\begin{aligned} Z_{\Lambda, \beta, t h_1 + (1-t) h_2}^{\#} &= \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^{\#}} e^{-\beta H_{\Lambda, t h_1 + (1-t) h_2}^{\#}(\sigma)} \\ &= \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^{\#}} e^{t \beta H_{\Lambda, h_1}^{\#}(\sigma)} e^{(1-t) \beta H_{\Lambda, h_2}^{\#}(\sigma)} \\ &\stackrel{(\text{Des. Hölder})}{\leq} \left(\sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^{\#}} e^{\beta H_{\Lambda, h_1}^{\#}(\sigma)} \right)^t \left(\sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^{\#}} e^{\beta H_{\Lambda, h_2}^{\#}(\sigma)} \right)^{(1-t)} \\ &= (Z_{\Lambda, \beta, h_1}^{\#})^t (Z_{\Lambda, \beta, h_2}^{\#})^{(1-t)} \end{aligned}$$

Agora, calculamos o logaritmo em ambos os lados, dividimos por $|\Lambda|$, e o resultado segue. \square

A convexidade da função de pressão não é mera curiosidade. De fato, sequências de funções convexas se comportam muito bem com respeito a limites. Faremos uso dessa propriedade em breve. Antes disso, precisamos garantir a existência do limite $p_\Lambda^\#$, quando $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$. Definiremos, agora, o significado de " $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$ ",

Definição 1.7 (Convergência no Sentido de van Hove). *Seja $\{\Lambda_n\}_n$ uma sequência de subconjuntos finitos de \mathbb{Z}^d , dizemos que Λ_n converge para \mathbb{Z}^d no sentido de van Hove se*

1. $\{\Lambda_n\}_n$ é uma sequência crescente, i.e, $\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
2. $\{\Lambda_n\}_n$ converge para \mathbb{Z}^d como conjunto, i.e, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n = \mathbb{Z}^d$;
3. Vale a seguinte igualdade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial^{in} \Lambda_n|}{|\Lambda_n|} = 0,$$

onde $\partial^{in} \Lambda_n = \{i \in \Lambda_n : \exists j \notin \Lambda_n, |i - j|_1 = 1\}$.

Denotaremos tal convergência apenas como $\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^d$ no sentido de van Hove. Quando apenas as condições 1 e 2 forem satisfeitas, usaremos a notação $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$.

Exemplo 1.5. A sequência $\Lambda_n = [-n, n]^d$ satisfaz $\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^d$ no sentido de van Hove. Basta observar que $|\partial^{in} \Lambda_n| = 2dn^{d-1}$ e $|\Lambda_n| = n^d$

Exemplo 1.6. A sequência $\Lambda_n = B(n) := \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_1 \leq n\}$ também satisfaz $\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^d$ no sentido de van Hove. Fica a cargo do leitor a demonstração desse fato.

Sugerimos, como exercício, a construção uma sequência de conjuntos $\{\Lambda_n\}_n$ tal que $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$, mas que não satisfaz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial^{in} \Lambda_n|}{|\Lambda_n|} = 0$.

Observação 1.6. *Seja $\{\Lambda_n\}_n$ qualquer sequência tal que $\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^d$ no sentido de van Hove. Seja $m \in \mathbb{N}$, considere a partição de \mathbb{Z}^d dada por hipercubos de lado m , isto é, a família \mathcal{H}^m , cujos elementos são da forma $\{x \in \mathbb{Z}^d : n_j m \leq x_j < (n_j + 1)m\}$ para alguma escolha de inteiros $n_1, \dots, n_j \in \mathbb{Z}$. Denotaremos o conjunto de tais retângulos por \mathbf{C}_m .*

Para um dado subconjunto de $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, definimos $N_m^+(\Lambda)$ como a quantidade de elementos de \mathbf{C}_m que intercepta Λ e $N_m^-(\Lambda)$ como a quantidade de elementos de \mathcal{H}_m que está contido em Λ . Note que

$$0 \leq N_m^-(\Lambda) \leq \frac{|\Lambda|}{m^d} \leq N_m^+(\Lambda) \leq |\Lambda|, \quad (1.34)$$

uma vez que cada elemento de \mathcal{H}_m tem cardinalidade m^d .

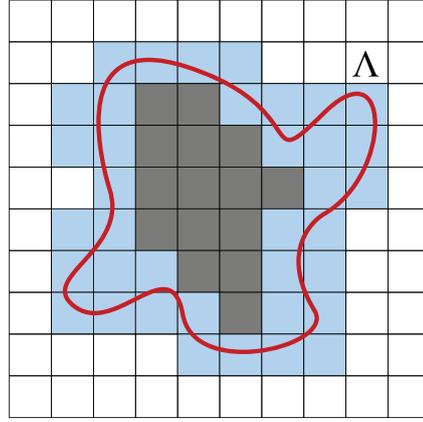


Figura 1.10: Na figura, Λ é o conjunto dos pontos de \mathbb{Z}^d delimitado pela linha contínua em vermelho. Além disso, colorimos os retângulos de lado m , que interceptam ou estão contidos em Λ .

Observe que $N_m^+(\Lambda) - N_m^-(\Lambda)$ é o número de hipercubos que interceptam Λ e não estão contidos em Λ , cada hipercubo que satisfaça tal condição, necessariamente, contém ao menos um elemento de $\partial^{in} \Lambda$. Logo, $0 \leq N_m^+(\Lambda) - N_m^-(\Lambda) \leq |\partial^{in} \Lambda|$. Sendo assim, se $\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^d$ no sentido de van Hove, temos que

$$0 \leq 1 - \frac{N_m^-(\Lambda_n)}{N_m^+(\Lambda_n)} \leq \frac{|\partial^{in} \Lambda_n|}{N_m^+(\Lambda_n)} = \frac{|\partial^{in} \Lambda_n|}{\frac{N_m^+(\Lambda_n)}{|\Lambda_n|}} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

E, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_m^-(\Lambda_n)}{N_m^+(\Lambda_n)} = 1, \forall m \in \mathbb{N}. \quad (1.35)$$

Além disso, pela desigualdade (1.34) e pela equação (1.35), temos que se $\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^d$ no sentido de van Hove, temos que, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_m^-(\Lambda_n)}{|\Lambda_n|} = \frac{1}{m^d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_m^+(\Lambda_n)}{|\Lambda_n|}. \quad (1.36)$$

Em outras palavras, a densidade de hipercubos dentro de Λ_n é cada vez mais uniforme.

A convergência no sentido de van Hove é a forma mais apropriada de convergência para nossos estudos. O primeiro e o segundo item são hipóteses intuitivas, enquanto o terceiro item garante que a condição de fronteira do sistema terá sua influência restrita quando formos

calcular o limite termodinâmico. De fato, quando essa convergência existir, teremos que ela é independente das condições de fronteira!

Ao longo do restante desta seção, faremos uma mudança de notação. No Modelo de Ising, consideramos somente as interações entre pares de partículas e entre cada partícula e o campo magnético. Porém, podemos considerar interações entre quaisquer conjuntos finitos. Por exemplo, poderíamos adicionar na definição do Hamiltoniano $H_{\Lambda,h}^{\#}(\sigma)$ o somatório $\sum_{x,y,z} J_{x,y,z} \sigma_x \sigma_y \sigma_z$, para alguma família de constantes $\{J_{x,y,z}\}_{x,y,z}$. De fato, existem modelos físicos que consideram a interação de três átomos, como, por exemplo, o modelo de Axilrod–Teller [AT43]. De modo mais geral, dada uma família $\mathbf{J} = \{J_A\}_{A \subset \mathbb{Z}^d}$, onde A é sempre finito, podemos definir o Hamiltoniano de $\sigma \in \Omega_{\Lambda}$ como

$$H_{\Lambda,\mathbf{J}}^0(\sigma) = - \sum_{A \subset \Lambda} J_A \sigma_A$$

e, para $\tau \in \Omega$ e $\sigma \in \Omega_{\Lambda}^{\tau}$

$$H_{\Lambda,\mathbf{J}}^{\tau}(\sigma) = - \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset} J_A \sigma_A.$$

Descrevendo o Modelo de Ising nesses termos, obtemos

$$J'_A = \begin{cases} \beta h, & \text{se } A = \{x\}; \\ \beta J_{x,y}, & \text{se } A = \{x, y\}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.37)$$

Dessa forma, temos que $H_{\Lambda,\mathbf{J}'}^{\#} = \beta H_{\Lambda,\mathbf{J},h}^{\#}$. Faremos essa mudança para assim uniformizar a natureza das somas das parcelas do Hamiltoniano. Sendo assim, introduzimos conceitos de Análise Funcional.

Nosso interesse é no caso em que tal interação é invariante por translação, isto é, para todo $A \subset \mathbb{Z}^d$ e todo $x \in \mathbb{Z}^d$, temos $J(A - x) = J(A)$, onde $A - x = \{a - x : a \in A\}$. Considere a norma de \mathbf{J} como

$$\|\mathbf{J}\| = \sum_{0 \in A \subset \mathbb{Z}^d} \frac{|J_A|}{|A|}.$$

E defina espaço

$$\mathcal{J} = \{\mathbf{J} = \{J_A\}_{A \subset \mathbb{Z}^d} : J(A) \in \mathbb{R}, \mathbf{J} \text{ é invariante por translação e } \|\mathbf{J}\| < \infty\}.$$

Temos que $(\mathcal{J}, \|\cdot\|)$ é, de fato, um **Espaço de Banach** (veja [Bre10]). Dizemos que \mathbf{J} possui alcance finito se existe $R > 0$ tal que $\text{diam}(A) := \sup\{\|x - y\|_1 : x, y \in A\} > R$ implica que $J(A) = 0$. Em outras palavras, no sistema descrito por \mathbf{J} , cada partícula só terá interação com um número finito de outras partículas, que estão a uma distância máxima R .

Com isso definimos

$$\mathcal{J}_0 = \{\mathbf{J} \in \mathcal{J} : \mathbf{J} \text{ possui alcance finito}\}.$$

É fácil verificar que \mathcal{J}_0 é um subespaço denso de \mathcal{J} . O leitor pode questionar a necessidade de introduzir tais conceitos neste momento. O motivo principal é gartirmos a convergência da pressão $p_\Lambda^\#(\mathbf{J}) = |\Lambda|^{-1} \log \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda^\#} e^{\beta H_{\Lambda, \mathbf{J}}(\sigma)}$ no caso $\mathbf{J} \in \mathcal{J}_0$ e usarmos a estrutura de Espaço de Banach para estender o resultado para todo \mathcal{J} . Nas próximas duas demonstrações, adotaremos a notação $p_\Lambda^\#(\mathbf{J})$, mas, de fato, estaremos pensando no caso equivalente ao modelo de Ising dado em (1.37).

Vale lembrar que o foco desta dissertação é o caso para primeiros vizinhos, que é um modelo de alcance finito. Logo, o leitor que não possuir familiaridade com Análise Funcional não precisa se preocupar com tal extensão.

Em seguida, desejamos mostrar que $\mathbf{J} \mapsto p_\Lambda^\#(\mathbf{J})$ é uma função Lipchitz contínua. Para isso, usaremos o seguinte lema técnico.

Lema 1.22. *Sejam μ uma medida de probabilidade e $f, g \in L^\infty(\mathbb{P})$, vale a seguinte desigualdade*

$$\left| \log \langle e^f \rangle_\mu - \log \langle e^g \rangle_\mu \right| \leq \|f - g\|_\infty.$$

Demonstração. Para tanto, utilizaremos a famosa **Desigualdade de Jensen**, que nos mostra que, para uma função convexa $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e \mathbb{P} uma medida de probabilidade, X uma variável aleatória, temos

$$\varphi(\langle X \rangle_\mu) \leq \langle \varphi(X) \rangle_\mu. \quad (1.38)$$

Agora, para $\mu_g(A) = (\langle e^g \rangle_\mu)^{-1} \langle \mathbb{1}_A e^{-g} \rangle_\mu$, defina uma medida de probabilidade. Observe que

$$\begin{aligned} \log \langle e^f \rangle_\mu - \log \langle e^g \rangle_\mu &= \log \langle e^{f-g} \rangle_{\mu_g} \\ &\stackrel{(\text{Des. Jensen})}{\geq} \langle (f - g) \rangle_{\mu_g} \geq -\|f - g\|_\infty. \end{aligned}$$

Permutando os papéis de f e g , conseguimos a desigualdade

$$\log \langle e^f \rangle_\mu - \log \langle e^g \rangle_\mu \leq \|f - g\|_\infty.$$

e, portanto, vale o Lema. \square

Dados $\mathbf{J}, \mathbf{J}' \in \mathcal{J}$, aplicamos o resultado anterior em $(\Omega_\Lambda^0, \mathcal{F}_\Lambda^0, \mu)$, onde μ é a medida de probabilidade uniforme e $f(\sigma) := e^{-\beta H_{\Lambda, \mathbf{J}}^\#(\sigma)}$ e $g(\sigma) := e^{-\beta H_{\Lambda, \mathbf{J}'}^\#(\sigma)}$, de modo a obter

$$\begin{aligned} |\Lambda| |p_\Lambda^0(\mathbf{J}) - p_\Lambda^0(\mathbf{J}')| &= \left| \log \left(2^{|\Lambda|} \langle e^f \rangle_\mu \right) - \log \left(2^{|\Lambda|} \langle e^g \rangle_\mu \right) \right| \\ &= \left| \log \langle e^f \rangle_\mu - \log \langle e^g \rangle_\mu \right| \\ &\leq \|H_{\Lambda, \mathbf{J}}^0 - H_{\Lambda, \mathbf{J}'}^0\|_\infty. \end{aligned}$$

Por sua vez,

$$\|H_{\Lambda, \mathbf{J}}^0 - H_{\Lambda, \mathbf{J}'}^0\|_\infty \leq \sum_{A \subset \Lambda} |J_A - J'_A| = \sum_{x \in \Lambda} \left(\sum_{x \in A \subset \Lambda} \frac{|J_A - J'_A|}{|A|} \right) \leq |\Lambda| \|\mathbf{J} - \mathbf{J}'\|,$$

e, portanto,

$$|p_\Lambda^0(\mathbf{J}) - p_\Lambda^0(\mathbf{J}')| \leq \|\mathbf{J} - \mathbf{J}'\|. \quad (1.39)$$

De modo análogo, estendemos o resultado para $\# = \tau$ uma condição de fronteira qualquer.

Com isso, vamos a um dos resultados principais desta seção, iniciando a caracterização do Modelo de Ising a volume infinito. A seguinte demonstração segue de perto o texto de [Isr15].

Teorema 1.23. *Sejam \mathbf{J} admissível, $h, \#$ quaisquer, $\beta \geq 0$ e $\{\Lambda_n\}_n$ tal que $\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^d$ no sentido de van Hove, então o limite*

$$p(\mathbf{J}, \beta, h) := \lim_{n \rightarrow \infty} p_{\Lambda_n}^\#(\mathbf{J}, \beta, h) \quad (1.40)$$

e não depende da escolha de $\#$ ou da escolha da sequência $\{\Lambda_n\}_n$.

Demonstração. Provaremos o teorema em três partes:

- i) $\# = 0$ e $\Lambda_n = [-n, n]^d$;
- ii) $\# = 0$ e $\{\Lambda_n\}_n$ qualquer;
- iii) $\#$ e $\{\Lambda_n\}_n$ quaisquer.

Durante esta demonstração, adotaremos a descrição do sistema via $\mathbf{J} = \{J_A\}_{A \subset \mathbb{Z}^d}$, usando a descrição dada em (1.37). Além disso, faremos esta demonstração para o caso $\mathbf{J} \in \mathcal{J}_0$ e, no final da demonstração, usar o fato de que \mathcal{J}_0 é denso em \mathcal{J} para concluir que vale no caso geral.

Seja $R \in \mathbb{N}$ tal que $\text{diam}(A) > R$ implique que $J_A = 0$. Seja, então, $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que $2n + 1 = k(2m + 1 + R) + l$ tal que $k \geq 1$ e $0 \leq l \leq 2m + 1 + R$, podemos então separar o hipercubo $[-n, n]^d$ em dois subconjuntos, Λ'_n dado pela união dos k^d hipercubos de lado $2m + 1$ que estão separados por corredores largura R , e o conjunto dado por $\Lambda''_n = \Lambda_n \setminus \Lambda'_n$.

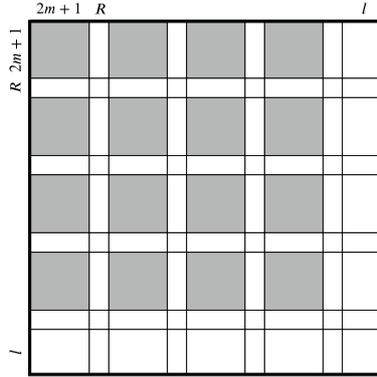


Figura 1.11: Na figura, Λ_n é definido pela linha contínua mais grossa, e Λ'_n , o seu subconjunto definido pela área sombreada.

Pela escolha de R , temos que os elementos de hipercubos distintos de Λ'_n não interagem uns com os outros. Podemos, então, pensar na pressão em Λ'_n , bastando escolher $J_A = 0$, se $A \not\subset \Lambda'_n$. Com isso, temos que o sistema é constituído de k^d cópias independentes do sistema em Λ_m e, portanto,

$$\begin{aligned} p_{\Lambda'_n}^0(\mathbf{J}) &= k^{-d} m^{-d} \log \left(\sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda_m}} e^{H_{\Lambda'_n, \mathbf{J}}(\sigma)} \right)^{k^d} \\ &= m^{-d} \log \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda_m}} e^{H_{\Lambda_m, \mathbf{J}}(\sigma)} = p_{\Lambda_m}^0(\mathbf{J}). \end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \left| |\Lambda_n| p_{\Lambda_n}^0(\mathbf{J}) - |\Lambda'_n| p_{\Lambda'_n}^0(\mathbf{J}) \right| &\leq \|H_{\Lambda_n, \mathbf{J}} - H_{\Lambda'_n, \mathbf{J}}\|_{\infty} \\ &\leq \sum_{\substack{A \subset \Lambda_n \\ A \not\subset \Lambda'_n}} |J_A| \leq |\Lambda''_n| \left(\sum_{0 \in A \subset \mathbb{Z}^d} |J_A| \right), \end{aligned} \quad (1.41)$$

onde, na última desigualdade, usamos a invariância por translação.

Defina

$$\|\mathbf{J}\| = \sum_{0 \in A \subset \mathbb{Z}^d} |J_A|.$$

Se \mathbf{J} possui alcance finito, é evidente que $\sum_{0 \in AC\mathbb{Z}^d} |J_A| < \infty$. Dividindo ambos os lados da expressão (1.41) por $|\Lambda_n| = (2n+1)^d$, obtemos

$$\left| p_{\Lambda_n}^0(\mathbf{J}) - \left(\frac{k(2m+1)}{2n+1} \right)^d p_{\Lambda_m}^0(\mathbf{J}) \right| \leq \left(1 - \left(\frac{k(2m+1)}{2n+1} \right)^d \right) \left(\sum_{0 \in AC\mathbb{Z}^d} |J_A| \right). \quad (1.42)$$

Usaremos tal estimativa para provar que $\{p_{\Lambda_n}^0(\mathbf{J})\}_n$ é uma Sequência de Cauchy. De fato, sejam $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e, para um mesmo $m \in \mathbb{N}$, escolha k_1 e k_2 de modo que satisfaça $2n_i + 1 = k_i(2m+1+R) + l_i$ tal que $k_i \geq 1$ e $0 \leq l_i \leq 2m+1+R$, $i \in \{1, 2\}$. Temos que

$$\begin{aligned} \left| p_{\Lambda_{n_1}}^0(\mathbf{J}) - p_{\Lambda_{n_2}}^0(\mathbf{J}) \right| &\leq \left| p_{\Lambda_{n_1}}^0(\mathbf{J}) - \left(\frac{k_1(2m+1)}{2n_1+1} \right)^d p_{\Lambda_m}^0(\mathbf{J}) \right| \\ &\quad + \left| p_{\Lambda_{n_2}}^0(\mathbf{J}) - \left(\frac{k_2(2m+1)}{2n_2+1} \right)^d p_{\Lambda_m}^0(\mathbf{J}) \right| \\ &\quad + \left| \left(\frac{k_1(2m+1)}{2n_1+1} \right)^d - \left(\frac{k_2(2m+1)}{2n_2+1} \right)^d \right| |p_{\Lambda_m}^0(\mathbf{J})| \\ &\stackrel{(1.42)}{\leq} \left(1 - \left(\frac{k_1(2m+1)}{2n_1+1} \right)^d \right) \left(\sum_{0 \in AC\mathbb{Z}^d} |J_A| \right) \\ &\quad + \left(1 - \left(\frac{k_2(2m+1)}{2n_2+1} \right)^d \right) \left(\sum_{0 \in AC\mathbb{Z}^d} |J_A| \right) \\ &\quad + \left| \left(\frac{k_1(2m+1)}{2n_1+1} \right)^d - \left(\frac{k_2(2m+1)}{2n_2+1} \right)^d \right| |p_{\Lambda_m}^0(\mathbf{J})| \end{aligned}$$

Agora, usando que $k_i(2m+1+R)(2n_i+1)^{-1} \rightarrow 1$, quando $n_i \rightarrow \infty$. Temos que

$$\limsup_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \left| p_{\Lambda_{n_1}}^0(\mathbf{J}) - p_{\Lambda_{n_2}}^0(\mathbf{J}) \right| \leq 2 \left(1 - \left(\frac{2m+1}{2m+1+R} \right)^d \right) \left(\sum_{0 \in AC\mathbb{Z}^d} |J_A| \right).$$

Considerando $m \rightarrow \infty$, temos que $\limsup_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} |p_{\Lambda_{n_1}}^0(\mathbf{J}) - p_{\Lambda_{n_2}}^0(\mathbf{J})| = 0$. Logo, a sequência $\{p_{\Lambda_n}^0(\mathbf{J})\}_n$ é de Cauchy, e, portanto, convergente. Isso encerra o caso i).

Por sua vez, seja $\{\Lambda_n\}_n$ qualquer sequência tal que $\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^d$ no sentido de van Hove. Agora, aplicaremos a Observação 1.6. Considere Λ'_n como a união dos hipercubos de \mathcal{H}_{m+R} que estão contidos em Λ_n . Temos, exatamente, $N_{m+R}^-(\Lambda_n)$ cópias de um hipercubo C_m de lado m contidos em Λ'_n separados por corredores de espessura R , e, portanto, não interagindo uns com os outros.

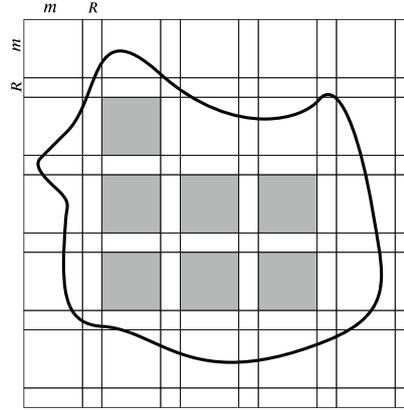


Figura 1.12: Λ_n é definido como o interior da linha contínua mais grossa e Λ'_n o seu subconjunto definido pela área sombreada.

De modo análogo ao caso anterior, temos que $p_{\Lambda'_n}^0(\mathbf{J}) = p_C^0(\mathbf{J})$ e, também,

$$\begin{aligned} \left| |\Lambda_n| p_{\Lambda_n}^0(\mathbf{J}) - |\Lambda'_n| p_{\Lambda'_n}^0(\mathbf{J}) \right| &\leq \|H_{\Lambda_n, \mathbf{J}} - H_{\Lambda'_n, \mathbf{J}}\|_\infty \\ &\leq |\Lambda_n''| \left(\sum_{A \subset \mathbb{Z}^d} |J_A| \right), \end{aligned}$$

onde $\Lambda_n'' = \Lambda_n \setminus \Lambda'_n$. Além disso, também segue que dividindo ambos os lados por $|\Lambda_n|$

$$\left| p_{\Lambda_n}^0(\mathbf{J}) - \frac{m^d N_{m+R}^-(\Lambda_n)}{|\Lambda_n|} p_{\Lambda_m}^0(\mathbf{J}) \right| \leq \left(1 - \frac{m^d N_{m+R}^-(\Lambda_n)}{|\Lambda_n|} \right) \left(\sum_{0 \in A \subset \mathbb{Z}^d} |J_A| \right)$$

e, por fim, do limite (1.36), temos que $|\Lambda_n|^{-1} m^d N_{m+R}^-(\Lambda_n) \rightarrow \left(\frac{m}{m+R}\right)^d$ e, portanto, conseguimos a estimativa

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| p_{\Lambda_n}^0(\mathbf{J}) - \left(\frac{m}{m+R}\right)^d p_{C_m}^0(\mathbf{J}) \right| \leq \left(1 - \left(\frac{m}{m+R}\right)^d \right) \left(\sum_{0 \in A \subset \mathbb{Z}^d} |J_A| \right).$$

Porém, se considerarmos $m \rightarrow \infty$, temos que $p_{C_m}^0(\mathbf{J}) \rightarrow p(\mathbf{J})$ e $\left(\frac{m}{m+R}\right)^d \rightarrow 1$, e segue que $p_{\Lambda_n}^0(\mathbf{J}) \rightarrow p(\mathbf{J})$, concluindo assim o caso ii).

Para o caso iii), para $\# = \tau \in \Omega$, como $\mathbf{J} \in \mathcal{F}_0$, temos que

$$\|H_{\Lambda, \mathbf{J}}^0 - H_{\Lambda, \mathbf{J}}^\tau\| \leq |\partial^{in} \Lambda_n| |B(R)|^2 \cdot \|\mathbf{J}\|,$$

onde, novamente, $B(R) = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_1 \leq R\}$. De fato, isso ocorre pois a diferença entre os dois hamiltonianos se resume às interações que ocorrem entre os elementos de Λ_n que estão no máximo a uma distância R de $\partial\Lambda$ e os elementos de \mathbb{Z}^d que estão, no máximo, a uma distância R dos mesmos. Com isso, temos que

$$Z_{\Lambda, \mathbf{J}}^0 e^{-|\partial^{in}\Lambda_n| |B(R)|^2 \cdot \|\mathbf{J}\|} \leq Z_{\Lambda, \mathbf{J}}^\tau \leq Z_{\Lambda, \mathbf{J}}^0 e^{|\partial^{in}\Lambda_n| |B(R)|^2 \cdot \|\mathbf{J}\|}.$$

A partir dessa observação, basta calcular o logaritmo e, em seguida, dividir por $|\Lambda_n|$ e mostrar que $|p_{\Lambda_n}^\tau(\mathbf{J}) - p_{\Lambda_n}^0(\mathbf{J})| \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$ e pelo caso ii), concluímos que o argumento vale para iii). Para isso, usaremos que $\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^d$ no sentido de van Hove.

Por fim, provamos que para uma interação $\mathbf{J} \in \mathcal{F}$ qualquer, temos que $\{p_{\Lambda_n}^\#(\mathbf{J})\}_n$ é uma sequência de Cauchy, o que garante a sua convergência. Suas demais propriedades são feitas de modo similar. Seja $\varepsilon > 0$ qualquer, e considere $\mathbf{J}' \in \mathcal{F}_0$, tal que $\|\mathbf{J} - \mathbf{J}'\| \leq \varepsilon/3$ e basta escolher $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > N_0$ implique $|p_{\Lambda_n}^\#(\mathbf{J}') - p_{\Lambda_m}^\#(\mathbf{J}')| < \varepsilon/3$ e, como provamos anteriormente, $\|\mathbf{J} - \mathbf{J}'\| \leq \varepsilon/3$ implica $|p_{\Lambda_n}^\#(\mathbf{J}') - p_{\Lambda_n}^\#(\mathbf{J})|, |p_{\Lambda_m}^\#(\mathbf{J}') - p_{\Lambda_m}^\#(\mathbf{J})| < \varepsilon/3$. Com isso, para todo $m, n > N_0$, temos que

$$\begin{aligned} |p_{\Lambda_n}^\#(\mathbf{J}) - p_{\Lambda_m}^\#(\mathbf{J})| &\leq |p_{\Lambda_n}^\#(\mathbf{J}) - p_{\Lambda_n}^\#(\mathbf{J}')| + |p_{\Lambda_m}^\#(\mathbf{J}) - p_{\Lambda_m}^\#(\mathbf{J}')| \\ &\quad + |p_{\Lambda_n}^\#(\mathbf{J}') - p_{\Lambda_m}^\#(\mathbf{J}')| < \varepsilon, \end{aligned}$$

o que conclui o teorema. □

As propriedades de paridade e de convexidade de funções são preservadas pelo limite pontual. Assim, usando as Proposições 1.20 e 1.21 e o Teorema 1.23, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.24. *Sejam \mathbf{J} admissível e $\beta > 0$ temos que, para todo $h \in \mathbb{R}$, então $p(\mathbf{J}, \beta, h)$ é uma função par e convexa de h .*

Agora, introduziremos a grandeza mais importante no estudo do Modelo de Ising

Definição 1.8. *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito, \mathbf{J} admissível e $\beta \geq 0$, temos que, para todo $h \in \mathbb{R}$, definimos a variável aleatória **densidade de magnetização** como*

$$m_\Lambda := \frac{1}{|\Lambda|} M_\Lambda,$$

onde $M_\Lambda = \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x$. E definimos a *densidade de magnetização média* como

$$m_\Lambda(\mathbf{J}, \beta, h) := \langle m_\Lambda \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\#.$$

Vale observar que, para qualquer $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, uma conta simples mostra que

$$\frac{\partial}{\partial h} p_\Lambda^\#(\mathbf{J}, \beta, h) = \frac{\frac{\partial}{\partial h} Z_{\Lambda, \mathbf{J}, \beta, h}^\#}{Z_{\Lambda, \mathbf{J}, \beta, h}^\#} = \frac{\sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda^\#} (\beta m_\Lambda) e^{-\beta H_{\Lambda, h}^\#(\sigma)}}{Z_{\Lambda, \mathbf{J}, \beta, h}^\#} = \beta \cdot m_\Lambda(\mathbf{J}, \beta, h).$$

Agora, dada a convergência de $p_\Lambda^\#(\mathbf{J}, \beta, h)$, seria possível extrair propriedades da convergência de $m_\Lambda^\#(\mathbf{J}, \beta, h)$? A resposta é afirmativa, e isso ocorre graças à convexidade p em h . Daqui até o final desta seção, omitiremos os parâmetros \mathbf{J} em $p(\beta, h)$. As próximas três proposições foram extraídas do Livro [FV14].

Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, onde I é um intervalo de \mathbb{R} , for uma função convexa, pela definição de função convexa, para todo $h_1, h_2, h_3 \in I$ tais que $h_1 < h_2 < h_3$, temos que

$$f(h_2) \leq \frac{h_3 - h_2}{h_3 - h_1} f(h_1) + \frac{h_2 - h_1}{h_3 - h_1} f(h_3)$$

o que, por sua vez, implica

$$\frac{f(h_2) - f(h_1)}{h_2 - h_1} \leq \frac{f(h_3) - f(h_1)}{h_3 - h_1} \leq \frac{f(h_3) - f(h_2)}{h_3 - h_2}. \quad (1.43)$$

Além disso, por propriedades simples de limite, temos que se $\{f_n\}_n$ é uma sequência de funções convexas $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, e essa sequência converge pontualmente para uma função f , então f é uma função convexa. Com isso, provaremos uma sequência de proposições úteis.

Proposição 1.25. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexa, então para todo compacto $K \subset I$, temos que existe $C_K < \infty$ tal que $|f(h_1) - f(h_2)| < C_K |h_1 - h_2|, \forall x, y \in K$. Em particular, f é contínua.*

Demonstração. Seja $K \subset I$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno ta que $K_\varepsilon = \{h \in \mathbb{R} : d(h, K) \leq \varepsilon\} \subset I$. Agora, defina $M = \sup_{h \in K_\varepsilon} f(h)$ e $m = \inf_{h \in K_\varepsilon} f(h)$, e, por sua vez, sejam $h_1, h_2 \in K$, $h_3 := h_1 + \varepsilon \frac{h_2 - h_1}{|h_2 - h_1|} \in K_\varepsilon$. Então, temos que $h_2 = (1 - \lambda)h_1 + \lambda h_3$, onde $\lambda = \frac{|h_1 - h_2|}{|h_1 - h_2| + \varepsilon}$, e, portanto, $f(h_2) \leq (1 - \lambda)f(h_1) + \lambda f(h_3)$ e

$$f(h_2) - f(h_1) \leq \lambda(f(h_3) - f(h_1)) \leq \lambda(M - m) \leq \frac{M - m}{\varepsilon} |h_2 - h_1|.$$

□

Proposição 1.26. *Seja $\{f_n\}_n$ uma seqüência tal que $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ são convexas convergindo pontualmente para $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Então $f_n \rightarrow f$ uniformemente em todos os compactos $K \subset I$.*

Demonstração. Sejam $a' < a < b < b'$ em I de modo que $K \subset [a, b]$, então para todo $h_1, h_2 \in [a, b]$, pela desigualdade (1.43)

$$\frac{f_n(a) - f_n(a')}{a - a'} \leq \frac{f_n(h_2) - f_n(h_1)}{h_2 - h_1} \leq \frac{f_n(b') - f_n(b)}{b' - b}.$$

Pela convergência pontual de f_n , temos que as seqüências numéricas $\frac{f_n(a) - f_n(a')}{a - a'}$ e $\frac{f_n(b') - f_n(b)}{b' - b}$ convergem, e, portanto, são limitadas. Consequentemente, existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(h_2) - f_n(h_1)| \leq C|h_2 - h_1|.$$

Agora, sejam $\varepsilon > 0$, e $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > 3C(b - a)\varepsilon^{-1}$, e escolha $\delta = (b - a)N^{-1}$ e $h'_k = h_1 + k\delta$, para todo $k \in \{0, \dots, n\}$. Pela convergência pontual, existe n_0 tal que para todo $n > n_0$

$$|f_n(h'_k) - f(h'_k)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall k \in 1, \dots, N.$$

Agora, seja $h \in [a, b]$ e $k \in \{0, \dots, N\}$ tal que $|h'_k - h| < \delta$. Então, para todo $n > n_0$, temos

$$|f_n(h) - f(h)| \leq \underbrace{|f_n(h) - f_n(h'_k)|}_{\leq C\delta < \varepsilon/3} + \underbrace{|f_n(h'_k) - f(h'_k)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f(h'_k) - f(h)|}_{\leq C\delta < \varepsilon/3} < \varepsilon,$$

o que conclui a demonstração. □

Seja agora $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, definimos as derivadas laterais de f como

$$\frac{\partial f}{\partial h^+}(h_0) := \lim_{h \rightarrow h_0^+} \frac{f(h) - f(h_0)}{h - h_0} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial h^-}(h_0) := \lim_{h \rightarrow h_0^-} \frac{f(h) - f(h_0)}{h - h_0}$$

Agora, enunciaremos o mais importante resultado para funções convexas.

Proposição 1.27. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa, então*

1. *As derivadas laterais $\frac{\partial f}{\partial h^+}(h)$ e $\frac{\partial f}{\partial h^-}(h)$ existem em todos os pontos h do interior de I ;*
2. *$\frac{\partial f}{\partial h^-}(h) \leq \frac{\partial f}{\partial h^+}(h)$, em todos os pontos h do interior de I ;*
3. *$\frac{\partial f}{\partial h^+}(h) \leq \frac{\partial f}{\partial h^-}(h')$, em todos os pontos $h < h'$ do interior de I ;*
4. *$\frac{\partial f}{\partial h^+}$, $\frac{\partial f}{\partial h^-}$ são funções não decrescentes;*

5. $\frac{\partial f}{\partial h^+}$ é contínua à direita e $\frac{\partial f}{\partial h^-}$ é contínua à esquerda;
6. O conjunto $\mathcal{D} = \{h : \frac{\partial f}{\partial h^+}(h) \neq \frac{\partial f}{\partial h^-}(h)\}$ é enumerável;
7. Seja $\{f_n\}_n$ uma sequência de funções $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexas que converge pontualmente para uma função f que é diferenciável em h , então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f_n}{\partial h^+} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f_n}{\partial h^-} = \frac{\partial f}{\partial h}(h)$.

Demonstração. Note que, pela desigualdade (1.43), para todo $h_0 \in I$, a função

$$g_{h_0}(h) := \frac{f(h) - f(h_0)}{h - h_0} \text{ é não decrescente.} \quad (1.44)$$

1. Sejam $a < b$ em I e uma sequência decrescente $\{h_n\}_n$ com $h_n > b$, para todo n . Obtemos de (1.44) que a sequência $g_b(h_n)$ é não crescente e a Desigualdade (1.43) garante que a sequência é limitada inferiormente por $g_b(a)$. Portanto, a sequência é convergente, digamos $g_b(h_n) \rightarrow l_1$. Agora, seja $\{h'_n\}$ outra sequência satisfazendo as mesmas condições, então temos que $g_b(h'_n)$ converge, digamos para l_2 . Pretendemos mostrar que $l_1 = l_2$. Para tanto, considere o conjunto $H = \{h_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{h'_n : n \in \mathbb{N}\}$, e escreva H de modo que $H = \{h''_n : n \in \mathbb{N}\}$, onde $\{h''_n\}$ seja uma sequência decrescente. Temos que $g_b(h''_n) \rightarrow l_3$, mas então $\{g_b(h_n)\}_n$ e $\{g_b(h'_n)\}_n$ são subsequências de uma sequência que converge para l_3 , logo também convergem para l_3 , e, portanto, $l_1 = l_2 = l_3$. Com isso, temos que $\frac{\partial f}{\partial h^+}$ está bem definido em qualquer ponto de interior $a \in I$. Repetindo o mesmo procedimento, podemos mostrar que $\frac{\partial f}{\partial h^-}$ está bem definido para qualquer ponto de interior.

2. Seja um ponto de interior $h \in I$ e k suficientemente pequeno de modo que $h - k, h + k \in I$, a partir da desigualdade (1.43), temos que

$$\frac{f(h - k) - f(h)}{-k} \leq \frac{f(h + k) - f(h)}{+k}.$$

Agora, basta calcular o limite $k \rightarrow 0^+$.

3. Basta notar que, para $h_1, h_2 \in I$,

$$\frac{\partial f}{\partial h^+}(h_1) \leq \frac{f(h_2) - f(h_1)}{h_2 - h_1} \leq \frac{\partial f}{\partial h^-}(h_2) \quad (1.45)$$

4. Segue imediatamente de 1. e 2.

5. Mostraremos o resultado para $\frac{\partial f}{\partial h^+}$, o outro é análogo. Pela monotonicidade de $\frac{\partial f}{\partial h^+}$, sabemos que

$$\lim_{k \rightarrow h^+} \frac{\partial f}{\partial h^+}(k) \geq \frac{\partial f}{\partial h^+}(h).$$

Por outro lado, f é contínua, e, a partir de (1.45), temos

$$\frac{f(a) - f(h)}{a - h} = \lim_{k \rightarrow h^+} \frac{f(a) - f(k)}{a - k} \geq \lim_{k \rightarrow h^+} \frac{\partial f}{\partial h^+}(k).$$

Agora, basta calcular $a \rightarrow h^+$, e o resultado segue.

6. Como I pode ser escrito como a união enumerável de intervalos fechados limitados, e a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável, podemos assumir sem perda de generalidade que provar apenas para um intervalo fechado $[a, b] \subset I$ de modo que, para um $\varepsilon > 0$, $[a - \varepsilon, b + \varepsilon] \subset I$. Como f é contínua, temos que existe $M \in \mathbb{R}$, tal que $\sup_{[a-\varepsilon, b+\varepsilon]} |f(h)| \leq M$. A partir de (1.45), que

$$\frac{\partial f}{\partial h^+}(b) \leq \frac{f(b + \varepsilon) - f(b)}{\varepsilon} \leq \frac{2M}{\varepsilon},$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial h^-}(a) \geq \frac{f(a) - f(a - \varepsilon)}{-\varepsilon} \geq -\frac{2M}{\varepsilon},$$

e, por sua vez,

$$\frac{\partial f}{\partial h^-}(a) \leq \frac{\partial f}{\partial h^+}(h), \frac{\partial f}{\partial h^-}(h) \leq \frac{\partial f}{\partial h^+}(b), \forall h \in [a, b].$$

Portanto, obtemos que $\sup_{h \in [a, b]} |\frac{\partial f}{\partial h^+}(h)|, \sup_{h \in [a, b]} |\frac{\partial f}{\partial h^-}(h)| \leq 2M\varepsilon^{-1}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, provaremos que o conjunto $\mathcal{D}_n = \{h : \frac{\partial f}{\partial h^+}(h) - \frac{\partial f}{\partial h^-}(h) \leq n^{-1}\}$. Considere, então, k pontos distintos $h_1 < \dots < h_k$ em \mathcal{D}_n , temos que

$$\frac{\partial f}{\partial h^+}(h_k) - \frac{\partial f}{\partial h^-}(h_1) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial h^+}(h_i) - \frac{\partial f}{\partial h^-}(h_i) \geq \frac{k}{n}$$

Consequentemente, provamos a seguinte cota superior

$$k \leq n \left(\frac{\partial f}{\partial h^+}(h_k) - \frac{\partial f}{\partial h^-}(h_1) \right) \leq \frac{4Mn}{\varepsilon}.$$

7. A partir das desigualdades (1.45), temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f_n}{\partial h^+}(h) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(h+k) - f_n(h)}{k} = \frac{f(h+k) - f(h)}{k}, \forall k > 0.$$

Agora, basta calcular $k \rightarrow 0^+$, e teremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f_n}{\partial h^+}(h) \leq \frac{\partial f}{\partial h^+}(h)$. Podemos proceder da mesma forma para $\frac{\partial f}{\partial h^-}(h)$, para concluirmos a expressão

$$\frac{\partial f}{\partial h^-}(h) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f_n}{\partial h^-}(h) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f_n}{\partial h^+}(h) \leq \frac{\partial f}{\partial h^+}(h),$$

assim, se f é diferenciável em h , segue que

$$\frac{\partial f}{\partial h}(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f_n}{\partial h^-}(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f_n}{\partial h^+}(h).$$

□

Consideremos o seguinte conjunto

$$\mathcal{D}_{\mathbf{J},\beta} = \{h \in \mathbb{R} : p(\mathbf{J}, \beta, \cdot) \text{ não é diferenciável}\}.$$

Da Proposição 1.27 item 6., temos que $\mathcal{D}_{\mathbf{J},\beta}$ é enumerável. Com isso, vamos ao segundo teorema desta seção.

Teorema 1.28. *Sejam \mathbf{J} admissível, $\#$ qualquer $\beta > 0$ e $\{\Lambda_n\}_n$ tal que $\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^d$ no sentido de van Hove, então existe um conjunto $\mathcal{D}_{\mathbf{J},\beta}$ enumerável tal que, para todo $h \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_{\mathbf{J},\beta}$, a densidade de magnetização a volume infinito*

$$m(\mathbf{J}, \beta, h) := \lim_{n \rightarrow \infty} m_{\Lambda_n}^{\#}(\mathbf{J}, \beta, h).$$

existe e é independente da escolha de $\{\Lambda_n\}_n$ ou de $\#$. Além disso, a seguinte igualdade é satisfeita

$$\beta \cdot m(\mathbf{J}, \beta, h) = \frac{\partial p}{\partial h}(\mathbf{J}, \beta, h). \quad (1.46)$$

A função $h \mapsto m(\mathbf{J}, \beta, h)$ é uma função não decrescente, ímpar contínua em $\mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_{\mathbf{J},\beta}$. Por sua vez, se $h \in \mathcal{D}_{\mathbf{J},\beta}$, temos que

$$\beta \lim_{h' \rightarrow h^+} m(\mathbf{J}, \beta, h) = \frac{\partial p}{\partial h^+}(\mathbf{J}, \beta, h), \quad \beta \lim_{h' \rightarrow h^-} m(\mathbf{J}, \beta, h) = \frac{\partial p}{\partial h^-}(\mathbf{J}, \beta, h). \quad (1.47)$$

Em particular, a **magnetização espontânea**

$$m^*(\mathbf{J}, \beta) = \lim_{h \rightarrow 0^+} m(\mathbf{J}, \beta, h)$$

está sempre bem definida.

Demonstração. Como vimos na Proposição 1.24, $p(\mathbf{J}, \beta, h)$ é convexa, então, se $h \notin \mathcal{D}_{\mathbf{J}, \beta}$, o item 7. da Proposição nos garante que o limite das derivadas é a derivada do limite. Por sua vez, a Proposição 1.27 mostra que

$$\frac{\partial p}{\partial h}(\mathbf{J}, \beta, h) = \frac{\partial}{\partial h} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{\Lambda_n}^{\#}(\mathbf{J}, \beta, h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial h} p_{\Lambda_n}^{\#}(\mathbf{J}, \beta, h) = \beta \lim_{n \rightarrow \infty} m_{\Lambda_n}^{\#}(\mathbf{J}, \beta, h),$$

o que assegura a existência de $m_{\Lambda_n}^{\#}(\mathbf{J}, \beta, h)$ e demonstra (1.46). Por sua vez, o Teorema 1.23 nos garante que o lado esquerdo da equação acima não depende da escolha de $\#$ ou de $\{\Lambda_n\}_n$. Os itens 4. e 5. da Proposição 1.27 nos afirmam a continuidade e monotonicidade das derivadas laterais, e, portanto, a monotonicidade e a continuidade de $m_{\Lambda_n}^{\#}(\mathbf{J}, \beta, h)$ são garantidas. Por fim, a Proposição 1.24 nos garante que p é uma função par. Consequentemente, sua derivada é um função ímpar.

Agora, seja $h \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_{\mathbf{J}, h}$. Como $\mathcal{D}_{\mathbf{J}, h}$ é enumerável, existe uma sequência decrescente $\{h_k\}_k$ tal que $h_k \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_{\mathbf{J}, h}$ e $h_k \rightarrow h^+$. Pela identidade (1.46), temos que $\frac{\partial p}{\partial h^+}(\mathbf{J}, \beta, h_k) = \beta \cdot m(\mathbf{J}, \beta, h_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Porém, pela continuidade da derivada à direita, provada no item 5. da Proposição 1.27, o resultado segue. De modo análogo, provamos que $\beta \lim_{h' \rightarrow h^-} m(\mathbf{J}, \beta, h') = \frac{\partial p}{\partial h^-}(\mathbf{J}, \beta, h)$.

□

Com isso, podemos, enfim, definir pela primeira vez o que é **transição de fase**.

Definição 1.9. *Seja \mathbf{J} admissível, dizemos que o Modelo de Ising passa por uma transição de fase em $\beta > 0$ e $h \in \mathbb{R}$ se $p(\mathbf{J}, \beta, \cdot)$ não é diferenciável em h .*

O Teorema 1.28 garante que para cada \mathbf{J} admissível e $\beta > 0$, existem, no máximo, uma quantidade enumerável de pontos h para os quais o modelo passa por transição de fase.

No próximo capítulo, começaremos o estudo sistemático para determinar precisamente em que regiões do plano existe transição de fase. Antes disso, porém, teremos mais uma seção neste capítulo a fim de encontrar uma importante equivalência para a nossa de transição de fase.

1.5 As medidas no volume infinito

Agora, estudaremos a ideia de convergência de medidas, em particular, das medidas de Gibbs, quando o volume $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$ no sentido de van Hove. Para tanto, aplicaremos alguns elementos de Análise Funcional, em particular a ideia de **convergência fraca***. O leitor que não possuir familiaridade com o assunto não precisa se preocupar, introduziremos as

ideias necessárias para o desenvolvimento deste texto. Vale notar que, ao longo desta seção, voltaremos a omitir a dependência em \mathbf{J} nos objetos estudados.

Antes de mais nada, estenderemos as medidas $\mu_{\Lambda,\beta,h}^\tau(\cdot)$ da forma mais simples possível. Seja $\sigma \in \Omega$, definimos

$$\mu_{\Lambda,\beta,h}^\tau(\sigma) := \begin{cases} \frac{e^{-\beta H_{\Lambda,h}^\tau(\sigma)}}{Z_{\Lambda,\beta,h}^\tau}, & \text{se } \sigma_x = \tau_x, \forall x \notin \Lambda; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De fato, isso não altera nosso estudo até aqui, uma vez que só trabalhamos nos finitos Λ . Tal construção é mais delicada no caso em que $\# = 0$, uma vez que não temos candidatos para as coordenadas em Λ^c . Portanto, nós nos concentraremos, por alguns instantes, nos casos $\# = \tau \in \Omega$.

Quando pretendemos tratar de convergência de medidas de probabilidade, digamos $\{\mu_n\}$ convergindo para μ , todas definidas em um mesmo espaço de probabilidade, a definição mais natural seria que as probabilidades $\mu_n(A) \rightarrow \mu(A)$ para todo A na σ -álgebra em questão. Infelizmente, a tal definição de convergência é forte demais, no sentido de que várias sequências $\{\mu_n\}$, mesmo que bastante bem comportadas, não admitiram subsequências convergentes.

No estudo de Análise Funcional, a ideia de "enfraquecer" a topologia de um espaço normado tornou-se extremamente frutífera. Ao gerarmos uma topologia mais fraca, fica mais fácil a convergência de sequências, e faz com que mais conjuntos sejam compactos. A presença de conjuntos compactos facilita a demonstração de teoremas e possibilita novos resultados que não seriam possíveis sob condições mais gerais. Para tanto, foram definidas as chamadas topologias fraca e fraca-*, que são capazes de simultaneamente fazer com que convergências sejam suficientemente fáceis, mas que mantenham propriedades importantes (Condição de Hausdorff e continuidade de funcionais lineares limitados). Para maiores informações a respeito da topologia fraca e fraca-*, recomendamos a leitura do capítulo 3 do livro [Bre10]. Para este estudo no contexto de medidas de probabilidade, recomendamos [Bil13].

Sejam $\{\mu_n\}_n, \mu$ medidas de probabilidade, dizemos que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$, isto é, converge no sentido fraco-*, se

$$\langle f \rangle_{\mu_n} \rightarrow \langle f \rangle_{\mu}, \text{ para toda } f \text{ função em } \mathbb{R} \text{ contínua e limitada,} \quad (1.48)$$

onde $\langle \cdot \rangle_{\mu_n}, \langle \cdot \rangle_{\mu}$ representam os valores esperados de acordo com as medidas μ_n e μ , respectivamente.

Agora, definiremos um conceito importante que será utilizado diversas vezes ao longo desta dissertação.

Definição 1.10. *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que f é uma função quasi-local se existe um conjunto se existe uma sequência de funções locais $\{f_n\}_n$ tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente. Analogamente, um evento é dito um evento quasi-local se sua função indicadora é uma função quasi-local.*

Como $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ e é dotado da topologia produto, temos que Ω é o espaço do produto de espaços compactos, e, portanto, pelo Teorema de Tychonoff (veja [Mun00]), temos que Ω é compacto. Essa compacidade implica que toda função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínua seja limitada e uniformemente contínua. Note que, se f é uniformemente contínua, temos, então, que, para qualquer $\{\Lambda_n\}_n$ uma sequência tal que $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\sigma, \sigma' \in \Omega \\ \sigma_x = \sigma'_x, \forall x \in \Lambda_n}} |f(\sigma) - f(\sigma')| = 0. \quad (1.49)$$

Por sua vez, seja f contínua, seja $\tau \in \Omega$ arbitrário, definimos

$$f_\Lambda^\tau(\sigma) = f(\sigma_\Lambda^\tau),$$

onde

$$(\sigma_\Lambda^\tau)_x = \begin{cases} \sigma_x, & \text{se } x \in \Lambda \\ \tau_x, & \text{se } x \in \Lambda^c. \end{cases}$$

Observe que f_Λ^τ é uma função local. Então, por (1.49), temos que $\|f_\Lambda^\tau - f\|_\infty \rightarrow 0$. Isto é, funções locais formam um conjunto denso em $C(\Omega)$, o espaço de todas as funções contínuas de Ω em \mathbb{R} . Isto é, toda função contínua é quasi-local. Por sua vez, como toda função local é contínua, temos que pela convergência uniforme, toda função quasi-local é contínua.

Com isso, podemos simplesmente procurar limites fraco-* das sequências $\{\mu_{\Lambda_n, \beta, h}^\tau\}$ testando (1.48) apenas para funções locais. Observe que a Proposição 1.1 garante que toda função local pode ser escrita como combinação linear de funções do tipo σ_A ou η_A , para $A \subset \mathbb{Z}^d$ finitos. Sendo assim, como integrais são operadores lineares, podemos dizer que $\mu_{\Lambda_n, \beta, h}^\tau \xrightarrow{*} \mu$ se

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\tau \longrightarrow \langle \sigma_A \rangle_\mu, \forall A \subset \mathbb{Z}^d \text{ finito}$$

ou

$$\langle \eta_A \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\tau \longrightarrow \langle \eta_A \rangle_\mu, \forall A \subset \mathbb{Z}^d \text{ finito},$$

onde $\langle \cdot \rangle_\mu$ denota o valor esperado de acordo com a medida de probabilidade μ . Porém, note que tal definição pode ser estendida para o caso $\# = 0$, bastando escolher Λ suficientemente grande de maneira que $A \subset \Lambda$. Passamos, então, a formalizar

Definição 1.11. *Sejam \mathbf{J} admissível, $h \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\{\Lambda_n\}_n$, $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ (não necessariamente no sentido de van Hove) e $\#$ qualquer. Dizemos que $\mu_{\Lambda_n, \beta, h}^\# \xrightarrow{*} \mu$, se*

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^\# \longrightarrow \langle \sigma_A \rangle_\mu, \forall A \subset \mathbb{Z}^d \text{ finito}$$

ou

$$\langle \eta_A \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^\# \longrightarrow \langle \eta_A \rangle_\mu, \forall A \subset \mathbb{Z}^d \text{ finito},$$

onde $\langle \cdot \rangle_\mu$ denota o valor esperado de acordo com a medida de probabilidade μ . Além disso, neste caso, denotaremos $\mu_{\beta, h}^\# = \mu$ e seu valor esperado por $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^\#$.

Não é claro, a princípio, que existe um limite fraco-* para toda toda sequência $\mu_{\Lambda_n, \beta, h}^\#$ condição de fronteira, ou sequer que existiria para alguma medida. Porém, pelo menos nos casos mais simples, isto é, $\# \in \{-, 0, +\}$, podemos usar as desigualdades de correlação para provar a existência de tais limites. Para isso, teremos que fazer uso do seguinte famoso Teorema de Riesz-Markov-Kakutani.

Lema 1.29. *Suponha que $\{A_n\}_n$ é uma família de eventos quasi-locais tal que $A_{n+1} \subset A_n$ de modo que $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \emptyset$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, temos $A_n = \emptyset$.*

Demonstração. Suponha que todo A_n é não vazio. Por se tratar de eventos quasi-locais, podemos escolher um evento C_n da forma $C_n = \{\sigma : \sigma_{i_k} = j_k^{(n)}, \forall i \in \{i_1^{(k)}, \dots, i_{m^{(n)}}^{(k)}\}\}$ para alguma coleção $\{i_1^{(k)}, \dots, i_{m^{(n)}}^{(k)}\}$ e $\{j_1^{(n)}, \dots, j_{m^{(n)}}^{(n)}\}$ de modo que $C_n \subset A_n$. Além disso, podemos escolher C_n de modo que $C_{n+1} \subset C_n$. Como C_n são conjuntos compactos (pelo Teorema de Tychonoff) e não vazios, segue do Teorema de Cantor que $\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^\infty C_n \subset \bigcap_{n=1}^\infty A_n$, o que é um absurdo. Logo, a coleção $\{A_n\}_n$ só possui um número finito de conjuntos não vazios. \square

Lema 1.30. *Seja $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma medida finitamente aditiva no conjunto na álgebra dos cilindros \mathcal{F}_0 , então μ é σ -aditiva.*

Demonstração. Primeiro, provaremos que, se $\{A_n\}_n$ é uma coleção de conjuntos locais e disjuntos, então existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que $A_n = \emptyset$ para todo $n > N$. Defina $B_n := \bigcup_{m=1}^n A_m$ e $C_n := \bigcup_{m=n+1}^\infty A_m$. Temos que C_n é quasi-local e satisfaz as hipóteses do Lema 1.5. Portanto, $C_n = \emptyset$, para todo $n > N$, para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Daí decorre que,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N \mu(A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n).$$

□

Teorema 1.31. *Sejam J admissível, $h \in \mathbb{R}, \beta \geq 0, \{\Lambda_n\}_n, \Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ (não necessariamente no sentido de van Hove). Então, existem os limites fraco- $*$ $\mu_{\beta,h}^-, \mu_{\beta,h}^0, \mu_{\beta,h}^+$ medidas de probabilidade de forma que*

$$\mu_{\Lambda_n, \beta, h}^- \xrightarrow{*} \mu_{\beta, h}^-, \mu_{\Lambda_n, \beta, h}^0 \xrightarrow{*} \mu_{\beta, h}^0 \text{ e } \mu_{\Lambda_n, \beta, h}^+ \xrightarrow{*} \mu_{\beta, h}^+.$$

Os limites $\mu_{\beta, h}^-, \mu_{\beta, h}^0, \mu_{\beta, h}^+$ não dependem da escolha de $\{\Lambda_n\}_n$.

Demonstração. Começaremos pelo caso $\# = +$. No Exemplo 1.1, mostramos que η_A é uma função não decrescente para todo $A \subset \mathbb{Z}^d$ finito. Agora, de acordo com a Proposição 1.17, segue que $\{\langle \eta_A \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+\}_k$ é uma sequência não crescente, limitada inferiormente por 0 e, portanto, a sequência converge. Para provar que esse limite não depende da escolha de $\{\Lambda_n\}_n$, considere duas sequências $\{\Lambda_n^1\}_n$ e $\{\Lambda_n^2\}_n$ ambas tais que $\Lambda_n^i \uparrow \mathbb{Z}^d, i \in \{1, 2\}$. Para todo $A \subset \mathbb{Z}^d$ finito, temos que $\{\langle \eta_A \rangle_{\Lambda_n^i, \beta, h}^+\}_k$ é convergente, digamos $\langle \eta_A \rangle_{\Lambda_n^i, \beta, h}^+ \longrightarrow \langle \eta_A \rangle_{\beta, h}^{+,i}$. Considere uma sequência $\{\Delta_k\}_k$ de modo que

$$\Delta_{2k-1} \in \{\Lambda_n : n \in \mathbb{N}\}, \Delta_{2k} \in \{\Lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ tal que } \Delta_k \subsetneq \Delta_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Evidentemente que $\Delta_k \uparrow \mathbb{Z}^d$. Além disso, temos que para todo $A \subset \mathbb{Z}^d$, obtemos que $\{\langle \eta_A \rangle_{\Delta_k, \beta, h}^+\}_k$ é convergente, digamos $\langle \eta_A \rangle_{\Delta_k, \beta, h}^+ \longrightarrow \langle \eta_A \rangle_{\beta, h}^{+,3}$. Porém, $\{\langle \eta_A \rangle_{\Delta_k, \beta, h}^+\}_k$ admite uma subsequência que converge para $\langle \eta_A \rangle_{\beta, h}^{+,1}$ e outra subsequência que converge para $\langle \eta_A \rangle_{\beta, h}^{+,2}$, e, portanto,

$$\langle \eta_A \rangle_{\beta, h}^{+,3} = \langle \eta_A \rangle_{\beta, h}^{+,1} = \langle \eta_A \rangle_{\beta, h}^{+,2}.$$

Logo, o limite não depende da escolha de $\{\Lambda_n\}_n$. Falta provar que $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^+$, de fato, é induzido por uma medida de probabilidade. Para isso, note que toda função indicadora de eventos locais, temos que

$$\mu_{\beta, h}^+(E) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\Lambda_n, \beta, h}^+(E)$$

são números reais bem definidos e definem uma medida na álgebra de eventos cilíndricos. Portanto, pelo Lema 1.30 e pelo Teorema da Extensão de Caratheodory (ver [Bar14]), podemos definir uma medida de probabilidade μ em \mathcal{F} de maneira que $\mu(E) = \mu_{\beta, h}^+(E)$, para todo evento E cilíndrico.

O caso $\# = -$ segue de maneira análoga, usando a Desigualdade FKG, e a monotonicidade das sequências $\{\langle -\eta_A \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^-\}_k$ ($-\eta_A$ é uma função não crescente). Por sua vez, o caso $\# = 0$ explora o mesmo tipo de argumento, porém, usando a Proposição 1.18 que garante que $\{\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^0\}_k$ são sequências monótonas. □

Antes de concluir o capítulo, analisaremos dois importantes conceitos. O primeiro, é um conceito que explora como as medidas a volume infinito se comportam em relação a simetrias de \mathbb{Z}^d .

Seja $z \in \mathbb{Z}^d$, definimos a translação por z como $\theta_z : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$ como $\theta_z(x) := x + z$. Além disso, para $\sigma \in \Omega$ definimos $\theta_z(\sigma) := \{(\theta_z \sigma)_x\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$, onde $(\theta_z \sigma)_x := \sigma_{x-z}$, e para $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, denote $\theta_z \Lambda := \{x + z : x \in \Lambda\}$.

Definição 1.12. Dizemos que uma medida de probabilidade μ em (Ω, \mathcal{F}) é *invariante por translação* se, $\langle f \circ \theta_z \rangle_\mu = \langle f \rangle_\mu, \forall z \in \mathbb{Z}^d, \forall f$ função local.

Teorema 1.32. Sejam \mathbf{J} admissível, $h \in \mathbb{R}, \beta \geq 0$. Temos que $\mu_{\beta,h}^+, \mu_{\beta,h}^-$ e $\mu_{\beta,h}^0$ são invariantes por translação.

Demonstração. Mostraremos para o caso $\# = +$, e os demais seguem de maneira análoga. Note que $\theta_z : \Omega_{\theta_z \Lambda}^+ \rightarrow \Omega_\Lambda^+$ é uma bijeção. Além disso, para toda f local, temos que

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \Omega_{\theta_z \Lambda}^+} f(\theta_z \sigma) e^{\beta \sum_{x,y \in \theta_z \Lambda} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y + \beta h \sum_{x \in \theta_z \Lambda} \sigma_x + \beta h \sum_{x \in \theta_z \Lambda, y \notin \theta_z \Lambda} J_{x,y} \sigma_x} \\ &= \sum_{\sigma \in \Omega_{\theta_z \Lambda}^+} f(\theta_z \sigma) e^{\beta \sum_{x,y \in \theta_z \Lambda} J_{x+z,y+z}(\theta_z \sigma)_{x+z}(\theta_z \sigma)_{y+z} + \beta h \sum_{x \in \theta_z \Lambda} (\theta_z \sigma)_{x+z} + \beta \sum_{x \in \theta_z \Lambda, y \notin \theta_z \Lambda} J_{x+z,y+z}(\theta_z \sigma)_{x+z}} \\ &= \sum_{\theta_z \sigma \in \Omega_\Lambda^+} f(\theta_z \sigma) e^{\beta \sum_{x+z,y+z \in \Lambda} J_{x+z,y+z}(\theta_z \sigma)_{x+z}(\theta_z \sigma)_{y+z} + \beta h \sum_{x+z \in \Lambda} (\theta_z \sigma)_{x+z} + \beta \sum_{x+z \in \Lambda, y+z \notin \Lambda} J_{x+z,y+z}(\theta_z \sigma)_{x+z}} \\ &= \sum_{\sigma' \in \Omega_\Lambda^+} f(\sigma') e^{\beta \sum_{x',y' \in \Lambda} J_{x',y'} \sigma'_{x'} \sigma'_{y'} + \beta h \sum_{x' \in \Lambda} \sigma'_{x'} + \beta \sum_{x' \in \Lambda, y' \notin \Lambda} J_{x',y'+z} \sigma'_{x'}}, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade fizemos a substituição $x' = x + z, y' = y + z$ e $\sigma' = \theta_z \sigma$. Em particular, temos que $Z_{\Lambda,\beta,h}^+ = Z_{\theta_z \Lambda,\beta,h}^+$. Portanto, para toda f local, temos

$$\langle f \circ \theta_z \rangle_{\theta_z \Lambda,\beta,h}^+ = \langle f \rangle_{\Lambda,\beta,h}^+.$$

Agora, seja $\{\Lambda_n\}_n$ tal que $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$, temos que, para todo $z \in \mathbb{Z}^d$, a sequência $\{\theta_z \Lambda_n\}_n$ também satisfaz $\theta_z \Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$. Logo,

$$\langle f \circ \theta_z \rangle_{\beta,h}^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f \circ \theta_z \rangle_{\theta_z \Lambda_n,\beta,h}^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f \rangle_{\Lambda_n,\beta,h}^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f \rangle_{\beta,h}^+$$

Portanto, $\mu_{\beta,h}^+$ é invariante por translação. □

Um detalhe fundamental na demonstração acima é que \mathbf{J} e $\# \in \{-, 0, +\}$ são invariantes por translação. O número de simetrias (por exemplo, reflexão ou rotação) de uma medida

de Gibbs a volume infinito, dependerá fundamentalmente das simetrias das condições de contorno e da interação \mathbf{J} . De fato, como \mathbf{J} e $\# \in \{-, 0, +\}$ são invariantes por rotações de $\pi, \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ e por reflexões sobre hiperplanos de \mathbb{Z}^d , tais simetrias são herdadas pelas medidas $\mu_{\beta,h}^+, \mu_{\beta,h}^-$ e $\mu_{\beta,h}^0$. Essas simetrias, porém, não serão úteis neste texto.

Agora, provaremos uma importante propriedade das medidas $\mu_{\beta,h}^+$.

Teorema 1.33. *Sejam \mathbf{J} admissível, $\beta \geq 0$ e $h \in \mathbb{R}$. Para f, g funções quasi-locais, temos que*

$$\lim_{\|z\|_1 \rightarrow \infty} \langle f(g \circ \theta_z) \rangle_{\beta,h}^+ = \langle f \rangle_{\beta,h}^+ \langle g \rangle_{\beta,h}^+$$

Dizemos que um evento A é **invariante por translações** se $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \circ \theta_z$ para todo $z \in \mathbb{Z}^d$,

Antes de provar o Teorema, cabe mencionar que o Teorema 1.33 garante que todo o evento invariante por translações um evento que satisfaz $\mu_{\beta,h}^+(A) \in \{0, 1\}$. Tal propriedade é chamada de **ergodicidade**. Essa implicação não será explorada para $\mu_{\beta,h}^+$ e portanto não provaremos o aqui. Porém, no Capítulo 4 usaremos essa implicação para outra medida de probabilidade, e lá detalharemos sua prova.

Demonstração. Sejam $A, B \subset \mathbb{Z}^d$ finitos, seja n tal que $A, B \subset [-n, n]^d$. Temos que η_A, η_B são funções não decrescentes e, além disso, segue que $\eta_B \circ \theta_z = \eta_{B-z}$. Note que, por (FKG), e pela Invariância por Translações, temos que

$$\langle \eta_A \eta_{B-z} \rangle_{\beta,h}^+ \geq \langle \eta_A \rangle_{\beta,h}^+ \langle \eta_{B-z} \rangle_{\beta,h}^+ = \langle \eta_A \rangle_{\beta,h}^+ \langle \eta_B \rangle_{\beta,h}^+ \quad (1.50)$$

Agora, seja $\|z\|_1$ suficientemente grande de modo que $[-n, n]^d \cap (\theta_z([-n, n]^d)) = \emptyset$. Lembrando que, como $\eta_A \eta_{B-z} = \eta_{A \cup (B-z)}$ é uma função não decrescente, temos que a sequência $\langle \eta_A \eta_{B-z} \rangle_{[-n, n]^d, \beta, h}^+$ decresce para $\langle \eta_A \eta_{B-z} \rangle_{\beta, h}^+$. Usando tal observação e o fato de que $[-n, n]^d \cap (\theta_z[-n, n]^d) = \emptyset$, temos

$$\begin{aligned} \langle \eta_A \eta_{B-z} \rangle_{\beta, h}^+ &\leq \langle \eta_A \eta_{B-z} \rangle_{[-n, n]^d \cup \theta_z[-n, n]^d, \beta, h}^+ \\ &= \langle \eta_A \rangle_{[-n, n]^d \cap \theta_z[-n, n]^d, \beta, h}^+ \langle \eta_{B-z} \rangle_{[-n, n]^d \cap \theta_z[-n, n]^d, \beta, h}^+ \\ &= \langle \eta_A \rangle_{[-n, n]^d, \beta, h}^+ \langle \eta_B \rangle_{[-n, n]^d, \beta, h}^+ \end{aligned} \quad (1.51)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \eta_A \rangle_{\beta,h}^+ \langle \eta_B \rangle_{\beta,h}^+ &\stackrel{(1.50)}{\leq} \liminf_{\|z\|_1 \rightarrow \infty} \langle \eta_A \eta_{B-z} \rangle_{\beta,h}^+ \\ &\leq \limsup_{\|z\|_1 \rightarrow \infty} \langle \eta_A \eta_{B-z} \rangle_{\beta,h}^+ \stackrel{(1.51)}{\leq} \langle \eta_A \rangle_{[-n,n]^d, \beta, h}^+ \langle \eta_B \rangle_{[-n,n]^d, \beta, h}^+. \end{aligned}$$

Quando $n \rightarrow \infty$, temos que

$$\lim_{\|z\|_1 \rightarrow \infty} \langle \eta_A (\eta_B \circ \theta_z) \rangle_{\beta,h}^+ = \langle \eta_A \rangle_{\beta,h}^+ \langle \eta_B \rangle_{\beta,h}^+.$$

O caso geral segue da linearidade do valor esperado e da Proposição 1.1. \square

Cabe mencionar que $\mu_{\beta,h}^-$ também é sempre uma medida ergódica, $\mu_{\beta,h}^0$. Por sua vez, não é ergódica em geral, mas possui uma propriedade mais fraca.

Teorema 1.34. *Sejam \mathbf{J} admissível, $\beta \geq 0$ e $h \in \mathbb{R}$. Para f, g funções quasilocais tais que $f(-\sigma) = f(\sigma)$ e $g(-\sigma) = g(\sigma)$ para todo $\sigma \in \Omega$, vale que*

$$\lim_{\|z\|_1 \rightarrow \infty} \langle f(g \circ \theta_z) \rangle_{\beta,h}^0 = \langle f \rangle_{\beta,h}^0 \langle g \rangle_{\beta,h}^0$$

Precisaremos desse resultado no Capítulo 4. Sua demonstração segue da seguinte identidade

$$\mu_{\beta}^0 = \frac{1}{2} \mu_{\beta}^+ + \frac{1}{2} \mu_{\beta}^- \tag{1.52}$$

e do fato de que μ_{β}^+ e μ_{β}^- são ergódicas. Porém, a prova da Identidade (1.52) não será feita nesta dissertação por sua extensão, o leitor interessado pode encontrar a demonstração desta identidade em [Aiz80], para o caso $d = 2$, e [Bod06], para o caso $d \geq 3$

Agora, introduziremos duas definições fundamentais que nos orientarão no restante deste texto.

Definição 1.13. *Sejam \mathbf{J} admissível, $h \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$, definimos o conjunto $\mathcal{G}_0(\beta, h)$ como o conjunto de todos os limites fracos das medidas $\{\mu_{\Lambda_n, \beta, h}^{\#}\}_n$, onde $\#$ qualquer e $\{\Lambda_n\}_n$ é alguma sequência tal que $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$. Além disso, definimos o **conjunto das medidas de Gibbs a volume infinito** como*

$$\mathcal{G}(\beta, h) = \overline{\text{conv}(\mathcal{G}_0(\beta, h))},$$

onde $\text{conv}(\mathcal{G}_0(\beta, h))$ denota o menor conjunto convexo que contém $\mathcal{G}_0(\beta, h)$.

O Teorema 1.31 garante que $\mathcal{G}(\beta, h) \neq \emptyset$, mas não sabemos se $\mu_{\beta, h}^+$, $\mu_{\beta, h}^0$, $\mu_{\beta, h}^-$ são ou não a mesma medida. Por se tratar de um conjunto convexo, temos que $|\mathcal{G}(\beta, h)| \in \{1, \infty\}$, o que motiva a seguinte definição.

Definição 1.14. *Seja \mathbf{J} admissível, dizemos que o Modelo de Ising passa por uma transição de fase de 1ª ordem se*

$$|\mathcal{G}(\beta, h)| > 1.$$

Os nomes 'transição de fase de 1ª ordem' e 'transição de fase' não são mera coincidência. No próximo capítulo, mostraremos a equivalência das duas definições para o Modelo de Ising. Ao longo do restante desta dissertação, estudaremos o caso do Modelo de Ising de primeiros vizinhos, definindo para que pontos do semiplano $\beta \times h$ temos transição de fase.

Capítulo 2

O problema da existência de transição de fase

No capítulo anterior, nosso interesse foi definir o Modelo de Ising em volume infinito e apresentar duas definições de transição de fase, cuja equivalência será provada a seguir. Posteriormente, passaremos à caracterização do Diagrama de Fase. Isto é, desejamos caracterizar exatamente em quais regiões do semiplano $\beta \times h$ existe transição de fase.

Para garantir que a solidez teoria na qual nós nos baseamos, decidimos que escrever o Capítulo 1 em condições mais gerais. Por isso, até este ponto, optamos por supor que \mathbf{J} é apenas admissível. A partir daqui, por questões de simplicidade, voltaremos ao nosso objetivo de analisar o Modelo de Ising com interação de primeiros vizinhos, isto é, $J_{x,y} = J \mathbb{1}_{\{\|x-y\|_1=1\}}$, onde $J > 0$. Porém, os resultados neste capítulo e no Capítulo 3 são válidos para \mathbf{J} admissível em geral. Comentaremos como o leitor pode estender todas essas demonstrações.

Neste capítulo, estudaremos duas representações gráficas para o Modelo de Ising. Uma representação gráfica consiste em introduzir um novo espaço amostral sobre subgrafos (portanto a expressão gráfica) de \mathbb{Z}^d . Tais subgrafos podem parecer, a princípio, não ter relação alguma com nossos objetivos, mas sob um olhar atento, podemos traduzir a probabilidade de eventos e valor esperado de variáveis aleatórias do Modelo de Ising em função destes novos espaços. O grande benefício dessa abordagem é que escolhemos espaços nos quais as grandezas do modelo em questão sejam traduzidas em propriedades de conexão nesses novos subgrafos, e portanto podemos usar argumentos de cunho geométrico.

Essa ideia é similar à **Representação por Correntes Aleatórias**, introduzida na Seção 1.2, a principal diferença é que uma corrente aleatória é não se trata subgrafo de \mathbb{Z}^d , mas sim, de uma função do conjunto de arestas nos inteiros não negativos. Porém, como veremos nos capítulos seguintes, podemos sim, extrair uma representação geométrica a partir de correntes aleatórias.

As representações gráficas introduzidas neste capítulo serão: a Representação por Contornos de Peierls e a Representação por Polímeros Aleatórios. Usaremos, também, a Desigualdade GHS e alguns teoremas de análise convexa apresentados na Seção 1.4. Terminaremos este capítulo provando uma convergência que será fundamental para o capítulo seguinte.

A seguir, apresentamos uma figura que resume onde aplicaremos cada argumento.

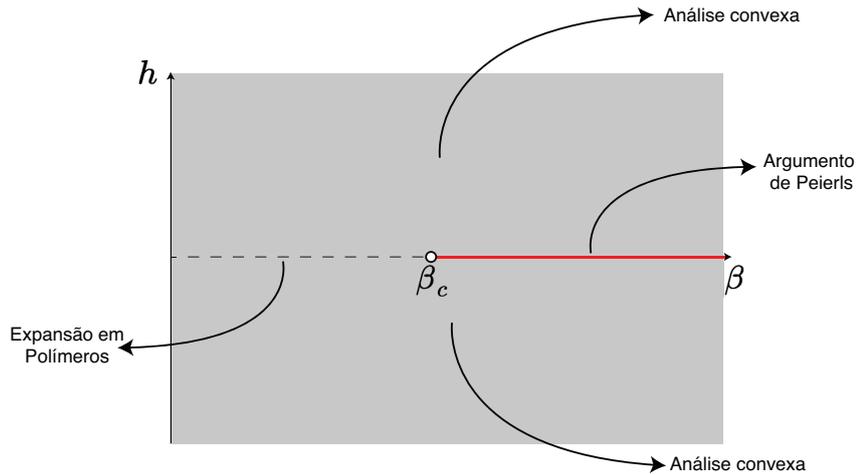


Figura 2.1: A região em vermelho representa a área onde ocorre transição de fase. Por sua vez, toda a região em cinza (incluindo o segmento pontilhado) representa a área onde ela não ocorre. Note que nada estamos afirmando sobre o ponto $\beta = \beta_c$.

2.1 Equivalências de transição de fase

Como referido no final do capítulo anterior, existe uma equivalência dos dois fenômenos de transição de fase: o primeiro, baseado na analiticidade da função de pressão; e o segundo, na cardinalidade do conjunto de Medidas de Gibbs a volume infinito.

A seguir mostraremos essa equivalência. A apresentação desta e das próximas duas seções é inspirada no livro [FV14].

Teorema 2.1. *Sejam $\beta > 0$ e $h \in \mathbb{R}$, temos que as seguintes afirmativas são equivalentes*

1. $|\mathcal{G}(\beta, h)| = 1$;
2. $\mu_{\beta, h}^+ = \mu_{\beta, h}^-$;
3. $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+ = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^-$.

Demonstração. A implicação $1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3.$ é trivial. Provaremos que $3. \Rightarrow 2.$. Para tanto, seja $\{\Lambda_n\}_n$ tal que $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ e seja $A \subset \mathbb{Z}^d$ finito. A função $(\sum_{x \in A} \eta_x) - \eta_A$ é não decrescente, como mostrado no Exemplo 1.4. Logo, a Proposição 1.19 nos garante que

$$\left\langle \sum_{x \in A} \eta_x - \eta_A \right\rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^- \leq \left\langle \sum_{x \in A} \eta_x - \eta_A \right\rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+.$$

Usando a linearidade, quando $n \rightarrow \infty$, segue que

$$\sum_{x \in A} \left(\langle \eta_x \rangle_{\beta, h}^+ - \langle \eta_x \rangle_{\beta, h}^- \right) \geq \langle \eta_A \rangle_{\beta, h}^+ - \langle \eta_A \rangle_{\beta, h}^- \geq 0.$$

A última desigualdade segue da dominação estocástica $\mu_{\beta, h}^- \leq \mu_{\beta, h}^+$, para provar isso, basta usar a Proposição 1.19 para um volume $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito e, em seguida, calcular o limite quando $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$.

Agora, como $\mu_{\beta, h}^+$ e $\mu_{\beta, h}^-$ são invariantes por translação, temos que

$$\langle \eta_x \rangle_{\beta, h}^+ - \langle \eta_x \rangle_{\beta, h}^- = \langle \eta_0 \rangle_{\beta, h}^+ - \langle \eta_0 \rangle_{\beta, h}^- = \frac{1}{2} (\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+ - \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^-) = 0,$$

onde, na última igualdade, usamos a hipótese de que 3. é válida. O que nos leva a

$$0 \leq \langle \eta_A \rangle_{\beta, h}^+ - \langle \eta_A \rangle_{\beta, h}^- \leq 0$$

Logo, pela Proposição 1.1, o resultado estende-se a toda a função local, e, portanto, $\mu_{\beta, h}^+ = \mu_{\beta, h}^-$.

Mostraremos agora que $2. \Rightarrow 1.$. Usando novamente a ideia de dominação estocástica, temos que $\mu_{\Lambda_n, \beta, h}^- \leq \mu_{\Lambda_n, \beta, h}^\# \leq \mu_{\Lambda_n, \beta, h}^+$ para todo $\#$, tal dominação estocástica é mantida quando $n \rightarrow \infty$, e como o conjunto $\mathcal{G}(\beta, h)$ é definido com combinações convexas de tais limites, temos que para todo $\mu \in \mathcal{G}(\beta, h)$, vale

$$\mu_{\beta, h}^- \leq \mu \leq \mu_{\beta, h}^+.$$

Em particular, como η_A é não decrescente, temos que

$$\langle \eta_A \rangle_{\beta, h}^- \leq \langle \eta_A \rangle_\mu \leq \langle \eta_A \rangle_{\beta, h}^+,$$

onde $\langle \eta_A \rangle_{\beta, h}$ denota o valor esperado de acordo com a medida μ . Porém, se 2. é válido, temos que

$$\langle \eta_A \rangle_{\beta, h}^- = \langle \eta_A \rangle_{\beta, h} = \langle \eta_A \rangle_{\beta, h}^+.$$

Usando novamente a Proposição 1.1, podemos estender tal igualdade para toda função local e, portanto, $\mu = \mu_{\beta,h}^+ = \mu_{\beta,h}^-$ para toda $\mu \in \mathcal{G}(\beta, h)$, e, conseqüentemente, $|\mathcal{G}(\beta, h)| = 1$. \square

O Teorema 2.1 forneceu um critério de unicidade das medidas de Gibbs baseado apenas nas grandezas $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,h}^+$ e $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,h}^-$. Por sua vez, a diferenciabilidade da função de pressão $p(\beta, h)$ está relacionada com a existência de $m(\beta, h)$, a densidade de magnetização. A seguir, começaremos a relacionar tais objetos.

Proposição 2.2. *Seja $\{\Lambda_n\}_n$ tal que $\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^d$ no sentido de van Hove. Os limites*

$$m^+(\beta, h) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_{\Lambda_n}^+(\beta, h), \quad m^-(\beta, h) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_{\Lambda_n}^-(\beta, h)$$

estão definidos para todo $h \in \mathbb{R}$ (e não somente para $\mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_\beta$). Além disso,

$$m^+(\beta, h) = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta,h}^+, \quad m^-(\beta, h) = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta,h}^-.$$

Por sua vez, $h \mapsto m^+(\beta)$ é contínua à direita, e $h \mapsto m^-(\beta)$ é contínua à esquerda.

Demonstração. Pela invariância por translação e pela monotonicidade no volume, temos que

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,h}^+ = \langle m_{\Lambda_n} \rangle_{\beta,h}^+ \leq \langle m_{\Lambda_n} \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+.$$

Logo, $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,h}^+ \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle m_{\Lambda_n} \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+$. Denotamos a notação $B(k) = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_1 \leq k\}$. Agora, para $k \geq 1$ fixado e $x \in \Lambda_n$. Se $x + B(k) \subset \Lambda_n$, novamente, pela monotonicidade no volume, temos que

$$\langle \sigma_x \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+ \leq \langle \sigma_x \rangle_{x+B(k), \beta, h}^+ = \langle \sigma_0 \rangle_{B(k), \beta, h}^+.$$

Lembre que seja $A \subset \mathbb{Z}^d$ finito, definimos, no capítulo anterior, $\partial^{in} A = \{x \in A : \exists y \in \mathbb{Z}^d \setminus A, \|x - y\|_1 = 1\}$. Se $x + B(k) \not\subset \Lambda_n$, então a caixa $x + B(k)$ intercepta $\partial^{in} \Lambda_n$. Conseqüentemente

$$\begin{aligned} \langle m_{\Lambda_n} \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+ &= \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{\substack{x \in \Lambda_n \\ x+B(k) \subset \Lambda_n}} \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+ + \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{\substack{x \in \Lambda_n \\ x+B(k) \not\subset \Lambda_n}} \overbrace{\langle \sigma_x \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+}^{\in [-1,1]} \\ &\leq \langle \sigma_0 \rangle_{B(k), \beta, h}^+ + 2 \frac{|B(k)| |\partial^{in} \Lambda_n|}{|\Lambda_n|}. \end{aligned}$$

Como $\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^d$ no sentido de van Hove, temos que, para todo $k \geq 1$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle m_{\Lambda_n} \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+ \leq \langle \sigma_0 \rangle_{B(k), \beta, h}^+$. Calculando o limite em $k \rightarrow \infty$, a identidade segue. O caso de $m^-(\beta, h)$ segue analogamente.

As propriedades de continuidade são consequências do lema a seguir. \square

Lema 2.3. *Para $\beta > 0$, $h \mapsto \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+$ é não decrescente e contínua à direita e $h \mapsto \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^-$ é não crescente e contínua à esquerda. Além disso, para todo $h \geq 0$, $\beta \mapsto \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+$ é não decrescente contínua à direita e $\beta \mapsto \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^-$ é não crescente contínua à esquerda.*

Demonstração. Demonstraremos as propriedades de $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+$, o resultado pode ser estendido para $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^-$ por simetria. Seja $\{\Lambda_n\}_n$, tal que $\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^d$ no sentido de van Hove. Primeiro, pelo Lema 1.13, temos que $h \mapsto \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+$ é não decrescente. Logo, o limite em $n \rightarrow \infty$ mantém tal monotonicidade. Seja $\{h_m\}_m$ uma sequência de números decaindo para h . A monotonicidade no volume e em h garantem que a sequência $\{\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n, \beta, h_m}^+\}_{m, n}$ é limitada e não crescente em n e em m e, portanto, podemos trocar a ordem dos limites

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h_m}^+ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n, \beta, h_m}^+ \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n, \beta, h_m}^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+ = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+, \end{aligned}$$

onde, na terceira igualdade, usamos a continuidade de $\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+$.

Por sua vez,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+ &= \left\langle \sigma_0 \left(J \sum_{\{x, y\} \in E(\Lambda_n)} \sigma_x \sigma_y + h \sum_{x \in \Lambda_n} \sigma_x + J \sum_{x \in \partial^{in} \Lambda_n} \sigma_x \right) \right\rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+ \\ &\quad - \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+ \left\langle J \sum_{\{x, y\} \in E(\Lambda_n)} \sigma_x \sigma_y + h \sum_{x \in \Lambda_n} \sigma_x + J \sum_{x \in \partial^{in} \Lambda_n} \sigma_x \right\rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+ \stackrel{\text{(GKS-II)}}{\geq} 0. \end{aligned}$$

Logo, $\beta \mapsto \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+$ é não decrescente. A continuidade ocorre de modo análogo ao anterior. Para provar as propriedades desejadas para os casos $\# \in \{-, 0\}$, basta usar novamente as desigualdades de correlação e seguir de maneira similar. \square

Lema 2.4. *Para $\beta > 0$, $h = 0$ e $A \subset \mathbb{Z}^d$ finito, $\beta \mapsto \langle \sigma_A \rangle_{\beta}^0$ é contínua a esquerda.*

Demonstração. Mais uma vez, usaremos a monotonicidade em volume finito para podermos trocar a ordem dos limites. Para $\{\Lambda_n\}_n$ uma coleção de subconjuntos de \mathbb{Z}^d , tal que $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$, temos que para n suficientemente grande tal que $A \subset \Lambda_n$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \langle \sigma_A \rangle_{\beta}^0 = J \sum_{x, y \in \Lambda: \|x-y\|_1=1} \langle \sigma_A \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta}^0 - \langle \sigma_A \rangle_{\beta}^0 \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta}^0 \stackrel{\text{(GKS-II)}}{\geq} 0.$$

Seja $\{\beta_m\}_m$ uma sequência tal que $\beta_m \rightarrow \beta^-$, temos que a sequência dupla $\{\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_n, \beta_m}^0\}_{n,m}$ é não decrescente em m . Por sua vez, pela Proposição 1.18, temos que a sequência dupla $\{\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_n, \beta_m}^0\}_{n,m}$ também é não decrescente em n . Portanto,

$$\langle \sigma_A \rangle_{\beta}^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_n, \beta_m}^0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_n, \beta_m}^0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \sigma_A \rangle_{\beta_m}^0.$$

Pela arbitrariedade da sequência $\{\beta_m\}_m$, o resultado segue. \square

Observação 2.1. Observe que $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^+ = m^+(\beta, 0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} m^+(\beta, h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} m(\beta, h) = m^*(\beta)$. Além disso, pela ergodicidade de $\mu_{\beta,h}^+$, dada pelo Teorema 1.33, temos que

$$\lim_{\|x\|_1 \rightarrow \infty} \langle \sigma_0 \sigma_i \rangle_{\beta,0}^+ = (\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^+)^2 = (m^*(\beta))^2.$$

Por simetria, temos $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^+ = -\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^-$. Logo, $p(\beta, h)$ é diferenciável no ponto $(\beta, 0)$ se, e somente se, $m^*(\beta) = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^+ = 0$. Por sua vez, a monotonicidade $\beta \mapsto \langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^+$ confere naturalidade à seguinte definição.

Definição 2.1. O ponto crítico do Modelo de Ising em \mathbb{Z}^d é definido pela seguinte quantidade

$$\beta_c(d) := \inf\{\beta > 0 : m^*(\beta) > 0\} = \sup\{\beta > 0 : m^*(\beta) = 0\}.$$

Pela definição de $\beta_c(d)$, segue que para todo $\beta < \beta_c(d)$, temos $m^*(\beta) = 0$. Por sua vez, para $\beta > \beta_c(d)$, $m^*(\beta) > 0$.

Neste momento, apresentamos as duas principais perguntas que motivam esta dissertação. É importante ressaltar que as suas respectivas respostas dependem do valor de d .

Pergunta 2.1. Podemos garantir que $\beta_c(d) \in (0, \infty)$?

Pergunta 2.2. Qual é o valor de $m^*(\beta_c)$?

Neste capítulo, **mostraremos que a resposta da primeira pergunta é afirmativa se $d \geq 2$** . De fato, para $d = 1$, Ising provou que $\beta_c(1) = \infty$ em [Isi25]. Isso o levou a conjecturar que o mesmo ocorreria para toda a dimensão e, portanto, não sendo um modelo interessante para os fenômenos de magnetismo. Por conta dessa crença, o modelo foi abandonado por quase dez anos, até que Peirls provou que $\beta_c(d) < \infty$ para todo $d \geq 2$.

A resposta da segunda pergunta também é positiva para $d \geq 2$. No Capítulo 4, demonstraremos tal fato para $d \geq 3$. O caso $d = 2$, porém, possui uma demonstração de uma natureza completamente diferente, e, por sua extensão, não será demonstrada nesta dissertação. A demonstração original em [Ons44] rendeu a Lars Onsager o Prêmio Nobel de

Química. Uma demonstração baseada em técnicas mais modernas pode ser encontrada em [DCST17].

Observação 2.2. A invariância por translação garante que $\langle \sigma_x \rangle_{\beta,0}^+ = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^+ = m^*(\beta)$. Portanto, a Desigualdade FKG implica que

$$\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{\beta,0}^+ \geq \langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^+ \langle \sigma_x \rangle_{\beta,0}^+ = (m^*(\beta))^2.$$

Em particular,

$$\inf_{x \in \mathbb{Z}^d} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{\beta,h}^+ > 0, \forall \beta > \beta_c(d).$$

Tal comportamento é referido como **ordem de longo alcance**. A presença de uma ordem de longo alcance não garante, porém, que as variáveis σ_x sejam fortemente correlacionadas em longas distâncias. De fato, pela ergodicidade de $\mu_{\beta,0}^+$, temos que para todo β

$$\lim_{\|x\|_1 \rightarrow \infty} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{\beta,0}^+ - \langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^+ \langle \sigma_x \rangle_{\beta,0}^+ = 0,$$

E, portanto, σ_x e σ_0 são sempre assintoticamente não correlacionadas.

A seguir, mostraremos a equivalência entre as definições de transição de fase. Como referido, $p(\beta, h)$ é convexa em h e, portanto, suas derivadas laterais em h estão sempre bem definidas.

Teorema 2.5 (Equivalência das transições de fase). *Valem as seguintes igualdades*

$$\frac{\partial}{\partial h^+} p(\beta, h) = \beta \cdot m^+(\beta, h), \quad \frac{\partial}{\partial h^-} p(\beta, h) = \beta \cdot m^-(\beta, h).$$

Em particular, $h \mapsto p(\beta, h)$ é diferenciável em h se, e somente se, existe uma única medida de Gibbs em (β, h) .

Demonstração. Como definimos anteriormente, denotamos por \mathcal{D}_β o conjunto dos pontos de não diferenciabilidade de $p(\beta, h)$ em função de h . Pela convexidade de $h \mapsto p(\beta, h)$, temos que \mathcal{D}_β é, no máximo, um conjunto enumerável. Portanto, para $h \in \mathbb{R}$, sempre conseguimos uma sequência $\{h_m\}_m \subset \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_\beta$ de modo que $h_m \rightarrow h^+$. Segue de (1.47), que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h^+} p(\beta, h) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \beta \cdot m(\beta, h_m) \\ &= \beta \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} m^+(\beta, h_m), \text{ pois } h_m \notin \mathcal{D}_\beta, \text{ logo } m^\#(\beta, h_m) = m^+(\beta, h_m) \forall \# \\ &= \beta \cdot m^+(\beta, h), \end{aligned}$$

onde, na terceira igualdade, usamos a continuidade à direita dada pelo Lema 2.3. Agora, por simetria

$$\frac{\partial}{\partial h^-} p(\beta, h) = -\frac{\partial}{\partial h^+} p(\beta, -h) = -\beta \cdot m^+(\beta, -h) = \beta \cdot m^-(\beta, h).$$

Consequentemente, concluímos que

$$\frac{\partial}{\partial h} p(\beta, h) \text{ existe} \iff m^+(\beta, h) = m^-(\beta, h).$$

Agora, pela Proposição 2.2, e, pelo Teorema 2.1, temos

$$m^+(\beta, h) = m^-(\beta, h) \iff \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+ = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^- \iff \text{unicidade de } \mathcal{G}(\beta, h).$$

□

Nas próximas seções, estudaremos, respectivamente, os seguintes casos:

- β grande e $h = 0$;
- β pequeno e $h = 0$; e
- e $h \neq 0$.

2.2 Não unicidade em baixas temperaturas: o Argumento de Peierls

Ao longo desta seção, consideraremos o caso do Modelo de Ising em \mathbb{Z}^2 para provar que sempre que $\beta > 0$ for suficientemente grande, temos que $m^*(\beta) > 0$. Observe que uma vez que esse resultado é provado, temos que o mesmo é válido para todo $d \geq 2$. De fato, note que, para $d > 2$, obtemos o modelo em duas dimensões como a partir de um subgrafo de \mathbb{Z}^d , definindo $\mathbf{J}' = \{J'_{x,y}\}_{x,y \in \mathbb{Z}^d}$ como

$$J'_{x,y} := \begin{cases} J_{x,y}, & \text{se } x, y \in \mathbb{Z}^2 \times \{0\} \times \dots \times \{0\}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $\mathbf{J} = \{J_{x,y}\}_{x,y \in \mathbb{Z}^d}$ é a interação de primeiros vizinhos. Como $J'_{x,y} \leq J_{x,y}$ para todo $x, y \in \mathbb{Z}^d$, temos que, pela monotonicidade em \mathbf{J} , dada pelo Lema 1.15,

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \mathbf{J}', \beta, 0}^+ \leq \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \mathbf{J}, \beta, 0}^+$$

para todo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito e, portanto,

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\mathbf{J}', \beta, 0}^+ \leq \langle \sigma_0 \rangle_{\mathbf{J}, \beta, 0}^+.$$

Basta observar que $\langle \sigma_0 \rangle_{\mathbf{J}', \beta, 0}^+ = \langle \sigma_0 \rangle_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{J}, \beta, 0}^+$, onde $\mu_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{J}, \beta, 0}^+$ denota a medida $\mu_{\mathbf{J}, \beta, h}^+$, quando $d = 2$. Para ver isso, basta executar um simples cálculo em qualquer volume finito $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ e notar que a coleção $\{\sigma_x\}_{x \in \Lambda}$ tem distribuição igual à do Modelo de Ising com primeiros vizinhos para os *spins* σ_x em que $x \in \Lambda \cap (\mathbb{Z}^2 \times \{0\} \times \dots \times \{0\})$ e *spins* uniformemente distribuídos e independentes para todo $x \notin \Lambda \cap (\mathbb{Z}^2 \times \{0\} \times \dots \times \{0\})^c$. Isso nos mostra que

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\mathbb{Z}^d, \beta, 0}^+ \leq \langle \sigma_0 \rangle_{\mathbb{Z}^{d'}, \beta, 0}^+, \forall d \leq d'.$$

E, em particular, $\beta_c(d)$ é decrescente em d . Dessa maneira, é suficiente mostrar que $\beta_c(2) < \infty$.

Observação 2.3. Para $\mathbf{J} = \{J_{x,y}\}_{x,y}$ admissível, defina $\mathbf{J}' = \{J'_{x,y}\}_{x,y}$ como

$$J'_{x,y} := \begin{cases} J_{x,y}, & \text{se } \|x - y\|_1 = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É evidente que $\mathbf{J}' \leq \mathbf{J}$ e, portanto,

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\mathbf{J}', \beta, 0}^+ \leq \langle \sigma_0 \rangle_{\mathbf{J}, \beta, 0}^+.$$

Logo, $\beta_c(\mathbf{J}) \leq \beta_c(\mathbf{J}')$. Porém, \mathbf{J}' é uma interação de primeiros vizinhos, sendo assim, basta provar que $\beta_c < \infty$ para o caso de primeiros vizinhos.

Ao longo desta seção, como $h = 0$, omitiremos sua dependência ao longo de toda a notação, i.e $\mu_{\Lambda, \beta}^+ := \mu_{\Lambda, \beta, 0}^+$ e $\mu_{\beta}^+ := \mu_{\beta, 0}^+$.

O denominado Argumento de Peierls, originalmente publicado em [Pei36], estuda a magnetização a partir da ideia de quanto menor a temperatura, maior a energia necessária para que *spins* adjacentes tenham sinais opostos. Esse resultado foi muito importante historicamente, uma vez que a conjectura de que $\beta_c(d) = \infty$ para todo $d \geq 1$, levou o Modelo de Ising a ser abandonado por quase dez anos, até que Peierls viesse a provar que essa conjectura estava errada.

O argumento é muito útil no momento em que ele abandona a ideia de analisar todas as configurações e passa a estudar as "interfaces" entre os conjuntos de pontos, onde se tem $\sigma_x = +1$ e $\sigma_x = -1$. Atribuindo essa natureza geométrica ao problema, somos capazes de

melhorar as cotas para o evento $\mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma_0 = -1)$. Com base nessas ideias, reescreveremos o Hamiltoniano de modo a enfatizar as diferenças de sinais entre *spins* adjacentes.

$$H_{\Lambda}^+(\sigma) = - \sum_{\substack{\{x,y\} \cap \Lambda \neq \emptyset \\ \|x-y\|_1=1}} J \sigma_x \sigma_y = \sum_{\substack{\{x,y\} \cap \Lambda \neq \emptyset \\ \|x-y\|_1=1}} J(1 - \sigma_x \sigma_y) + C_{\Lambda},$$

onde C_{Λ} é uma constante que depende apenas do volume Λ e de J . Desse modo, temos que

$$\tilde{H}_{\Lambda}^+(\sigma) := \sum_{\substack{\{x,y\} \cap \Lambda \neq \emptyset \\ \|x-y\|_1=1}} J(1 - \sigma_x \sigma_y) = 2J \left| \left\{ \{x, y\} : \{x, y\} \cap \Lambda \neq \emptyset, \|x - y\|_1 = 1 \text{ e } \sigma_x \neq \sigma_y \right\} \right|.$$

Observe que

$$\mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma) = \frac{e^{-\beta(\tilde{H}_{\Lambda}^+(\sigma) + C_{\Lambda})}}{\sum_{\sigma' \in \Omega_{\Lambda}^+} e^{-\beta(\tilde{H}_{\Lambda}^+(\sigma') + C_{\Lambda})}} = \frac{e^{-\beta \tilde{H}_{\Lambda}^+(\sigma)}}{\sum_{\sigma' \in \Omega_{\Lambda}^+} e^{-\beta \tilde{H}_{\Lambda}^+(\sigma')}},$$

e, portanto, podemos analisar a medida com o Hamiltoniano modificado \tilde{H}_{Λ} . **Dessa forma, ao alterarmos o Hamiltoniano por uma constante que dependa apenas do volume Λ , e não, da configuração, temos que as Medidas de Gibbs são inalteradas.** Esse argumento será aplicado diversas vezes nesta dissertação. Agora, introduziremos a ideia de grafo dual.

Considere o grafo induzido pela interação de primeiros vizinhos, isto é, $G = (\mathbb{Z}^2, E(\mathbb{Z}^2))$, onde $\{x, y\} \in E(\mathbb{Z}^2)$ se, e somente se, $\|x - y\|_1 = 1$. Considere, então, G_* o seu grafo dual, dado por

$$G_* := (\mathbb{Z}_*^2, E_*),$$

onde $\mathbb{Z}_*^2 := \mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $\{(x + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})), (y + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))\}$ forma uma aresta em G_* se, e somente se, $x, y \in E(\mathbb{Z}^2)$. A Figura 2.2 representa os grafos G e G_* .

Note que existe exatamente um vértice de G_* no ponto médio de cada aresta de G e que, entre dois vértices de G , existe exatamente uma aresta de G_* separando-os. Sendo assim, podemos associar a cada configuração $\sigma \in \Omega_{\Lambda}^+$, um único subgrafo de G_* dado do seguinte modo: mantemos todos os vértices de G_* , mas adicionamos a aresta que separa x e y se, e somente se, $\sigma_x \neq \sigma_y$.

Observe que tal subgrafo sempre possui um número finito de arestas, e se denotarmos tal subgrafo de G_* por $\mathcal{M}(\sigma)$, e o seu conjunto de arestas por $E_*(\mathcal{M}(\sigma))$, temos que

$$\tilde{H}_{\Lambda}^+(\sigma) = 2J |E_*(\mathcal{M}(\sigma))|.$$

Agora, separaremos $E_*(\mathcal{M}(\sigma))$ em componentes conexos disjuntos. Para isso, precisaremos de uma regra bem definida de como separar os ciclos de $E_*(\mathcal{M}(\sigma))$. Pela definição de

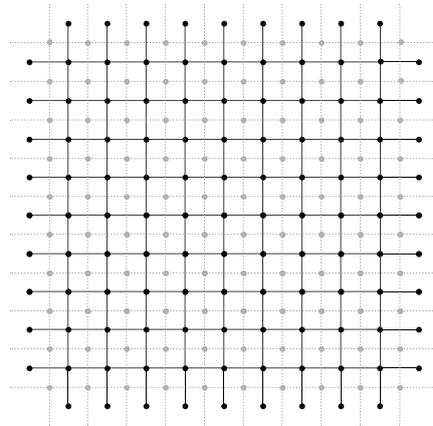


Figura 2.2: Na figura, representamos os grafos G e G_* , onde G está representado por um tom mais escuro.

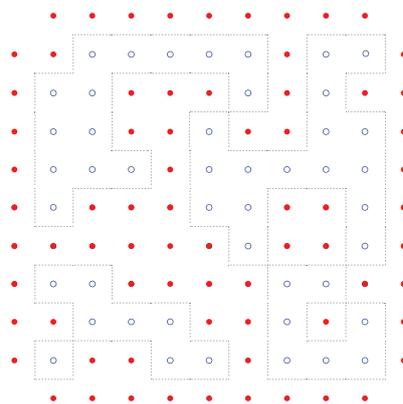


Figura 2.3: O subgrafo induzido por uma configuração.

$\sigma \mapsto \mathcal{M}(\sigma)$, toda aresta $x_* \in \mathbb{Z}_*^2$ possui grau par e, portanto, conecta-se com 0, 2 ou 4 de seus vizinhos. De fato, existem apenas 16 possibilidades, e o leitor pode verificar a veracidade dessa afirmação. Quando o grau de x_* é 0 ou 2, não precisamos fazer nada, porém, quando o grau de x_* é 4, deformamos as arestas de σ de acordo com a Figura 2.4.

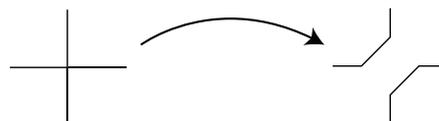


Figura 2.4: Regra de deformação.

Aplicando tal regra a todos os vértices de $\mathcal{M}(\sigma)$ com grau 4, temos que o grafo pode ser escrito como

$$\mathcal{M}(\sigma) = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n,$$

sendo cada γ_i é um ciclo, onde todos os seus vértices possuem grau 2 e, além disso, γ_i é uma Curva de Jordan suave por partes. Denominamos cada γ_i de um contorno de σ e denotamos $\Gamma(\sigma) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$. Sendo assim, para cada $\gamma \in \Gamma(\sigma)$, definimos o comprimento $|\gamma|$ do contorno γ como o número de arestas de G_* (antes da deformação) que o contorno possui, isto é, antes da deformação. Por exemplo, na Figura 2.5, $|\gamma_2| = 20$.

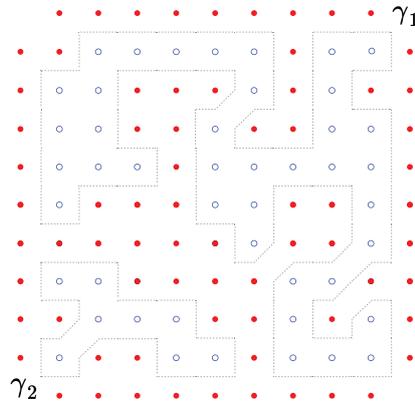


Figura 2.5: O efeito da deformação nos contornos dados pela Figura 2.3.

Mais uma vez, podemos simplificar o Hamiltoniano modificado,

$$\tilde{H}_\Lambda^+(\sigma) = 2J \sum_{\gamma \in \Gamma(\sigma)} |\gamma|.$$

De igual maneira, se denotarmos $\tilde{Z}_{\Lambda,\beta}^+ := \sum_{\sigma' \in \Omega_\Lambda^+} e^{-\beta \tilde{H}_\Lambda^+(\sigma')}$, temos que

$$\tilde{Z}_{\Lambda,\beta}^+ = \sum_{\sigma' \in \Omega_\Lambda^+} \prod_{\gamma \in \Gamma(\sigma')} e^{-2\beta J |\gamma|},$$

e, portanto,

$$\mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma) = \frac{\prod_{\gamma \in \Gamma(\sigma)} e^{-2\beta J |\gamma|}}{\sum_{\sigma' \in \Omega_\Lambda^+} \prod_{\gamma \in \Gamma(\sigma')} e^{-2\beta J |\gamma|}}. \quad (2.1)$$

Como os contornos γ são Curvas de Jordan por partes, temos que γ separa o plano \mathbb{R}^2 em duas regiões, e exatamente uma das regiões é limitada. Essa região será denotada por $\text{Int}(\gamma)$ o **interior** de γ . Uma observação de grande importância é que, se $\sigma_0 = -1$, temos

que existe, pelo menos, um contorno que envolva a origem, isto é, existe $\gamma \in \Gamma(\sigma)$ tal que $0 \in \text{int}\gamma$. Seja $\Lambda_n = [-n, n]^2$, temos que

$$\mu_{\Lambda_n, \beta}^+(\sigma_0 = -1) \leq \mu_{\Lambda_n, \beta}^+(\exists \gamma_* \in \Gamma : \text{Int}(\gamma_*) \ni 0) \leq \sum_{\gamma_* : \text{Int}(\gamma_*) \ni 0} \mu_{\Lambda_n, \beta}^+(\Gamma \ni \gamma_*).$$

Lema 2.6. *Para todo $\beta > 0$ e todo o contorno γ_* ,*

$$\mu_{\Lambda_n, \beta}^+(\Gamma \ni \gamma_*) \leq e^{-2\beta J |\gamma_*|}. \quad (2.2)$$

Provaremos que o Lema 2.6 implica que $\langle \sigma_0 \rangle_\beta^+ > 0$, se β for suficientemente grande e, depois, detalharemos a sua demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \mu_{\Lambda_n, \beta}^+(\sigma_0 = -1) &\leq \sum_{\gamma_* : \text{Int}(\gamma_*) \ni 0} \mu_{\Lambda_n, \beta}^+(\Gamma \ni \gamma_*) \\ &\stackrel{(2.2)}{\leq} \sum_{\gamma_* : \text{Int}(\gamma_*) \ni 0} e^{-2\beta J |\gamma_*|} \\ &= \sum_{k \geq 4} \sum_{\substack{\gamma_* : \text{Int}(\gamma_*) \ni 0 \\ |\gamma_*| = k}} e^{-2\beta J k} \\ &= \sum_{k \geq 4} e^{-2\beta J k} |\{\gamma_* : \text{Int}(\gamma_*) \ni 0, \gamma_* = k\}|. \end{aligned}$$

Por sua vez, note que todo o contorno que envolve a origem e possui tamanho k deve, necessariamente, conter um vértice no conjunto $\{(z - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) : u = 1, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)\}$, onde $\lfloor \cdot \rfloor$ a função parte inteira. Por outro lado, dado um elemento de $\{(z - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) : u = 1, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)\}$, existem, no máximo, $4 \cdot 3^{k-1}$ contornos que passam por esse ponto. De fato, no primeiro passo, podemos escolher qualquer uma das quatro direções e, nos passos consecutivos, podemos ir, no máximo, para três direções, de maneira a não voltar para o vértice imediatamente anterior. Portanto,

$$|\{\gamma_* : \text{Int}(\gamma_*) \ni 0, \gamma_* = k\}| \leq \frac{k}{2} 4 \cdot 3^{k-1}. \quad (2.3)$$

Usando essa estimativa, temos que

$$\mu_{\Lambda_n, \beta}^+(\sigma_0 = -1) \leq \frac{2}{3} \sum_{k \geq 4} e^{-2\beta J k} k 3^k =: \delta(\beta). \quad (2.4)$$

Para β suficientemente grande de forma que $3e^{-2J\beta} < 1$, a série converge (segue diretamente do teste da razão). Além disso, $\delta(\beta) \rightarrow 0^+$, quando $\beta \rightarrow \infty$. E, portanto, escolhendo β suficientemente grande de modo que $\delta(\beta) < \frac{1}{3}$ e usando que (2.2) é uniforme

em n , temos que

$$\mu_\beta^+(\sigma_0 = -1) \leq \frac{1}{3} < \frac{1}{2},$$

e, ao mesmo tempo, como $\mu_\beta^+(\sigma_0 = 1) + \mu_\beta^+(\sigma_0 = -1) = 1$, temos que $\mu_\beta^+(\sigma_0 = 1) > \mu_\beta^+(\sigma_0 = -1)$ e

$$m^*(\beta) = \langle \sigma_0 \rangle_\beta^+ = 1 \cdot \mu_\beta^+(\sigma_0 = 1) + (-1) \cdot \mu_\beta^+(\sigma_0 = -1) > 0.$$

Mostrando assim que $m^*(\beta) > 0$ sempre que β é suficientemente grande. Resta apenas provar o Lema 2.6.

Demonstração do Lema 2.6. De (2.1), temos que

$$\begin{aligned} \mu_{\Lambda_n, \beta}^+(\Gamma \ni \gamma_*) &= \sum_{\sigma: \Gamma(\sigma) \ni \gamma_*} \mu_{\Lambda_n, \beta}^+(\sigma) \\ &= e^{-2\beta J |\gamma_*|} \frac{\sum_{\sigma: \Gamma(\sigma) \ni \gamma_*} \prod_{\gamma \in \Gamma(\sigma) \setminus \{\gamma_*\}} e^{-2\beta J |\gamma|}}{\underbrace{\sum_{\sigma' \in \Omega_\Lambda^+} \prod_{\gamma \in \Gamma(\sigma')} e^{-2\beta J |\gamma|}}_{:= (\star)}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Mostraremos que $(\star) \leq 1$. Para tanto, provaremos que a soma no numerador é igual à soma do denominador, porém, com um menor número termos. À cada configuração σ tal que $\Gamma(\sigma) \ni \gamma_*$ aparecendo na soma no numerador, associamos a configuração $T_{\gamma_*}(\sigma)$ obtida por "remover" γ_* . Isso pode ser feito simplesmente invertendo todos os *spins* no interior de γ_* :

$$(T_{\gamma_*}(\sigma))_x := \begin{cases} -\sigma_x, & \text{se } x \in \text{Int}(\gamma_*), \\ \sigma_x, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É importante notar que $\Gamma(T_{\gamma_*}(\sigma)) = \Gamma(\sigma) \setminus \{\gamma_*\}$.

Portanto, o numerador, de fato, nada mais é que a soma dos termos do denominador onde γ_* não está presente em $\Gamma(\sigma)$, assim concluindo o Lema. \square

E, conseqüentemente, para todo o β suficientemente grande, temos transição de fase. Começando, assim, a classificação do Diagrama de Fase.

Observação 2.4. Avaliando a série dada na expressão de $\delta(\beta)$, podemos mostrar que, para $\beta < \frac{\log(6)}{2J}$, $\delta(\beta) < \frac{1}{3}$. Desta forma, temos que $\beta_c(d) \leq \beta_c(2) < \frac{\log(6)}{2J}$.

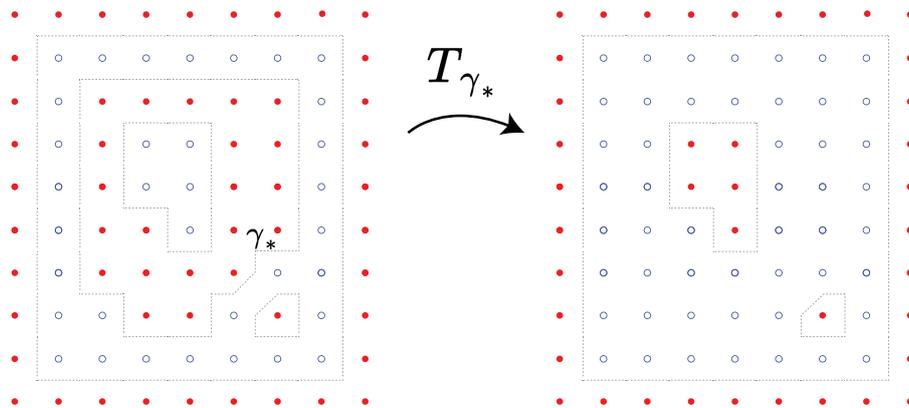


Figura 2.6: O efeito de $T_{\gamma_*}(\sigma)$ nos contornos.

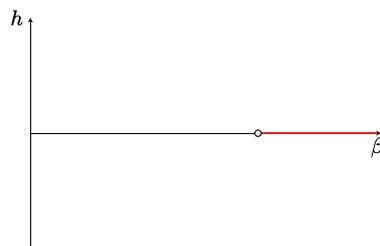


Figura 2.7: A região destacada em vermelho representa o conjunto no qual sabemos que existe transição de fase.

2.3 A unicidade em altas temperaturas: Expansão em Polímeros

Existem alguns métodos gerais para provar a não existência de magnetização espontânea para β suficientemente pequeno, entre elas a expansão em polímeros e o Critério de Unicidade de Dobrushin, que foi originalmente introduzido em [Dob70], e a Expansão em Polímeros, que foi originalmente introduzida em [GK71]. Ambos os métodos podem ser utilizados não só no Modelo de Ising, como também em uma vasta classe de modelos. Por sua facilidade de exposição, daremos preferência à segunda alternativa para esta seção. A expansão em polímeros é uma representação gráfica, sendo assim nomearemos os objetos a serem estudados.

Introduzimos a notação

$$E^b(\Lambda) := \{e \in E(\mathbb{Z}^d) : e = \{x, y\}, \text{ onde } x \in \Lambda \text{ ou } y \in \Lambda\},$$

isto é, as arestas que conectam dois vértices de Λ ou que conectam um vértice de Λ a um vértice da fronteira. Agora, faremos uso da seguinte identidade.

$$e^{\beta J \sigma_x \sigma_y} = \cosh \beta (1 + \tanh(\beta J) \sigma_x \sigma_y). \quad (2.6)$$

Agora usaremos (2.6) para reescrever a Medida de Gibbs a Volume Finito

$$e^{-H_{\Lambda,0}^+(\sigma)} = \prod_{\{x,y\} \in E^b(\Lambda)} e^{\beta J \sigma_x \sigma_y} = \cosh(\beta J)^{|E^b(\Lambda)|} \prod_{\{x,y\} \in E^b(\Lambda)} (1 + \tanh(\beta J) \sigma_x \sigma_y). \quad (2.7)$$

Agora, é fácil provar por indução em $|E|$ que, dada uma função $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, temos a seguinte igualdade

$$\prod_{e \in E} (1 + f(e)) = \sum_{E' \subset E} \prod_{e \in E'} f(e), \quad (2.8)$$

onde $\prod_{e \in \emptyset} f(e) := 1$. Aplicando (2.7) e (2.8), temos que

$$Z_{\Lambda,\beta,0}^+ = \cosh(\beta J)^{|E^b(\Lambda)|} \sum_{E' \subset E^b(\Lambda)} \tanh(\beta J)^{|E'|} \sum_{\sigma \in \Omega_{+\Lambda}} \underbrace{\prod_{\{x,y\} \in E'} \sigma_x \sigma_y}_{\prod_{x \in \Lambda} \sigma_x^{\text{grau}_{E'}(x)}}$$

onde $\text{grau}_{E'}(x) = \sum_{y: \|x-y\|=1} \mathbb{1}[\{x, y\} \in E']$. A igualdade final é derivada de modo estritamente análogo ao Lema 1.2. Agora, observe que

$$\sum_{\sigma_x \in \{-1, +1\}} \sigma_x^{\text{grau}_{E'}(x)} = \begin{cases} 2, & \text{se } \text{grau}_{E'}(x) \text{ for par;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dessa maneira, concluímos que, de modo análogo ao feito no *Switching Lemma* (Lema 1.6)

$$Z_{\Lambda,\beta,0}^+ = 2^{|\Lambda|} \cosh(\beta J)^{|E^b(\Lambda)|} \sum_{E' \in \mathfrak{G}_{\Lambda}^{+, \text{even}}} \tanh(\beta J)^{|E'|}, \quad (2.9)$$

onde

$$\mathfrak{G}_{\Lambda}^{+, \text{even}} := \{E' \subset E^b(\Lambda) : \text{grau}_{E'}(x) \text{ é par para todo } x \in \Lambda\}.$$

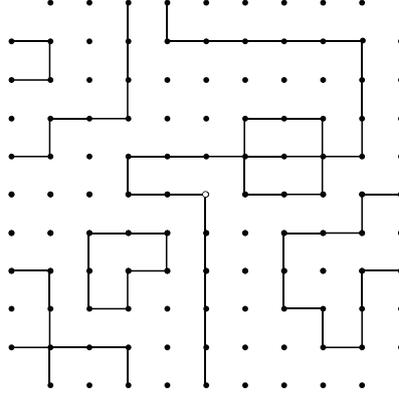


Figura 2.8: Um exemplo de elemento de $\mathfrak{G}_\Lambda^{+,even}$.

Note que a restrição da paridade do grau só é feita nos vértices de Λ e não inclui os vértices da fronteira. Doravante, identificaremos E' com o subgrafo que este induz em \mathbb{Z}^d . Analogamente, podemos deduzir que

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, 0}^+ = \frac{1}{Z_{\Lambda, \beta, 0}^+} 2^{|\Lambda|} \cosh(\beta J)^{E^b(\Lambda)} \sum_{E' \in \mathfrak{G}_\Lambda^{+,0}} \tanh(\beta J)^{|E'|} \quad (2.10)$$

$$= \frac{\sum_{E' \in \mathfrak{G}_\Lambda^{+,0}} \tanh(\beta J)^{|E'|}}{\sum_{E' \in \mathfrak{G}_\Lambda^{+,even}} \tanh(\beta J)^{|E'|}}, \quad (2.11)$$

onde

$$\mathfrak{G}_\Lambda^{+,0} := \{E' \subset E^b(\Lambda) : \text{grau}_{E'}(x), \forall x \in \Lambda \setminus \{0\} \text{ e } \text{grau}_{E'}(0) \text{ é ímpar}\}.$$

Seja $E' \subset E^b(\Lambda)$, denote $\Delta(E')$ o conjunto de todas as arestas de $E^b(\Lambda)$ que não compartilham vértices com arestas de E' . Todo conjunto E' em $\mathfrak{G}_\Lambda^{+,0}$ pode ser decomposto como $E' = E'_0 \cup E''$, onde E'_0 é não vazio, conexo e contém 0; e $E'' \in \mathfrak{G}_\Lambda^{+,even} \cap \Delta(E')$.

Portanto,

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, 0}^+ = \sum_{\substack{E'_0 \in \mathfrak{G}_\Lambda^{+,0} \\ E'_0 \text{ é conexo}}} \frac{\sum_{\substack{E'' \in \mathfrak{G}_\Lambda^{+,even} \\ E'' \subset \Delta(E'_0)}} \tanh(\beta J)^{|E''|}}{\sum_{E' \in \mathfrak{G}_\Lambda^{+,even}} \tanh(\beta J)^{|E'|}}. \quad (2.12)$$

Agora, usaremos o seguinte Lema.

Lema 2.7. *Seja G um grafo conexo com N arestas. Começando em um ponto arbitrário de G existe um caminho em G que cruza cada aresta exatamente duas vezes.*

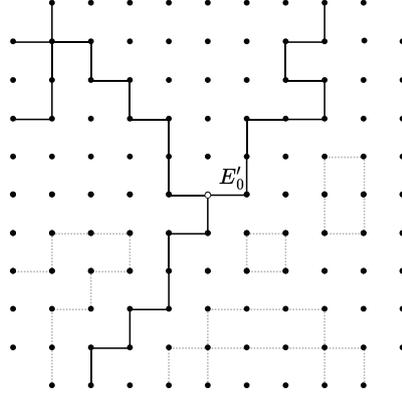


Figura 2.9: Um exemplo de elemento de $\mathfrak{G}_\Lambda^{+,0}$, onde a componente conexa de 0 está destacada em linha contínua.

Demonstração. A prova é dada em indução sobre N , notando que um grafo conexo arbitrário pode sempre ser construído uma aresta por vez, de maneira que todos os grafos intermediários são conexos. Quando $N = 1$, o resultado é trivial. Suponha que o enunciado é válido para $N = k$. Seja G um grafo conexo com $|G| = k + 1$, dado $x \in G$ um ponto inicial arbitrário, escolha $y \in G$ com $x \neq y$ de modo que $G \setminus \{y\}$ também seja conexo. Escolha um caminho π que inicie em x e percorra todo o $G \setminus \{y\}$ passando por cada aresta exatamente duas vezes. Escolha $z \in G \setminus \{y\}$ tal que a aresta $\{y, x\}$ pertença a G . Agora, siga por π de x até z , vá de z para y e volte imediatamente, e depois siga o resto do caminho de z até x usando π . \square

Finalmente, provaremos que $\beta_c(d) > 0$ para todo $d \geq 1$. Usando o Lema 2.7, temos que o número de grafos conexos de tamanho l é limitado superiormente pelo número de caminhos de comprimento $2l$ iniciados em 0. A segunda quantidade é limitada por $(2d)^{2l}$, sendo que a cada passo um dos $2l$ passos, o caminho tem $2d$ direções para seguir. Agora, seja $E' \in \mathfrak{G}_\Lambda^{+,0}$ conexo, pelo Lema do Aperto de Mãos, temos que 0 deve se conectar a outro vértice com grau ímpar, mas como todos os vértices em $x \in \Lambda \cap E'$ possuem grau par, temos que 0 tem que estar conectado a um vértice do bordo de Λ . Com essa observação, segue que, para $\Lambda_n = [-n, n]^d$, todo o $E' \in \mathfrak{G}_\Lambda^{+,0}$ conexo satisfaz $|E'| \geq n$. Além disso, usando a desigualdade $\tanh(\beta J) \leq \beta J$, temos que

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n, \beta, 0}^+ \leq \sum_{l \geq n} (4d^2 \beta J)^l \leq e^{-c(\beta, d)n}, \quad (2.13)$$

onde $c(\beta, d) > 0$ sempre que $\beta < \frac{1}{4Jd^2}$. Em particular, $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^+ = 0$ para todo $\beta > \frac{1}{4Jd^2}$. Consequentemente, temos que $\beta_c(d) > 0$. Com isso, caracterizamos toda a região $\{(\beta, 0) : \beta > 0\}$ do semiplano $\beta \times h$.

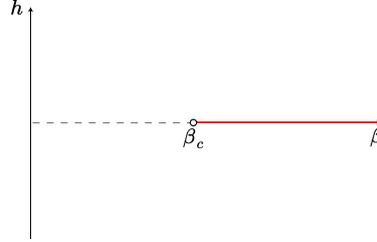


Figura 2.10: A região em vermelho representa a área onde ocorre transição de fase. Por sua vez, o segmento pontilhado representa a área onde não ocorre. Note que não estamos afirmando nada sobre o ponto $\beta = \beta_c$.

Observação 2.5. O leitor pode usar a *Expansão em Polímeros* para provar que $\beta_c(1) = \infty$. De fato, para $d = 1$, existem apenas dois elementos em $\mathfrak{G}_\Lambda^{+,0}$, e dois elementos em \mathfrak{G}_Λ^0 , logo as contas podem ser feitas explicitamente. Isso, porém, só ocorre para a interação de primeiros vizinhos. Por exemplo, a interação de Dyson dada por $J_{x,y} = \frac{1}{\|x-y\|_1^\alpha}$ (com $\alpha \in (1, 2]$) é conhecida por gerar transição de fase, mesmo em dimensão 1. O leitor pode encontrar esse resultado em [Dys71].

Observação 2.6. A análise feita nesta seção pode ser estendida a qualquer interação \mathbf{J} admissível. De fato, as expressões serão análogas, apenas trocando \mathbf{J} por $J_{x,y}$ e notando que o grafo Λ possuirá mais arestas. Como $\sum_x J_{0,x} < \infty$, existe $J > 0$ tal que $J_{x,y} \leq J$. A maior dificuldade nesta extensão é conseguir uma cota superior para o número de grafos conexos.

Observação 2.7. Com os resultados desta seção e da seção anterior, temos que

$$\frac{1}{4Jd^2} \leq \beta_c(d) \leq \beta_c(2) < \frac{\log 6}{2J}.$$

É possível mostrar que $\beta_c(2) = \frac{1}{2J} \log(1 + \sqrt{2})$. Existem três técnicas diferentes para fazer este cálculo. A primeira é o através do cálculo explícito da função de pressão feita por Onsager em [Ons44]. A segunda, explora a denominada "Dualidade de Kramer-Wannier" que oferece uma relação entre a *Expansão em Polímeros* e os *Contornos de Peirls* como pode ser visto em [KW41]. Por fim, pode-se usar a *Representação por Aglomerados Aleatórios* e

técnicas de percolação planar de modo a realizar esse cálculo, como pode ser encontrado em [BDC12].

2.4 A unicidade sob campo magnético: Análise Convexa

A seguir, mostraremos que para todo $\beta > 0$, a função $h \mapsto p(\beta, h)$ é de classe C^1 sempre que $h \neq 0$. Para isso usaremos a concavidade da função $h \mapsto m(\beta, h)$, que é resultado da Desigualdade GHS (Teorema 1.8).

É possível mostrar um fato muito mais forte, a função

$$\begin{aligned} p_\beta : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto p(\beta, h) \end{aligned}$$

pode ser estendida a todo o domínio $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$ de modo analítico. A demonstração original para esse resultado foi dada por Lee e Yang em [LY52]. Esse Teorema é baseado em uma mudança de variável na função de partição que a transforma em um polinômio e uma subsequente análise da localização de seus zeros. O teorema original pode ser estendido de diversas maneiras, como é feito, por exemplo, nos artigos [CCF14, Rue10].

Preferimos mostrar que p_β é apenas C^1 , pois a sua demonstração depende apenas de teoremas que já demonstramos no Capítulo 1 ao invés de utilizarmos uma ampla coleção de teoremas de análise complexa com os quais o leitor pode não estar familiarizado.

Pelo Lema 1.14, as funções $h \mapsto \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+$ são côncavas, e, conseqüentemente, $m_\Lambda^+ = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+$ também é. Agora, como para toda sequência $\{\Lambda_n\}_n$ tal que $\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^d$ no sentido de *van Hove*, temos que $p_{\Lambda_n}^+(\beta, h) = \frac{1}{|\Lambda_n|} \log Z_{\Lambda_n, \beta, h}^+ \rightarrow p(\beta, h)$ quando $n \rightarrow \infty$ e, por sua vez, $m_{\Lambda_n}^+(\beta, h) \rightarrow m^+(\beta, h)$, temos e, portanto, $m^+(\beta, h)$ é côncava.

Para $h_1 > h_2 > 0$, temos que

$$p_{\Lambda_n}^+(\beta, h_1) - p_{\Lambda_n}^+(\beta, h_2) = \int_{h_2}^{h_1} \beta \cdot m_{\Lambda_n}^+(\beta, s) ds.$$

Uma vez que $|m_{\Lambda_n}^+(\beta, h)| \leq 1$, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$p(\beta, h_1) - p(\beta, h_2) = \int_{h_2}^{h_1} \beta \cdot m^+(\beta, s) ds.$$

Como $m^+(\beta, h)$ é o limite de funções côncavas em $h > 0$, temos que $m^+(\beta, h)$ é uma função côncava em $h > 0$, e pela Proposição 1.25, contínua. Assim segue que para todo $h > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial h} p(\beta, h) = \beta \cdot m(\beta, h).$$

Portanto, $p(\beta, h)$ é diferenciável em h e não existe transição de fase para $h > 0$. Por sua vez, podemos estender argumento para $h < 0$ por simetria. Dessa forma, temos a caracterização da transição de fase em quase todo o semiplano $\beta \times h$

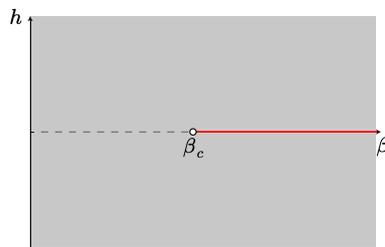


Figura 2.11: A região em vermelho representa a área onde ocorre transição de fase. Por sua vez, toda a região em cinza (incluindo o segmento pontilhado) representa a área onde ela não ocorre. Note que nada estamos afirmando sobre o ponto $\beta = \beta_c$.

Observação 2.8. *A extensão deste resultado para \mathbf{J} admissível segue sem adaptações significativas. O leitor pode repetir o procedimento de modo análogo.*

2.5 Uma convergência importante

O objetivo desta seção é mostrar a seguinte convergência

$$\mu_{\beta,h}^0 \rightarrow \mu_{\beta,0}^+,$$

quando $h \rightarrow 0^+$. Tal resultado é fundamental para a demonstração do teorema central do próximo capítulo. Para isso, faremos uso de um resultado que é popularmente conhecido como 'Teorema de Strassen' por ser considerado como uma consequência do Teorema 11 de [Str65], essa implicação, porém, não é trivial. Sua demonstração pode ser encontrada em [L⁺99]. Infelizmente, por se tratar de um resultado bastante complexo, não faremos a sua demonstração nesta dissertação. E, para evitar technicalidades, como a definição precisa de Espaços Poloneses, enunciaremos o Teorema apenas com a generalidade necessária para nossas aplicações.

Teorema 2.8 (Strassen). *Seja Ω_0 um conjunto finito e S um conjunto enumerável, considere $\Omega := \Omega_0^S$, com a σ -álgebra produto \mathcal{F} . Sejam μ_1 e μ_2 duas medidas de probabilidade em Ω de modo que $\mu_1 \leq \mu_2$, isto é, μ_2 domina estocasticamente μ_1 , então existe um vetor aleatório em (X, Y) em $(\Omega^2, \mathcal{F}^2, \mu)$, onde X é distribuído conforme μ_1 , Y conforme μ_2 e $\mu(X \leq Y) = 1$.*

Observe que

$$\mu_{\beta,0}^+ \leq \mu_{\beta,h}^+ = \mu_{\beta,h}^0,$$

onde, na primeira desigualdade, usamos o Lema 1.12, e, na segunda, que $\mu_{\beta,0}^+ = \mu_{\beta,0}^0$ para todo $h \neq 0$, o que é resultado da Seção 2.3.

Mostraremos que a seguinte medida está bem definida,

$$\mu_\beta^* = \lim_{h \rightarrow 0^+} \mu_{\beta,h}^0,$$

no sentido de que μ_β^* é uma medida bem definida em Ω e para toda função local $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, temos que vale a seguinte convergência

$$\langle f \rangle_\beta^* = \lim_{h \rightarrow 0^+} \langle f \rangle_{\beta,h}^0,$$

onde $\langle \cdot \rangle_\beta^*$ denota o valor esperado com respeito à medida μ_β^* .

Seja $A \subset \mathbb{Z}^d$ finito, consideraremos a função η_A definida como no Exemplo 1.1. Temos que η_A é não decrescente e, portanto, pelo Lema 1.12, $h \mapsto \langle \eta_A \rangle_{\beta,h}^0$ é não decrescente. Além disso, $\eta_A \geq 0$ e logo $\langle \eta_A \rangle_{\beta,h}^0 \geq 0$. Logo, o limite

$$\langle \eta_A \rangle_\beta^* = \lim_{h \rightarrow 0^+} \langle \eta_A \rangle_{\beta,h}^0$$

está bem definido para todo $A \subset \mathbb{Z}^d$ finito. Agora, pela Proposição 1.1, temos que

$$\langle f \rangle_\beta^* = \lim_{h \rightarrow 0^+} \langle f \rangle_{\beta,h}^0$$

fica bem definido para qualquer função local f . Finalmente, pelo Teorema da Extensão de Caratheodory e pelo Lema 1.30, temos que $\langle f \rangle_\beta^*$ fica bem definido para qualquer f quasi-local e assim define uma medida em toda a σ -álgebra \mathcal{F} .

Em particular, para todo $h > 0$ e para toda função f não decrescente, vale que

$$\langle f \rangle_{\beta,0}^+ \leq \langle f \rangle_{\beta,h}^+ = \langle f \rangle_{\beta,h}^0$$

e, portanto, calculando o limite quando $h \rightarrow 0^+$, temos

$$\langle f \rangle_{\beta,0}^+ \leq \langle f \rangle_{\beta}^*$$

logo, $\mu_{\beta,0}^+ \leq \mu_{\beta}^*$. Agora, aplicaremos o Teorema de Strassen para concluir o argumento.

Como $\mu_{\beta,0}^+ \leq \mu_{\beta}^*$, podemos escolher $\sigma = (\sigma_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ e $\sigma^* = (\sigma_x^*)_{x \in \mathbb{Z}^d}$, onde σ é distribuído de acordo com $\mu_{\beta,0}^+$, e σ^* de acordo com μ_{β}^* . Porém, $\sigma^* \leq \sigma$ quase certamente, isto é, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, $\sigma_x^* \leq \sigma_x$ quase certamente. Mas, por sua vez, temos que

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \langle \sigma_0 \rangle_{\beta,h}^0$$

por conta das Proposições 1.27 e 2.2. Isso implica que $\sigma_x = \sigma_x^*$, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$ quase certamente e, portanto, $\mu_{\beta}^* = \mu_{\beta}^+$.

Capítulo 3

A transição de fase é *sharp*

No capítulo anterior, caracterizamos em quase todo o plano $\beta \times h$ os pontos nos quais existe transição de fase. Em particular, mostramos que

$$\beta_c(d) := \inf \{ \beta > 0 : \langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^+ > 0 \} \in (0, \infty).$$

Dessa forma, conseguimos dividir a reta $\{(\beta, 0) : \beta > 0\}$ em três partes. A denominada fase supercrítica ($\beta > \beta_c(d)$), a fase subcrítica ($\beta < \beta_c(d)$), e a fase crítica ($\beta = \beta_c(d)$).



Na fase subcrítica, temos que $m^*(\beta) = 0$ e, conseqüentemente, pelo Teorema 1.33, segue que

$$\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{\beta,0}^+ \longrightarrow 0, \text{ quando } \|x\|_1 \longrightarrow \infty.$$

O leitor pode aplicar a Representação por Polímeros Aleatórios apresentada na Seção 2.3, para estudar a $\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{\beta,0}^+$ para provar que, se $\beta > 0$ for suficientemente pequeno, existe $c = c(\beta) > 0$ tal que para todo x com $\|x\|_1$ suficientemente grande, vale que

$$\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{\beta,0}^+ \leq e^{-c\|x\|_1}.$$

Logo,

$$\tau(\beta) := \liminf_{\|x\|_1 \rightarrow \infty} -\frac{1}{\|x\|_1} \log \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{\beta,0}^+ \geq c > 0.$$

Na fase supercrítica, podemos usar novamente o Teorema 1.33 para obter

$$\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{\beta,0}^+ \longrightarrow (m^*(\beta))^2 > 0, \text{ quando } \|x\|_1 \longrightarrow \infty,$$

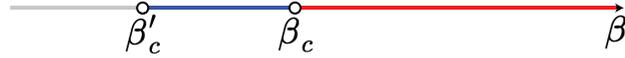
o que implica que para todo o $\beta > \beta_c(d)$

$$\tau(\beta) = \liminf_{\|x\|_1 \rightarrow \infty} -\frac{1}{\|x\|_1} \log \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{\beta,0}^+ = 0.$$

O que motiva definição da seguinte quantidade

$$\begin{aligned} \beta'_c(d) &:= \inf \{ \beta > 0 : \tau(\beta) = 0 \} \\ &:= \sup \{ \beta > 0 : \tau(\beta) > 0 \} \in (0, \infty) \end{aligned}$$

É evidente que $\beta_c(d) \geq \beta'_c(d)$, mas será que vale a igualdade? Caso a desigualdade fosse estrita, poderíamos dividir a fase subcrítica em outros três subconjuntos, que, por sua vez, poderiam ter propriedades muito diferentes entre si.



Quando um modelo de Mecânica Estatística satisfaz $\beta_c(d) = \beta'_c(d)$, dizemos que sua transição de fase é *sharp*, no sentido de que existe uma separação abrupta entre a fase supercrítica e a fase subcrítica.

Ao longo deste capítulo, mostraremos que no Modelo de Ising em \mathbb{Z}^d , a transição de fase é, de fato, *sharp*, e, além disso, apresentar uma cota inferior para $m^*(\beta)$ quando $\beta > \beta_c(d)$. Esse resultado foi originalmente demonstrado em [ABF87], porém, seguiremos a demonstração dada em [DCT16], que se baseia na Representação por Correntes Aleatórias, dada na Seção 1.2.

Da mesma forma que introduzimos representações gráficas (relacionadas a subgrafos) e a representação por correntes aleatórias, na Seção 3.3 introduziremos uma representação por passeios aleatórios denominada **Representação por Espinhas Dorsais**. Esta representação, como o nome sugere, traduz propriedades do Modelo de Ising como propriedades de conexão

sobre uma coleção de passeios aleatórios. Esta representação será extraída da representação por correntes aleatórias, o que pode parecer suspeito para o leitor que não está acostumado com a área. Porém, no estudo de Mecânica Estatística é comum derivar novas representações a partir de outras já conhecidas.

O leitor notará que este capítulo possui uma elevada quantidade de contas que lidam com tecnicidades necessárias para obter uma desigualdade diferencial importante. A ideia central que está por baixo dessas contas é usar o *Switching Lemma* e o Condicionamento em Aglomerados de modo que possamos manipular as fontes das correntes aleatórias em questão de modo que as mesmas se comportem do modo esperado. Isso gera uma quantidade, por vezes, significativa de termos adicionais nas somas em questão.

3.1 Teorema Principal

O objetivo principal deste capítulo é provar, detalhadamente, o seguinte teorema.

Teorema 3.1. *Valem as seguintes afirmações*

1. Para todo $\beta > \beta_c$ temos que $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^+ \geq \sqrt{\frac{\beta^2 - \beta_c^2}{\beta_2}}$;
2. Para todo $\beta < \beta_c$, obtemos

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{\beta,0}^+ < \infty;$$

3. Para todo $\beta < \beta_c$, existe $c = c(\beta) > 0$ tal que

$$\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{\beta,0}^+ \leq e^{-c\|x\|_1}.$$

O leitor perceberá que o item 2. do Teorema 3.1 é desnecessário, tendo em vista o item 3.. Porém, o item 3. não é necessariamente válido quando a interação \mathbf{J} não possui alcance finito. Por esse motivo mantivemos o item 2. e 3., separadamente. O leitor se convencerá de que a demonstração do Teorema 3.1 pode ser feita de maneira idêntica para grafos mais gerais que o \mathbb{Z}^d . De fato, a mesma demonstração pode ser usada para provar o resultado sempre que G for um grafo transitivo e *ameanable* com uma interação \mathbf{J} admissível.

Para a demonstração, precisaremos definir alguns objetos auxiliares. Seja $\beta > 0$ e S subconjunto finito de \mathbb{Z}^d finito, considere

$$\varphi_\beta(S) := \sum_{x \in S} \sum_{y \notin S} \tanh(\beta J_{x,y}) \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{S,\beta,0}^0. \quad (3.1)$$

Definiremos também

$$\tilde{\beta}_c := \sup\{\beta \geq 0 : \varphi_\beta(S) < 1 \text{ para algum } S \subset \Lambda \text{ finito e contendo } 0\}. \quad (3.2)$$

Para demonstrar o Teorema 3.1, provaremos que $\tilde{\beta}_c$ satisfaz 1., 2. e 3. para concluir que $\beta_c = \tilde{\beta}_c$.

Ao longo do restante deste capítulo, escolheremos $h > 0$ e calcularemos o limite $h \rightarrow 0^+$, beneficiando-nos da convergência $\mu_{\beta,h}^0 \rightarrow \mu_\beta^+$, que foi demonstrada na Seção 2.5.

3.2 Prova do Item 1.

Nesta seção, mostraremos que para todo $\beta > \tilde{\beta}_c$ temos que

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^+ \geq \sqrt{\frac{\beta^2 - \tilde{\beta}_c^2}{\beta^2}}. \quad (3.3)$$

Reduziremos esse problema a uma desigualdade diferencial. Para isso, seja $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito e $h > 0$, defina

$$c(\Lambda) := \min_{y \in \Lambda} \frac{\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda,\beta,h}^0}{\langle \sigma_y \rangle_{\Lambda,\beta,h}^0}.$$

Como $h > 0$, temos que $\langle \sigma_y \rangle_{\Lambda,\beta,h}^0 > 0$ para todo o $y \in \Lambda$, e, portanto, temos que $c(\Lambda)$ está bem definido e por GKS-I, temos que $c(\Lambda) > 0$.

Para provar (3.3), usaremos o seguinte Lema.

Lema 3.2. *Seja $\beta > 0$, $h > 0$ e $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ contendo o 0. Então*

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda,\beta,h}^0 \right)^2 \geq \frac{2c(\Lambda)}{\beta} \left(\inf_{0 \ni S} \varphi_S(\beta) \right) \left(1 - \left(\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda,\beta,h}^0 \right)^2 \right) \quad (3.4)$$

Sendo assim, definindo $f(\beta) := \left(\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda,\beta,h}^0 \right)^2$, e, considerando $\beta > \tilde{\beta}_c$, obtemos $\varphi_S(\beta) \geq 1$ para todo o S . Aplicamos, então, a Desigualdade (3.4) de modo que

$$\frac{f'(\beta)}{1 - f(\beta)} \geq \frac{2c(\Lambda)}{\beta}. \quad (3.5)$$

Integrando ambos os lados de (3.5) de $\tilde{\beta}_c$ até β , temos que

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{1-f(\tilde{\beta}_c)}{1-f(\beta)}\right) &= -\log(1-f(\beta'))\Big|_{\tilde{\beta}_c}^{\beta} = \int_{\tilde{\beta}_c}^{\beta} \frac{f'(\beta')}{1-f(\beta')} d\beta' \\ &\geq \int_{\tilde{\beta}_c}^{\beta} \frac{2c(\Lambda)}{\beta'} d\beta' = 2c(\Lambda) \log(\beta')\Big|_{\tilde{\beta}_c}^{\beta} = 2c(\Lambda) \log\left(\frac{\beta}{\tilde{\beta}_c}\right). \end{aligned}$$

Daí decorre que

$$\frac{1-f(\tilde{\beta}_c)}{1-f(\beta)} \geq \left(\frac{\beta}{\tilde{\beta}_c}\right)^{2c(\Lambda)},$$

e, com simples manipulação algébrica, concluímos que

$$\beta^2(f(\beta) - f(\tilde{\beta}_c)) \geq f(\beta)\beta^2 - f(\tilde{\beta}_c)\tilde{\beta}_c^2 \geq \beta^2 - \tilde{\beta}_c^2, \text{ para } \beta > \tilde{\beta}_c.$$

Dividindo, então, ambos os lados por β^2 , temos que

$$f(\beta) \geq f(\beta) - \underbrace{f(\tilde{\beta}_c)}_{\geq 0} \geq \frac{\beta^2 - \tilde{\beta}_c^2}{\beta^2}.$$

Assim, calculando a raiz quadrada em ambos os lados, segue que

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0 \geq \sqrt{\frac{\beta^{2c(\Lambda)} - \tilde{\beta}_c^{2c(\Lambda)}}{\beta^{2c(\Lambda)}}}. \quad (3.6)$$

Agora, considere $\{\Lambda_n\}_n$ a sequência $\Lambda_n = [-n, n]^d$, temos que $\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^d$ no sentido de van Hove. Considere $y \in \Lambda_n$, defina $\Lambda_{2n}(y)$ como $\Lambda_{2n} + y$, isto é, a caixa Λ_{2n} transladada por y , note que $\Lambda_n \subset \Lambda_{2n}(y)$, e, conseqüentemente,

$$\langle \sigma_y \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^0 \stackrel{\text{(GKS-II)}}{\leq} \langle \sigma_y \rangle_{\Lambda_{2n}(y), \beta, h}^0 \stackrel{\text{(Inv. por Translação)}}{=} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_{2n}, \beta, h}^0$$

Logo, para todo $n \geq 1$, temos que

$$\frac{\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^0}{\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_{2n}, \beta, h}^0} \leq c(\Lambda_n) \leq 1. \quad (3.7)$$

Por sua vez, observe que $\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^0, \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_{2n}, \beta, h}^0 \rightarrow \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^0$ quando $n \rightarrow \infty$. E, portanto, temos que

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^0 \geq \sqrt{\frac{\beta^2 - \tilde{\beta}_c^2}{\beta^2}}.$$

Finalmente, completamos a demonstração, calculando o limite $h \rightarrow 0^+$.

Portanto, resta demonstrar o Lema 3.2.

Demonstração do Lema 3.2. Sejam $\beta, h > 0$ e $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito. Fixaremos a seguinte notação

$$Z := \sum_{\partial \mathbf{n} = \emptyset} w(\mathbf{n}).$$

Derivando $\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^0$ em β , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^0 = \sum_{x, y \in \Lambda} J_{x, y} \left(\langle \sigma_0 \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^0 - \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^0 \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^0 \right).$$

Contudo, aplicando a Proposição 1.3 que nos dá uma representação da esperança de funções do tipo σ_A e aplicando o *Switching Lemma*, podemos expressar

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^0 = \frac{1}{Z^2} \sum_{x, y \in \Lambda} J_{x, y} \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{0, g\} \triangle \{x, y\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[0 \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g],$$

observe que, na expressão acima, cometemos o abuso de notação $g \in \partial \mathbf{n}_1$ para que os cálculos a seguir sejam mais evidentes.

Agora, observe que se \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 são duas correntes tais que $\partial \mathbf{n}_1 = \{0, g\} \triangle \{x, y\}$ e $\partial \mathbf{n}_2 = \emptyset$ de modo que 0 não está conectado a g em $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$. Então, exatamente uma das seguintes situações acontece: $0 \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} x$ e $y \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g$; ou $0 \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} y$ e $x \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g$. Como esses casos são iguais a menos de permutação de x e y , podemos escrever a seguinte expressão

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^0 = \frac{1}{Z^2} \sum_{x, y \in \Lambda} J_{x, y} \delta_{x, y}, \quad (3.8)$$

onde

$$\delta_{x, y} := \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{0, g\} \triangle \{x, y\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[0 \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g, 0 \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} x, y \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g].$$

Os leitores com familiaridade no assunto podem ver a analogia dessa expressão com o evento dado na **Fórmula de Russo**, onde aqui, teríamos que $\{x, y\}$ é pivotal.

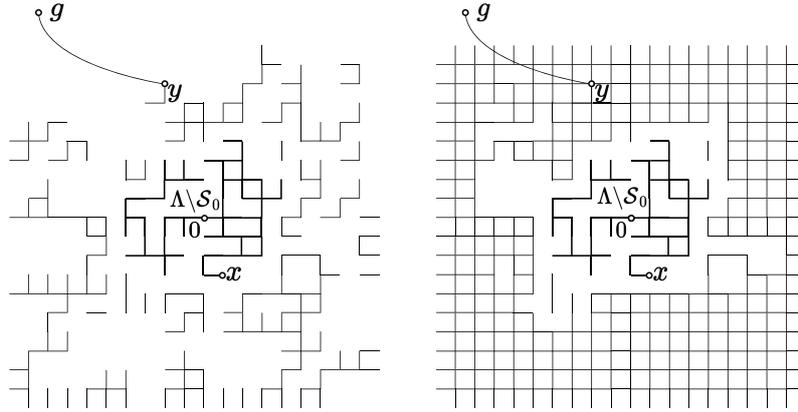


Figura 3.1: Aqui exemplificamos como a adição de arestas entre vértices de \mathcal{S}_0 não altera o conjunto \mathcal{S}_0 .

Implementaremos a técnica de condicionamento em aglomerados, citada no Capítulo 1. Dadas as correntes \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 e $z \in \{0, g\}$, defina \mathcal{S}_z o conjunto de todos os vértices de Λ^g que **não** estão conectados a z em $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$. Calcularemos, então, $\delta_{x,y}$, somando sobre todos os valores possíveis de \mathcal{S}_0 . Uma vez que $\sum_{S \subset \Lambda^g} \mathbb{1}[\mathcal{S}_0 = S] = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \delta_{x,y} &= \sum_{S \subset \Lambda^g} \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{0,g\} \Delta \{x,y\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1)w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[0 \xleftrightarrow{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2} g, 0 \xleftrightarrow{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2} x, y \xleftrightarrow{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2} g, \mathcal{S}_0 = S] \\ &= \sum_{\substack{S \subset \Lambda^g \\ y,g \in S \\ 0,x \notin S}} \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{0,g\} \Delta \{x,y\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1)w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[y \xleftrightarrow{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2} g, \mathcal{S}_0 = S]. \end{aligned}$$

Contudo, como 0 e x não estão conectados a y em $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$, uma vez que $y \in S$ e, portanto, como y é fonte de \mathbf{n}_1 temos que $y \xleftrightarrow{\mathbf{n}_1} g$, em particular $y \xleftrightarrow{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2} g$ e em consequência

$$\delta_{x,y} = \sum_{\substack{S \subset \Lambda^g \\ y,g \in S \\ 0,x \notin S}} \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{0,g\} \Delta \{x,y\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1)w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[\mathcal{S}_0 = S]. \quad (3.9)$$

Afirmção: Seja $S \subset \Lambda^g$ tal que $y, g \in S$ mas $0, x \notin S$, temos que

$$\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{0, g\} \Delta \{x, y\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1)w(\mathbf{n}_2)\mathbb{1}[\mathcal{S}_0 = S] \geq \frac{1}{\langle \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0} \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{0\} \Delta \{x\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1)w(\mathbf{n}_2)\mathbb{1}[\mathcal{S}_0 = S, y \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g]. \quad (3.10)$$

Prova: Defina

$$\Theta := \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{0, g\} \Delta \{x, y\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1)w(\mathbf{n}_2)\mathbb{1}[\mathcal{S}_0 = S].$$

Se $\mathcal{S}_0 = S$, as duas correntes \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 são nulas para toda aresta $\{u, v\}$ com $u \in S$ e $v \notin S$. Portanto, para $i \in \{1, 2\}$, podemos escrever \mathbf{n}_i como

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_i^S + \mathbf{n}_i^{\Lambda^g \setminus S},$$

onde \mathbf{n}_i^A denota a corrente

$$\mathbf{n}_i^A(\{u, v\}) = \begin{cases} \mathbf{n}_i(\{u, v\}), & \text{se } u, v \in A; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Isto é, estamos usando o fato de que, em cada \mathbf{n}_i , os conjuntos S e $\Lambda^g \setminus S$ estão em componentes conexos distintos e assim separá-los como soma de correntes 'disjuntas'. Observe que $w(\mathbf{n}_i) = w(\mathbf{n}_i^{\Lambda^g \setminus S})w(\mathbf{n}_i^S)$ e $\partial \mathbf{n}_i^A = A \cap \partial \mathbf{n}_i$.

De fato, como \mathbf{n}_i^S e $\mathbf{n}_i^{\Lambda^g \setminus S}$ não são, simultaneamente, não nulos, segue

$$(\mathbf{n}_i^S + \mathbf{n}_i^{\Lambda^g \setminus S})(e)! = (\mathbf{n}_i^S(e) + \mathbf{n}_i^{\Lambda^g \setminus S}(e))! = \mathbf{n}_i^S(e)! \mathbf{n}_i^{\Lambda^g \setminus S}(e)!$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned}
w(\mathbf{n}_i) &= \prod_{e \in E(\Lambda^g)} \frac{(\beta J_e)^{\mathbf{n}_e}}{\mathbf{n}_e!} \\
&= \prod_{e \in E(\Lambda^g)} \frac{(\beta J_e)^{\mathbf{n}_i^S + \mathbf{n}_i^{\Lambda^g \setminus S}(e)}}{(\mathbf{n}_i^S + \mathbf{n}_i^{\Lambda^g \setminus S}(e))!} \\
&= \prod_{e \in E(\Lambda^g)} \frac{(\beta J_e)^{\mathbf{n}_i^S} (\beta J_e)^{\mathbf{n}_i^{\Lambda^g \setminus S}(e)}}{\mathbf{n}_i^S(e)! \mathbf{n}_i^{\Lambda^g \setminus S}(e)!}
\end{aligned}$$

Em nosso caso, $\partial \mathbf{n}_1^S = \{y\} \Delta \{g\}$, e para cada S fixado, temos que $\mathbb{1}[\mathcal{S}_0 = S]$ não depende de \mathbf{n}_1^S , uma vez que \mathcal{S}_0 é o conjunto dos vértices não conectados a 0, se adicionarmos ou retirarmos arestas apenas entre vértices que não estão conectados a 0, nenhuma delas será conectada a 0.

Dessa forma, fazendo a decomposição de \mathbf{n}_1 , temos que

$$\begin{aligned}
\Theta &= \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S} = \{0\} \Delta \{x\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S}) w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[\mathcal{S}_0 = S] \sum_{\partial \mathbf{n}_1^S = \{y\} \Delta \{g\}} w(\mathbf{n}_1^S) \\
&= \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S} = \{0\} \Delta \{x\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S}) w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[\mathcal{S}_0 = S] \sum_{\partial \mathbf{n}_1^S = \{y\} \Delta \{g\}} w(\mathbf{n}_1^S) \frac{\sum_{\partial \mathbf{n}_1^S = \emptyset} w(\mathbf{n}_1^S)}{\sum_{\partial \mathbf{n}_1^S = \emptyset} w(\mathbf{n}_1^S)} \\
&= \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S} = \{0\} \Delta \{x\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S}) w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[\mathcal{S}_0 = S] \langle \sigma_y \rangle_{S, \beta, h} \sum_{\partial \mathbf{n}_1^S = \emptyset} w(\mathbf{n}_1^S).
\end{aligned}$$

Agora, multiplique ambos os lados da equação por $\langle \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, h}$. A Desigualdade (GKS-II) implica que $\langle \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, h} \geq \langle \sigma_y \rangle_{S, \beta, h}$, e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0 \Theta &\stackrel{\text{(GKS-II)}}{\geq} \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S} = \{0\} \Delta \{x\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S}) w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[\mathcal{S}_0 = S] (\langle \sigma_y \rangle_{S, \beta, h}^0)^2 \sum_{\partial \mathbf{n}_1^S = \emptyset} w(\mathbf{n}_1^S) \\
&= \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S} = \{0\} \Delta \{x\} \\ \partial \mathbf{n}_2^{\Lambda^g \setminus S} = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S}) w(\mathbf{n}_2^{\Lambda^g \setminus S}) \mathbb{1}[\mathcal{S}_0 = S] (\langle \sigma_y \rangle_{S, \beta, h}^0)^2 \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1^S = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2^S = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1^S) w(\mathbf{n}_2^S) \\
&= \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S} = \{0\} \Delta \{x\} \\ \partial \mathbf{n}_2^{\Lambda^g \setminus S} = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S}) w(\mathbf{n}_2^{\Lambda^g \setminus S}) \mathbb{1}[\mathcal{S}_0 = S] \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1^S = \{y\} \Delta \{g\} \\ \partial \mathbf{n}_2^S = \{y\} \Delta \{g\}}} w(\mathbf{n}_1^S) w(\mathbf{n}_2^S) \\
&= \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = (\{0\} \Delta \{x\}) \cup (\{y\} \Delta \{g\}) \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{y\} \Delta \{g\}}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[\mathcal{S}_0 = S].
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando o *Switching Lemma*, segue que

$$\langle \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0 \Theta \geq \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{0\} \Delta \{x\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[\mathcal{S}_0 = S, y \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g].$$

■

Em conseqüência da afirmação anterior, obtemos a seguinte desigualdade para $\delta_{x,y}$ (definida em (3.9)),

$$\begin{aligned}
\delta_{x,y} &\geq \frac{1}{\langle \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0} \sum_{\substack{S \subset \Lambda^g \\ y, g \in S \\ 0, x \notin S}} \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{0\} \Delta \{x\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[\mathcal{S}_0 = S, y \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g] \\
&= \frac{1}{\langle \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0} \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{0\} \Delta \{x\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[0 \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g, y \overset{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\longleftrightarrow} g].
\end{aligned}$$

Agora, faremos o condicionamento em \mathcal{S}_g , lembrando que \mathcal{S}_g o conjunto de todos os vértices de Λ^g que **não** estão conectados a g em $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$. Como g não pode estar em \mathcal{S}_g , logo basta somar sobre as possibilidades em Λ , isto é, $\sum_{S \subset \Lambda} \mathbb{1}[\mathcal{S}_g = S] = 1$. Portanto,

$$\delta_{x,y} \geq \sum_{S \subset \Lambda} \frac{1}{\langle \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0} \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{0\} \Delta \{x\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[\mathcal{S}_g = S, 0 \xleftrightarrow{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2} g, y \xleftrightarrow{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2} g] \quad (3.11)$$

$$= \sum_{\substack{S \subset \Lambda \\ 0, x \in S \\ y \notin S}} \frac{1}{\langle \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0} \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{0\} \Delta \{x\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[\mathcal{S}_g = S], \quad (3.12)$$

onde, na segunda linha, usamos o fato de que x e 0 são as únicas fontes de \mathbf{n}_1 logo estão conectadas em $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$. Assim, se $0 \xleftrightarrow{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2} g$, então $x \xleftrightarrow{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2} g$. A seguir, provaremos mais uma afirmação auxiliar.

Afirmação: Seja $S \subset \Lambda$ contendo 0 e x , mas não contendo y . Temos que

$$\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{0\} \Delta \{x\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[\mathcal{S}_g = S] = \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{S, \beta, h}^0 \mathbb{1}[\mathcal{S}_g = S] \quad (3.13)$$

Prova: Como na afirmação anterior, se \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 são correntes tais que $\mathcal{S}_g = S$, podemos decompor $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1^S + \mathbf{n}_1^{A \setminus S}$. Novamente, usando que $w(\mathbf{n}_1) = w(\mathbf{n}_1^{A \setminus S}) w(\mathbf{n}_1^S)$, $\partial \mathbf{n}_1^A = A \cap \partial \mathbf{n}_1$

e que $\mathbb{1}[\mathcal{S}_g = S]$ temos que não depende de \mathbf{n}_1^S , logo

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \{0\} \Delta \{x\} \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1)w(\mathbf{n}_2)\mathbb{1}[\mathcal{S}_g = S] \\
&= \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S} = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S})w(\mathbf{n}_2)\mathbb{1}[\mathcal{S}_g = S] \sum_{\partial \mathbf{n}_1^S = \{0\} \Delta \{x\}} w(\mathbf{n}_1^S) \\
&= \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S} = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S})w(\mathbf{n}_2)\mathbb{1}[\mathcal{S}_g = S] \sum_{\partial \mathbf{n}_1^S = \{0\} \Delta \{x\}} w(\mathbf{n}_1^S) \frac{\sum_{\partial \mathbf{n}_1^S = \emptyset} w(\mathbf{n}_1^S)}{\sum_{\partial \mathbf{n}_1^S = \emptyset} w(\mathbf{n}_1^S)} \\
&= \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S} = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S})w(\mathbf{n}_2)\mathbb{1}[\mathcal{S}_g = S] \sum_{\partial \mathbf{n}_1^S = \emptyset} w(\mathbf{n}_1^S) \frac{\sum_{\partial \mathbf{n}_1^S = \{0\} \Delta \{x\}} w(\mathbf{n}_1^S)}{\sum_{\partial \mathbf{n}_1^S = \emptyset} w(\mathbf{n}_1^S)} \\
&= \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S} = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S})w(\mathbf{n}_2)\mathbb{1}[\mathcal{S}_g = S] \sum_{\partial \mathbf{n}_1^S = \emptyset} w(\mathbf{n}_1^S) \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{S, \beta, h}^0 \\
&= \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1)w(\mathbf{n}_2) \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{S, \beta, h}^0 \mathbb{1}[\mathcal{S}_g = S],
\end{aligned}$$

onde, na última igualdade, combinamos \mathbf{n}_1^S e $\mathbf{n}_1^{\Lambda^g \setminus S}$. ■

Aplicando a Equação (3.13) dada pela afirmação na Desigualdade (3.11), temos que

$$\delta_{x,y} \geq \sum_{\substack{S \subset \Lambda \\ 0, x \in S \\ y \notin S}} \frac{1}{\langle \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0} \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1)w(\mathbf{n}_2) \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{S, \beta, h}^0 \mathbb{1}[\mathcal{S}_g = S]. \quad (3.14)$$

Finalmente, avaliaremos $\frac{\partial}{\partial \beta} (\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0)^2$, temos que aplicando a desigualdade acima, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \beta} \left((\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0)^2 \right) &= 2 \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0 \frac{\partial}{\partial \beta} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0 \\
&\stackrel{(3.14)}{\geq} \frac{2}{Z^2} \sum_{\substack{S \subset \Lambda \\ S \ni 0}} \sum_{\substack{x \in S \\ y \notin S}} \frac{\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0}{\langle \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0} \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} J_{x,y} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{S, \beta, h}^0 \mathbb{1}[\mathcal{S}_g = S]. \\
&\geq \frac{2}{Z^2} \sum_{\substack{S \subset \Lambda \\ S \ni 0}} \left(\sum_{\substack{x \in S \\ y \notin S}} \underbrace{\left(\frac{\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0}{\langle \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0} \right)}_{\geq c(\Lambda)} J_{x,y} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{S, \beta, h}^0 \right) \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[\mathcal{S}_g = S].
\end{aligned}$$

A seguir, aplicamos a desigualdade $J_{x,y} \geq \frac{1}{\beta} \tanh(\beta J_{x,y})$. Agora, lembrando que $\varphi_\beta(S) = \sum_{x \in S} \sum_{y \notin S} \tanh(\beta J_{x,y}) \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{S, \beta, 0}^0$. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \beta} \left((\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0)^2 \right) &= \frac{2c(\Lambda)}{\beta} \sum_{\substack{S \subset \Lambda \\ S \ni 0}} \varphi_\beta(S) \frac{\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[\mathcal{S}_g = S]}{\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2)} \\
&\geq \frac{2c(\Lambda)}{\beta} \sum_{\substack{S \subset \Lambda \\ S \ni 0}} \left(\inf_{\substack{S \subset \Lambda \\ S \ni 0}} \varphi_\beta(S) \right) \frac{\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[\mathcal{S}_g = S]}{\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2)} \\
&= \frac{2c(\Lambda)}{\beta} \left(\inf_{\substack{S \subset \Lambda \\ S \ni 0}} \varphi_\beta(S) \right) \frac{\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) \sum_{S \ni 0} \mathbb{1}[\mathcal{S}_g = S]}{\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2)} \\
&= \frac{2c(\Lambda)}{\beta} \left(\inf_{\substack{S \subset \Lambda \\ S \ni 0}} \varphi_\beta(S) \right) \frac{\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[0 \xleftrightarrow{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2} g]}{\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1) w(\mathbf{n}_2)}
\end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1)w(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[0 \xleftrightarrow{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2} g]}{\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1)w(\mathbf{n}_2)} &= \frac{\sum_{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset} w(\mathbf{n}_1)w(\mathbf{n}_2)(1 - \mathbb{1}[0 \xleftrightarrow{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2} g])}{\sum_{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset} w(\mathbf{n}_1)w(\mathbf{n}_2)} \\
&= \frac{\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1)w(\mathbf{n}_2)}{\sum_{\substack{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w(\mathbf{n}_1)w(\mathbf{n}_2)} - \frac{\sum_{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset} w(\mathbf{n}_1)w(\mathbf{n}_2)(\mathbb{1}[0 \xleftrightarrow{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2} g])}{\underbrace{\sum_{\partial \mathbf{n}_1 = \emptyset} w(\mathbf{n}_1)w(\mathbf{n}_2)}_{\stackrel{(SL)}{=} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0}^2}} \\
&= (1 - \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0)^2
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0 \right)^2 \geq \frac{2c(\Lambda)}{\beta} \left(\inf_{\substack{S \subset \Lambda \\ S \ni 0}} \varphi_\beta(S) \right) (1 - \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0)^2$$

□

3.3 Representação por Espinhas Dorsais

Para provar os itens 2. e 3. em toda a sua extensão, precisaremos da denominada Desigualdade de Lieb-Simon modificada. Para isso, estudaremos minuciosamente a geometria intrínseca das correntes aleatórias, explorando uma estrutura de caminhos aleatórios relacionados com as correntes aleatórias. Essa escolha se faz natural no momento em que percebermos que a Desigualdade de Lieb-Simon modificada é o equivalente a uma desigualdade natural dada por funções de Green. Derivaremos, então, a **Representação por Espinhas Dorsais**.

A espinha dorsal de uma corrente \mathbf{n} é um conjunto de caminhos disjuntos (em arestas) que liga as fontes aos elementos de $\partial \mathbf{n}$. Essa ideia já foi mencionada anteriormente, mas agora exibiremos um algoritmo para a obtenção desses caminhos. A exposição desta seção é baseada no artigo [AF86]

Seja $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$. Considere a ordem lexicográfica do \mathbb{Z}^d , *i.e.*, sejam $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tais que $x = (x_1, \dots, x_d)$ e $y = (y_1, \dots, y_d)$, dizemos que $x \leq_{lex} y$ se $x_i = y_i$ para todo $i \leq k - 1$, e $x_k < y_k$ para algum $1 \leq k \leq d$ ou $x = y$. Podemos estender essa ordem a Λ^g ao definir que $g \leq_{lex} x$ para todo $x \in \mathbb{Z}^d$. É fácil verificar que essa é uma relação de ordem total.

De maneira análoga, definimos uma ordem lexicográfica nas arestas de Λ^g . Sejam (x, y) e (z, w) arestas (orientadas) do grafo Λ . Dizemos que $(x, y) \preceq_{lex} (z, w)$ se $x \preceq_{lex} z$ ou $x = z$ e $y \preceq_{lex} w$. Novamente, essa é uma relação de ordem total.

Definiremos, então, a espinha dorsal de uma corrente \mathbf{n} . Primeiro, suponha que $\partial\mathbf{n} = \{x, y\}$. Prossiga da seguinte maneira:

1. Escolha $z_1 \in \{x, y\}$ de forma que z é o menor no sentido lexicográfico;
2. Escolha a menor aresta $e_1 := (z_1, z_2)$ de $E(\Lambda^g)$ (no sentido lexicográfico) partindo de z_1 de modo que \mathbf{n}_{e_1} é ímpar. Afirmamos a existência dessa aresta, dado que z_1 é fonte de \mathbf{n} ;
3. Defina as arestas canceladas por e_1 como o conjunto de todas as arestas e de Λ^g partindo de z_1 de forma que $e \preceq_{lex} e_1$;
4. Escolha a menor aresta $e_2 := (z_2, z_3)$ de $E(\Lambda^g)$ de modo que e_2 não tenha sido cancelada em um passo anterior e \mathbf{n}_{e_2} seja ímpar. Se essa aresta não existisse, e_1 seria a única aresta conectada a z_2 cujo valor de \mathbf{n} fosse ímpar. Portanto, z_2 pertenceria a $\partial\mathbf{n}$. Logo z_2 seria a fonte não selecionada no item 1.. Caso isso ocorra, o algoritmo se encerra ;
5. Se o algoritmo não se encerrou, definimos, de modo análogo, o conjunto das arestas canceladas pelo passo e_2 , como o conjunto de todas as arestas e de Λ^g partindo de z_2 tal que $e \preceq_{lex} e_2$;
6. De maneira similar, continue selecionando os menores passos no sentido lexicográfico com \mathbf{n}_e ímpar e cancelando as respectivas arestas até que o algoritmo se encerre. O algoritmo termina após uma quantidade finita de passos. De fato, uma vez que x e y pertencem a $\partial\mathbf{n}$, o Lema do Aperto de Mãos garante que ambos estão conectados por um caminho de arestas com \mathbf{n}_e ímpar.

Definimos $\omega := \{e_1, \dots, e_k\}$ como o caminho obtido pelo algoritmo acima, e $\tilde{\omega}$ como o conjunto de todas as arestas canceladas pelos passos de ω , denotamos $\partial\omega = \{x, y\}$. Denominamos ω como a **espinha dorsal** de \mathbf{n} e $\tilde{\omega}$ como o conjunto **de arestas canceladas por ω** . É importante observar que $\omega \subset \tilde{\omega}$. Denotamos essa dependência como $\omega := \omega(\mathbf{n})$. Se $e \in \tilde{\omega} \setminus \omega$, então \mathbf{n}_e é par. Do contrário, teríamos que ω teria passado por e ao invés da aresta que a cancelou.

Sejam $A \subset \Lambda^g$ e \mathbf{n} uma corrente aleatória de Λ^g com $\partial\mathbf{n} = A$.

1. Escolha z_1^1 o menor de todos os elementos do conjunto A ;

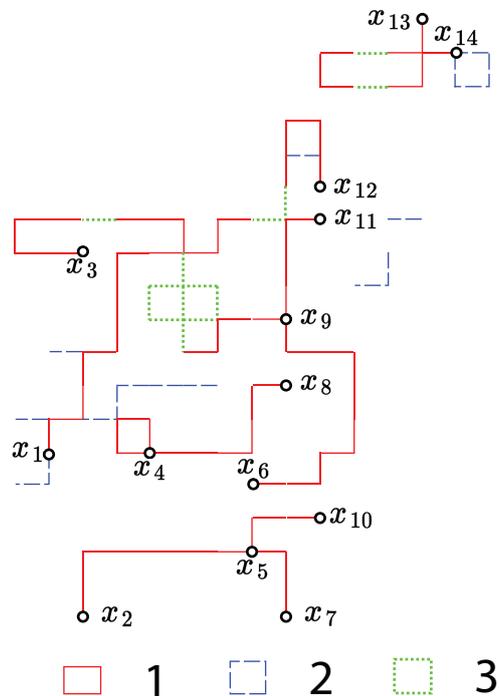


Figura 3.2: Um exemplo de configuração de uma corrente cujos valores em cada aresta estão representados conforme a legenda. Destacamos as fontes e enumerando-as como $\{x_1, \dots, x_{14}\}$ de maneira que $i < j$ implica $x_i \leq_{lex} x_j$.

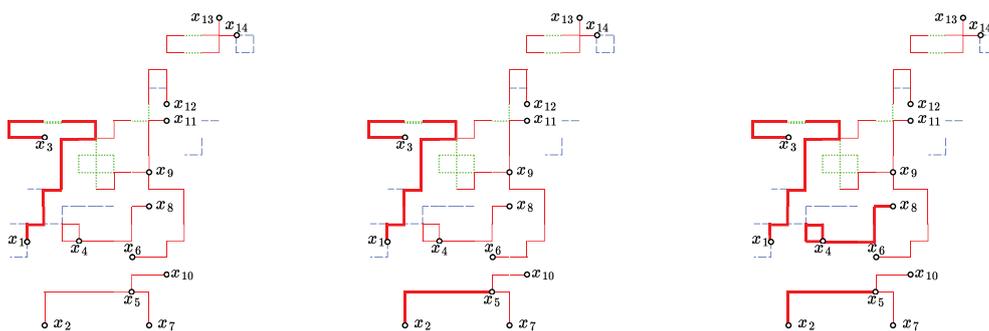


Figura 3.3: Apresentamos os três primeiros elementos da espinha dorsal da configuração apresentada na figura 3.2. Observe que tal escolha dos caminhos nem sempre é feita de modo que o comprimento dos caminhos seja minimal.

2. Prossiga de acordo com o algoritmo anterior até que este termine em algum outro ponto $z_{k_1}^1$ de $\partial\mathbf{n}$. Defina, então, ω_1 e $\tilde{\omega}_1$ como a espinha dorsal e o conjunto de arestas canceladas neste passo;
3. Escolha o menor $z_1^2 \in A \setminus \{z_1^1, z_{k_1}^1\}$ no sentido lexicográfico e repita o processo, desta vez, sem usar quaisquer arestas canceladas por ω_1 , gerando assim ω_2 que liga z_1^2 a $z_{k_2}^2$ e cancela as arestas $\tilde{\omega}_2$;
4. Gerando ω_r que liga pontos de $A \setminus \{z_1^1, z_{k_1}^1, \dots, z_1^{r-1}, z_{k_{r-1}}^{r-1}\}$ sempre usando as menores arestas de $E(\Lambda) \setminus \tilde{\omega}_1 \cup \dots \cup \tilde{\omega}_{r-1}$ até que todos os elementos de A tenham sido esgotados.

Denote $\omega := \omega(\mathbf{n}) := \omega_1 \circ \dots \circ \omega_r$ como a concatenação dos ω_i 's, denominada a espinha dorsal de \mathbf{n} , e defina $\tilde{\omega} = \cup_{i=1}^r \tilde{\omega}_i$ o conjunto de arestas canceladas por ω e $\partial\omega = A$. Novamente, destacamos que $\omega \subset \tilde{\omega}$. A concatenação **não** é comutativa, uma vez que, para concatenar ω_1 e ω_2 , precisamos que o ponto inicial de ω_1 seja menor que o ponto inicial de ω_2 .

Em decorrência, dizemos que $\omega_1 \circ \dots \circ \omega_r$ é **consistente** se $i < j$ implica que o ponto inicial de ω_i é menor que o ponto inicial de ω_j , e que as arestas canceladas por um caminho não são utilizadas nos caminhos subsequentes.

Esse procedimento serve para garantir uma maneira determinística de conseguir caminhos que ligam os vértices de $\partial\mathbf{n}$ sempre disjuntos em arestas. Com isso em mente, podemos definir a seguinte função

$$\begin{aligned} \rho_{\Lambda^g, \beta, h}^\#(\omega) &:= \rho_{\Lambda^g}(\omega) \\ &:= \mathbb{1}[\omega \text{ é consistente}] \frac{1}{\sum_{\partial\mathbf{n}=\emptyset} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n})} \sum_{\partial\mathbf{n}=\partial\omega} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}) \mathbb{1}[\omega(\mathbf{n}) = \omega]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Com isso, ao somar sobre o conjunto de todos os ω consistentes, satisfazendo $\partial\omega = A$ (esse conjunto é sempre finito), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\omega \text{ consistente} \\ \partial\omega=A}} \rho_{\Lambda}(\omega) &= \sum_{\substack{\omega \text{ consistente} \\ \partial\omega=A}} \frac{1}{\sum_{\partial\mathbf{n}=\emptyset} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n})} \sum_{\partial\mathbf{n}=\partial\omega} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}) \mathbb{1}[\omega(\mathbf{n}) = \omega] \\
&= \frac{1}{\sum_{\partial\mathbf{n}=\emptyset} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n})} \sum_{\partial\mathbf{n}=\partial\omega} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}) \underbrace{\sum_{\substack{\omega \text{ consistente} \\ \partial\omega=A}} \mathbb{1}[\omega(\mathbf{n}) = \omega]}_{=1} \\
&= \frac{1}{\sum_{\partial\mathbf{n}=\emptyset} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n})} \sum_{\partial\mathbf{n}=\partial\omega} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}).
\end{aligned}$$

E, portanto, pela Proposição 1.3, temos que

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, h}^{\#} = \sum_{\partial\omega=A} \rho_{\Lambda^g}(\omega) = \sum_{\substack{\omega \text{ consistente} \\ \partial\omega=A}} \rho_{\Lambda^g}(\omega). \quad (3.16)$$

Para podermos escrever $\rho(\omega)$ de maneira mais explícita. Isso segue das seguinte observação: para ω consistente, temos que as parcelas do somatório são dadas exatamente pelas correntes \mathbf{n} que satisfazem as seguintes propriedades

- i) \mathbf{n} é ímpar em todas as arestas de ω ;
- ii) \mathbf{n} é par em todas as arestas de $\tilde{\omega} \setminus \omega$;
- iii) \mathbf{n} restrito a ω^c ou a $\tilde{\omega}^c$ é uma corrente aleatória sem fontes.

Sendo assim, temos que para ω consistente

$$\begin{aligned}
\rho_{\Lambda^g, \beta, h}(\omega) &= \frac{1}{\sum_{\partial\mathbf{n}=\emptyset} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n})} \sum_{\partial\mathbf{n}=\partial\omega} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}) \mathbb{1}[\omega(\mathbf{n}) = \omega] \\
&= \frac{1}{\sum_{\partial\mathbf{n}=\emptyset} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n})} \sum_{\substack{\partial\mathbf{n}=\partial\omega \\ \mathbf{n} \text{ ímpar em } \omega \\ \mathbf{n} \text{ par em } \tilde{\omega} \setminus \omega \\ \mathbf{n} \text{ sem fontes em } \tilde{\omega}^c}} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}) \\
&= \frac{1}{\sum_{\partial\mathbf{n}=\emptyset} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n})} \sum_{\substack{\partial\mathbf{n}=\partial\omega \\ \mathbf{n} \text{ ímpar em } \omega \\ \mathbf{n} \text{ par em } \tilde{\omega} \setminus \omega \\ \mathbf{n} \text{ sem fontes em } \tilde{\omega}^c}} \prod_{e \in \omega} \frac{(\beta J_e)^{n_e}}{n_e!} \prod_{e \in \tilde{\omega} \setminus \omega} \frac{(\beta J_e)^{n_e}}{n_e!} \prod_{e \in \tilde{\omega}^c} \frac{(\beta J_e)^{n_e}}{n_e!}.
\end{aligned}$$

Observe que a condição $\partial \mathbf{n}$ não depende do valor exato de cada \mathbf{n}_e , mas sim de sua paridade. Sendo assim, como fixamos as paridades de \mathbf{n}_e para todo $e \in \tilde{\omega}$, a condição $\partial \mathbf{n}$ dependerá apenas dos valores de \mathbf{n}_e para $e \in \Lambda^g \setminus \tilde{\omega}$. Desta forma

$$\begin{aligned} \rho_{\Lambda^g}(\omega) &= \frac{1}{\sum_{\partial \mathbf{n} = \emptyset} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n})} \prod_{e \in \omega} \sum_{\substack{\mathbf{n}_e \geq 0 \\ \mathbf{n}_e \text{ ímpar}}} \frac{(\beta J_e)^{\mathbf{n}_e}}{\mathbf{n}_e!} \prod_{e \in \tilde{\omega}} \sum_{\substack{\mathbf{n}_e \geq 0 \\ \mathbf{n}_e \text{ par}}} \frac{(\beta J_e)^{\mathbf{n}_e}}{\mathbf{n}_e!} \sum_{\mathbf{n} \text{ sem fontes em } \tilde{\omega}^c} \prod_{e \in \tilde{\omega}^c} \frac{(\beta J_e)^{\mathbf{n}_e}}{\mathbf{n}_e!} \\ &= \frac{1}{\sum_{\partial \mathbf{n} = \emptyset} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n})} \prod_{e \in \omega} \sinh(\beta J_e) \prod_{e \in \tilde{\omega}} \cosh(\beta J_e) \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}}^\# \\ \partial \mathbf{n} = \emptyset}} w_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}}(\mathbf{n}). \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo o lado esquerdo por $\prod_{e \in \omega} \cosh(\beta J_e)$, que é sempre não nulo, resulta a expressão

$$\rho_{\Lambda^g}(\omega) = \prod_{e \in \omega} \tanh(\beta J_e) \left[\prod_{e \in \tilde{\omega}} \cosh(\beta J_e) \frac{Z_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}}^\#(\emptyset, \beta, h)}{Z_{\Lambda^g}^\#(\emptyset, \beta, h)} \right], \quad (3.17)$$

onde $Z_{\Lambda}^\#(A, \beta, h)$ é definido como em 1.10.

E, por sua vez, a expressão dentro dos colchetes é a soma sobre todas as correntes em Λ^g de modo que $\partial \mathbf{n} = \emptyset$ e \mathbf{n} é par em todo o $\tilde{\omega}$. Consequentemente

$$\rho_{\Lambda^g, \beta, h}(\omega) = \prod_{e \in \omega} \tanh(\beta J_e) \sum_{\partial \mathbf{n} = \emptyset} \frac{w_{\Lambda^g}(\mathbf{n})}{Z_{\Lambda^g}} \mathbb{1}[\mathbf{n}_e \text{ é par em todo o } \tilde{\omega}^c]. \quad (3.18)$$

Antes de finalizar esta seção, provaremos uma proposição importante com o intuito de facilitar a manipulação das grandezas envolvendo espinhas dorsais.

Proposição 3.3. *Sejam $\beta > 0$, $h \geq 0$ e ω uma espinha dorsal, temos as seguintes propriedades*

a) *Lei de composição: Sejam ω_1, ω_2 duas espinhas dorsais tais que $\omega_1 \circ \omega_2$ seja consistente, então vale que*

$$\rho_{\Lambda^g}(\omega_1 \circ \omega_2) = \rho_{\Lambda^g}(\omega_1) \rho_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}_1}(\omega_2); \quad (3.19)$$

b) *Seja ω uma espinha dorsal tal que todas as suas arestas estejam contidas em A , então*

$$\rho_{\Lambda^g}(\omega) \leq \rho_A(\omega). \quad (3.20)$$

Demonstração. Começaremos provando a). Seja $\omega_1 \circ \omega_2$ consistente, então, temos que $\tilde{\omega}_1 \cap \omega_2 = \emptyset$. De fato, dada a consistência as arestas de ω_2 são escolhidas após retirarmos as

arestas de $\tilde{\omega}_1$. Então, cada corrente \mathbf{n} contribuindo positivamente para a soma $\rho_{\Lambda^g}(\omega)$ pode ser unicamente escrita como $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$ de maneira que as arestas de \mathbf{n}_1 estejam em $\tilde{\omega}_1$ e as arestas de \mathbf{n}_2 estejam em $\tilde{\omega}_1^c$, e ainda, $\partial\mathbf{n}_1 = \partial\omega_1$ e $\partial\mathbf{n}_2 = \partial\omega_2$. Assim, como na seção anterior, temos que $w(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) = w(\mathbf{n}_1)w(\mathbf{n}_2)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\rho_{\Lambda^g}(\omega_1 \circ \omega_2) &= \frac{1}{Z_{\Lambda^g}} \sum_{\partial\mathbf{n}=\partial\omega} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}) \mathbb{1}[\omega(\mathbf{n}) = \omega_1 \circ \omega_2] \\ &= \frac{1}{Z_{\Lambda^g}} \sum_{\substack{\partial\mathbf{n}_1=\partial\omega_1; \mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\tilde{\omega}_1}^\# \\ \partial\mathbf{n}_2=\partial\omega_2; \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}_1}^\#}} w_{\tilde{\omega}_1}(\mathbf{n}_1) w_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}_1}(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[\omega(\mathbf{n}_1) = \omega_1] \mathbb{1}[\omega(\mathbf{n}_2) = \omega_2].\end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo o lado direito da identidade por $\sum_{\partial\mathbf{n}_2=\emptyset; \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}_1}^\#} w_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}_1}(\mathbf{n}_2)$, podemos utilizar a expressão $\rho_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}_1}(\omega_2) = \frac{\sum_{\partial\mathbf{n}_2=\omega_2; \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}_1}^\#} w_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}_1}(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[\omega(\mathbf{n}_2)=\omega_2]}{\sum_{\partial\mathbf{n}_1=\emptyset; \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}_1}^\#} w_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}_1}(\mathbf{n}_2)}$ de modo a obter

$$\begin{aligned}\rho_{\Lambda^g}(\omega_1 \circ \omega_2) &= \frac{1}{Z_{\Lambda^g}} \sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\tilde{\omega}_1}^\#; \partial\mathbf{n}_1=\partial\omega_1 \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}_1}^\#; \partial\mathbf{n}_2=\emptyset}} w_{\tilde{\omega}_1}(\mathbf{n}_1) w_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}_1}(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[\omega(\mathbf{n}_1) = \omega_1] \rho_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}_1}(\omega_2) \\ &= \frac{1}{Z_{\Lambda^g}} \sum_{\partial\mathbf{n}=\partial\omega_1; \mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda^g}^\#} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}) \mathbb{1}[\omega(\mathbf{n}) = \omega_1] \rho_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}_1}(\omega_2) \\ &= \rho_{\Lambda^g}(\omega_1) \rho_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}_1}(\omega_2).\end{aligned}$$

Agora, provaremos *b*). Seja $A \subset \Lambda^g$, observe que, pela identidade (3.18) provada antes desta proposição, temos que para ω consistente $w_{\Lambda^g}(\mathbf{n})$.

$$\begin{aligned}\rho_{\Lambda^g}(\omega) &= \prod_{e \in \omega} \tanh(\beta J_e) \sum_{\partial\mathbf{n}=\emptyset} \frac{w_{\Lambda^g}(\mathbf{n})}{Z_{\Lambda^g}} \mathbb{1}[n_e \text{ é par em todo o } \tilde{\omega}^c] \\ &\leq \prod_{e \in \omega} \tanh(\beta J_e) \sum_{\partial\mathbf{n}=\emptyset} \frac{w_{\Lambda^g}(\mathbf{n})}{Z_{\Lambda^g}} \mathbb{1}[n_e \text{ é par em todo o } \tilde{\omega}^c \cap A] \\ &= \prod_{e \in \omega} \tanh(\beta J_e) \prod_{e \in \tilde{\omega} \cap A} \cosh(\beta J_e) \frac{Z_{(\tilde{\omega} \cap A)^c}^\#(\emptyset, \beta, h)}{Z_{\Lambda^g}^\#(\emptyset, \beta, h)},\end{aligned}$$

onde, na desigualdade, usamos que a condição dentro da função indicadora é mais fraca, e, portanto, a soma possui mais parcelas positivas.

Por sua vez, usando a identidade (3.17), temos que

$$\rho_A(\omega) = \prod_{e \in \omega} \tanh(\beta J_e) \left[\prod_{e \in \tilde{\omega} \cap A} \cosh(\beta J_e) \frac{Z_{\tilde{\omega}^c \cap A}^\#(\emptyset, \beta, h)}{Z_A^\#(\emptyset, \beta, h)} \right].$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} \rho_{\Lambda^g}(\omega) &\leq \rho_A(\omega) \frac{Z_A^\#(\emptyset, \beta, h)}{Z_{\tilde{\omega}^c \cap A}^\#(\emptyset, \beta, h)} \frac{Z_{(\tilde{\omega} \cap A)^c}^\#(\emptyset, \beta, h)}{Z_{\Lambda^g}^\#(\emptyset, \beta, h)} \\ &= \rho_A(\omega) \frac{Z_A^\#(\emptyset, \beta, h)}{Z_{A \setminus \tilde{\omega}}^\#(\emptyset, \beta, h)} \frac{Z_{A^c \cup (A \setminus \tilde{\omega})}^\#(\emptyset, \beta, h)}{Z_{\Lambda^g}^\#(\emptyset, \beta, h)}, \end{aligned}$$

onde, na segunda linha, usamos que $\tilde{\omega}^c \cap A = A \setminus \tilde{\omega}$ e $(\tilde{\omega} \cap A)^c = A^c \cup (A \setminus \tilde{\omega})$.

Resta mostrar que

$$\frac{Z_A^\#(\emptyset, \beta, h)}{Z_{A \setminus \tilde{\omega}}^\#(\emptyset, \beta, h)} \frac{Z_{A^c \cup (A \setminus \tilde{\omega})}^\#(\emptyset, \beta, h)}{Z_{\Lambda^g}^\#(\emptyset, \beta, h)} \leq 1.$$

Mostraremos que sejam $B, C \subset \Lambda^g$ disjuntos, então

$$\frac{Z_{B^c}^\#(\emptyset, \beta, h)}{Z_{\Lambda^g}^\#(\emptyset, \beta, h)} \leq \frac{Z_C^\#(\emptyset, \beta, h)}{Z_{B \cup C}^\#(\emptyset, \beta, h)}. \quad (3.21)$$

De fato,

$$\frac{Z_{\Lambda^g}^\#(\emptyset, \beta, h)}{Z_{B^c}^\#(\emptyset, \beta, h)} = \left\langle e^{-\beta \sum_{x,y \in B} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y} \right\rangle_{\Lambda, \mathbf{J}', \beta, h}^\#,$$

onde $\mathbf{J}' = \{J'_{x,y}\}_{x,y \in \mathbb{Z}^d}$.

$$J'_{x,y} := \begin{cases} 0, & \text{se } x, y \in B \\ J_{x,y}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por sua vez,

$$\frac{Z_{B \cup C}^\#(\emptyset, \beta, h)}{Z_C^\#(\emptyset, \beta, h)} = \left\langle e^{-\beta \sum_{x,y \in B} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y} \right\rangle_{\Lambda, \mathbf{J}'', \beta, h}^\#,$$

onde $\mathbf{J}'' = \{J''_{x,y}\}_{x,y \in \mathbb{Z}^d}$.

$$J''_{x,y} := \begin{cases} 0, & \text{se } x, y \in C^c \\ J_{x,y}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Porém, $\mathbf{J}''_{x,y} \leq \mathbf{J}'_{x,y}$, para todo $x, y \in \mathbb{Z}^d$.

Aplicando a Desigualdade (GKS-II) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue concluiremos a demonstração.

Observe que

$$\frac{Z_{\Lambda^g}^{\#}(\emptyset, \beta, h)}{Z_{B^c}^{\#}(\emptyset, \beta, h)} = \left\langle e^{-\beta \sum_{x,y \in B} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y} \right\rangle_{\Lambda, \mathbf{J}', \beta, h}^{\#} = \left\langle \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-\beta \sum_{x,y \in B} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y)^n}{n!} \right\rangle_{\Lambda, \mathbf{J}', \beta, h}^{\#}.$$

Para verificar as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada, usamos a seguinte cota

$$\left| \sum_{n=0}^N \frac{(-\beta \sum_{x,y \in B} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y)^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=0}^N \frac{(\beta \sum_{x,y \in B} J_{x,y})^n}{n!} \leq e^{\beta \sum_{x,y \in B} J_{x,y}}.$$

A função do lado direito é constante, e, conseqüentemente, integrável em qualquer medida de probabilidade. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{Z_{\Lambda^g}^{\#}(\emptyset, \beta, h)}{Z_{B^c}^{\#}(\emptyset, \beta, h)} &= \left\langle e^{-\beta \sum_{x,y \in B} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y} \right\rangle_{\Lambda, \mathbf{J}', \beta, h}^{\#} \\ &\stackrel{(\text{Conv. Dom.})}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \frac{(-\beta \sum_{x,y \in B} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y)^n}{n!} \right\rangle_{\Lambda, \mathbf{J}', \beta, h}^{\#} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta \sum_{x,y \in B} J_{x,y})^n}{n!} \langle (\sigma_x \sigma_y)^n \rangle_{\Lambda, \mathbf{J}', \beta, h}^{\#} \end{aligned}$$

Examinando a expressão $(\sigma_x \sigma_y)^n$ de acordo com a paridade de n observamos que para quaisquer valores de σ_x e σ_y $(\sigma_x \sigma_y)^{2n} = 1$ e, por sua vez, $(\sigma_x \sigma_y)^{2n+1} = \sigma_x \sigma_y$. Desta forma, por $\langle (\sigma_x \sigma_y)^{2n} \rangle_{\Lambda, \mathbf{J}', \beta, h}^{\#} = 1 = \langle (\sigma_x \sigma_y)^{2n} \rangle_{\Lambda, \mathbf{J}'', \beta, h}^{\#}$ e $\langle (\sigma_x \sigma_y)^{2n+1} \rangle_{\Lambda, \mathbf{J}', \beta, h}^{\#} \geq \langle (\sigma_x \sigma_y)^{2n+1} \rangle_{\Lambda, \mathbf{J}'', \beta, h}^{\#}$ por (GKS-II). Sendo assim, usando

$$\begin{aligned} \frac{Z_{\Lambda^g}^{\#}(\emptyset, \beta, h)}{Z_{B^c}^{\#}(\emptyset, \beta, h)} &\stackrel{(\text{GKS-II})}{\geq} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta \sum_{x,y \in B} J_{x,y})^{2n}}{(2n)!} \langle 1 \rangle_{\Lambda, \mathbf{J}'', \beta, h}^{\#} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta \sum_{x,y \in B} J_{x,y})^{2n+1}}{(2n+1)!} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \mathbf{J}'', \beta, h}^{\#} \\ &\stackrel{(\text{Conv. Dom.})}{=} \left\langle e^{-\beta \sum_{x,y \in B} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y} \right\rangle_{\Lambda, \mathbf{J}'', \beta, h}^{\#} \\ &= \frac{Z_{B \cup C}^{\#}(\emptyset, \beta, h)}{Z_C^{\#}(\emptyset, \beta, h)}. \end{aligned}$$

O que conclui a demonstração de (3.21). Finalmente, considerando $B = A^c$ e $C = A \setminus \tilde{\omega}$, provamos a proposição. \square

3.4 Prova dos Itens 2. e 3.

Com a representação por espinhas dorsais, provaremos a seguinte Desigualdade de Correlação.

Proposição 3.4 (Desigualdade de Lieb-Simon Modificada). *Sejam $S \subset \mathbb{Z}^d$ contendo o 0 finito, $\beta > 0$ e $z \notin S$. Temos que*

$$\langle \sigma_0 \sigma_z \rangle_{\beta,0}^+ \leq \sum_{x \in S} \sum_{y \notin S} \tanh(\beta J_{x,y}) \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{S,\beta,0}^0 \langle \sigma_y \sigma_z \rangle_{\beta,0}^+. \quad (3.22)$$

Demonstração. Seja $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ tal que $S \subset \Lambda$ e seja $h \geq 0$. Considere o Modelo de Ising no volume Λ com condição de fronteira livre e campo magnético h . Aplicando a representação de espinhas dorsais dada em (3.16), temos que

$$\langle \sigma_0 \sigma_z \rangle_{\Lambda,\beta,h}^0 = \sum_{\partial \omega = \{0,z\}} \rho_{\Lambda^g}(\omega).$$

Escreva $\{v_k\}_{0 \leq k \leq K}$ a sequência de vértices (possivelmente passando pelo vértice fantasma) pelos quais ω em ordem, isto é, se $\omega = \{e_k\}_{1 \leq k \leq K}$, onde que $e_k = \{v_{k-1}, v_k\}$. Denote k' como o menor k tal que $v_{k'} \in \Lambda \setminus S$. Defina $y = v_{k'}$ e $x \in S$ como o último vértice de S pelo qual ω passou antes de ir para y . Temos que

- ω vai de 0 a x apenas usando arestas de $S \cup \{g\}$;
- ω vai de x a y usando uma das duas seguintes opções, ω usa aresta $\{x, y\}$ ou usa as arestas $\{x, g\}$ e $\{g, y\}$;
- ω vai de y a z podendo usar arestas em todo o Λ^g .

Sendo assim, podemos escrever $\omega = \omega_1 \circ \omega_2 \circ \omega_3$, onde ω_i é o caminho realizado respectivamente nos itens acima. Dessa forma, aplicando a Lei de Composição, dada pelo item a) da Proposição 3.3, temos que

$$\rho_{\Lambda^g}(\omega) = \rho_{\Lambda^g}(\omega_1 \circ \omega_2 \circ \omega_3) = \rho_{\Lambda^g}(\omega_1) \rho_{(\omega_2 \circ \omega_3)_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}_1}} = \rho_{\Lambda^g}(\omega_1) \rho_{(\omega_2)_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}_1}} \rho_{(\omega_3)_{\Lambda^g \setminus (\tilde{\omega}_1 \cup \tilde{\omega}_2)}}.$$

Somando sobre todas as possibilidades de x e y , temos que

$$\begin{aligned} \rho_{\Lambda^g}(\omega) &= \rho_{\Lambda^g}(\omega_1 \circ \omega_2 \circ \omega_3) \\ &\leq \sum_{x \in S} \sum_{y \in \Lambda \setminus S} \left(\sum_{\partial \omega_1 = \{0,x\}} \rho_{\Lambda^g}(\omega_1) \right) \left(\sum_{\partial \omega_2 = \{x,y\}} \rho_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}_1}(\omega_2) \right) \left(\sum_{\partial \omega_3 = \{y,z\}} \rho_{\Lambda^g \setminus (\tilde{\omega}_1 \cup \tilde{\omega}_2)}(\omega_3) \right). \end{aligned}$$

Por sua vez, aplicando (GKS-II)

$$\sum_{\partial\omega_2=\{y,z\}} \rho_{\Lambda^g \setminus (\tilde{\omega}_1 \cup \tilde{\omega}_2)}(\omega_3) = \langle \sigma_y \sigma_z \rangle_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}_1 \cup \tilde{\omega}_2}^0 \stackrel{\text{(GKS-II)}}{\leq} \langle \sigma_y \sigma_z \rangle_{\Lambda^g}^0 = \langle \sigma_y \sigma_z \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0.$$

Como ω_2 só usa os vértices x, y e g , podemos aplicar o item *b*) da Proposição 3.3 de modo a obter

$$\sum_{\partial\omega_2=\{y,z\}} \rho_{\Lambda^g \setminus \tilde{\omega}_1}(\omega_2) \leq \sum_{\partial\omega_2=\{y,z\}} \rho_{\{x,y\}^g}(\omega_3) = \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\{x,y\}, \beta, h}^0.$$

Como ω_1 só usa as arestas de $S \cup \{g\}$, assim usando novamente *b*) da Proposição 3.3, temos que

$$\langle \sigma_0 \sigma_z \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0 \leq \sum_{x \in S} \sum_{y \in \Lambda \setminus S} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{S, \beta, h}^0 \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\{x,y\}^g, \beta, h}^0 \langle \sigma_y \sigma_z \rangle_{\Lambda, \beta, h}^0.$$

Calculando o limite $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$, obtemos

$$\langle \sigma_0 \sigma_z \rangle_{\beta, h}^0 \leq \sum_{x \in S} \sum_{y \in \Lambda \setminus S} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{S, \beta, h}^0 \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\{x,y\}^g, \beta, h}^0 \langle \sigma_y \sigma_z \rangle_{\beta, h}^0.$$

Agora, considere $h \rightarrow 0^+$. Como S é finito, então $\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{S, \beta, h}^0 \rightarrow \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{S, \beta, 0}^0$. Por sua vez, temos que $\langle \sigma_0 \sigma_z \rangle_{\beta, h}^0$ e $\langle \sigma_y \sigma_z \rangle_{\beta, h}^0$ convergem para $\langle \sigma_0 \sigma_z \rangle_{\beta, 0}^+$ e $\langle \sigma_y \sigma_z \rangle_{\beta, 0}^+$, respectivamente, em decorrência do resultado central da Seção 2.5.

Por fim,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\{x,y\}^g, \beta, h}^0 &= \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\{x,y\}, \beta, 0}^0 \\ &= \tanh \beta J_{x,y}. \end{aligned}$$

A última igualdade segue do cálculo explícito de $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\{x,y\}, \beta, 0}^0$. Assim, concluímos o resultado. \square

Aplicaremos, então, a Desigualdade de Lieb-Simon Modificada para a demonstração dos itens 2. e 3.. Seja $\beta < \tilde{\beta}_c$, considere S finito, contendo a origem, e satisfazendo $\varphi_\beta(S) < 1$. Seja $\{\Lambda_n\}$ dado por $\Lambda_n = [-n, n]^d$. Defina

$$\chi_n(\beta) := \max_{x \in \Lambda_n} \left\{ \sum_{y \in \Lambda_n} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^+ \right\}.$$

Sejam $w \in \mathbb{Z}^d$, $S_w := S + w$ a translação de S por w . Para n suficientemente grande, temos que $S_w \subset \Lambda_n$. Considere, ainda, $z \in \Lambda_n \setminus S_w$. Aplique, então, a Desigualdade Modificada de Lieb-Simon, de forma a obter

$$\begin{aligned} \langle \sigma_w \sigma_z \rangle_\beta^+ &\leq \sum_{x \in S_w} \sum_{y \notin S_w} \tanh(\beta J_{x,y}) \langle \sigma_w \sigma_x \rangle_{S,\beta,0}^0 \langle \sigma_y \sigma_z \rangle_{\beta,0}^+ \\ &= \sum_{x \in S} \sum_{y \notin S} \tanh(\beta J_{x,y}) \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{S,\beta,0}^0 \langle \sigma_y \sigma_z \rangle_{\beta,0}^+. \end{aligned}$$

Sendo assim, somando sobre todos os $z \in \Lambda_n \setminus S_w$ e aplicando a invariância por translações, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \Lambda_n \setminus S_w} \langle \sigma_w \sigma_z \rangle_\beta^+ &= \sum_{z \in \Lambda_n \setminus S} \langle \sigma_0 \sigma_z \rangle_\beta^+ \\ &\leq \sum_{z \in \Lambda \setminus S} \sum_{x \in S} \sum_{y \notin S} \tanh(\beta J_{x,y}) \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{S,\beta,0}^0 \langle \sigma_y \sigma_z \rangle_{\beta,0}^+ \\ &\leq \varphi_\beta(S) \chi_n(\beta). \end{aligned}$$

Por fim, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \Lambda_n} \langle \sigma_w \sigma_z \rangle_\beta^+ &= \sum_{z \in \Lambda_n \cap S_w} \underbrace{\langle \sigma_w \sigma_z \rangle_\beta^+}_{\leq 1} + \sum_{z \in \Lambda_n \setminus S_w} \langle \sigma_w \sigma_z \rangle_\beta^+ \\ &\leq |S_w| + \varphi_\beta(S) \chi_n(\beta) \\ &= |S| + \varphi_\beta(S) \chi_n(\beta). \end{aligned}$$

Como a cota é uniforme em w , temos que

$$\chi_n(\beta) \leq |S| + \varphi_\beta(S) \chi_n(\beta),$$

com uma simples manipulação algébrica, obtemos

$$\chi_n(\beta) \leq \frac{|S|}{1 - \varphi_\beta(S)}.$$

Calculando o limite quando $n \rightarrow \infty$, temos que

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{\beta,0}^+ \leq \frac{|S|}{1 - \varphi_\beta(S)},$$

o que prova o Item 2.

Por fim, para o item 3., seja $\{\Lambda_n\}$, onde $\Lambda_n = [-n, n]^d$. Considere $S \subset \mathbb{Z}^d$ finito, contendo a origem e satisfazendo $\varphi_\beta(S) < 1$. Seja L suficientemente grande de forma que $S \subset \Lambda_{L-1}$, temos que, para qualquer z , tal que $\|0 - z\|_1 \geq n > L$, então

$$\langle \sigma_0 \sigma_z \rangle_{\beta,0}^+ \leq \sum_{x \in S} \sum_{y \notin S} \tanh(\beta J_{x,y}) \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{S,\beta,0}^0 \langle \sigma_y \sigma_z \rangle_{\beta,0}^+ \leq \varphi_\beta(S) \max_{y \in \Lambda_L} \langle \sigma_y \sigma_z \rangle_{\beta,0}^+.$$

Para $y \in \Lambda_L$, temos que $\|y - z\|_1 \geq n - L$. Se $\|y - z\|_1 \leq L$, usaremos a cota superior $\langle \sigma_y \sigma_z \rangle_{\beta,0}^+ \leq 1$. Se $\|y - z\|_1 > L$, aplicaremos novamente a desigualdade acima com y e z ao invés de 0 e z . Fazendo a iteração até $\lfloor n/L \rfloor$ vezes, temos que

$$\langle \sigma_0 \sigma_z \rangle_{\beta,0}^+ \leq \varphi_\beta(S)^{\lfloor n/L \rfloor} \leq e^{\frac{\log(\varphi_\beta(S))}{L} n} \leq e^{\overbrace{\frac{\log(\varphi_\beta(S))}{L}}^{<0} \|z\|_1}.$$

Completando, assim, a prova do item 3.

Capítulo 4

Continuidade da transição de fase: as Correntes Aleatórias a volume infinito

No capítulo anterior, nós nos empenhamos em caracterizar as fases supercrítica e subcrítica. O foco deste capítulo é caracterizar a fase crítica, em particular, determinar se existe transição de fase quando $\beta = \beta_c$ para $d \geq 3$.

Mais uma vez, para a análise, utilizaremos a representação por correntes aleatórias para estudar as correlações entre os *spins* e, assim, extrair propriedades a respeito de μ_β^+ . Desta vez, porém, o estudo de correlações a volume finito não será suficiente. Apresentaremos a ideia de **corrente aleatória a volume infinito**. Essa ferramenta foi originalmente apresentada em [ADCS15]. Em verdade, o leitor perceberá que estamos lidando com uma representação gráfica do Modelo de Ising que consiste em considerar o suporte da corrente aleatória.

A possibilidade de extrair uma representação gráfica e, também, uma representação em passeios aleatórios (como visto no capítulo anterior) a partir das correntes aleatórias faz com que esta seja uma versátil e poderosa ferramenta para avaliar o comportamento do Modelo de Ising. Isso ocorre pois as correntes aleatórias mantêm parte das propriedades dessas outras duas representações, de maneira que podemos utilizar aquela que for mais vantajosa no momento.

No início deste capítulo, precisamos provar a convergência dessas distribuições e algumas propriedades elementares. Uma vez garantidas essas propriedades, mostraremos como utilizá-las no estudo da continuidade da transição de fase. Observaremos, porém, que sua implementação depende de hipóteses não triviais. Para garantir que estas são válidas, utilizaremos a denominada Desigualdade Infravermelha. Por fim, combinaremos esses dois elementos de forma a responder o problema em questão.

Com todos esses elementos, provaremos, então, que, para o Modelo de Ising de primeiros vizinhos, com $h = 0$ e $\beta = \beta_c$ em dimensão 3 (ou superior), não passa por transição de fase, isto é, a transição de fase é dita contínua. Note que essa é a primeira vez que usamos a hipótese de que $d \geq 3$. Isso ocorre, pois a Cota Infravermelha não é útil para dimensão $d = 1$ ou 2, uma vez que está relacionada ao passeio aleatório simples em dimensão d . O mesmo argumento segue válido para interações mais gerais que a de primeiros vizinhos, faremos uma breve discussão sobre possíveis extensões desta demonstração.

O Modelo de Ising em dimensão $d = 1$ com interação de primeiros vizinhos não apresenta transição de fase, temos que $\beta_c(1) = +\infty$, como provado em [Isi25]. Por esse motivo, não precisamos nos preocupar em estudar fenômenos críticos em dimensão $d = 1$. Outras técnicas são necessárias para provar a continuidade da transição de fase no caso $d = 2$. Esse resultado é conhecido desde 1942, provado originalmente por Lars Onsager em [Ons44], o autor adapta a técnica de matrizes de transição que, originalmente, foi aplicada na análise do Modelo de Ising em \mathbb{Z} . Para expandir o alcance dessa técnica para \mathbb{Z}^2 , houve um aumento expressivo na complexidade das contas envolvidas. Não se espera que esse método possa ser generalizado ainda mais. Uma demonstração mais moderna pode ser encontrada em [DCST17]. Nesse artigo, os autores aplicam a representação do Modelo de Ising via *Random-Cluster Model* (RCM), também conhecido como Modelo de Aglomerados Aleatórios. Porém, os argumentos usados para analisar a continuidade do RCM em $d = 2$ usam essencialmente a planaridade de \mathbb{Z}^2 e, em particular, a possibilidade de se definir um grafo dual (assim como fizemos na Seção 2.2) a fim estudar argumentos do tipo Russo-Seymour-Welsh (RSW) e, portanto. Por conta da natureza dos argumentos, sua aplicação para $d \geq 3$ torna-se inviável. Em [AF86], Aizenman e Fernández provaram que a transição de fase é contínua para todo o $d \geq 4$. Para isso, os autores também utilizaram a técnica de correntes aleatórias.

Porém, o caso $d = 3$, considerado de maior interesse para a Física, só foi demonstrado em [ADCS15] por Aizenman, Duminil-Copin e Sidoravicius. Sendo assim, o intervalo desde a introdução do Modelo de Ising (1920) à demonstração do comportamento de uma liga metálica "real" na temperatura crítica, foi de quase um século.

Uma outra observação é que o valor de J , a constante de acoplamento, afeta o valor de β_c , porém, não afeta, qualitativamente, o que ocorre nessa temperatura. A fim de simplificarmos a demonstração, a partir da Seção 4.3, assumimos $J = \frac{1}{2d}$.

4.1 Correntes aleatórias a volume infinito

Nosso primeiro interesse neste capítulo é definir a representação por correntes aleatórias a volume infinito. Em todo este capítulo, assumiremos $h = 0$, $\# \in \{0, +\}$ e $\mathbf{J} = \{J_{x,y}\}$, onde, $J_{x,y} = J \mathbb{1}_{[\|x-y\|_1=1]}$, em que $J > 0$. Dessa forma, podemos definir as correntes aleatórias $\mathbf{n} \in \mathcal{C}_\Lambda^\#$ para todo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito. Para \mathcal{A} um subconjunto de $\mathcal{C}_\Lambda^\#$, a seguinte medida de probabilidade

$$P_{\Lambda,\beta}^\#(\mathcal{A}) = \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_\Lambda^\# \\ \partial \mathbf{n} = \emptyset}} w_{\Lambda^\beta}(\mathbf{n}) \mathbb{1}[\mathbf{n} \in \mathcal{A}]}{\sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_\Lambda^\# \\ \partial \mathbf{n} = \emptyset}} w_{\Lambda^\beta}(\mathbf{n})},$$

Além disso, definimos a aplicação $\cdot : \mathcal{C}_\Lambda^\# \mapsto \{0, 1\}^{E(\Lambda)}$ como a seguinte aplicação $\hat{\mathbf{n}} = \{\hat{\mathbf{n}}_{x,y}\}_{\{x,y\} \in E(\Lambda)}$ de maneira que

$$\hat{\mathbf{n}}_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{se } n_{x,y} > 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Esta aplicação pode ser vista intuitivamente como a transformação que leva os multigrafos gerados pelas correntes aleatórias em grafos de maneira que dois vértices x e y são conectados por uma aresta no grafo se, e somente se, x e y eram conectados por, ao menos, uma aresta no multigrafo. Como \mathbf{n} é uma função das arestas de \mathbb{Z}^d em \mathbb{Z} , podemos considerar o conjunto $\{e \in E(\mathbb{Z}^d) : \hat{\mathbf{n}}_e = 1\}$ como o suporte de $\hat{\mathbf{n}}$.

De modo análogo ao anterior, defina para \mathcal{A} um subconjunto de $\{0, 1\}^{E(\Lambda)}$, a seguinte medida de probabilidade

$$\hat{P}_{\Lambda,\beta}^\#(\mathcal{A}) = \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_\Lambda^\# \\ \partial \mathbf{n} = \emptyset}} w_{\Lambda^\beta}(\mathbf{n}) \mathbb{1}[\hat{\mathbf{n}} \in \mathcal{A}]}{\sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_\Lambda^\# \\ \partial \mathbf{n} = \emptyset}} w_{\Lambda^\beta}(\mathbf{n})}.$$

Observação 4.1. *O leitor pode contestar a necessidade de definir $\hat{\mathbf{n}}$. Uma vez que, ao estudarmos apenas $\hat{\mathbf{n}}$ perdemos informações relevantes de \mathbf{n} .*

Por exemplo, dado que $\hat{\mathbf{n}}_e = 1$, não sabemos dizer se \mathbf{n}_e é par ou ímpar. Essa incerteza gerará complicações técnicas quando quisermos alterar o valor de uma corrente \mathbf{n} em um subconjunto $A \subset \mathbb{Z}^d$ finito.

Existem dois motivos para estudarmos $\hat{\mathbf{n}}$ ao invés de \mathbf{n} :

1. Enquanto $\mathbf{n} \in \{0, 1, 2, \dots\}^{E(\Lambda)}$, temos que $\hat{\mathbf{n}} \in \{0, 1\}^{E(\Lambda)}$. Isso é particularmente interessante quando considerarmos o limite $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$. Observe que, se não simplificássemos, trabalharíamos com um produto cartesiano infinito (enumerável) de conjuntos não compactos. A não compacidade do espaço dificulta a obtenção de resultados.

Por exemplo, no Teorema 4.1, aplicaremos uma versão adaptada do Lema 1.30 com o propósito de garantir que a medida $\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \hat{P}_{\Lambda, \beta}^\#$ esteja bem definida em toda a σ -álgebra. Porém, o Lema 1.30 é, em geral, falso quando espaço amostral não é compacto.

2. A representação $\hat{\mathbf{n}}$ mantém as propriedades de conexidade de \mathbf{n} . Sejam $A, B \subset \mathbb{Z}^d$, podemos definir conexidade entre conjuntos A e B por meio de $\hat{\mathbf{n}}$ de modo análogo ao feito em 1.3. Dessa forma, temos que $\mathbb{1}[A \overset{\hat{\mathbf{n}}}{\longleftrightarrow} B] = \mathbb{1}[A \overset{\mathbf{n}}{\longleftrightarrow} B]$.

Para exemplificar a análise do Modelo de Ising por meio do suporte de correntes aleatórias, considere $\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2$ distribuídas independentemente de acordo com $\hat{P}_{\Lambda, \beta}^\#$, temos que

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\Lambda, \beta}^\# \otimes \hat{P}_{\Lambda, \beta}^\# \left(x \overset{\widehat{\mathbf{n}}_1 + \widehat{\mathbf{n}}_2}{\longleftrightarrow} y \right) &= \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_\Lambda^\# \\ \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset}} \sum_{\substack{\mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_\Lambda^\# \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}_1) w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}_2) \mathbb{1} \left[x \overset{\widehat{\mathbf{n}}_1 + \widehat{\mathbf{n}}_2}{\longleftrightarrow} y \right]}{\left(\sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_\Lambda^\# \\ \partial \mathbf{n} = \emptyset}} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}) \right)^2} \\ &= \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_\Lambda^\# \\ \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset}} \sum_{\substack{\mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_\Lambda^\# \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}_1) w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}_2) \mathbb{1} \left[x \overset{\widehat{\mathbf{n}}_1 + \widehat{\mathbf{n}}_2}{\longleftrightarrow} y \right]}{\left(\sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_\Lambda^\# \\ \partial \mathbf{n} = \emptyset}} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}) \right)^2} \\ &\stackrel{(SL)}{=} \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_\Lambda^\# \\ \partial \mathbf{n}_1 = \{x, y\}}} \sum_{\substack{\mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_\Lambda^\# \\ \partial \mathbf{n}_2 = \{x, y\}}} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}_1) w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}_2)}{\left(\sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_\Lambda^\# \\ \partial \mathbf{n} = \emptyset}} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}) \right)^2} \\ &= (\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, 0}^\#)^2. \end{aligned}$$

Seja $\{\Lambda_n\}_n$ uma sequência de subconjuntos finitos de \mathbb{Z}^d de modo que $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\Lambda_n = [-n, n]^d$. Mostraremos a existência do limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}_{\Lambda_n}^\#(\mathcal{A})$ e outras propriedades importantes.

Teorema 4.1. *Seja $\{\Lambda_n\}_n$ uma sequência, de subconjuntos finitos de \mathbb{Z}^d de forma que $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$, $h = 0$, $\beta > 0$ e \mathbf{J} a interação de primeiros vizinhos. Temos que existem medidas de probabilidade \hat{P}_β^+ e \hat{P}_β^0 em $\{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^d)}$ equipada com a σ -álgebra gerada pelos cilindros tais que*

P1 (Convergência) para todo evento \mathcal{A} dependendo de um número finito de arestas, vale a convergência

$$\hat{P}_\beta^+(\mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}_{\Lambda_n, \beta}^+(\mathcal{A}) \text{ e } \hat{P}_\beta^0(\mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}_{\Lambda_n, \beta}^0(\mathcal{A}),$$

e esses limites não dependem da escolha de $\{\Lambda_n\}_n$;

P2 (Invariância por translações) \hat{P}_β^+ e \hat{P}_β^0 são invariantes por translações $\theta_z, z \in \mathbb{Z}^d$;

P3 (Ergodicidade) \hat{P}_β^+ e \hat{P}_β^0 são ergódicas com respeito ao grupo de translações $\{\theta_z : z \in \mathbb{Z}^d\}$.

Demonstração. *P1)* Esta prova é técnica e requer uma sequência não trivial de passos. Primeiro, mostraremos que, para um evento local \mathcal{A} , o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\Lambda_n, \beta}^\#(\mathcal{A})$ existe (note que a expressão não possui o chapéu). A seguir, definiremos $\hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A})$ (para \mathcal{A} evento local), e, por fim, usaremos o Teorema da Extensão de Caratheodory para estender a toda a σ -álgebra.

Precisaremos da seguinte observação para estudar o limite: os valores de \mathbf{n} em cada aresta são independentes quando condicionados às paridades. Além disso, as suas distribuições marginais são de Poisson com média $\beta J_{x,y}$ e condicionadas sob as mesmas paridades. Consequentemente, definimos as variáveis aleatórias de paridade $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_{x,y}\}_{\{x,y\} \in E(\mathbb{Z}^d)}$ como

$$\mathbf{r}_{x,y} = (-1)^{\mathbf{n}_{x,y}},$$

e provamos a existência do seu limite em distribuição. Por fim, aplicaremos o Princípio de Inclusão-Exclusão a fim de garantir a existência do limite de P_β^+ e P_β^0 para eventos locais. Em ambos os casos $\# = 0$ e $\# = +$, as demonstrações são análogas. Sendo assim, manteremos a notação $P_\beta^\#$.

Seja $E \subset E(\mathbb{Z}^d)$ um conjunto de arestas finito, defina os eventos:

$$\mathcal{R}_E := \{\omega : \mathbf{r}_{x,y}(\omega) = 1, \forall \{x,y\} \in E\} \text{ e } \mathcal{R}_E^{(0)} := \{\omega : \mathbf{n}_{x,y}(\omega) = 0, \forall \{x,y\} \in E\}.$$

Para n suficientemente grande de forma que $E \subset \Lambda_n$, temos que

$$\begin{aligned}
P_{\Lambda_n, \beta}^{\#}(\mathcal{R}_E) &= \frac{\sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda}^{\#}} w_{\Lambda_n}(\mathbf{n}) \mathbb{1}[\mathcal{R}_E]}{\sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda}^{\#}} w_{\Lambda_n}(\mathbf{n})} \\
&= \frac{\sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda}^{\#}} w_{\Lambda_n}(\mathbf{n}) \mathbb{1}[\mathcal{R}_E^{(0)}]}{\sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{C}_{\Lambda}^{\#}} w_{\Lambda_n}(\mathbf{n})} \prod_{\{x,y\} \in E} \cosh(\beta J_{x,y}) \\
&= \frac{Z_{\Lambda_n \setminus E}^{\#}(\emptyset, \beta, 0)}{Z_{\Lambda_n}^{\#}(\emptyset, \beta, 0)} \prod_{\{x,y\} \in E} \cosh(\beta J_{x,y}), \tag{4.1}
\end{aligned}$$

onde $Z^{\#}$ é a quantidade definida em (1.10) em que denotamos por $\Lambda_n \setminus E$ o modelo no qual $J_{x,y} = 0$ para todo $x, y \in E$.

Finalmente, a expressão acima pode ser escrita como

$$P_{\Lambda_n, \beta}^{\#}(\mathcal{R}_E) = \langle e^{-\beta K_E} \rangle_{\Lambda_n, \beta}^{\#} \prod_{\{x,y\} \in E} \cosh(\beta J_{x,y}), \tag{4.2}$$

onde $K_E = \sum_{\{x,y\} \in E} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y$. Por sua vez, a convergência de (4.2) é garantida pela convergência $\mu_{\Lambda_n, \beta}^{\#} \rightarrow \mu_{\beta}^{\#}$.

Observe que o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\Lambda_n, \beta}^{\#}(\mathcal{R}_E)$ não depende da escolha da coleção de $\{\Lambda_n\}$, uma vez que o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle e^{-\beta K_E} \rangle_{\Lambda_n, \beta}^{\#}$ também não depende dessa escolha.

Sejam E, F duas coleções disjuntas de arestas, defina o evento

$$\mathcal{R}_{E,F} := \{\omega : \mathbf{r}_{x,y}(\omega) = 1, \forall \{x,y\} \in E, \mathbf{r}_{x,y}(\omega) = -1, \forall \{x,y\} \in F\}.$$

Pelo Princípio de Inclusão-Exclusão, obtemos

$$\begin{aligned}
P_{\Lambda_n, \beta}^{\#}(\mathcal{R}_{E,F}) &= \hat{P}_{\Lambda_n, \beta}^{\#} \left(\mathcal{R}_E \setminus \left(\bigcup_{e \in F} \mathcal{R}_{E \cup \{e\}} \right) \right) \\
&= \hat{P}_{\Lambda_n, \beta}^{\#}(\mathcal{R}_E) - \hat{P}_{\Lambda_n, \beta}^{\#} \left(\bigcup_{e \in F} \mathcal{R}_{E \cup \{e\}} \right) \\
&= \hat{P}_{\Lambda_n, \beta}^{\#}(\mathcal{R}_E) - \sum_{\emptyset \neq G \subset F} (-1)^{|G|-1} \hat{P}_{\Lambda_n, \beta}^{\#}(\mathcal{R}_{E \cup G}) \\
&= \sum_{G \subset F} (-1)^{|G|} P_{\Lambda_n, \beta}^{\#}(\mathcal{R}_{E \cup G})
\end{aligned}$$

E, portanto, o limite

$$P_\beta^\#(\mathcal{R}_{E,F}) := \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\Lambda_n, \beta}^\#(\mathcal{R}_{E,F}) = \sum_{G \subset F} (-1)^{|G|} P_\beta^\#(\mathcal{R}_{E \cup G})$$

também está bem definido. Seja \mathcal{A} um evento que depende de uma coleção finita de arestas $A \subset E(\mathbb{Z}^d)$. A seguir, para dois conjuntos C e D , denotaremos por $C \sqcup D$ a união disjunta de C e D , isto é, $C \cap D = \emptyset$. Segue

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\Lambda_n, \beta}^\#(\mathcal{A}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{E, F \subset A \\ E \sqcup F = A}} P_{\Lambda_n, \beta}^\#(\mathcal{A} | \mathcal{R}_{E,F}) P_{\Lambda_n, \beta}^\#(\mathcal{R}_{E,F}) \\ &= \sum_{\substack{E, F \subset A \\ E \sqcup F = A}} P_{A, \beta}^\#(\mathcal{A} | \mathcal{R}_{E,F}) \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\Lambda_n, \beta}^\#(\mathcal{R}_{E,F}), \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, identificamos A com o grafo induzido por suas arestas. Sendo assim, a existência do limite é garantida e não depende da escolha de $\{\Lambda_n\}_n$.

Como referido na Observação 4.1, no espaço $\{0, 1, 2, \dots\}^{E(\mathbb{Z}^d)}$, não existe um equivalente para o Lema 1.30, que é válido, em geral, para o produto cartesiano de espaços **finitos**. Sendo assim, não há forma direta de assegurar as hipóteses do Teorema da Extensão de Caratheodory. De fato, provar a σ -aditividade de $P_\beta^\#$ seria uma tarefa muito árdua. Portanto, dado $\mathcal{A} \subset \{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^d)}$ evento local, defina

$$\hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A}) = P_\beta^\#(\hat{\mathcal{A}}^{-1}),$$

onde $\hat{\mathcal{A}}^{-1} := \{\mathbf{n} \in \{0, 1, 2, \dots\}^{E(\mathbb{Z}^d)} : \hat{\mathbf{n}} \in \mathcal{A}\}$. Para $\mathcal{A} \subset \{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^d)}$ local, segue

$$\begin{aligned} \hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A}) &= P_\beta^\#(\hat{\mathcal{A}}^{-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\Lambda_n, \beta}^\#(\hat{\mathcal{A}}^{-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}_{\Lambda_n, \beta}^\#(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Observe que o limite acima, também, não depende da escolha de $\{\Lambda_n\}_n$.

Por fim, podemos estender a existência dessa medida para toda σ -álgebra, usando novamente o Teorema da Extensão de Caratheodory e o análogo do Lema 1.30.

P2) Sejam $x \in \mathbb{Z}^d$ fixado e E um conjunto finito de vértices, e considere novamente o evento \mathcal{R}_E e a sequência $\{x + \Lambda_n\}_n$, como o limite de $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \cdot \rangle_{\Lambda_n, \beta}^\# = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \cdot \rangle_{x + \Lambda_n, \beta}^\#$, podemos prosseguir como no item anterior para obter o resultado.

P3) Faremos esta demonstração em quatro passos. Primeiro, mostraremos que, para dois conjuntos finitos E e F , vale que

$$\lim_{\|z\|_1 \rightarrow \infty} P_\beta^\#(\mathcal{R}_E \cap \mathcal{R}_{F+z}) = P_\beta^\#(\mathcal{R}_E) P_\beta^\#(\mathcal{R}_F). \quad (4.3)$$

Para isso, aplicaremos algumas propriedades ergódicas de μ_β^+ e μ_β^0 mencionadas no Capítulo 1. Para todo $\|z\|_1$ suficientemente grande tal que $E \cap (F+z) = \emptyset$, vale que

$$\frac{P_{\Lambda_n, \beta}^\#(\mathcal{R}_E \cap \mathcal{R}_{F+z})}{P_{\Lambda_n, \beta}^\#(\mathcal{R}_E) P_{\Lambda_n, \beta}^\#(\mathcal{R}_{F+z})} = \frac{\langle e^{-\beta K_E} e^{-\beta K_{F+z}} \rangle_{\Lambda_n, \beta}^\#}{\langle e^{-\beta K_E} \rangle_{\Lambda_n, \beta}^\# \langle e^{-\beta K_{F+z}} \rangle_{\Lambda_n, \beta}^\#}.$$

Considerando o limite $n \rightarrow \infty$, temos

$$\frac{\hat{P}_\beta^\#(\mathcal{R}_E \cap \mathcal{R}_{F+z})}{\hat{P}_\beta^\#(\mathcal{R}_E) \hat{P}_\beta^\#(\mathcal{R}_{F+z})} = \frac{\langle e^{-\beta K_E} e^{-\beta K_{F+z}} \rangle_\beta^\#}{\langle e^{-\beta K_E} \rangle_\beta^\# \langle e^{-\beta K_{F+z}} \rangle_\beta^\#}.$$

O Teorema 1.33 (ergodicidade de μ_β^+) garante (4.3) para o caso $\# = +$ e o Teorema 1.34 (semi-ergodicidade de μ_β^0) para o caso $\# = 0$.

O segundo passo consiste em mostrar que

$$\lim_{\|z\|_1 \rightarrow \infty} P_\beta^\#(\mathcal{R}_{E_1, E_2} \cap \mathcal{R}_{F_1+z, F_2+z}) = P_\beta^\#(\mathcal{R}_{E_1, E_2}) P_\beta^\#(\mathcal{R}_{F_1+z, F_2+z}). \quad (4.4)$$

Novamente, pelo Princípio de Inclusão-Exclusão, obtemos

$$\begin{aligned} P_\beta^\#(\mathcal{R}_{E_1, E_2} \cap \mathcal{R}_{F_1+z, F_2+z}) &= P_\beta^\#(\mathcal{R}_{E_1 \cup (F_1+z), E_2 \cup (F_2+z)}) \\ &= \sum_{G \subset E_2 \cup (F_2+z)} (-1)^{|G|} P_\beta^\#(\mathcal{R}_{E_1 \cup (F_1+z) \cup G}) \\ &= \sum_{\substack{G' \subset E_2 \\ G'' \subset F_2}} (-1)^{|G' \cup (G''+z)|} P_\beta^\#(\mathcal{R}_{E_1 \cup (F_1+z) \cup G' \cup (G''+z)}) \\ &= \sum_{\substack{G' \subset E_2 \\ G'' \subset F_2}} (-1)^{|G'|} (-1)^{|G''+z|} P_\beta^\#(\mathcal{R}_{E_1 \cup (F_1+z) \cup G' \cup (G''+z)}) \\ &= \sum_{\substack{G' \subset E_2 \\ G'' \subset F_2}} (-1)^{|G'|} (-1)^{|G''|} P_\beta^\#(\mathcal{R}_{E_1 \cup (F_1+z) \cup G' \cup (G''+z)}) \\ &= \sum_{\substack{G' \subset E_2 \\ G'' \subset F_2}} (-1)^{|G'|} (-1)^{|G''|} P_\beta^\#(\mathcal{R}_{E_1 \cup G'} \cup \mathcal{R}_{(F_1 \cup G''+z)}). \end{aligned}$$

Ao calcular o limite $\|z\|_1 \rightarrow \infty$, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\|z\|_1 \rightarrow \infty} P_\beta^\#(\mathcal{R}_{E_1, E_2} \cap \mathcal{R}_{F_1+z, F_2+z}) &\stackrel{(4.3)}{=} \sum_{\substack{G' \subset E_2 \\ G'' \subset F_2}} (-1)^{|G'|} (-1)^{|G''|} P_\beta^\#(\mathcal{R}_{E_1 \cup G'}) P_\beta^\#(\mathcal{R}_{(F_1 \cup G')}) \\
&= \sum_{G' \subset E_2} (-1)^{|G'|} P_\beta^\#(\mathcal{R}_{E_1 \cup G'}) \sum_{G'' \subset F_2} (-1)^{|G''|} P_\beta^\#(\mathcal{R}_{F_1 \cup G''}) \\
&= P_\beta^\#(\mathcal{R}_{E_1, E_2}) P_\beta^\#(\mathcal{R}_{F_1, F_2}).
\end{aligned}$$

Para o terceiro passo, sejam \mathcal{A}, \mathcal{B} eventos locais em $\{0, 1, 2, \dots\}^{E(\mathbb{Z}^d)}$, defina $A := \text{supp } \mathcal{A}$ e $B := \text{supp } \mathcal{B}$. Seja $\|z\|_1$ suficientemente grande de maneira que $A \cap \theta_{-z} B = \emptyset$. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}
P_\beta^\#(\mathcal{A} \cap \theta_{-z} \mathcal{B}) &= \sum_{\substack{E_1 \sqcup E_2 = A \\ F_1 \sqcup F_2 = A}} P_\beta^\#(\mathcal{A} \cap \theta_{-z} \mathcal{B} \cap \mathcal{R}_{E_1, E_2} \cap \mathcal{R}_{F_1+z, F_2+z}) \\
&= \sum_{\substack{E_1 \sqcup E_2 = A \\ F_1 \sqcup F_2 = A}} P_\beta^\#(\mathcal{A} \cap \theta_{-z} \mathcal{B} | \mathcal{R}_{E_1, E_2} \cap \mathcal{R}_{F_1+z, F_2+z}) P_\beta^\#(\mathcal{R}_{E_1, E_2} \cap \mathcal{R}_{F_1+z, F_2+z}) \\
&= \sum_{\substack{E_1 \sqcup E_2 = A \\ F_1 \sqcup F_2 = A}} P_\beta^\#(\mathcal{A} | \mathcal{R}_{E_1, E_2}) P_\beta^\#(\theta_{-z} \mathcal{B} | \mathcal{R}_{F_1+z, F_2+z}) P_\beta^\#(\mathcal{R}_{E_1, E_2} \cap \mathcal{R}_{F_1+z, F_2+z}) \\
&= \sum_{\substack{E_1 \sqcup E_2 = A \\ F_1 \sqcup F_2 = A}} P_\beta^\#(\mathcal{A} | \mathcal{R}_{E_1, E_2}) P_\beta^\#(\mathcal{B} | \mathcal{R}_F) P_\beta^\#(\mathcal{R}_{E_1, E_2} \cap \mathcal{R}_{F_1+z, F_2+z}),
\end{aligned}$$

onde, na terceira igualdade, usamos a independência das arestas condicionadas na paridade e, na última, a invariância de $P_\beta^\#$ por translações. Calculando o limite $\|z\|_1 \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{\|z\|_1 \rightarrow \infty} P_\beta^\#(\mathcal{A} \cap \theta_{-z} \mathcal{B}) &= \sum_{\substack{E_1 \sqcup E_2 = A \\ F_1 \sqcup F_2 = A}} P_\beta^\#(\mathcal{A} | \mathcal{R}_{E_1, E_2}) P_\beta^\#(\mathcal{B} | \mathcal{R}_{F_1, F_2}) P_\beta^\#(\mathcal{R}_{E_1, E_2}) P_\beta^\#(\mathcal{R}_F) \\
&= P_\beta^\#(\mathcal{A}) P_\beta^\#(\mathcal{B}).
\end{aligned}$$

Agora, estendemos essas propriedades para $\hat{P}_\beta^\#$. Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} dois eventos locais em $\{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^d)}$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{\|z\|_1 \rightarrow \infty} \hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A} \cap \theta_{-z}\mathcal{B}) &= \lim_{\|z\|_1 \rightarrow \infty} P_\beta^\#(\mathcal{A} \cap \widehat{\theta_{-z}\mathcal{B}^{-1}}) \\ &= \lim_{\|z\|_1 \rightarrow \infty} P_\beta^\#(\hat{\mathcal{A}}^{-1} \cap \theta_{-z}\hat{\mathcal{B}}^{-1}) \\ &= P_\beta^\#(\hat{\mathcal{A}}^{-1})P_\beta^\#(\hat{\mathcal{B}}^{-1}) \\ &= \hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A})\hat{P}_\beta^\#(\mathcal{B}) \end{aligned}$$

Para o último passo, considere \mathcal{A} um evento invariante por translação na σ -álgebra de $\{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^d)}$, existe \mathcal{A}_ε um evento local tal que $\hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A} \Delta \mathcal{A}_\varepsilon) < \varepsilon$. Obtemos

$$\varepsilon > \hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A} \Delta \mathcal{A}_\varepsilon) = \hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A}) + \hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A}_\varepsilon) - \underbrace{2\hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A} \cap \mathcal{A}_\varepsilon)}_{\geq -2 \max\{\hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A}), \hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A}_\varepsilon)\}} \geq |\hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A}) - \hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A}_\varepsilon)|.$$

Além disso, temos que $\mathcal{A} \Delta \theta_z \mathcal{A}_\varepsilon = \theta_z(\mathcal{A} \Delta \mathcal{A}_\varepsilon)$, pois \mathcal{A} é invariante por translações. Considere, então, z tal que $\|z\|_1$ seja suficientemente grande de tal que $\text{supp } \mathcal{A}_\varepsilon$ e $\text{supp}(\theta_z \mathcal{A}_\varepsilon)$ sejam disjuntos. Segue, então, que $\mathcal{A} \Delta (\mathcal{A}_\varepsilon \cap \theta_z \mathcal{A}_\varepsilon) = (\mathcal{A} \Delta \mathcal{A}_\varepsilon) \cup (\mathcal{A} \Delta \theta_z \mathcal{A}_\varepsilon)$. Portanto,

$$\hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A} \Delta (\mathcal{A}_\varepsilon \cap \theta_z \mathcal{A}_\varepsilon)) \leq \hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A} \Delta \mathcal{A}_\varepsilon) + \hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A} \Delta \theta_z \mathcal{A}_\varepsilon) < 2\varepsilon.$$

Prosseguindo como anteriormente, temos que $|P(\mathcal{A}) - P(\mathcal{A}_\varepsilon \cap \theta_z \mathcal{A}_\varepsilon)| < 2\varepsilon$. Agora, calculando $\|z\|_1 \rightarrow \infty$ temos $\hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A}_\varepsilon \cap \theta_z \mathcal{A}_\varepsilon) \rightarrow \hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A}_\varepsilon)\hat{P}_\beta^\#(\theta_z \mathcal{A}_\varepsilon) = \hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A}_\varepsilon)^2$, temos que

$$|\hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A}) - (\hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A}_\varepsilon))^2| < 2\varepsilon.$$

Considerando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, segue que $\hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A}) = \hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A})^2$ e portanto $\hat{P}_\beta^\#(\mathcal{A}) \in \{0, 1\}$. \square

Uma vez estabelecidas as medidas P_β^0 e P_β^+ , derivaremos uma terceira medida que será fundamental para a demonstração dos resultados. Sejam \mathbf{n}_1 uma corrente aleatória a volume Λ com lei $P_{\Lambda, \beta}^0$ e \mathbf{n}_2 com lei $P_{\Lambda, \beta}^+$, definiremos $\mathbb{P}_{\Lambda, \beta}$ como a lei de $\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}$, isto é, seja $\mathcal{A} \subset \{0, 1\}^{E(\Lambda^g)}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\Lambda, \beta}(\mathcal{A}) &= \hat{P}_{\Lambda, \beta}^0 \otimes \hat{P}_{\Lambda, \beta}^+(\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2} \in \mathcal{A}) \\ &= \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_\Lambda^0 \\ \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset}} \sum_{\substack{\mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_\Lambda^+ \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}_1) w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}[\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2} \in \mathcal{A}]}{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_\Lambda^0 \\ \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset}} \sum_{\substack{\mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_\Lambda^+ \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}_1) w_{\Lambda^g}(\mathbf{n}_2)}. \end{aligned}$$

Vale observar que cometemos um abuso de notação. Isso ocorre pois a função w (definida em 1.9) depende de $J_{x,g}$ que, por sua vez, da condição de fronteira $+$ ou 0 . Essa omissão é necessária para evitar que a notação seja muito carregada.

A partir do Teorema 4.1, podemos provar que $\mathbb{P}_\beta = \lim_{\Lambda_n} \mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}$ existe e é invariante e ergódica com respeito ao grupo de translações de \mathbb{Z}^d .

Teorema 4.2. *Seja $\{\Lambda_n\}_n$ uma sequência de subconjuntos finitos de \mathbb{Z}^d de modo que $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$, $h = 0$, $\beta > 0$ e \mathbf{J} a interação de primeiros vizinhos. Temos que existe a medida de probabilidade \mathbb{P}_β em $\{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^d)}$ equipada com a σ -álgebra gerada pelos cilindros tais que*

P1 (Convergência) para todo evento \mathcal{A} dependendo de um número finito de arestas, vale a convergência

$$\mathbb{P}_\beta(\mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}(\mathcal{A}),$$

e esse limite não depende da escolha de $\{\Lambda_n\}_n$;

P2 (Invariância por translações) \mathbb{P}_β é invariante por translações $\theta_z, z \in \mathbb{Z}^d$;

P3 (Ergodicidade) \mathbb{P}_β é ergódicas com respeito ao grupo de translações $\{\theta_z : z \in \mathbb{Z}^d\}$.

Denotaremos como $\mathbb{E}_\beta[\cdot]$ como o valor esperado com respeito à medida \mathbb{P}_β .

Demonstração. Por sua semelhança à demonstração anterior, comentaremos as adaptações necessárias para provar este teorema.

P1) Primeiro, seja E uma coleção de arestas de \mathbb{Z}^d , defina os eventos

$$\overline{\mathcal{R}}_E := \{\widehat{\mathbf{n}}_1 + \widehat{\mathbf{n}}_{2x,y} : \widehat{\mathbf{n}}_1 + \widehat{\mathbf{n}}_{2x,y} = 0, \forall \{x, y\} \in E\},$$

$$\mathcal{R}'_E := \{\widehat{\mathbf{n}}_1 : \widehat{\mathbf{n}}_{1x,y} = 0, \forall \{x, y\} \in E\}, \mathcal{R}''_E := \{\widehat{\mathbf{n}}_2 : \widehat{\mathbf{n}}_{2x,y} = 0, \forall \{x, y\} \in E\}.$$

Note que $\widehat{\mathbf{n}}_1 + \widehat{\mathbf{n}}_{2x,y} = 0$ se, e somente se, $\widehat{\mathbf{n}}_{1x,y} = 0$ e $\widehat{\mathbf{n}}_{2x,y} = 0$, porém, \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 são sorteados independentemente. Daí, segue

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}(\overline{\mathcal{R}}_E) &= \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 \\ \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset}} \sum_{\substack{\mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w_{\Lambda_n}(\mathbf{n}_1) w_{\Lambda_n}(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}_{[\widehat{\mathbf{n}}_{1x,y} = 0, \forall \{x,y\} \in E]} \mathbb{1}_{[\widehat{\mathbf{n}}_{2x,y} = 0, \forall \{x,y\} \in E]}}{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 \\ \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset}} \sum_{\substack{\mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w_{\Lambda_n}(\mathbf{n}_1) w_{\Lambda_n}(\mathbf{n}_2)} \\ &= \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 \\ \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset}} w_{\Lambda_n}(\mathbf{n}_1) \mathbb{1}_{[\widehat{\mathbf{n}}_{1x,y} = 0, \forall \{x,y\} \in E]}}{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 \\ \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset}} w_{\Lambda_n}(\mathbf{n}_1)} \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w_{\Lambda_n}(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}_{[\widehat{\mathbf{n}}_{2x,y} = 0, \forall \{x,y\} \in E]}}{\sum_{\substack{\mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ \\ \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w_{\Lambda_n}(\mathbf{n}_2)} \\ &= \hat{P}_{\Lambda_n, \beta}^0(\mathcal{R}'_E) \hat{P}_{\Lambda_n, \beta}^+(\mathcal{R}''_E). \end{aligned}$$

Portanto, o Teorema 4.1 garante que o limite

$$\mathbb{P}_\beta(\overline{\mathcal{R}}_E) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}(\overline{\mathcal{R}}_E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}_{\Lambda_n, \beta}^0(\mathcal{R}'_E) \hat{P}_{\Lambda_n, \beta}^+(\mathcal{R}''_E),$$

existe e não depende da escolha de $\{\Lambda_n\}_n$. Sejam E, F subconjuntos de \mathbb{Z}^d disjuntos. Considere o evento

$$\overline{\mathcal{R}}_{E,F} = \{\widehat{\mathbf{n}}_1 + \widehat{\mathbf{n}}_{2,x,y} : \widehat{\mathbf{n}}_1 + \widehat{\mathbf{n}}_{2,x,y} = 0, \forall \{x, y\} \in E, \widehat{\mathbf{n}}_1 + \widehat{\mathbf{n}}_{2,x,y} = 1, \forall \{x, y\} \in F\}.$$

Com a ajuda do Princípio de Inclusão-Exclusão, conseguimos definir

$$\mathbb{P}_\beta(\overline{\mathcal{R}}_{E,F}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}(\overline{\mathcal{R}}_{E,F}).$$

Com isso, conseguimos estender \mathbb{P}_β para todos os eventos locais, e, por sua vez, a todos os eventos da σ -álgebra.

P2) Primeiro, provamos o caso em que o evento é da forma $\overline{\mathcal{R}}_E$, o que é consequência do Teorema 4.1. Em seguida, estendemos para todo evento local, usando que \mathbb{P}_β não depende da escolha das sequências $\{\Lambda_n\}_n$.

P3) Com a ajuda do Teorema 4.1, mostramos que para todo $E, F \subset \mathbb{Z}^d$

$$\lim_{\|z\|_1 \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\beta(\overline{\mathcal{R}}_E \cap \theta_{-z} \overline{\mathcal{R}}_F) = \mathbb{P}_\beta(\overline{\mathcal{R}}_E) \mathbb{P}_\beta(\overline{\mathcal{R}}_F).$$

Por sua vez, aplicamos o Princípio de Inclusão-Exclusão para provar que o resultado, também, é válido quando substituimos $\overline{\mathcal{R}}_E$ e $\overline{\mathcal{R}}_F$ por $\overline{\mathcal{R}}_{E,E'}$ e $\overline{\mathcal{R}}_{F,F'}$, respectivamente. A seguir, estendemos o resultado para todo evento local e, por fim, para eventos invariantes por translação de maneira análoga à demonstração do Teorema 4.1. \square

Diferentemente das medidas do Modelo de Ising, o modelo de correntes aleatórias não possui desigualdades de correlação tão ricas. Em particular, não dispomos da Desigualdade FKG, o que representa uma grande limitação para este modelo, pois se trata de uma ferramenta essencial não só para o Modelo de Ising, bem como para uma grande classe de modelos de Mecânica Estatística. De fato, ao final da demonstração do teorema central deste capítulo, existe uma passagem na qual a Desigualdade FKG seria particularmente muito útil.

Para solucionar esse problema, seguiremos um caminho alternativo, baseado na unicidade do aglomerado aleatório infinito para correntes aleatórias. Para demonstrar essa unicidade, adaptaremos o Argumento de Burton-Kean [BK89].

Um leitor familiarizado com o modelo de Percolação Bernoulli ou com o Modelo de Aglomerados Aleatórios talvez reconheça o imediato problema da ausência da propriedade

de energia finita. O leitor leigo nesse assunto pode ver essa propriedade da seguinte forma: podemos mudar qualquer configuração abrindo ou fechando uma quantidade finita de arestas a menos de um "preço" que depende apenas do número de arestas sendo fechadas ou abertas. O problema é que, no modelo de Correntes Aleatórias, exigimos $\partial \mathbf{n} = \emptyset$. Essa exigência nos traz dificuldades para fechar as arestas dependendo das paridades da corrente em cada aresta. Mesmo com esse obstáculo, podemos abrir arestas de maneira controlada, esse é o conteúdo do próximo lema e que, de fato, será o suficiente para adaptar o argumento BK.

Lema 4.3 (Propriedade de Inserção). *Seja $\hat{\Phi}_N : \{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^d)} \rightarrow \{0, 1\}^{E(\mathbb{Z}^d)}$ a função que abre todas as arestas de Λ_N , temos que existe uma constante $c = c(N, \beta, J) > 0$ tal que para qualquer evento \mathcal{A} , vale*

$$\mathbb{P}_\beta(\hat{\Phi}_N(\mathcal{A})) \geq c\mathbb{P}_\beta(\mathcal{A}).$$

Demonstração. É suficiente provar o lema para eventos locais. Sejam \mathcal{A} evento local e $\mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}$ a distribuição de $\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}$, onde \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 são duas correntes aleatórias sorteadas, respectivamente, com as leis $P_{\Lambda_n, \beta}^0$ e $P_{\Lambda_n, \beta}^+$. Devido à propriedade P1 do Teorema 4.1, temos que $\mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}$ converge fracamente para \mathbb{P}_β . Portanto, basta provar que existe $c = c(N, \beta, J) > 0$ tal que $\mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}(\hat{\Phi}_N(\mathcal{A})) \geq c\mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}(\mathcal{A})$ para todo $n > N$.

Considere a aplicação $\Phi_N : \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 \times \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ \rightarrow \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 \times \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+$ definida por

$$\Phi_N(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)_{x,y} = \begin{cases} (0, 2), & \text{se } ((\mathbf{n}_1)_{x,y}, (\mathbf{n}_2)_{x,y}) = (0, 0) \text{ e } J_{x,y} > 0; \\ ((\mathbf{n}_1)_{x,y}, (\mathbf{n}_2)_{x,y}) = (0, 0), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que essa aplicação não altera os conjuntos de fontes de \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 .

Sejam $\omega \in \{0, 1\}^{E(\Lambda_n)}$ fixada e $\Omega_2(\omega) := \{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1) \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 \times \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ : \widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_1} = \omega\}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}(\hat{\Phi}_N(\mathcal{A})) &= \sum_{\omega' \in \hat{\Phi}_N(\mathcal{A})} \mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}(\omega') \\
&= \sum_{\omega \in \mathcal{A}} \frac{1}{|\hat{\Phi}_N^{-1}(\hat{\Phi}_N(\omega)) \cap \mathcal{A}|} \mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}(\hat{\Phi}_N(\omega)) \\
&\geq 2^{-|E(\Lambda_n)|} \sum_{\omega \in \mathcal{A}} \mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}(\hat{\Phi}_N(\omega)) \\
&= 2^{-|E(\Lambda_n)|} \sum_{\omega \in \mathcal{A}} P_{\Lambda_n, \beta}^0 \otimes P_{\Lambda_n, \beta}^+(\hat{\Phi}_N(\Omega_2(\omega))) \\
&= 2^{-|E(\Lambda_n)|} \sum_{\omega \in \mathcal{A}} \left(\prod_{\substack{\{x, y\} \in E(\Lambda_n) \\ \omega_{x, y} = 0}} \frac{(\beta J_{x, y})^2}{2} \right) P_{\Lambda_n, \beta}^0 \otimes P_{\Lambda_n, \beta}^+(\Omega_2(\omega)) \\
&\geq \left(\frac{\beta J}{4} \right)^{-2|E(\Lambda_n)|} \sum_{\omega \in \mathcal{A}} P_{\Lambda_n, \beta}^0 \otimes P_{\Lambda_n, \beta}^+(\Omega_2(\omega)) \\
&\geq c \mathbb{P}_{\Lambda_n, \beta}(\mathcal{A}),
\end{aligned}$$

onde $c = c(N, J, \beta) > 0$ não depende de n . Concluimos a prova ao calcular o limite quando $n \rightarrow \infty$. \square

Como mencionado, aplicaremos o argumento de BK modificado para provar o seguinte teorema.

Teorema 4.4 (Unicidade do Aglomerado). *Existe, no máximo, um aglomerado infinito \mathbb{P}_β -quase certamente.*

Demonstração. Seja $k \in \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$, defina \mathcal{A}_k como o evento de existirem exatamente k aglomerados infinitos.

Separamos a demonstração em duas partes. Primeiro, mostraremos que $\mathbb{P}_\beta(\mathcal{A}_k) = 0$, para todo $2 \leq k < \infty$. Seja $k \geq 2$ fixado e \mathcal{E}_n , o evento em que os k aglomerados infinitos interceptam Λ_n . Fixado $n > N$ suficientemente grande de modo que $\mathbb{P}_\beta(\mathcal{E}_n) \geq \frac{1}{2} \mathbb{P}_\beta(\mathcal{A}_k)$. Para verificar que N existe, para ver isso, considere o evento \mathcal{E}_n como os k aglomerados infinitos interceptam Λ_n mas não interceptam, simultaneamente, Λ_{k-1} . Daí temos

$$\mathbb{P}_\beta(\mathcal{A}_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_\beta(\mathcal{A}_k \cap \mathcal{E}_n).$$

Considere N tal que $\sum_{n=1}^N \mathbb{P}_\beta(\mathcal{A}_k \cap \mathcal{E}_n) \geq \frac{1}{2} \mathbb{P}_\beta(\mathcal{A}_k)$. Note que, pelo Lema 4.3, temos que $\mathbb{P}_\beta(\hat{\Phi}_{2N}(\mathcal{G}_N)) \geq \frac{c}{2} \mathbb{P}_\beta(\mathcal{G}_N)$. Por outro lado, $\hat{\Phi}_{2N}(\mathcal{G}_N) \subset \mathcal{A}_1$. Portanto,

$$\mathbb{P}_\beta(\mathcal{A}_1) \geq \frac{c}{2} \mathbb{P}_\beta(\mathcal{A}_k).$$

Como os eventos \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_k são invariantes por translação, temos que $\mathbb{P}_\beta(\mathcal{A}_1), \mathbb{P}_\beta(\mathcal{A}_k) \in \{0, 1\}$. Porém, esses eventos também são mutuamente excludentes, temos que $\mathbb{P}_\beta(\mathcal{A}_k) = 0$ para todo $2 \leq k < \infty$.

Na segunda parte desta demonstração, provaremos que $\mathbb{P}_\beta(\mathcal{A}_\infty) = 0$. Suponha que $\mathbb{P}_\beta(\mathcal{A}_\infty) > 0$, assim como no caso anterior, podemos fixar N o menor inteiro positivo de maneira que

$$\mathbb{P}_\beta(\Lambda_{N/2} \text{ intercepta ao menos três aglomerados infinitos}) > 0.$$

Além disso, defina o evento CT_0 como

- Todas as arestas de $\Lambda_{N/2}$ estão conectadas umas às outras em Λ_N ;
- Se \mathcal{C} é o aglomerado de 0, então $\mathcal{C} \cap (\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_N)$ possui três aglomerados infinitos distintos.

Dizemos que $x \in (2N+1)\mathbb{Z}^d$ é uma *course-trifurcation* (trifurcação grossa) se o evento $CT_x := \theta_x(CT_0)$ ocorre. Uma *course-trifurcation* é uma adaptação da ideia de trifurcação apresentada em [BK89]. Uma trifurcação, intuitivamente, é um vértice importante para a definição da quantidade de aglomerados aleatórios. Porém, no caso de correntes aleatórias, como não podemos fechar arestas de uma configuração de maneira arbitrária, a importância individual das arestas é reduzida. Portanto, precisamos analisar também as arestas ao seu redor, mais precisamente, aquelas dentro da caixa $\theta_x \Lambda_N$. Pela invariância por translação de \mathbb{P}_β , temos que $\mathbb{P}_\beta(CT_x) = \mathbb{P}_\beta(CT_0) > 0$, uma vez que

$$\mathbb{P}_\beta(CT_0) \geq \mathbb{P}_\beta(\hat{\Phi}_{\Lambda_N}(\Lambda_{N/2} \text{ intercepta ao menos três aglomerados infinitos distintos})) > 0.$$

Agora, seja $n \gg N$. Provaremos que o conjunto T das *course-trifurcations* possui uma estrutura de floresta T' construída indutivamente como segue.

Passo 1 Inicialmente, todos os vértices de T são definidos como inexplorados. Vá para o Passo 2.

Passo 2 Se não existem mais vértices inexplorados em T , então o algoritmo termina. Do contrário, selecione qualquer $t \in T$, e defina-o como explorado, com efeito de que para

as próximas iterações, esse vértice não será considerado inexplorado. Vá para o Passo 3.

Passo 3 Seja t (selecionado no Passo 2), Considere \mathcal{C}_t o conjunto dos vértices de \mathbb{Z}^d conectados a t através de arestas de Λ_n . Adicione t a T . Como t é uma *course trifurcation*, temos que \mathcal{C}_t se divide em $k \geq 3$ componentes conexos de $\mathbb{Z}^d \setminus (t + \Lambda_N)$. Denote esses componentes por $\mathcal{C}_t^{(1)}, \dots, \mathcal{C}_t^{(k)}$. Para $i = 1, \dots, k$, faça o seguinte:

- Se existirem $x \in \mathcal{C}_t^{(i)}$ e $y \notin \Lambda_n$ tais que $\{x, y\}$ está aberta, e existe um caminho de arestas abertas em Λ_n que não passe a uma distância menor do que N de uma *course trifurcation* em $\mathcal{C}_t^{(i)} \cap (T \setminus \{t\})$, então adicione o vértice y à T' juntamente com uma aresta $\{t, y\}$ (essa aresta não necessariamente pertence ao grafo \mathbb{Z}^d);
- Se não existir um par $\{x, y\}$ de acordo com o item anterior, isso se deve ao fato de existir uma outra *course trifurcation* s conectado a t por um caminho aberto que não passa a distância menor que N de uma *course trifurcation* em $\mathcal{C}_t^{(i)} \cap (T \setminus \{t, s\})$. Se s ainda não estiver em T' , adicione-o juntamente com a aresta $\{s, t\}$.

Vá para o Passo 4

Passo 3 Vá para o Passo 2.

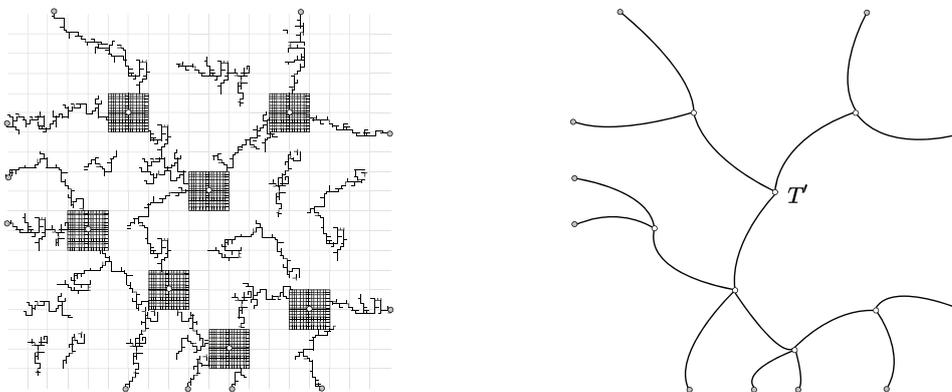


Figura 4.1: Uma configuração que apresenta *course trifurcations* e seu respectivo grafo induzido T .

O grafo produzido por esse procedimento é uma floresta (devido à estrutura de *course trifurcation*). Cada *course trifurcation* corresponde a um vértice de grau maior ou igual a 3 em T' . Portanto, o número de *course trifurcations* é menor ou igual ao número de folhas desse grafo e, em particular, menor que o número de elementos em $\partial\Lambda_n$. Então, seja M_n o

número de *course trifurcations* em Λ_n , temos que, pela invariância por translações,

$$0 < \mathbb{P}_\beta(CT_0) \frac{(2n+1)^d}{(2N+1)^d} = \mathbb{E}_\beta[M_n] \leq |\partial\Lambda_n| = 2d(n+1)^{d-1}.$$

E, portanto,

$$0 < \frac{\mathbb{P}_\beta(CT_0)}{(2N+1)^d} \leq \frac{2d(n+1)^{d-1}}{(2n+1)^d} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

O que contradiz o fato de que $\mathbb{P}_\beta(CT_0) > 0$. Daí, concluímos $P_\beta(\mathcal{A}_\infty) = 0$. \square

4.2 Uma condição suficiente para a continuidade da transição de fase

Definiremos, a seguir, uma quantidade importante para a ser analisada no restante deste capítulo.

Definição 4.1. *O long range order parameter (parâmetro de ordem de longo alcance) é dado por*

$$\tilde{M}_{LRO}^2(\beta) := \inf_{\substack{B \subset \mathbb{Z}^d \\ |B| < \infty}} \frac{1}{|B|^2} \sum_{x,y \in B} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^0 = \inf_{\substack{B \subset \mathbb{Z}^d \\ |B| < \infty}} \left\langle \left[\sum_{x,y \in B} \frac{1}{|B|} \sigma_x \right]^2 \right\rangle_\beta^0. \quad (4.5)$$

Lema 4.5. *A quantidade $\tilde{M}_{LRO}(\beta)$ satisfaz as desigualdades*

$$\inf_{x \in \mathbb{Z}^d} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_\beta^0 \leq \tilde{M}_{LRO}(\beta)^2 \leq (m^*(\beta))^2. \quad (4.6)$$

Demonstração. A primeira desigualdade segue trivialmente da definição de ínfimo.

Considere $\Lambda_n = [-n, n]^d$. O Lema 1.13 garante a monotonicidade de $\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{\beta, h}^0$ e, portanto,

$$\frac{1}{|\Lambda_n|^2} \sum_{x,y \in \Lambda_n} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta, 0}^0 \leq \frac{1}{|\Lambda_n|^2} \sum_{x,y \in \Lambda_n} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta, h}^0.$$

Calculando $h \rightarrow 0^+$, temos que

$$\frac{1}{|\Lambda_n|^2} \sum_{x,y \in \Lambda_n} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta, 0}^0 \leq \frac{1}{|\Lambda_n|^2} \sum_{x,y \in \Lambda_n} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta, 0}^+.$$

Por sua vez, o Teorema 1.33 garante que $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta, 0}^+ \rightarrow (m^*(\beta))^2$ quando $\|x - y\|_1 \rightarrow \infty$, uniformemente, devido à invariância por translações. Seja $\varepsilon > 0$, escolha N suficientemente

grande tal que $\|x - y\|_1 > N$ implica

$$|\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^+ - (m^*(\beta))^2| < \varepsilon.$$

Então, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Lambda_n|^2} \sum_{x,y \in \Lambda_n} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_\beta^0 &\leq \frac{1}{|\Lambda_n|^2} \sum_{x \in \Lambda_n} \sum_{\substack{y \in \Lambda_n \\ \|x-y\|_1 \leq N}} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_\beta^+ + \frac{1}{|\Lambda_n|^2} \sum_{x \in \Lambda_n} \sum_{\substack{y \in \Lambda_n \\ \|x-y\|_1 > N}} [(m^*(\beta))^2 + \varepsilon] \\ &\leq \frac{(2N+1)^d}{(2n+1)^d} + \frac{(2n+1)^d - (2N+1)^d}{(2n+1)^d} ((m^*(\beta))^2 + \varepsilon). \end{aligned}$$

Calculando $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\tilde{M}_{LRO}(\beta)^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|^2} \sum_{x,y \in \Lambda_n} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_\beta^0 \leq (m^*(\beta))^2 + \varepsilon,$$

e pela arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, o resultado segue. \square

Apesar de que $0 \leq \tilde{M}_{LRO}(\beta) \leq m^*(\beta)$, provaremos que $\tilde{M}_{LRO}(\beta) = 0$ é o suficiente para garantir que $m^*(\beta) = 0$. Com isso, começaremos a relacionar as correntes aleatórias a volume finito e os fenômenos críticos do Modelo de Ising.

Teorema 4.6. *Seja $\beta > 0$ tal que $\tilde{M}_{LRO}(\beta) = 0$, então $\mathbb{P}_\beta(0 \leftrightarrow \infty) = 0$.*

Demonstração. Seja $n > 0$ e $x, y \in \Lambda_n := [-n, n]^d$. O *Switching Lemma* 1.6 garante que

$$\begin{aligned} P_{\Lambda_n, \beta}^0 \otimes P_{\Lambda_n, \beta}^+ \left[x \overset{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}}{\longleftrightarrow} y \text{ em } \Lambda_n \right] &= \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w_\beta(\mathbf{n}_1) w_\beta(\mathbf{n}_2) \mathbb{1} \left[x \overset{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}}{\longleftrightarrow} y \text{ em } \Lambda_n \right]}{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w_\beta(\mathbf{n}_1) w_\beta(\mathbf{n}_2)} \\ &\stackrel{(SL)}{=} \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 : \partial \mathbf{n}_1 = \{x, y\} \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ : \partial \mathbf{n}_2 = \{x, y\}}} w_\beta(\mathbf{n}_1) w_\beta(\mathbf{n}_2)}{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w_\beta(\mathbf{n}_1) w_\beta(\mathbf{n}_2)} \\ &= \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_n, \beta}^0 \underbrace{\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_n, \beta}^+}_{\leq 1}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

E, conseqüentemente,

$$P_{\Lambda_n, \beta}^0 \otimes P_{\Lambda_n, \beta}^+ \left[x \overset{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}}{\longleftrightarrow} y \text{ em } \Lambda_n \right] \leq \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_n, \beta}^0.$$

Ao calcularmos o limite $n \rightarrow \infty$, temos que o lado direito da desigualdade acima converge para $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^0$. Por sua vez, temos que o evento do lado direito pode ser decomposto em termos de $\hat{\mathbf{n}}_1$ e $\hat{\mathbf{n}}_2$, e, portanto, a convergência de $\hat{P}_{\Lambda_n, \beta}^0$ e $\hat{P}_{\Lambda_n, \beta}^+$ garante que a quantidade do lado esquerdo da desigualdade acima converge para $\mathbb{P}_\beta[x \leftrightarrow y]$. Note que esse evento não é local, porém

$$[x \leftrightarrow y] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{[x \leftrightarrow y \text{ em } B(0, n)]}_{\text{Eventos locais}}.$$

Sendo assim,

$$\mathbb{P}_\beta(x \leftrightarrow y) \leq \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^0.$$

Seja $B \subset \mathbb{Z}^d$ um subconjunto finito arbitrário. Considere a variável aleatória $X_B := \sum_{x \in B} \mathbb{1}_{[x \leftrightarrow \infty]}$ que conta quantos elementos de B estão no aglomerado infinito. Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$(|B| \mathbb{P}_\beta[0 \leftrightarrow \infty])^2 = (\mathbb{E}_\beta[X_B])^2 \leq \mathbb{E}_\beta[X_B^2] = \sum_{x, y \in B} \mathbb{P}_\beta[x, y \leftrightarrow \infty].$$

A unicidade do aglomerado infinito implica

$$(|B| \mathbb{P}_\beta[0 \leftrightarrow \infty])^2 \leq \sum_{x, y \in B} \underbrace{\mathbb{P}_\beta[x, y \leftrightarrow \infty]}_{=\mathbb{P}_\beta[x \leftrightarrow y \leftrightarrow \infty]} \leq \sum_{x, y \in B} \mathbb{P}_\beta[x \leftrightarrow y].$$

Portanto, temos que

$$(\mathbb{P}_\beta[0 \leftrightarrow \infty])^2 \leq \frac{1}{|B|^2} \sum_{x, y \in B} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^0.$$

Como a cota é uniforme em B , segue que

$$\mathbb{P}_\beta[0 \leftrightarrow \infty] \leq \tilde{M}_{LRO}(\beta) = 0.$$

□

Teorema 4.7. *Se $\tilde{M}_{LRO}(\beta) = 0$, então $m^*(\beta) = 0$ e, portanto, $|\mathcal{G}(\beta, 0)| = 1$.*

Demonstração. Sejam x e y dois vértices fixados de \mathbb{Z}^d . Aplicando o *Switching Lemma*, o Lema 1.6, temos que para $n > 0$,

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_n, \beta}^+ - \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_n, \beta}^0 &= \frac{\sum_{\mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ : \partial \mathbf{n}_2 = \{x, y\}} w_\beta(\mathbf{n}_2)}{\sum_{\mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset} w_\beta(\mathbf{n}_2)} - \frac{\sum_{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 : \partial \mathbf{n}_1 = \{x, y\}} w_\beta(\mathbf{n}_1)}{\sum_{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset} w_\beta(\mathbf{n}_1)} \\
&= \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ : \partial \mathbf{n}_2 = \{x, y\}}} w_\beta(\mathbf{n}_1) w_\beta(\mathbf{n}_2) - \sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 : \partial \mathbf{n}_1 = \{x, y\} \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w_\beta(\mathbf{n}_1) w_\beta(\mathbf{n}_2)}{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w_\beta(\mathbf{n}_1) w_\beta(\mathbf{n}_2)} \\
&\stackrel{(SL)}{=} \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ : \partial \mathbf{n}_2 = \{x, y\}}} w_\beta(\mathbf{n}_1) w_\beta(\mathbf{n}_2) \left(\mathbb{1} \left[x \xleftrightarrow{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}} y \text{ em } \Lambda_n \right] \right)}{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w_\beta(\mathbf{n}_1) w_\beta(\mathbf{n}_2)}.
\end{aligned}$$

Contudo, como x e y são fontes de \mathbf{n}_2 , temos que ambos devem estar conectados via \mathbf{n}_2 e, portanto, em $\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}$. Como isso não pode acontecer por um caminho completamente contido em Λ_n , obtemos que, nas parcelas que contribuem para a soma acima, x deve conectar-se ao sítio fantasma g . Portanto,

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_n, \beta}^+ - \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_n, \beta}^0 \leq \frac{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ : \partial \mathbf{n}_2 = \{x, y\}}} w_\beta(\mathbf{n}_1) w_\beta(\mathbf{n}_2) \mathbb{1} \left[x \xleftrightarrow{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}} g \right]}{\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ : \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset}} w_\beta(\mathbf{n}_1) w_\beta(\mathbf{n}_2)}. \quad (4.8)$$

Compararemos essa soma com a sua equivalente onde substituiremos a condição das fontes do numerador por $\partial \mathbf{n}_1 = \partial \mathbf{n}_2 = \emptyset$.

Seja $x = x_0, \dots, x_k = y$ uma sequência de arestas tais que $\|x_i - x_{i-1}\|_1 = 1$ para todo $i = 1, \dots, k$. Considere a função multivalente (isto é, associa a cada elemento um ou mais elementos) que leva cada $\mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_\Lambda^+$ com $\partial \mathbf{n}_2 = \{x, y\}$ a diversos elementos $\mathbf{n}'_2 \in \mathcal{C}_\Lambda^+$ com $\partial \mathbf{n}'_2 = \emptyset$ de modo que mantemos os valores de $(\mathbf{n}_2)_{x', y'}$ sempre que $x', y' \notin \{x_{i-1}, x_i\} : i = 1, \dots, k$, e definimos $(\mathbf{n}'_2)_{\{x_{i-1}, x_i\}}$ como qualquer valor inteiro positivo de paridade oposta a de $(\mathbf{n}_2)_{\{x_{i-1}, x_i\}}$. A condição de que os valores de $(\mathbf{n}'_2)_{\{x_{i-1}, x_i\}}$ sejam positivos resulta que para todo $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$ tal que $x \xleftrightarrow{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2} g$, temos que $x \xleftrightarrow{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}'_2} g$. Além disso, segue

$$\Gamma_{x, y} w_\beta(\mathbf{n}_2) \leq \sum_{\mathbf{n}'_2} w_\beta(\mathbf{n}'_2),$$

onde a soma em \mathbf{n}'_2 é feita sobre todas as imagens de \mathbf{n}_2 pela função polivalente e

$$\Gamma_{x,y} := \left(\min \left\{ \frac{\sinh(\beta J)}{\cosh(\beta J)}, \frac{\cosh(\beta J) - 1}{\sinh(\beta J)} \right\} \right)^k.$$

E, portanto, obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ : \partial \mathbf{n}_2 = \{x,y\}}} w_\beta(\mathbf{n}_1) w_\beta(\mathbf{n}_2) \mathbb{1} \left[x \overset{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}}{\longleftrightarrow} g \right] \\ & \leq \Gamma_{x,y}^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^0 : \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset \\ \mathbf{n}'_2 \in \mathcal{C}_{\Lambda_n}^+ : \partial \mathbf{n}'_2 = \emptyset}} w_\beta(\mathbf{n}_1) w_\beta(\mathbf{n}'_2) \mathbb{1} \left[x \overset{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}'_2}}{\longleftrightarrow} g \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ao aplicarmos (4.8) e (4.9), segue

$$0 \leq \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_n, \beta}^+ - \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_n, \beta}^0 \leq \Gamma_{x,y}^{-1} P_{\Lambda_n, \beta}^0 \otimes P_{\Lambda_n, \beta}^+ \left[x \overset{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}}{\longleftrightarrow} g \right].$$

No modelo de primeiros vizinhos sem campo, temos que a única forma de x se conectar a g é se x se conectar até o bordo de Λ_n e, portanto,

$$0 \leq \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_n, \beta}^+ - \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_n, \beta}^0 \leq \Gamma_{x,y}^{-1} P_{\Lambda_n, \beta}^0 \otimes P_{\Lambda_n, \beta}^+ \left[x \overset{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}}{\longleftrightarrow} \partial \Lambda_n \right]. \quad (4.10)$$

Calculando $n \rightarrow \infty$, o Teorema 4.1, garante que

$$0 \leq \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^+ - \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^0 \leq \Gamma_{x,y}^{-1} \mathbb{P}_\beta \left[x \overset{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}}{\longleftrightarrow} \infty \right]. \quad (4.11)$$

Pelo Teorema 4.6, se $\tilde{M}_{LRO}(\beta) = 0$, então $\mathbb{P}_\beta \left[x \overset{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}}{\longleftrightarrow} \infty \right] = 0$. Logo, $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^+ = \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^0$ para todo $x, y \in \mathbb{Z}^d$ e, consequentemente

$$0 \leq \langle \sigma_0 \rangle_\beta^+ \langle \sigma_x \rangle_\beta^+ \stackrel{\text{(FKG)}}{\leq} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_\beta^+ = \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_\beta^0.$$

Por fim, como $\tilde{M}_{LRO}(\beta) = 0$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $B \subset \mathbb{Z}^d$ tal que

$$\varepsilon^2 |B|^2 > \sum_{x,y \in B} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^0 = \sum_{x,y \in B} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta^+ \stackrel{\text{(FKG)}}{\geq} \sum_{x,y \in B} \langle \sigma_x \rangle_\beta^+ \langle \sigma_y \rangle_\beta^+ = \sum_{x,y \in B} (\langle \sigma_0 \rangle_\beta^+)^2 = |B|^2 (\langle \sigma_0 \rangle_\beta^+)^2,$$

onde, na segunda igualdade, usamos a invariância por translações. Daí, concluímos que $\langle \sigma_0 \rangle_\beta^+ < \varepsilon$. E o resultado segue pela arbitrariedade de ε . \square

O Teorema 4.7 é surpreendente, uma vez que esse resultado define um critério suficiente para determinar que $m^*(\beta) = 0$ unicamente a partir de μ_β^0 , e não, de μ_β^+ . Até este ponto, **todos os resultados deste capítulo são independentes da dimensão d** . A condição $d \geq 3$ se faz necessária, nas próximas seções, para verificar a hipótese $\tilde{M}_{LRO}(\beta_c) = 0$ e essa demonstração não é trivial mesmo sob essas condições.

Para conseguirmos esse feito, precisaremos do teorema popularmente conhecido como *Infrared Bounds*, que pode ser traduzido livremente como "Cota Infravermelha". Com o intuito de manter esta dissertação autossuficiente, provaremos esse teorema detalhadamente, bem como introduziremos os seus requisitos necessário para explorá-lo na próxima seção. Um leitor já familiarizado com essa ferramenta pode pular essa demonstração.

4.3 A cota infravermelha

A cota infravermelha permite relacionar o Modelo de Ising de \mathbb{Z}^d com o passeio aleatório em \mathbb{Z}^d com a seguinte probabilidade de transição

$$P_z(X_{n+1} = y | X_n = x) := \frac{J_{x,y}}{\sum_{w \in \mathbb{Z}^d} J_{x,w}}. \quad (4.12)$$

No caso da interação de primeiros vizinhos, temos que $J_{x,y} = J \mathbb{1}_{\|x-y\|_1=1}$, e, consequentemente,

$$P_z(X_{n+1} = y | X_n = x) = \begin{cases} \frac{1}{2d}, & \text{se } \|x - y\|_1 = 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases},$$

Dessa forma, o passeio aleatório induzido pela coleção \mathbf{J} é o passeio aleatório simples em \mathbb{Z}^d .

Quando lidamos com o Modelo de Ising de Primeiros Vizinhos, o valor de $J \in (0, \infty)$ afeta o valor de $\beta_c(J)$, porém, não afeta, qualitativamente, o que ocorre em $\beta_c(J)$. De fato, substituir J por J' é equivalente a substituir β por $\beta \frac{J}{J'}$. Sendo assim, assumiremos que $J = \frac{1}{2d}$ **para simplificar as contas a seguir**.

A relação entre o Modelo de Ising e o passeio aleatório induzido $\{X_n\}_n$ por \mathbf{J} é, particularmente, interessante quando $\{X_n\}_n$ é transiente. Exatamente por essa razão é que o método o qual estudamos nesta dissertação não é eficiente para o caso $d = 2$, uma vez que temos em vista o seguinte resultado clássico de Teoria de Probabilidade.

Teorema 4.8 (Teorema de Pólya). *O passeio aleatório simples em \mathbb{Z}^d é recorrente para $d = 1$ ou 2 , e é transiente para $d \geq 3$.*

A demonstração original desse teorema foi dada em [Pól21] (observe que esse texto está em alemão). Após o próximo lema, apresentaremos uma demonstração breve para esse resultado.

A conexão entre a transiência do passeio aleatório em \mathbb{Z}^d e o Modelo de Ising segue do seguinte lema.

Lema 4.9. *Seja $\hat{J}(p) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} J_{0,x} e^{ip \cdot x}$, $p \in [-\pi, \pi]^d$, onde i é a unidade imaginária e $ip \cdot x$ é o produto escalar entre ip e x . Então $\{X_n\}_n$ com probabilidades de transição dadas em (4.12) é transiente se, e somente se,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{1 - \lambda \hat{J}(p)} dp < \infty. \quad (4.13)$$

Demonstração. Seja N_0 o número de vezes que o passeio $\{X_n\}_n$ visita a origem em sua trajetória, temos que $\{X_n\}_n$ é transiente se, e somente se, $\mathbb{E}[N_0] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_0(X_n = 0) < \infty$, onde \mathbb{P}_0 é a lei do passeio aleatório simples iniciando na origem, e \mathbb{E}_0 , o valor esperado com respeito à \mathbb{P}_0 . Note que

$$\mathbb{1}_{\{X_n=0\}} = \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{(2\pi)^d} e^{ip \cdot X_n} dp. \quad (4.14)$$

De fato, se $X_n = 0$, a função a ser integrada é constante igual a $\frac{1}{(2\pi)^d}$ e, portanto, sua integral é igual a 1. Se $X_n = x \neq 0$, temos que

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{(2\pi)^d} e^{ip \cdot X_n} dp = \prod_{j=1}^d \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(2\pi)} \cos(p_j x_j) dp_j + i \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(2\pi)} \sen(p_j x_j) dp_j}_{=0} \right),$$

onde usamos que a função $\sen(x)$ é ímpar. Agora, seja j_0 tal que $x_{j_0} \neq 0$, então

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(2\pi)} \cos(p_{j_0} x_{j_0}) dp_{j_0} = 0.$$

Dessa forma, temos que a identidade (4.14) é válida. Como os incrementos do passeio aleatório são i.i.d, segue

$$\mathbb{E}_0[e^{ip \cdot X_n}] = \left(\mathbb{E}_0[e^{ip \cdot X_1}] \right)^n = \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} J_{0,x} e^{ip \cdot X_0} \right)^n = (\hat{J}(p))^n.$$

E, portanto, usando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\mathbb{P}_0(X_n = 0) = \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{(2\pi)^d} (\hat{J}(p))^n dp.$$

Agora, seja $\lambda \in [0, 1)$, temos que

$$\sum_{n \geq 0} \lambda^n \mathbb{P}_0(X_n = 0) = \sum_{n \geq 0} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{(2\pi)^d} (\lambda \hat{J}(p))^n dp.$$

Porém, como $|\lambda \hat{J}(p)| \leq \lambda \in [0, 1)$, temos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\sum_{n \geq 0} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{(2\pi)^d} (\lambda \hat{J}(p))^n dp = \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{n \geq 0} (\lambda \hat{J}(p))^n dp = \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{1 - \lambda \hat{J}(p)} dp.$$

Por sua vez, é evidente, pelo Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue, que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} \lambda^n \mathbb{P}_0(X_n = 0) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_0(X_n = 0) = \mathbb{E}_0[N_0].$$

Consequentemente,

$$\mathbb{E}_0[N_0] = \lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{1 - \lambda \hat{J}(p)} dp,$$

o que conclui a demonstração. \square

Para a interação de primeiros vizinhos, temos que $\hat{J}(p) = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos p_j$. A seguir, apresentaremos uma prova simples para o Teorema de Pólya.

Demonstração do Teorema de Pólya. O passeio aleatório simples é induzido pela interação de primeiros vizinhos, logo, $\hat{J}(p) = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos p_j$, portanto, $1 - \hat{J}(p) = 0$ no intervalo de integração se, e somente se, $p_j \in \{-\pi, 0, \pi\}$ para todo $j = 1, \dots, d$. Faremos a análise ao redor de $p = 0$, os demais pontos são tratados de maneira análoga.

Expandimos a função $\cos(x)$ em Taylor ao redor de $x = 0$, temos que para $x \in [-1, 1]$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x_0^4}{24},$$

para algum x_0 tal que $|x_0| \leq |x|$. Portanto, para $x \in [-1, 1]$

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{11x^2}{24}.$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{1 - \lambda + \frac{\lambda}{2d} \sum_{j=1}^d p_j^2} \leq \frac{1}{1 - \lambda \hat{J}(p)} \leq \frac{1}{1 - \lambda + \frac{11\lambda}{24d} \sum_{j=1}^d p_j^2}.$$

Logo, o limite da integral (ao redor do ponto $p = 0$) existe se, e somente se,

$$\int_{[-1,1]} \frac{1}{\sum_{j=1}^d p_j^2} < \infty.$$

Ao mudarmos para o sistema de coordenadas esféricas, temos que

$$\int_{[-1,1]} \frac{1}{\sum_{j=1}^d p_j^2} = \int_0^1 r^{-2} r^{d-1} dr = \int_0^1 r^{d-3} dr.$$

A última integral, por sua vez, é finita se, e somente se, $d \geq 3$.

Quando

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{1 - \lambda \hat{J}(p)} dp < \infty,$$

pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{1 - \lambda \hat{J}(p)} dp = \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{1 - \hat{J}(p)} dp.$$

□

Para provar a cota infravermelha, precisamos mostrar que o Modelo de Ising de Primeiros Vizinhos possui uma propriedade: a Positividade por Reflexão. Para podermos definir essa propriedade, precisamos introduzir o Modelo de Ising com uma condição de fronteira menos intuitiva que as anteriormente apresentadas.

Definição 4.2 (Condição de Fronteira Periódica). *Sejam $\beta > 0$, $J > 0$, $h \in \mathbb{R}$ e $\Lambda_L := [0, L - 1]^d$, onde $L \in \mathbb{N}$ par. Considere o espaço mensurável $(\Omega_{\Lambda_L}^0, \mathcal{F}_{\Lambda_L}^0)$, e definimos sobre ele a Medida de Gibbs a Volume Finito $\mu_{L, \beta, h}^{\text{per}} = \mu_{\Lambda_L, \mathbf{J}, \beta, h}$ com Condição de Fronteira Periódica como sendo o modelo onde a interação \mathbf{J} é dada da seguinte forma:*

$$J_{x,y} = \begin{cases} J, & \text{se } \sum_{j=1}^d |x_j - y_j \bmod L| = 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.15)$$

Dessa forma, a Condição de Fronteira Periódica é uma simples modificação da Condição de Fronteira Livre, onde consideramos que os vértices de lados opostos de Λ_L interagem

como se fossem primeiros vizinhos. Assim, como consequência da Desigualdade (GKS-II), temos que $\mu_{\Lambda_L, \beta, h}^0 \leq \mu_{L, \beta, h}^{\text{per}}$, isto é, a medida de Gibbs com Condição de Fronteira Periódica domina estocasticamente a medida de Gibbs com Condição de Fronteira Livre. É fácil mostrar, seguindo as demonstrações do Capítulo 1, que $\mu_{L, \beta, h}^{\text{per}} \leq \mu_{\Lambda_L, \beta, h}^+$.

Vale notar que essa nova interação introduz uma interessante ideia geométrica. Podemos entender a Condição de Fronteira Periódica como uma interação de primeiros vizinhos tal que Λ_L é identificada com toro discreto d -dimensional \mathbb{T}_L . A seguir, apresentamos as figuras 4.2 que demonstram essa imersão de Λ_L no toro para $d = 1$ e $d = 2$.

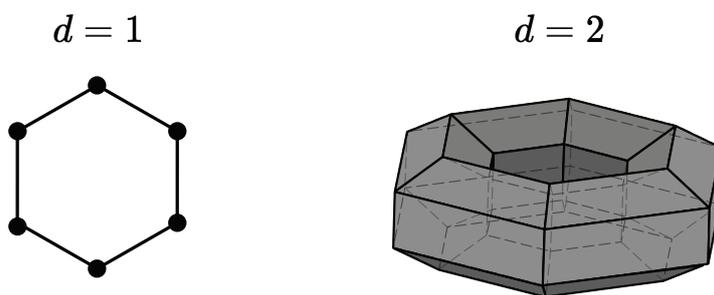


Figura 4.2: Acima, exemplificamos a representação $\Lambda_6 = [0, 5]^d$ como um subconjunto do toro d -dimensional para os valores $d = 1$ e $d = 2$.

Essa interpretação geométrica induz um novo conjunto de transformações para Λ_L . Por exemplo, considere hiperplanos em \mathbb{R}^{d+1} que dividem o toro discreto d -dimensional em duas partes iguais e, em seguida, considere a reflexão de \mathbb{R}^{d+1} por esse hiperplano. Por fim, podemos transportar essa transformação para Λ_L através de sua identificação com \mathbb{T}_L . Isso induz uma "reflexão" em Λ_L .

Note que, para um hiperplano dividir \mathbb{T}_L em dois conjuntos iguais, este necessariamente deve passar por um conjunto de vértices ou pelos pontos médios de um conjunto de arestas do toro. No primeiro caso, as reflexões dadas por hiperplanos serão chamadas de **reflexões por arestas**. No segundo caso, dizemos que a reflexão é uma **reflexão por vértices**. Em ambos os casos, representaremos a sua transformação por \mathfrak{R} .

A seguir, apresentaremos a expressão explícita dessa transformação em Λ_L . Porém, o leitor poderá manter em mente a sua versão geométrica a fim de facilitar a sua intuição.

- **Reflexão por vértices** Dado $k \in \{1, \dots, d\}$, uma das d direções paralelas aos eixos coordenados e $m \in \{0, \dots, \frac{L}{2} - 1\}$. A **reflexão por vértices** $\mathfrak{R} : \Lambda_L \rightarrow \Lambda_L$ com

parâmetros k e m é dada por leva (x_1, \dots, x_d) para $(\mathfrak{R}(x)_1, \dots, \mathfrak{R}(x)_d)$ definido por

$$\mathfrak{R}(x)_l = \begin{cases} 2m - x_k, & \text{caso } l = k; \\ x_l, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.16)$$

Sendo assim, \mathfrak{R} é a reflexão por um plano ortogonal a e_k . E a sua interseção com o toro \mathbb{T}_L é identificada com os pontos $\{x \in \Lambda_L : x_k = m \text{ ou } x_k = m + \frac{L}{2}\}$.

Além disso, podemos descrever Λ_L como a união de duas metades que se interceptam $\Lambda_L = \Lambda_L^+(\mathfrak{R}) \cup \Lambda_L^-(\mathfrak{R})$, onde

$$\Lambda_L^+(\mathfrak{R}) := \left\{ x \in \Lambda_L : m \leq x_k \leq m + \frac{L}{2} \right\}, \quad (4.17)$$

$$\Lambda_L^-(\mathfrak{R}) := \left\{ x \in \Lambda_L : m + \frac{L}{2} \leq x_k \leq L - 1 \right\}. \quad (4.18)$$

Observe que $\Lambda_L^+(\mathfrak{R}) = \Lambda_L^-(\mathfrak{R})$ e $\mathfrak{R}(\Lambda_L^-(\mathfrak{R})) = \Lambda_L^+(\mathfrak{R})$. Por fim, quando fizermos a identificação entre Λ_L e \mathbb{T}_L , definiremos a imagem de $\Lambda_L^+(\mathfrak{R})$ e $\Lambda_L^-(\mathfrak{R})$ por essa identificação como $\mathbb{T}_L^+(\mathfrak{R})$ e $\mathbb{T}_L^-(\mathfrak{R})$, respectivamente.

- **Reflexão por vértices** Dado $k \in \{1, \dots, d\}$ uma das d direções paralelas aos eixos coordenados e $m \in \{\frac{1}{2}, \dots, \frac{L-1}{2}\}$. A **reflexão por arestas** $\mathfrak{R} : \Lambda_L \longrightarrow \Lambda_L$ com parâmetros k e m é dada por leva (x_1, \dots, x_d) para $(\mathfrak{R}(x)_1, \dots, \mathfrak{R}(x)_d)$ definido pela mesma expressão (4.16)

Novamente, \mathfrak{R} é a reflexão por um plano ortogonal a e_k , porém, a sua interseção com os vértices do toro discreto \mathbb{T}_L é vazia.

Nesse caso, podemos descrever Λ_L como a união de duas metades disjuntas $\Lambda_L = \Lambda_L^+(\mathfrak{R}) \cup \Lambda_L^-(\mathfrak{R})$ que são definidas pelas respectivas expressões do caso anterior.

A seguir, ilustramos o efeito de uma reflexão \mathfrak{R} quando estamos em $d = 1$ ou $d = 2$. Primeiro, considerando o toro d -dimensional e, depois, o seu efeito em Λ_L .

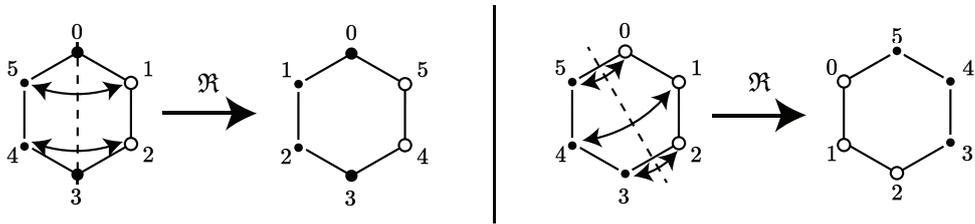


Figura 4.3: Para $d = 1$, ilustramos à esquerda o efeito no toro de uma reflexão \mathfrak{R} por um hiperplano que passa por vértices. Por sua vez, à direita, ilustramos o efeito no toro de uma reflexão \mathfrak{R} por um hiperplano que passa por arestas. Note que a reflexão por arestas mantém as arestas sobre o hiperplano inalteradas.

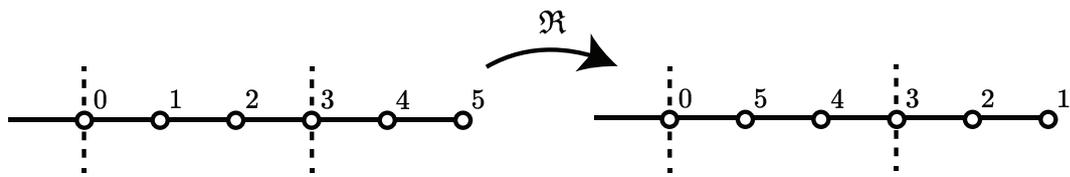


Figura 4.4: Para $d = 1$, ilustramos o efeito em Λ_L de uma reflexão \mathfrak{R} por um hiperplano que passa por vértices.

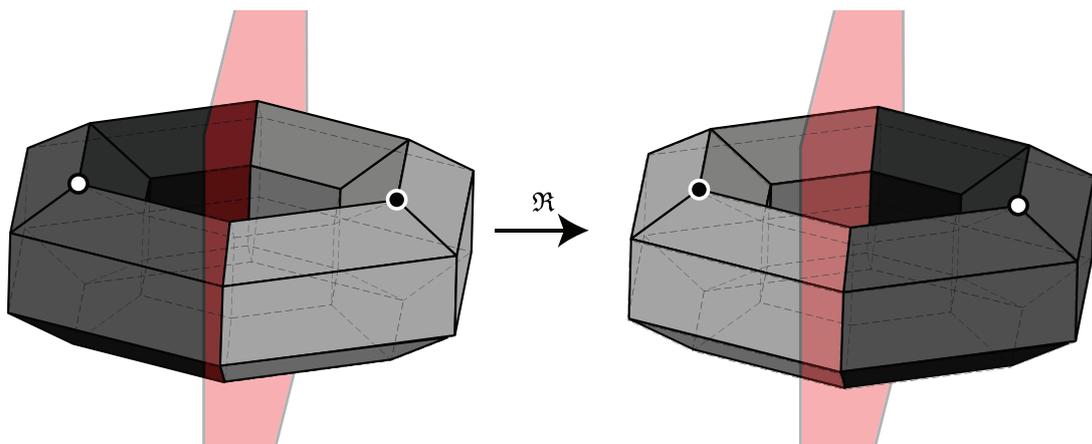


Figura 4.5: Para $d = 2$, ilustramos o efeito de uma reflexão por vértices \mathfrak{R} no toro \mathbb{T}_L .

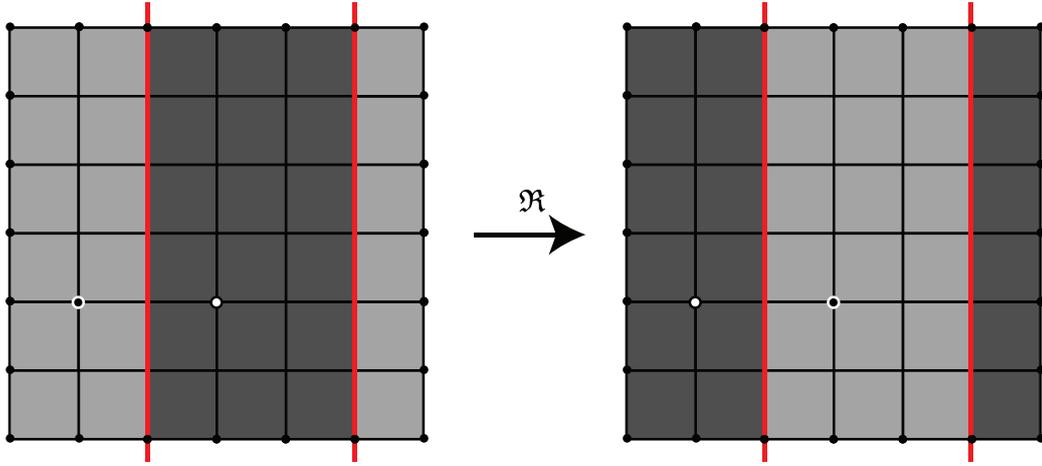


Figura 4.6: Para $d = 2$, ilustramos o efeito de uma reflexão por vértices \mathfrak{R} no toro Λ_L .

Podemos induzir o efeito da transformação \mathfrak{R} em configurações $\sigma \in \Omega_{\Lambda_L}^0$. De fato, basta considerar $(\mathfrak{R}(\sigma))_x = \sigma_{\mathfrak{R}(x)}$ para todo $x \in \Lambda_L$. Por sua vez, seja $f : \Omega_{\Lambda_L}^0 \mapsto \mathbb{R}$, definimos $\mathfrak{R}(f) = f \circ \mathfrak{R}^{-1}$.

Denotamos $\mathfrak{U}^+(\mathfrak{R})$ como a álgebra de funções limitadas e mensuráveis na álgebra gerada pelos vértices de $\Lambda_L^+(\mathfrak{R})$. Analogamente, definimos $\mathfrak{U}^-(\mathfrak{R})$.

Sejam $f, g \in \mathfrak{U}^+(\mathfrak{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ quaisquer. Valem as seguintes propriedades:

1. $\mathfrak{R}(\mathfrak{R}(f)) = f$;
2. $\mathfrak{R}(f + \lambda g) = \mathfrak{R}(f) + \lambda \mathfrak{R}(g)$;
3. $\mathfrak{R}(fg) = \mathfrak{R}(f)\mathfrak{R}(g)$; e
4. $\mathfrak{R}(e^f) = e^{\mathfrak{R}(f)}$.

Agora, definiremos a noção de Positividade por Reflexão.

Definição 4.3 (Positividade por Reflexão). Dizemos que μ é uma medida positiva pela reflexão \mathfrak{R} se

1. $\langle f \mathfrak{R}(g) \rangle_\mu = \langle g \mathfrak{R}(f) \rangle_\mu$, para quaisquer funções $f, g \in \mathfrak{U}^+(\mathfrak{R})$; e
2. $\langle f \mathfrak{R}(f) \rangle_\mu \geq 0$, para qualquer função $f \in \mathfrak{U}^+(\mathfrak{R})$,

onde $\langle \cdot \rangle_\mu$ denota o valor esperado de acordo com a medida μ .

Fica a cargo do leitor, mostrar que a primeira propriedade da definição acima é equivalente à igualdade $\mu = \mathfrak{R}(\mu) := \mu \circ \mathfrak{R}^{-1}$.

Uma maneira mais intuitiva de pensar em positividade por reflexões é a seguinte: uma medida é positiva pela reflexão \mathfrak{R} se $B(f, g) := \langle f \mathfrak{R}(g) \rangle_\mu$ é uma aplicação bilinear, positiva semi-definida e simétrica. Portanto, se μ é positiva pela reflexão \mathfrak{R} , temos que vale uma desigualdade do tipo Cauchy-Schwarz.

Lema 4.10 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja μ positiva pela reflexão \mathfrak{R} , então*

$$(\langle f \mathfrak{R}(g) \rangle_\mu)^2 \leq \langle f \mathfrak{R}(f) \rangle_\mu \langle g \mathfrak{R}(g) \rangle_\mu.$$

A seguir, mostraremos que a medida $\mu_{L,\beta}^{\text{per}}$ é, de fato, uma medida positiva por qualquer reflexão de \mathbb{T}_L . Para isso, precisamos do seguinte lema.

Lema 4.11. *Seja $\mu_0 = \otimes_{x \in \mathbb{T}_L} \rho$, onde ρ é uma medida de probabilidade em $\{-1, 1\}$, então μ_0 é uma medida positiva por qualquer reflexão de \mathbb{T}_L .*

Demonstração. Seja \mathfrak{R} uma reflexão de \mathbb{T}_L qualquer, vale que

$$\mathfrak{R}(\mu_0) = \mu_0,$$

uma vez que $\mathfrak{R}(\mu_0)$ se trata de uma mera reordenação das parcelas \mathbb{T}_L do produto $\otimes_{i \in \mathbb{T}_L} \rho$. Dessa forma, para qualquer retângulo $A_1 \times \dots \times A_{|\mathbb{T}_L|}$, segue

$$(\mathfrak{R}(\mu_0))(A_1 \times \dots \times A_{|\mathbb{T}_L|}) = \prod_{x \in \mathbb{T}_L} \rho(A_{\mathfrak{R}(x)}) = \prod_{x \in \mathbb{T}_L} \rho(A_x) = \mu_0(A_1 \times \dots \times A_{|\mathbb{T}_L|}).$$

Resta provar a segunda propriedade. Para tanto, consideremos, primeiro, o caso em que \mathfrak{R} é uma reflexão por arestas. Desse modo, Λ_L^+ e Λ_L^- não possuem arestas em comum e, portanto, f e $\mathfrak{R}(f)$ possuem suportes disjuntos. Logo

$$\langle f \mathfrak{R}(f) \rangle_{\mu_0} = \langle f \rangle_{\mu_0} \langle \mathfrak{R}(f) \rangle_{\mu_0} = (\langle f \rangle_{\mu_0})^2 \geq 0.$$

Por fim, suponha que \mathfrak{R} seja uma reflexão por vértices, seja P o conjunto de vértices que interceptam tal hiperplano. Considere \mathcal{F}_P a σ -álgebra gerada pelos vértices de P , temos que

$$\begin{aligned} \langle f \mathfrak{R}(f) \rangle_{\mu_0} &= \langle \langle f \mathfrak{R}(f) | \mathcal{F}_P \rangle_{\mu_0} \rangle_{\mu_0} \\ &= \langle \langle f | \mathcal{F}_P \rangle_{\mu_0} \langle \mathfrak{R}(f) | \mathcal{F}_P \rangle_{\mu_0} \rangle_{\mu_0} \\ &= \langle (\langle f | \mathcal{F}_P \rangle_{\mu_0})^2 \rangle_{\mu_0} \geq 0. \end{aligned}$$

□

Provaremos, a seguir, que uma grande classe de medidas de probabilidade é Positiva por Reflexões.

Lema 4.12. *Seja $L > 0$ inteiro par e $\beta > 0$, então se existirem funções $A, C_\alpha \in \mathcal{U}^+(\mathfrak{R})$ $\alpha \in I$ um conjunto finito de índices de forma que possamos escrever*

$$H_{\Lambda_L} = A + \mathfrak{R}(A) + \sum_{\alpha \in I} C_\alpha \mathfrak{R}(C_\alpha),$$

então $\mu_{L,\beta}^{\text{per}}$ é positiva pela reflexão \mathfrak{R} .

Demonstração. Seja μ_0 a medida produto uniforme em Λ_L . Usando a expansão de Taylor no fator $\exp(\sum_{\alpha \in I} C_\alpha \mathfrak{R}(C_\alpha))$, para $f, g \in \mathcal{U}^+(\mathfrak{R})$, temos que

$$\begin{aligned} \langle f \mathfrak{R}(g) \rangle_{L,\beta}^{\text{per}} &= \frac{1}{Z_{L,\beta}} \langle f \mathfrak{R}(g) e^{\beta[A + \mathfrak{R}(A) + \sum_{\alpha \in I} C_\alpha \mathfrak{R}(C_\alpha)]} \rangle_{\mu_0} \\ &= \frac{1}{Z_{L,\beta}} \sum_{n \geq 0} \frac{\beta^n}{n!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \langle f e^{\beta A} C_{\alpha_1} \dots C_{\alpha_n} \mathfrak{R}(g e^{\beta A} C_{\alpha_1} \dots C_{\alpha_n}) \rangle_{\mu_0}, \end{aligned}$$

onde na última expressão, α_i 's não são necessariamente distintos. Portanto, o resultado segue da observação de que μ_0 é positiva por reflexões. □

Provaremos que o Modelo de Ising com condição de fronteira periódica satisfaz as hipóteses do lema acima. Seja P o conjunto dos vértices que interceptam o hiperplano, no qual consideramos a reflexão (no caso em que a reflexão seja por arestas, $P = \emptyset$).

Sendo assim

$$\begin{aligned} H_L(\sigma) &= - \sum_{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L)} J \sigma_x \sigma_y \\ &= - \sum_{x \in P} \sum_{\substack{y \in \mathbb{T}_L \\ \{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L)}} J \sigma_x \sigma_y - \sum_{\substack{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L) \\ x,y \in \mathbb{T}_L^+ \setminus P}} J \sigma_x \sigma_y - \sum_{\substack{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L) \\ x,y \in \mathbb{T}_L^- \setminus P}} J \sigma_x \sigma_y - \sum_{\substack{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L) \\ x \in \mathbb{T}_L^+ \\ y \in \mathbb{T}_L^-}} J \sigma_x \sigma_y \\ &= \sum_{x \in P} \sum_{\substack{y \in \mathbb{T}_L \\ \{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L)}} J \sigma_x \sigma_y - \sum_{\substack{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L) \\ x,y \in \mathbb{T}_L^+ \setminus P}} J \sigma_x \sigma_y \\ &+ \mathfrak{R} \left(- \sum_{\substack{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L) \\ x,y \in \mathbb{T}_L^+ \setminus P}} J \sigma_x \sigma_y \right) - \sum_{\substack{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L) \\ x \in \mathbb{T}_L^+ \\ y \in \mathbb{T}_L^-}} \sqrt{J} \sigma_x \mathfrak{R}(\sqrt{J} \sigma_x). \end{aligned}$$

Então, basta definir

$$A := \frac{1}{2} \sum_{x \in P} \sum_{\substack{y \in \mathbb{T}_L^+ \\ \{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L)}} J \sigma_x \sigma_y - \sum_{\substack{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L) \\ x,y \in \mathbb{T}_L^+ \setminus P}} J \sigma_x \sigma_y$$

e

$$C_{x'} = \sqrt{J} \sigma_{x'},$$

onde x' são vértices de $\Lambda_L^+(\mathfrak{R})$ de forma que existe $y \in \Lambda_L^-(\mathfrak{R})$ tal que $y = \mathfrak{R}(x)$.

Segue, então, que a medida $\mu_{L,\beta}^{\text{per}}$ é positiva por qualquer reflexão \mathfrak{R} .

Estudaremos um Hamiltoniano equivalente ao que estudamos anteriormente. Considere

$$H'_L(\sigma) := \sum_{x,y \in \mathbb{T}_L} J |\sigma_x - \sigma_y|^2.$$

Note que

$$\begin{aligned} H'_L(\sigma) &= \sum_{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L)} J |\sigma_x - \sigma_y|^2 \\ &= \sum_{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L)} \underbrace{J(\sigma_x)^2 + J(\sigma_y)^2}_{=1} - 2J \sigma_x \sigma_y \\ &= 2H_L(\sigma) + K_L, \end{aligned}$$

onde K_L é uma constante que só depende de J e L .

Logo, o Hamiltoniano H'_L nada difere de H_L apenas por uma constante que depende do volume \mathbb{T}_L , e, portanto

$$\mu_{L,\beta}^{\text{per}}(\sigma) = \frac{e^{-\frac{\beta}{2} H'_L(\sigma)}}{Z'_{L,\frac{\beta}{2}}}.$$

Sendo assim, podemos simplesmente considerar esse novo Hamiltoniano, que será mais conveniente para os próximos resultados. Note que a mudança de β para $\beta/2$ não altera os fenômenos críticos, esta apenas muda o valor de β_c para $2\beta_c$ com o novo hamiltoniano.

Sejam $\mathbf{h} = \{h_x\}_{x \in \mathbb{T}_L}$ e μ_0 a medida produto uniforme em Ω_L^0 . Defina

$$\mathbf{Z}_{\beta,h}(\mathbf{h}) := \left\langle \exp \left(-\beta \sum_{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L)} J |\sigma_x - \sigma_y + h_x - h_y|^2 \right) \right\rangle_{\mu_0}. \quad (4.19)$$

Proposição 4.13 (Dominação Gaussiana). *Para qualquer $\mathbf{h} = \{h_x\}_{x \in \mathbb{T}_L}$, vale*

$$\mathbf{Z}_{L,\beta}(\mathbf{h}) \leq \mathbf{Z}_{L,\beta}(0). \quad (4.20)$$

Para provar a Dominação Gaussiana, precisaremos de um lema técnico, que é uma aplicação da Desigualdade de Cauchy-Schwarz. A sua demonstração e será ficará a cargo o leitor.

Lema 4.14. *Sejam μ positivo pela reflexão \mathfrak{R} e A, B, C_α e $D_\alpha \in \mathfrak{U}^+(\mathfrak{R})$. Vale a desigualdade*

$$\left(\langle e^{A+\mathfrak{R}(B)+\sum_\alpha C_\alpha \mathfrak{R}(D_\alpha)} \rangle_\mu \right)^2 \leq \left(\langle e^{A+\mathfrak{R}(A)+\sum_\alpha C_\alpha \mathfrak{R}(C_\alpha)} \rangle_\mu \right) \left(\langle e^{B+\mathfrak{R}(B)+\sum_\alpha D_\alpha \mathfrak{R}(D_\alpha)} \rangle_\mu \right).$$

Prova da Dominação Gaussiana. Primeiro, observe que para \mathbf{h} e \mathbf{h}' tais que $h_x = h'_x + c$, então $\mathbf{Z}_{L,\beta}(\mathbf{h}) = \mathbf{Z}_{L,\beta}(\mathbf{h}')$. Portanto, podemos supor sem perda de generalidade que $h_0 = 0$. A seguir, observe que $\mathbf{Z}_{L,\beta}(\mathbf{h})$ converge para 0 quando $h_x \rightarrow \infty$ para algum x . Logo, existe algum $C > 0$ tal que $\sum_{x \in \mathbb{T}_L} |h_x|^2 \leq C$ para todo \mathbf{h} que maximiza $\mathbf{Z}_{L,\beta}(\mathbf{h})$.

Considere o seguinte conjunto

$$\mathcal{H} := \{\mathbf{h}' : \mathbf{Z}_{L,\beta}(\mathbf{h}') = \sup \mathbf{Z}_{L,\beta}(\mathbf{h})\}.$$

Para $\mathbf{h} = \{h_x\}_{x \in \mathbb{T}_L}$, defina

$$N(\mathbf{h}) = |\{\{x, y\} \in E(\mathbb{T}_L) : h_x \neq h_y\}|.$$

Seja $\mathbf{h}^* \in \mathcal{H}$ tal que

$$N(\mathbf{h}^*) = \min_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}} \{N(\mathbf{h})\}.$$

Provaremos que $N(\mathbf{h}^*) = 0$, e, conseqüentemente, obtemos $h_x^* = h_0^* = 0$ para todo $x \in \mathbb{T}_L$.

Suponha que $N(\mathbf{h}^*) > 0$. Dessa forma, existe $\{x, y\} \in E(\mathbb{T}_L)$. Considere a reflexão por arestas \mathfrak{R} cujo hiperplano passa pelo ponto médio da aresta $\{x, y\}$. Denote por $\{x', y'\}$ as arestas que atravessam o hiperplano de \mathfrak{R} de maneira que $x' \in \mathbb{T}_L^+(\mathfrak{R})$ e $y' = \mathfrak{R}(x) \in \mathbb{T}_L^-(\mathfrak{R})$. Como

$$|\sigma_{x'} - \sigma_{y'} + h_{x'} - h_{y'}|^2 = |\sigma_{x'} + h_{x'}|^2 + |\sigma_{y'} + h_{y'}|^2 - 2(\sigma_{x'} + h_{x'})(\sigma_{y'} + h_{y'}),$$

podemos escrever

$$-\beta \sum_{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L)} J |\sigma_{x'} - \sigma_{y'} + h_{x'} - h_{y'}|^2 = A + \mathfrak{R}(B) + \sum_{x'} C_{x'} \mathfrak{R}(D_{x'}),$$

onde

$$\begin{aligned}
A &:= -\beta \sum_{\substack{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L) \\ x,y \in \mathbb{T}_L^+(\mathfrak{R})}} J |\sigma_x - \sigma_y + h_x - h_y|^2 - \beta \sum_{x'} J |\sigma_{x'} + h_{x'}|^2 \\
\mathfrak{R}(B) &:= -\beta \sum_{\substack{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L) \\ x,y \in \mathbb{T}_L^-(\mathfrak{R})}} J |\sigma_x - \sigma_y + h_x - h_y|^2 - \beta \sum_{y'} J |\sigma_{y'} + h_{y'}|^2 \\
C_{x'} &:= 2\sqrt{2\beta J}(\sigma_{x'} + h_{x'}) \\
\mathfrak{R}(D_{x'}) &:= 2\sqrt{2\beta J}(\sigma_{y'} + h_{y'}).
\end{aligned}$$

Note que \mathfrak{R} age sobre σ , e não, sobre \mathbf{h} . Logo, $A \neq B$ e $C_{x'} \neq D_{x'}$. Então, aplicando o Lema 4.14, temos que

$$\mathbf{Z}_{L,\beta}(\mathbf{h}^*)^2 \leq \mathbf{Z}_{L,\beta}(\mathbf{h}^{*,+})\mathbf{Z}_{L,\beta}(\mathbf{h}^{*,-}),$$

onde

$$h_x^{*,+} = \begin{cases} h_x^*, & \text{se } x \in \mathbb{T}_L^+(\mathfrak{R}) \\ h_{\mathfrak{R}(x)}^*, & \text{se } x \in \mathbb{T}_L^-(\mathfrak{R}) \end{cases} \quad h_x^{*, -} = \begin{cases} h_x^*, & \text{se } x \in \mathbb{T}_L^-(\mathfrak{R}) \\ h_{\mathfrak{R}(x)}^*, & \text{se } x \in \mathbb{T}_L^+(\mathfrak{R}) \end{cases}$$

Observe que $\min\{N(\mathbf{h}^{*,+}), N(\mathbf{h}^{*, -})\} < N(\mathbf{h}^*)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $N(\mathbf{h}^{*,+}) < N(\mathbf{h}^*)$, então

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_{L,\beta}(\mathbf{h}^*)^2 &\leq \mathbf{Z}_{L,\beta}(\mathbf{h}^{*,+})\mathbf{Z}_{L,\beta}(\mathbf{h}^{*, -}) \\
&\leq \mathbf{Z}_{L,\beta}(\mathbf{h}^{*,+})\mathbf{Z}_{L,\beta}(\mathbf{h}),
\end{aligned}$$

pois $\mathbf{Z}_{L,\beta}(\mathbf{h}^*)$ atinge o máximo. Logo,

$$\mathbf{Z}_{L,\beta}(\mathbf{h}^*)^2 \leq \mathbf{Z}_{L,\beta}(\mathbf{h}^{*,+})\mathbf{Z}_{L,\beta}(\mathbf{h}),$$

o que é uma contradição pela escolha de \mathbf{h}^* . E, portanto, a Dominação Gaussiana está provada. □

Neste momento, enunciaremos a *Infrared Bound* que será uma ferramenta fundamental para provar a continuidade da transição de fase.

Teorema 4.15 (Cota Infravermelha-I). *Seja L um inteiro par e positivo e $\mu_{L,\beta}^{\text{per}}$ a medida de Gibbs no Toro \mathbb{T}_L , então*

$$\sum_{x \in \mathbb{T}_L} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{L,\beta}^{\text{per}} e^{ip \cdot x} \leq \frac{1}{2\beta} \frac{1}{E(p)}, \forall p \in \mathbb{T}_L^* \setminus \{0\}, \quad (4.21)$$

onde $\mathbb{T}_L^* := (\frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^d) \cap (-\pi, \pi]^d$ e $E(p) := 1 - \hat{J}(P)$.

O Teorema 4.15 possui uma versão equivalente. Como essa será a versão que utilizaremos na próxima seção, omitiremos a demonstração do Teorema 4.15 e mostraremos em detalhes o Teorema 4.16. A demonstração apresentada nesta dissertação foi retirada de [Bis09].

Teorema 4.16 (Cota Infravermelha-II). *Seja L um inteiro par e positivo e $\mu_{L,\beta}^{\text{per}}$ a medida de Gibbs no Toro \mathbb{T}_L , então para qualquer $(v_x)_{x \in \mathbb{T}_L} \in \mathbb{C}^{\mathbb{T}_L}$, temos que*

$$\sum_{x,y \in \mathbb{T}_L} v_x \bar{v}_y \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{L,\beta}^{\text{per}} \leq \frac{1}{4\beta} \sum_{x,y \in \mathbb{T}_L} v_x \bar{v}_y G_L(x,y) + \frac{1}{L^d} \left| \sum_{x \in \mathbb{T}_L} v_x \right|^2 \sum_{x \in \mathbb{T}_L} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{L,\beta}^{\text{per}}, \quad (4.22)$$

onde

$$G_L(x,y) := \sum_{p \in \mathbb{T}_L^* \setminus \{0\}} \frac{1}{L^d} \frac{e^{ip \cdot (x-y)}}{E(p)}.$$

No restante desta seção, usaremos a notação de Transformada de Fourier Discreta. Seja $\{\eta_x\}_{x \in \mathbb{T}_L}$, definimos sua Transformada de Fourier Discreta como $\{\hat{\eta}_p : p \in \mathbb{T}_L^*\}$, onde

$$\hat{\eta}_p = \frac{1}{\sqrt{L^d}} \sum_{x \in \mathbb{T}_L} e^{ip \cdot x} \eta_x.$$

Note que reservamos, anteriormente, a notação $\hat{J}(p)$ para uma soma ligeiramente diferente. As duas igualdades que apresentaremos a seguir são particularmente úteis: Para $p, p' \in \mathbb{T}_L^*$

$$\frac{1}{L^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_L} e^{i(p-p') \cdot x} = \mathbb{1}_{[p=p']}, \quad (4.23)$$

e para $x, y \in \mathbb{T}_L$, temos

$$\frac{1}{L^d} \sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} e^{ip \cdot (x-y)} = \mathbb{1}_{[x=y]}. \quad (4.24)$$

Utilizando (4.23) e (4.24), conseguimos as seguintes identidades. Para todo $\{\eta_x\}_{x \in \mathbb{T}_L}$

$$\eta_x = \frac{1}{\sqrt{L^d}} \sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} e^{-ip \cdot x} \hat{\eta}_p, \quad (4.25)$$

e

$$\sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} |\hat{\eta}_p|^2 = \sum_{x \in \mathbb{T}_L} |\eta_x|^2. \quad (4.26)$$

Antes de provar a Cota Infravermelha, provaremos o seguinte lema.

Lema 4.17. *Considere a aplicação $G_L : \mathbb{C}^{\mathbb{T}_L} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{T}_L}$ dada como uma espécie de "multiplicação de matrizes", isto é,*

$$[G_L(\mathbf{h})]_x = \sum_{y \in \mathbb{T}_L} G_L(x, y) h_y.$$

Seja $\mathfrak{C} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{T}_L}$ o conjunto das funções constantes, isto é, $\{v_x\}_{x \in \mathbb{T}_L} \in \mathfrak{C}$ se, e somente se, $v_x = v_y$ para todo $x, y \in \mathbb{T}_L$. Então

$$G_L : \frac{\mathbb{C}^{\mathbb{T}_L}}{\mathfrak{C}} \rightarrow \frac{\mathbb{C}^{\mathbb{T}_L}}{\mathfrak{C}}$$

é uma função bijetora e sua inversa é dada por

$$G_L^{-1}(\eta) = \{G_L^{-1}(\eta)_x\}_{x \in \mathbb{T}_L},$$

onde

$$G_L^{-1}(\eta)_x = \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} e^{-ip \cdot x} \hat{\eta}_p (1 - \hat{J}(p))$$

Demonstração. Primeiro, observe que $\frac{\mathbb{C}^{\mathbb{T}_L}}{\mathfrak{C}} = \{ \{v_x\}_{x \in \mathbb{T}_L} : \sum_{x \in \mathbb{T}_L} v_x = 0 \}$. Para todo $h = \{h_x\}_{x \in \mathbb{T}_L}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \mathbb{T}_L} G_L(h)_x &= \sum_{x \in \mathbb{T}_L} \sum_{y \in \mathbb{T}_L} G_L(x, y) h_y \\
&= \sum_{x \in \mathbb{T}_L} \sum_{y \in \mathbb{T}_L} \sum_{p \in \mathbb{T}_L^* \setminus \{0\}} \frac{1}{L^d} \frac{e^{ip \cdot (x-y)}}{E(p)} h_y \\
&= \sum_{p \in \mathbb{T}_L^* \setminus \{0\}} \sum_{y \in \mathbb{T}_L} h_y e^{-ip \cdot y} \sum_{x \in \mathbb{T}_L} \frac{1}{L^d} \frac{e^{ip \cdot x}}{E(p)} h_y \\
&\stackrel{(4.23)}{=} \sum_{p \in \mathbb{T}_L^* \setminus \{0\}} \sum_{y \in \mathbb{T}_L} h_y e^{-ip \cdot y} \mathbb{1}_{p=0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, $G_L(h) \in \mathfrak{C}$ para todo $h \in \mathbb{C}^{\mathbb{T}_L}$. Além disso, se $h \in \mathbb{C}^{\mathbb{T}_L}$ é constante, isto é, $h_x = h \in \mathbb{C}$ para todo $x \in \mathbb{T}_L$, obtemos

$$\sum_{x \in \mathbb{T}_L} G_L(h)_x = h \sum_{x \in \mathbb{T}_L} \sum_{y \in \mathbb{T}_L} G_L(x, y) = 0,$$

onde, na última igualdade, basta desenvolver as contas de modo similar ao ponto anterior.

Calcularemos, a seguir, a inversa de G_L . Sejam η, h tais que $\sum_{x \in \mathbb{T}_L} \eta_x = \sum_{x \in \mathbb{T}_L} h_x = 0$ e

$$G_L(h) = \eta.$$

Então, segue

$$\begin{aligned}
\eta_x &= \sum_{y \in \mathbb{T}_L} G_L(x, y) h_y \\
&= \sum_{y \in \mathbb{T}_L} \frac{1}{L^d} h_y \sum_{p \in \mathbb{T}_L^* \setminus \{0\}} \frac{e^{ip \cdot (x-y)}}{1 - \hat{J}(p)} \\
&= \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{p \in \mathbb{T}_L^* \setminus \{0\}} \frac{e^{ip \cdot x}}{1 - \hat{J}(p)} \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{y \in \mathbb{T}_L} e^{i(-p) \cdot y} h_y \\
&= \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{p \in \mathbb{T}_L^* \setminus \{0\}} \frac{e^{ip \cdot x}}{1 - \hat{J}(p)} \hat{h}_{-p} \\
&= \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{p \in \mathbb{T}_L^* \setminus \{0\}} \frac{e^{-ip \cdot x}}{1 - \hat{J}(-p)} \hat{h}_p \\
&= \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{p \in \mathbb{T}_L^* \setminus \{0\}} e^{-ip \cdot x} \frac{\hat{h}_p}{1 - \hat{J}(p)}.
\end{aligned}$$

Portanto, para $p \neq 0$

$$\hat{\eta}_p = \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{x \in \mathbb{T}_L} e^{ip \cdot x} \eta_x = \frac{\hat{h}_p}{1 - \hat{J}(p)}$$

e, conseqüentemente, para $p \neq 0$

$$\hat{\eta}_p(1 - \hat{J}(p)) = \hat{h}_p. \quad (4.27)$$

Observe que

$$\hat{\eta}_0 = \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{x \in \mathbb{T}_L} \eta_x = 0 = \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{x \in \mathbb{T}_L} h_x = 0 = \hat{h}_0,$$

logo (4.27) é válida para todo $p \in \mathbb{T}_L^*$. Então, a partir de (4.25), obtemos

$$h_x = \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{p \in \mathbb{T}_L^* \setminus \{0\}} e^{-ip \cdot x} \hat{\eta}_p(1 - \hat{J}(p)). \quad (4.28)$$

E, portanto

$$G_L^{-1}(\eta)_x = \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} e^{-ip \cdot x} \hat{\eta}_p(1 - \hat{J}(p)).$$

A expressão (4.25) garante a unicidade da inversa. Além disso, existe um $h \in \frac{\mathbb{C}^{\mathbb{T}_L}}{\mathfrak{G}}$ para todo $\eta \in \frac{\mathbb{C}^{\mathbb{T}_L}}{\mathfrak{G}}$. Concluimos, então, o lema. \square

Demonstração da Cota Infravermelha-II. Inicialmente, faremos a prova com a hipótese adicional de que $\sum_{x \in \mathbb{T}_L} v_x = 0$. Denotaremos o produto interno em $\mathbb{R}^{\mathbb{T}_L}$ entre $\eta, \zeta \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}_L}$ como

$$\langle \eta, \zeta \rangle = \sum_{x \in \mathbb{T}_L} \eta_x \zeta_x$$

Ao definir $G_L^{-1}(h) = 0$ sempre que h for constante, podemos estender G_L^{-1} a todo $\mathbb{C}^{\mathbb{T}_L}$. Dessa forma, temos que

$$\sum_{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L)} J |\eta_x - \eta_y|^2 = \langle \eta, G_L^{-1}(\eta) \rangle$$

O lado direito da equação acima pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \sum_{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L)} J |\eta_x - \eta_y|^2 &= \sum_{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L)} J |\eta_x|^2 + |\eta_y|^2 - 2\eta_x \eta_y \\ &= \sum_{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L)} J |\eta_x|^2 + \sum_{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L)} J |\eta_y|^2 - 2 \sum_{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L)} J \eta_x \eta_y \\ &= \sum_{x \in \mathbb{T}_L} \eta_x (\eta_x - \sum_{y \in \mathbb{T}_L} J_{x,y} \eta_y) \\ &= \langle \eta, (\mathbf{I} - \mathbf{J})\eta \rangle, \end{aligned}$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade ($\mathbf{I}_{x,y} = \mathbb{1}_{[x=y]}$), e \mathbf{J} , a matriz definida por $\mathbf{J}_{x,y} = J_{x,y}$.

A seguir, analisaremos a expressão

$$\langle h, G_L^{-1}(h) \rangle.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\langle h, G_L^{-1}(h) \rangle &= \sum_{x \in \mathbb{T}_L} h_x G_L^{-1}(h)_x \\
&= \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{x \in \mathbb{T}_L} h_x \sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} e^{-ip \cdot x} \hat{h}_p (1 - \hat{J}(p)) \\
&= \sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} \hat{h}_p (1 - \hat{J}(p)) \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{x \in \mathbb{T}_L} h_x e^{-ip \cdot x} \\
&= \sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} \hat{h}_p \hat{h}_{-p} (1 - \hat{J}(p)) \\
&= \sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} \hat{h}_p \hat{h}_{-p} - \sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} \hat{h}_p \hat{h}_{-p} \hat{J}(p).
\end{aligned}$$

Ao substituírmos as expressões de \hat{h}_p e \hat{h}_{-p}

$$\begin{aligned}
\langle h, G_L^{-1}(h) \rangle &= \sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} \frac{1}{L^d} \sum_{x, y \in \mathbb{T}_L} h_x h_y e^{ip \cdot (x-y)} - \sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} \frac{1}{L^d} \hat{J}(p) \sum_{x, y \in \mathbb{T}_L} h_x h_y e^{ip \cdot (x-y)} \\
&= \frac{1}{L^d} \sum_{x, y \in \mathbb{T}_L} h_x h_y \sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} e^{ip \cdot (x-y)} - \frac{1}{L^d} \sum_{x, y \in \mathbb{T}_L} h_x h_y \sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} \hat{J}(p) e^{ip \cdot (x-y)} \\
&= \sum_{x, y \in \mathbb{T}_L} h_x h_y \underbrace{\frac{1}{L^d} \sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} e^{ip \cdot (x-y)}}_{=\mathbf{1}_{\{x=y\}}} - \sum_{x, y \in \mathbb{T}_L} h_x h_y \underbrace{\frac{1}{L^d} \sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} \hat{J}(p) e^{ip \cdot (x-y)}}_{=J_{0,x-y}} \\
&= \sum_{x \in \mathbb{T}_L} h_x (h_x - \sum_{y \in \mathbb{T}_L} J_{x,y} h_y) \\
&= \langle \eta, (\mathbf{I} - \mathbf{J}) \eta \rangle \\
&= \sum_{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L)} J_{x,y} |h_x - h_y|^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{\{x,y\} \in E(\mathbb{T}_L)} J |h_x - h_y|^2 = \langle \eta, G_L^{-1}(\eta) \rangle.$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{L,\beta}(\mathbf{h}) &= \left\langle e^{-\beta\langle\sigma+h, G_L^{-1}(\sigma+h)\rangle} \right\rangle_{\mu_0} \\ &= \left\langle e^{-\beta\langle\sigma, G_L^{-1}(\sigma)\rangle} e^{-\beta\langle h, G_L^{-1}(\sigma)\rangle} e^{-\beta\langle\sigma, G_L^{-1}(h)\rangle} e^{-\beta\langle h, G_L^{-1}(h)\rangle} \right\rangle_{\mu_0} \frac{\mathbf{Z}_{L,\beta}(0)}{\mathbf{Z}_{L,\beta}(0)} \\ &= \mathbf{Z}_{L,\beta}(0) \left\langle e^{-2\beta\langle\sigma, G_L^{-1}(h)\rangle - \beta\langle h, G_L^{-1}(h)\rangle} \right\rangle_{L,2\beta}^{\text{per}}, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, aplicamos a identidade

$$\langle G_L^{-1}(\sigma), h \rangle = \langle G_L^{-1}(h), \sigma \rangle.$$

De fato, segue

$$\begin{aligned} \langle G_L^{-1}(\sigma), h \rangle &= \sum_{x \in \mathbb{T}_L} G_L^{-1}(\sigma) h_x \\ &= \sum_{x \in \mathbb{T}_L} \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} e^{-ip \cdot x} \hat{\sigma}_p (1 - \hat{J}(p)) h_x \\ &= \sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} \hat{\sigma}_p (1 - \hat{J}(p)) \sum_{x \in \mathbb{T}_L} e^{-ip \cdot x} \frac{1}{L^{d/2}} h_x \\ &= \sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} \hat{\sigma}_p (1 - \hat{J}(p)) \hat{h}_{-p} \\ &= \sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} \hat{\sigma}_{-p} (1 - \hat{J}(-p)) \hat{h}_p \\ &= \sum_{p \in \mathbb{T}_L^*} \hat{h}_p (1 - \hat{J}(p)) \hat{\sigma}_{-p} \\ &= \langle G_L^{-1}(h), \sigma \rangle. \end{aligned}$$

Pela Dominação Gaussiana, Proposição 4.13, obtemos

$$\left\langle e^{-2\beta\langle\sigma, G_L^{-1}(h)\rangle} \right\rangle_{L,2\beta}^{\text{per}} \leq e^{\beta\langle h, G_L^{-1}(h)\rangle}$$

Agora, suponha que $\{v_x\}_{x \in \mathbb{T}_L}$ satisfaz $G_L(v) = h$, podemos assumir que $\sum_{x \in \mathbb{T}_L} v_x = 0$ uma vez que se $v_x = v$ para todo $x \in \mathbb{T}_L$, temos que $G_L^{-1}(v)_x = 0$ para todo $x \in \mathbb{T}_L$. Sendo assim, temos que

$$\left\langle e^{-2\beta\langle v, \sigma \rangle} \right\rangle_{L,2\beta}^{\text{per}} \leq e^{\beta\langle v, G_L(v) \rangle}.$$

Expandindo a exponencial em Taylor, temos

$$1 - 2\beta \langle \langle v, \sigma \rangle \rangle_{L,2\beta}^{\text{per}} + \frac{4\beta^2}{2} \langle \langle v, \sigma \rangle^2 \rangle_{L,2\beta}^{\text{per}} + \dots \leq 1 + \beta \langle v, G_L(v) \rangle + \dots$$

Porém, observe que

$$\langle \langle v, \sigma \rangle \rangle_{L,2\beta}^{\text{per}} = \left\langle v, \underbrace{\langle \sigma \rangle_{L,2\beta}^{\text{per}}}_{\text{constante em } x} \right\rangle = 0,$$

pois $\sum_{x \in \mathbb{T}_L} v_x = 0$. Logo, segue que

$$\sum_{x,y \in \mathbb{T}_L} v_x \bar{v}_y \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{L,2\beta}^{\text{per}} = \langle \langle v, \sigma \rangle^2 \rangle_{L,2\beta}^{\text{per}} \leq \frac{1}{2\beta} \langle v, G_L(v) \rangle = \frac{1}{2\beta} \sum_{x,y \in \mathbb{T}_L} v_x \bar{v}_y G_L(x, y).$$

Finalmente, basta substituir $\beta' = \frac{\beta}{2}$.

O que conclui a demonstração para o caso em que $\sum_{x \in \mathbb{T}_L} v_x = 0$. Para o caso geral, seja $\{v_x\}_{x \in \mathbb{T}_L}$ qualquer, defina $m = \frac{1}{L^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_L} v_x$. Podemos, então, aplicar o resultado para a coleção $\{v'_x\}_{x \in \mathbb{T}_L}$ com $v'_x = v_x - m$. Daí, segue

$$\sum_{x,y \in \mathbb{T}_L} (v_x - m)(\bar{v}_y - \bar{m}) \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{L,\beta}^{\text{per}} \leq \frac{1}{4\beta} \langle v, G_L(v) \rangle = \frac{1}{4\beta} \sum_{x,y} (v_x - m)(\bar{v}_y - \bar{m}) G_L(x, y).$$

Expandindo o lado esquerdo, temos

$$\begin{aligned} \sum_{x,y \in \mathbb{T}_L} (v_x - m)(\bar{v}_y - \bar{m}) \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{L,\beta}^{\text{per}} &= \sum_{x,y \in \mathbb{T}_L} v_x \bar{v}_y \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{L,\beta}^{\text{per}} - \bar{m} \sum_{x \in \mathbb{T}_L} v_x \sum_{y \in \mathbb{T}_L} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{L,\beta}^{\text{per}} \\ &\quad - m \sum_{y \in \mathbb{T}_L} \bar{v}_y \sum_{x \in \mathbb{T}_L} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{L,\beta}^{\text{per}} - |m|^2 \sum_{x \in \mathbb{T}_L} \sum_{y \in \mathbb{T}_L} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{L,\beta}^{\text{per}} \\ &= \sum_{x,y \in \mathbb{T}_L} v_x \bar{v}_y \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{L,\beta}^{\text{per}} - \bar{m} L^d m \sum_{x \in \mathbb{T}_L} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{L,\beta}^{\text{per}} \\ &\quad - m L^d \bar{m} \sum_{x \in \mathbb{T}_L} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{L,\beta}^{\text{per}} + |m|^2 L^d \sum_{x \in \mathbb{T}_L} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{L,\beta}^{\text{per}} \\ &= \sum_{x,y \in \mathbb{T}_L} v_x \bar{v}_y \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{L,\beta}^{\text{per}} - \frac{1}{L^d} \left| \sum_{x \in \mathbb{T}_L} v_x \right| \sum_{x \in \mathbb{T}_L} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{L,\beta}^{\text{per}}, \end{aligned}$$

onde, na penúltima igualdade, usamos a invariância por translações.

Por sua vez, expandimos o lado direito da expressão

$$\begin{aligned}
\sum_{x,y \in \mathbb{T}_L} (v_x - m)(\overline{v_y - m})G_L(x, y) &= \sum_{x,y \in \mathbb{T}_L} v_x \bar{v}_y G_L(x, y) - \bar{m} \sum_{x \in \mathbb{T}_L} v_x \underbrace{\sum_{y \in \mathbb{T}_L} G_L(x, y)}_{=0} \\
&\quad - m \sum_{y \in \mathbb{T}_L} \bar{v}_y \underbrace{\sum_{x \in \mathbb{T}_L} G_L(x, y)}_{=0} - |m|^2 \sum_{x \in \mathbb{T}_L} \underbrace{\sum_{y \in \mathbb{T}_L} G_L(x, y)}_{=0} \\
&= \sum_{x,y \in \mathbb{T}_L} v_x \bar{v}_y G_L(x, y).
\end{aligned}$$

Comparando ambos os lados, concluímos a demonstração. \square

4.4 A prova da Continuidade da Transição de Fase

Para concluir a demonstração da continuidade da transição para $d \geq 3$, aplicaremos a Cota Infravermelha para provar que $\tilde{M}_{LRO}(\beta_c) = 0$.

Teorema 4.18. *Para $d \geq 3$, o Modelo de Ising com interação de primeiros vizinhos satisfaz $\tilde{M}_{LRO}(\beta_c) = 0$.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.16, para qualquer $(v_x)_{x \in \mathbb{T}_L} \in \mathbb{C}^{\mathbb{T}_L}$, temos que

$$\sum_{x,y \in \mathbb{T}_L: \|x-y\|_1=1} v_x \bar{v}_y \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{L,\beta}^{\text{per}} \leq \frac{1}{4\beta} \sum_{x,y \in \mathbb{T}_L: \|x-y\|_1=1} v_x \bar{v}_y G_L(x, y) + \frac{1}{L^d} \left| \sum_{x \in \mathbb{T}_L} v_x \right|^2 \sum_{x \in \mathbb{T}_L} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{L,\beta}^{\text{per}}. \quad (4.29)$$

Porém, note que as funções $G_L(x, y)$ são aproximações por Somas de Riemman que convergem da seguinte forma

$$\lim_{L \rightarrow \infty} G_L(x, y) = \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{ip \cdot (x-y)}}{(2\pi)^d E(p)} dp =: G(x, y).$$

O lado direito da equação é finito. De fato, como $d \geq 3$, o Teorema 4.8 garante que o passeio aleatório simples em \mathbb{Z}^d é transiente, e, pelo Lema 4.9, temos que

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{(2\pi)^d E(p)} dp < \infty,$$

e, portanto, $G(x, y) < \infty$.

Seja $\Lambda_n = [-n, n]$, provaremos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|^2} \sum_{x, y \in \Lambda_n} G(x, y) = 0.$$

Note que $G(0, x)$ pode visto como a Transformada de Fourier da Função $g(p) = \frac{\mathbb{1}_{p \in [-\pi, \pi]^d}}{E(p)}$. O Lema de Riemann–Lebesgue implica

$$G(x, y) = G(0, y - x) \longrightarrow 0, \text{ quando } \|x - y\|_1 \longrightarrow 0.$$

Portanto, seja $\varepsilon > 0$, escolha $k > 0$ tal que $\|x - y\|_1 > k$ implique $|G(x, y)| < \varepsilon$. Defina $C_k := \max_{x, y \in \Lambda_k} |G(x, y)|$, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{|\Lambda_n|^2} \sum_{x, y \in \Lambda_n} G(x, y) \right| &\leq \frac{1}{|\Lambda_n|^2} \sum_{x \in \Lambda_n} \left[\sum_{\substack{y \in \Lambda_n \\ \|x-y\|_1 \leq k}} |G(x, y)| + \sum_{\substack{y \in \Lambda_n \\ \|x-y\|_1 > k}} |G(x, y)| \right] \\ &\leq \frac{1}{|\Lambda_n|^2} \sum_{x \in \Lambda_n} \left[|B(k)| C_k + |\Lambda_n| \varepsilon \right] \\ &\leq \frac{C_k |B(k)|}{|\Lambda_n|} + \varepsilon \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \varepsilon. \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de ε , segue a convergência desejada.

Agora, para $\beta < \beta_c$ e uma função v com suporte limitado, então podemos omitir o último termo da Desigualdade (4.29), uma vez que

$$0 \leq \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_L} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{L, \beta}^{\text{per}} \leq \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{x \in \Lambda_L} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{\Lambda_L, \beta}^+ = 0,$$

onde, na última igualdade, usamos que $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{\beta}^+ < \infty$, como provado no Teorema 3.1 para todo $\beta < \beta_c$. Porém, pelo Lema 2.4, temos que para todo $x, y \in \mathbb{Z}^d$

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta_c}^0 = \lim_{\beta \rightarrow \beta_c^-} \lim_{L \rightarrow \infty} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_L, \beta}^0.$$

Por fim, escolhendo $v_x = \frac{1}{|\Lambda_n|} \mathbb{1}_{x \in \Lambda_n}$ para um n fixo, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Lambda_n|^2} \sum_{x,y \in \Lambda_n} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta_c}^0 &= \lim_{\beta \rightarrow \beta_c^-} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|^2} \sum_{x,y \in \Lambda_n} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda_n, \beta}^0 \\ &\leq \lim_{\beta \rightarrow \beta_c^-} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|^2} \sum_{x,y \in \Lambda_n} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{L, \beta}^{\text{per}} \\ &\leq \frac{1}{4\beta_c} \frac{1}{|\Lambda_n|^2} \sum_{x,y \in \Lambda_n} G(x, y). \end{aligned}$$

E, calculando o limite quando $n \rightarrow \infty$, concluímos que

$$0 \leq \tilde{M}_{LRO}^2(\beta_c) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|^2} \sum_{x,y \in \Lambda_n} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta_c}^0 \leq 0.$$

□

Portanto, segue como corolário dos Teoremas 4.7 e 4.18 que $m^*(\beta_c) = 0$ para $d \geq 3$. Logo, a transição de fase é contínua.

Capítulo 5

Considerações finais

Como referido anteriormente, os resultados dos Capítulos 3 e 4 foram provados aqui em uma generalidade menor do que em seus artigos originais. A seguir, explicaremos o grau de generalidade desses trabalhos, apresentaremos alguns problemas em aberto e, por fim, faremos comentários direcionados para aqueles que possuem experiência com outros modelos de Mecânica Estatística.

Sobre *sharpness* e continuidade da transição de fase

Em [DCT16], como mencionado no Capítulo 3, a demonstração do Teorema 3.1 é válida para qualquer interação \mathbf{J} admissível; e grafo G transitivo e *amenable*, lembrando que o decaimento exponencial, item 3. do Teorema 3.1 só é garantido para o caso em que \mathbf{J} possui alcance finito.

Sob as hipóteses originais desse artigo, não podemos assegurar que $\tilde{\beta}_c = \beta_c \in (0, \infty)$. Isso deve ser provado para cada grafo. Uma vez que, por exemplo, no Modelo de Ising em dimensão 1 satisfaz todas as hipóteses desse teorema.

Em [DCT16], os autores também mostraram a seguinte desigualdade

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\beta_c, h}^0 \geq ch^{\frac{1}{3}},$$

onde c é uma constante positiva. Esse resultado, apesar de interessante, não foi necessário para o restante desta dissertação e, portanto, não apresentamos sua demonstração.

Em [ADCS15], os autores mostraram o Teorema 4.7 para o Modelo de Ising em $d \geq 1$ para qualquer interação \mathbf{J} admissível. Em [Rao16], o autor prova que, se G for um grafo *amenable*, com crescimento exponencial e for quasi-transitivo, então o Modelo de Ising em G satisfaz $m^*(\beta_c) = 0$. Vale observar que \mathbb{Z}^2 não possui crescimento exponencial.

A demonstração de que $m^*(\beta_c) = 0$ em \mathbb{Z}^3 ocorreu de modo curioso. Um leitor experiente em Mecânica Estatística deve estar familiarizado com o Modelo de Percolação de Bernoulli (também conhecido como percolação independente).

Existem muitas similaridades entre o Modelo de Ising e a Percolação de Bernoulli, porém, em geral, obtêm-se resultados no modelo de percolação antes da demonstração dos seus fenômenos equivalentes no Modelo de Ising. Além disso, as demonstrações para o Modelo de Ising, muitas vezes, são adaptações de técnicas originadas na percolação independente. Um exemplo é a demonstração do Teorema 4.4. Entretanto, o problema de continuidade da transição de fase em \mathbb{Z}^3 , na percolação independente, permanece em aberto (até o presente momento), sendo considerado um dos mais importantes problemas em aberto em Teoria de Probabilidade. O que impede a adaptação dos argumentos aplicados em [ADCS15] para o caso da percolação independente é a falta de um equivalente para a Cota Infravermelha.

Como referido na introdução do Capítulo 4, as técnicas usadas para provar a continuidade da transição de fase em dimensão 2 não podem ser estendidas para $d \geq 3$. Por outro lado não se conhece uma forma de aplicar a técnica de correntes aleatórias para provar a continuidade da transição de em dimensão 2. Com o objetivo de simplificar a exposição do assunto, seria interesse conseguir mostrar a continuidade para qualquer $d \geq 2$ com uma única técnica. Portanto, cabe a seguinte pergunta.

Pergunta 5.1. *É possível mostrar que a transição de fase do Modelo de Ising em \mathbb{Z}^2 é contínua usando correntes aleatórias?*

Observe que, como referido anteriormente, o Teorema 4.7 não depende da dimensão, o que resta é provar que $\tilde{M}_{LRO}(\beta_c) = 0$ usando a representação de correntes aleatórias.

Pergunta 5.2. *A transição de fase do Modelo de Ising nos slabs do plano, isto é, $\mathbb{Z}^2 \times \{1, \dots, k\}$ é contínua para qualquer $k > 1$?*

O problema da aplicação dos métodos anteriores é que os *slabs*, simultaneamente, são grafos não planares, e seu passeio aleatório é recorrente (o que impede o uso frutífero da cota infravermelha).

Sobre as correntes aleatórias a volume infinito

Apesar de haver sido introduzido como simples ferramenta para o estudo do Modelo de Ising, o Modelo de Correntes Aleatórias vem ganhando relevância, e, conseqüentemente, e os seus fenômenos intrínsecos têm sido estudados como objetivo final. Aqui, apresentamos algumas questões apresentadas em [DC16] que permanecem em aberto. Faremos, ainda, algumas considerações gerais.

Uma primeira pergunta a ser feita é como a Representação por Correntes Aleatórias se relaciona com os demais modelos de percolação, tais como a percolação independente e o RCM. Em [LW⁺16], os autores provam um acoplamento entre os três modelos.

No contexto do Capítulo 4, considerando $\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}$ a volume infinito, podemos provar a partir de (4.7) que $\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}$ possui um aglomerado infinito se, e somente se, $\beta > \beta_c$. Porém, não possuímos tal informação quando analisamos apenas uma corrente.

Pergunta 5.3. *Existe $\beta' > 0$ tal que para todo $\beta > \beta'$, temos*

$$\hat{P}_\beta^0(\hat{\mathbf{n}}_1 \text{ possui um aglomerado infinito}) = 1?$$

Apresentamos outra questão que, apesar de parecer básica, não é completamente compreendida.

Pergunta 5.4. *Dados $A, B \subset \mathbb{Z}^d$ finitos quaisquer, será que $\beta \mapsto \mathbb{P}_\beta(A \xleftrightarrow{\widehat{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}} B)$ é uma função não decrescente em β ?*

Por fim, especialistas na área podem ser perguntar sobre os limites de escala de correntes aleatórias. Pouco é, de fato, provado sobre esses limites. Porém, em consequência do acoplamento entre as correntes aleatórias e os Contornos de Peirls, é conjecturado que o limite de escala $\hat{\mathbf{n}}_1$ com distribuição \hat{P}_β^0 é, de fato, CLE_3 .

Apêndice A

Definições elementares de Teoria de Grafos

A seguir, apresentamos apenas os objetos essenciais de Teoria de Grafos para a compreensão deste texto. Para o leitor interessado, recomendamos a leitura recomendamos [Bol13] como referência nessa área.

Definição A.1 (Grafo). *Seja V um conjunto não vazio e enumerável, e $E \subset V \times V$ não vazio de modo que $\{v, v\} \notin E$ para todo $v \in V$. Dizemos então que $G = (V, E)$ é um grafo com conjunto de vértices V e arestas E .*

Intuitivamente, podemos pensar que V é um conjunto de pontos de forma que existe uma aresta conectando v_1 e v_2 se $\{v_1, v_2\} \in E$. Note que se G é um grafo, então não existe aresta conectando um vértice v a ele mesmo.

A seguir, generalizamos o conceito de grafo para o caso onde pode existir mais de uma aresta conectando dois vértices.

Definição A.2 (Multigrafo). *Seja $G' = (V, E)$ um grafo e seja $\mathbf{n} : E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ uma função. Dizemos $G = (V, E, \mathbf{n})$ é um multigrafo com conjunto de vértices V e arestas (E, \mathbf{n}) .*

Intuitivamente, a função \mathbf{n} aponta quantas arestas existem entre dois vértices, isto é, seja $\{v_1, v_2\} \in E$ dizemos que em G existem $\mathbf{n}(\{v_1, v_2\})$ arestas entre v_1 e v_2 .

Podemos reproduzir a definição anterior de modo análogo apenas usando V um conjunto não vazio e enumerável e uma função $\mathbf{n} : V \times V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$, onde $\mathbf{n}(\{v, v\}) = 0$ para todo $v \in V$. Desta forma, podemos recuperar E como sendo $E = \{e \in V \times V : \mathbf{n}(e) > 0\}$. Para as próximas definições, usaremos essa caracterização.

Observe que podemos pensar em todo o grafo como um multigrafo cuja função \mathbf{n} satisfaz $\mathbf{n}(e) \in \{0, 1\}$ para todo o $e \in E$. Dessa forma, todos os conceitos definidos a seguir podem ser estendidos para grafos.

Definição A.3 (Conexão). *Seja $G = (V, \mathbf{n})$ um multigrafo, e $x, y \in V$. Dizemos que x está conectado a y em G se existe conjunto de arestas $\gamma = \{\{x_0, y_0\}, \dots, \{x_k, y_k\}\}$ no multigrafo de modo que*

- $x_j, y_j \in V$ para todo $j = 0, \dots, k$;
- $x_0 = x$ e $y_k = y$;
- $x_{j+1} = y_j$ para todo $j = 0, \dots, k - 1$; e
- $\mathbf{n}(\{x_j, y_j\}) > 0$ para todo $j = 0, \dots, k - 1$.

Indicamos tal fato por $x \longleftrightarrow y$.

Finalmente, definimos o conceito de grau.

Definição A.4 (Grau). *Sejam $G = (V, \mathbf{n})$ um multigrafo e $v \in V$ um vértice qualquer. Definimos como o grau de v como*

$$\text{grau}_G(v) = \sum_{v' \in V} \mathbf{n}(\{v, v'\}).$$

Lema A.1 (Lema do Aperto de Mãos). *Seja $G = (V, E)$ um multigrafo, então vale a seguinte identidade*

$$\sum_{v \in V} \text{grau}_G(v) = 2|E|.$$

Uma consequência direta do Lema de Aperto de Mãos é dado o conjunto

$$\mathcal{J}(G) = \{v \in V : \text{grau}_G(v) \text{ é ímpar}\},$$

então $|\mathcal{J}(G)|$ é par.

Referências Bibliográficas

- [ABF87] Michael Aizenman, David J Barsky, and Roberto Fernández. The phase transition in a general class of ising-type models is sharp. *Journal of Statistical Physics*, 47(3-4):343--374, 1987.
- [ADCS15] Michael Aizenman, Hugo Duminil-Copin, and Vladas Sidoravicius. Random currents and continuity of ising model's spontaneous magnetization. *Communications in Mathematical Physics*, 334(2):719--742, 2015.
- [AF86] M Aizenman and R Fernández. On the critical behavior of the magnetization in high-dimensional ising models. *Journal of Statistical Physics*, 44(3):393--454, 1986.
- [Aiz80] Michael Aizenman. Translation invariance and instability of phase coexistence in the two dimensional ising system. *Communications in Mathematical Physics*, 73(1):83--94, 1980.
- [Aiz82] Michael Aizenman. Geometric analysis of φ^4 fields and ising models. parts i and ii. *Communications in mathematical Physics*, 86(1):1--48, 1982.
- [AT43] BM Axilrod and Ei Teller. Interaction of the van der waals type between three atoms. *The Journal of Chemical Physics*, 11(6):299--300, 1943.
- [Bar14] Robert G Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons, 2014.
- [BC75] Rufus Bowen and Jean-René Chazottes. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, volume 470. Springer, 1975.
- [BDC12] Vincent Beffara and Hugo Duminil-Copin. The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for $q \geq 1$. *Probability Theory and Related Fields*, 153(3):511--542, 2012.
- [Bil13] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons, 2013.
- [Bis09] Marek Biskup. *Reflection Positivity and Phase Transitions in Lattice Spin Models*, pages 1--86. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [BK89] Robert M Burton and Michael Keane. Density and uniqueness in percolation. *Communications in mathematical physics*, 121(3):501--505, 1989.

- [Bod06] Thierry Bodineau. Translation invariant gibbs states for the ising model. *Probability theory and related fields*, 135(2):153--168, 2006.
- [Bol13] Béla Bollobás. *Modern graph theory*, volume 184. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Bre10] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [CCF14] Leandro Chiarini, Leandro Cioletti, and Filipe Fernandes. Polinômios de leeyang com coeficientes complexos. *Matemática Universitária-SBM*, pages 52--53, 2014.
- [DC16] Hugo Duminil-Copin. Random currents expansion of the ising model. *arXiv preprint arXiv:1607.06933*, 2016.
- [DCST17] Hugo Duminil-Copin, Vladas Sidoravicius, and Vincent Tassion. Continuity of the phase transition for planar random-cluster and potts models with $\{1 \leq q \leq 4\}$. *Communications in Mathematical Physics*, 349(1):47--107, 2017.
- [DCT16] Hugo Duminil-Copin and Vincent Tassion. A new proof of the sharpness of the phase transition for bernoulli percolation and the ising model. *Communications in Mathematical Physics*, 343(2):725--745, 2016.
- [Dob70] Roland L Dobrushin. Prescribing a system of random variables by conditional distributions. *Theory of Probability & Its Applications*, 15(3):458--486, 1970.
- [Dys71] Freeman J. Dyson. An ising ferromagnet with discontinuous long-range order. *Comm. Math. Phys.*, 21(4):269--283, 1971.
- [FKG71] Cees M Fortuin, Pieter W Kasteleyn, and Jean Ginibre. Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Communications in Mathematical Physics*, 22(2):89--103, 1971.
- [FV14] Sacha Friedli and Yvan Velenik. *Statistical Mechanics of Lattice Systems: a Concrete Mathematical Introduction*. 2014.
- [GHS70] Robert B Griffiths, Charles A Hurst, and Seymour Sherman. Concavity of magnetization of an ising ferromagnet in a positive external field. *Journal of Mathematical Physics*, 11(3):790--795, 1970.
- [GK71] Ch Gruber and H Kunz. General properties of polymer systems. *Communications in Mathematical Physics*, 22(2):133--161, 1971.
- [Gri67a] Robert B Griffiths. Correlations in ising ferromagnets. i. *Journal of Mathematical Physics*, 8(3):478--483, 1967.
- [Gri67b] Robert B Griffiths. Correlations in ising ferromagnets. ii. external magnetic fields. *Journal of Mathematical Physics*, 8(3):484--489, 1967.
- [Gri67c] Robert B Griffiths. Correlations in ising ferromagnets. iii. *Communications in Mathematical Physics*, 6(2):121--127, 1967.

- [Hol74] Richard Holley. Remarks on the fkg inequalities. *Communications in Mathematical Physics*, 36(3):227--231, 1974.
- [HSS00] Olle Haggstrom, Roberto H Schonmann, and Jeffrey E Steif. The ising model on diluted graphs and strong amenability. *Annals of probability*, pages 1111--1137, 2000.
- [Isi25] Ernst Ising. Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 31(1):253--258, 1925.
- [Isr15] Robert B Israel. *Convexity in the theory of lattice gases*. Princeton University Press, 2015.
- [JS99] Johan Jonasson and Jeffrey E Steif. Amenability and phase transition in the ising model. *Journal of Theoretical Probability*, 12(2):549--559, 1999.
- [KS68] Douglas G Kelly and Seymour Sherman. General griffiths' inequalities on correlations in ising ferromagnets. *Journal of Mathematical Physics*, 9:466--484, 1968.
- [KW41] Hendrik A Kramers and Gregory H Wannier. Statistics of the two-dimensional ferromagnet. part i. *Physical Review*, 60(3):252, 1941.
- [L⁺99] Torgny Lindvall et al. On strassen's theorem on stochastic domination. *Electron. Comm. Probab*, 4:51--59, 1999.
- [LW⁺16] Titus Lupu, Wendelin Werner, et al. A note on ising random currents, ising-fk, loop-soups and the gaussian free field. *Electronic Communications in Probability*, 21, 2016.
- [LY52] Tsung-Dao Lee and Chen-Ning Yang. Statistical theory of equations of state and phase transitions. ii. lattice gas and ising model. *Physical Review*, 87(3):410, 1952.
- [Lyo89] Russell Lyons. The ising model and percolation on trees and tree-like graphs. *Comm. Math. Phys.*, 125(2):337--353, 1989.
- [Mun00] James R Munkres. *Topology*. Prentice Hall, 2000.
- [Ons44] Lars Onsager. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review*, 65(3-4):117, 1944.
- [Pei36] Rudolf Peierls. On ising's model of ferromagnetism. 32(03):477--481, 1936.
- [Pól21] Georg Pólya. Über eine aufgabe der wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die irrfahrt im straßennetz. *Mathematische Annalen*, 84(1-2):149--160, 1921.
- [Rao16] Aran Raoufi. A note on continuity of magnetization at criticality for the ferromagnetic ising model on amenable quasi-transitive graphs with exponential growth. *arXiv preprint arXiv:1606.03763*, 2016.
- [Rue10] David Ruelle. Characterization of lee-yang polynomials. *Annals of Mathematics*, pages 589--603, 2010.

- [Str65] V. Strassen. The existence of probability measures with given marginals. *Ann. Math. Statist.*, 36(2):423--439, 04 1965.
- [VDBK85] Jacob Van Den Berg and Harry Kesten. Inequalities with applications to percolation and reliability. *Journal of applied probability*, 22(3):556--569, 1985.

Lista de símbolos e abreviações

$\xrightarrow{*}$	convergência fraca-*, 61
$m^*(\mathbf{J}, \beta)$	magnetização espontânea, 59
$\hat{\mathbf{n}}$	suporte da corrente \mathbf{n} , 121
$\langle \cdot \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\#$	Valor esperado com respeito à medida $\mu_{\Lambda, \beta, h}^\#$, 10
\mathbb{P}_β	lei de distribuição do suporte da soma de duas correntes aleatórias a volume infinito, 129
$E(\Lambda)$	Arestas induzidas em Λ por uma interação \mathbf{J} , 8
$m(\mathbf{J}, \beta, h)$	função de magnetização, 59
$+, -$	Estados fundamentais, 10
β	Inverso da temperatura, 8
$\beta_c(d)$	inverso da temperatura crítica, 74
$\hat{P}_{\Lambda, \beta}^\#$	lei de distribuição do suporte de uma corrente aleatória a volume Λ , 121
$\langle \cdot \rangle_\mu$	valor esperado com respeito à medida de probabilidade μ , 38
\mathbf{J}	Constantes de Interação, 8
\mathbf{n}	uma função $\mathbf{n} : E(\Lambda^g) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ corrente no volume Λ , 15
$\mathcal{C}_{\Lambda^g}^\#$	conjunto das correntes aleatórias sobre Λ^g , 15
\mathcal{F}	σ -álgebra de Borel em Ω , 8
$\mathcal{G}(\beta, h)$	conjunto das Medidas de Gibbs a volume infinito, 67
$\mathbb{1}[\cdot]$	função indicadora, 8
$\mu_{\Lambda, \beta, h}^\#$	Medida de Gibbs a volume finito, 10
$\mu_2 \leq \mu_1$	dominação estocástica entre μ_1 e μ_2 , 43
Ω	$:= \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$, 7

$\otimes_{i \in I} \mu_i$	medida produto, 36
$\partial \mathbf{n}$	conjunto de fontes da corrente \mathbf{n} , 15
$\rho_{\Lambda^g, \beta, h}^\#(\omega)$	peso atribuído a espinha dorsal ω , 109
σ_A	$:= \prod_{x \in A} \sigma_x$, 12
supp	suporte de uma função ou de um evento, 12
$\tilde{M}_{LRO}(\beta)$	parâmetro de longa ordem, 135
g	sítio fantasma, 14
h	Campo magnético, 8
$H_{\Lambda, h}^\#$	Hamiltoniano com condição de fronteira $\#$, 9
$p(\mathbf{J}, \beta, h)$	função de pressão, 50
$P_{\Lambda, \beta}^\#$	lei de distribuição de uma corrente aleatória a volume Λ , 121
$w(\mathbf{n})$	peso atribuído à corrente \mathbf{n} , 15
$x \overset{\mathbf{n}}{\longleftrightarrow} y$	conexão pela corrente \mathbf{n} , 19
$Z_{\Lambda, \beta, h}^\#$	Função de Partição, 10
$Z_\Lambda^\#(A, \beta, h)$	Valor esperado (não renormalizado) de σ_A , 16
(FKG)	Desigualdade FKG, 36
(GHS)	Desigualdade GHS, 26
(GKS-I)	Desigualdade GKS-I, 25
(GKS-II)	Desigualdade GKS-II, 25

Índice Remissivo

- Condição de Fronteira
 - Periódica, 143
- Condição de fronteira
 - τ , 11
 - livre, 9, 39
- Condição de Holley, 36
- Convergência
 - Fraca-*, 63
 - no Sentido de van Hove, 46
- Corrente Aleatória
 - a volume finito, 14
- Correntes aleatórias
 - a volume infinito, 122
- Densidade de magnetização, 59
- Desigualdade
 - de Jensen, 49
 - de Lieb-Simon Modificada, 115
 - FKG, 36
 - GHS, 26
 - GKS-I, 25
 - GKS-II, 25
- Dominação Estocástica, 43
- Dominação Gaussiana, 150
- Espinha Dorsal, 107
- Função
 - de Partição, 10
 - local, 12
 - não-decrescente, 35
 - quasi-local, 62
- Grafo, 169
- Grafo Dual, 78
- Infrared Bound, 152
- Invariância por translação , 65
- Invariância por translações, 66
- Magnetização, 54
- Magnetização espontânea, 59
- Medidas de Gibbs a volume infinito , 67
- Multigrafo, 169
- Parâmetro de Longo Alcance, 135
- Positividade por Reflexão, 147
- Pressão
 - a volume finito, 44
 - a volume infinito, 50
- Problema Variacional, 4
- Propriedade
 - de Inserção, 131
- Propriedade de Markov, 41
- Switching Lemma, 22
- Sítio fantasma, 14
- Teorema
 - de Pólya, 140
 - Strassen, 90

Transformada de Fourier Discreta, 153

Transição de Fase, 60, 68