



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Quebra da simetria da réplica e decaimento de correlações no modelo de Ising com campo.

por

Jamer Insupe Roldan Gonzales

**Orientador:** Leandro Martins Cioletti

Brasília

**2019**

Jamer Insupe Roldan Gonzales

Quebra da simetria da réplica e decaimento  
de correlações no modelo de Ising com  
campo.

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília como requisito parcial à obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Orientador: Leandro Martins Cioletti

**Brasília**  
**2019**

# Quebra da Simetria da Réplica e Decaimento de Correlações no Modelo de Ising com Campo

por

**Jamer Insupe Roldan Gonzales\***

*Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB,  
como requisito parcial para obtenção do grau de*

## DOUTOR EM MATEMÁTICA

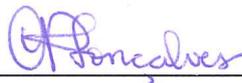
Brasília, 19 de agosto de 2019.

Comissão Examinadora:



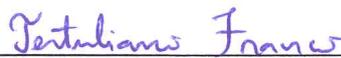
---

Prof. Dr. Leandro Martins Cioletti – Orientador (MAT-UnB)



---

Profa. Dra. Cátia Regina Gonçalves (MAT-UnB)



---

Prof. Dr. Tertuliano Franco Santos Franco (UFBA)



---

Prof. Dr. Rodrigo Bissacot Proença (USP)

\* O autor foi bolsista CAPES e CNPq durante a elaboração desta tese.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

J27q Roldan Gonzales, Jamer Insupe  
Quebra da simetria da réplica e decaimento de correlações  
no modelo de Ising com campo / Jamer Insupe Roldan  
Gonzales; orientador Leandro Martins Cioletti . -- Brasília,  
2019.  
124 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) --  
Universidade de Brasília, 2019.

1. Modelo de Ising com campo aleatório. 2. Decaimento de  
correlações. 3. Quebra da simetria da réplica. 4. Mecânica  
Estatística. 5. Medida de Gibbs aleatória. I. , Leandro  
Martins Cioletti, orient. II. Título.

## Agradecimentos

Agradeço a Deus por ser bom comigo e sempre estar iluminando o caminho a seguir.

Com carinho, agradeço a meus pais Javier Roldan e Mercedes Gonzales, que sempre me têm apoiado, por todas as forças que eles me dão, pelas fotos das paisagens, viagens, animais que sempre me enviam. Eles têm me ensinado um estilo bom de viver e espero no futuro ter uma vida com muitas plantas, flores e animais.

Gostaria de agradecer a meus irmãos Teylor, Juki, Merja e Aurora, que apesar da distância eu senti presentes. A minha irmã Aurora sempre me escrevendo, sou sortudo por ter uma irmã assim.

Agradeço ao meu orientador Leandro Martins Cioletti pela paciência comigo, pelos conselhos, sugestões, lições matemáticas e encorajamento que sempre dá para que no futuro eu seja melhor matemático.

Agradeço, também, Roberto Vila, uma boa pessoa com quem tenho viajado a diversos eventos em matemática, agradeço pelos conselhos, discussões matemáticas, ânimos e positivismo que consegue transmitir.

Agradeço, da mesma forma, a meus amigos Jose Charahua, Karina, Roy, Juanca, Lenne, Vivi, Mayer, Sonia, Rejane, Milena, Juan Romero, Ellen, Reijane, Mariano, Josileide, Maze, Raquel e Amanda por ter feito estes últimos quatro anos muito mais agradáveis.

Gostaria, também de agradecer a meus amigos e colegas da matemática, Manuel, Romulo, Irving, Guillermo, Lizeth, Felipe, Mayra, Élis pelos sorrisos e brincadeiras compartilhadas. Especialmente para Leo e Elaine que sempre me ofereceram seu apoio.

Gostaria, também de agradecer ao Departamento da Matemática e aos seus professores que me tem ensinado matemática; em especial aos professores, Cátia Gonçalves, Ary Vasconcelos, Ricardo Ruviano pela dedicação que colocam a suas matérias.

Gostaria, agradecer aos membros da banca pelas abundantes correções, perguntas e sugestões que me ajudaram fazer uma tese melhor.

Agradeço às agências CAPES e CNPq por seu apoio financeiro, fundamental para ter conseguido estudar o mestrado e o doutorado.

## *Resumo*

Nesta tese mostramos a ausência da quebra da simetria da réplica para o modelo de Ising com campo magnético numa classe de desordens não-gaussianas. Para esse fim, obtemos a validade das equações de Guirlanda-Guerra e uma extensão da integração por partes gaussiana, apropriada para estes campos. Por outro lado, mostramos o decaimento de correlações no modelo de Ising com campo não-gaussiano na rede hexagonal para toda a temperatura; adicionalmente fazendo uso da expansão em polímeros, provamos, para baixas temperaturas e para campos magnéticos determinísticos não-uniformes e limitados, que a correlação truncada decresce exponencialmente com a distância entre pontos.

**Palavras-chave:** Modelo de Ising, Campo aleatório, Medida de Gibbs aleatória, Decaimento de correlações, Quebra da simetria da réplica.

## *Abstract*

In this thesis we show the absence of the replica symmetry breaking for the Ising Model with magnetic field in a class of non-Gaussian disorders, for this purpose, we obtain the validity of the Guirlanda-Guerra equations and an extension of the Gaussian integration by parts, appropriated for these fields. On the other hand, we show the decay of correlations in the Ising Model with non-Gaussian field in the hexagonal lattice for all temperature; additionally by using of the cluster expansion we exhibit, for low temperatures and for non-uniform and bounded deterministic magnetic fields that the truncated correlation decreases exponentially with respect to the distance of the points.

**Keywords:** Ising Model, Random field, Random Gibbs measure, Decay of correlations, Replica symmetry breaking.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Apresentação do modelo de Ising</b>	<b>7</b>
1.1 Volume finito . . . . .	7
1.2 Desigualdades e propriedades importantes no modelo de Ising . . . . .	13
<b>2 Medida de Gibbs aleatória</b>	<b>21</b>
2.1 Resumo da medida de Gibbs determinística . . . . .	22
2.2 Resumo da medida de Gibbs aleatória . . . . .	24
<b>3 Modelo de Ising com campo aleatório</b>	<b>31</b>
3.1 Apresentação do argumento de Peierls . . . . .	31
3.2 O argumento de Imry e Ma . . . . .	32
3.3 O método de Aizenman e Wehr . . . . .	39
3.4 O resultado de Bricmont e Kupiainen . . . . .	40
<b>4 Ausência de quebra da simetria das réplicas para o modelo de Ising com campo aleatório numa classe de campos não gaussianos</b>	<b>41</b>
4.1 Introdução à quebra da simetria da réplica . . . . .	41
4.2 Apresentação do modelo . . . . .	44
4.3 Ideia da prova . . . . .	49
4.4 Resultados para a prova . . . . .	52
4.5 Exemplos de campos não gaussianos . . . . .	60
<b>5 Decaimento da correlação com campo aleatório no reticulado hexagonal</b>	<b>67</b>
5.1 Descrição do modelo . . . . .	68
5.2 Desigualdades prévias . . . . .	69
5.3 Uma limitação considerando as arestas que enlaçam $\mathbb{B}$ com o exterior. . .	70
5.4 Uma limitação considerando a forma da rede hexagonal. . . . .	72
<b>6 Decaimento para a correlação truncada com campo não uniforme</b>	<b>83</b>
6.1 Preliminares: expansão em polímeros . . . . .	84
6.2 Convergência da expansão . . . . .	86
6.3 Expansão a baixas temperaturas . . . . .	86
6.4 Decaimento da correlação truncada . . . . .	89
6.5 Cotas superiores para as correlações com campo não uniforme . . . . .	95
<b>A Desigualdades GKS</b>	<b>107</b>

A.1	Desigualdade GKS-I . . . . .	107
A.2	Demonstração de GKS-II . . . . .	108
<b>B</b>	<b>Quebra da Simetria da Réplica</b>	<b>111</b>
B.1	Generalização da integração Gaussiana por partes . . . . .	112
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>117</b>

# Introdução

A Mecânica Estatística é a parte da Física que permite estudar propriedades de sistemas macroscópicos (objetos com um número maior ou perto do número de Avogadro de partículas) através de propriedades microscópicas de cada partícula, sejam átomos, moléculas, etc. Se quiséssemos fazer esse trabalho usando equações ordinárias teríamos muitas equações, já que são aproximadamente  $6,02 \times 10^{23}$  partículas. Isso sem considerar a possibilidade de determinar a condição inicial de cada equação. Portanto, tendo em vista evitar toda essa trajetória, a alternativa mais viável é trabalhar com medidas de probabilidade e esperanças. Essas medidas tem fundamentação experimental e teórica (ver von Dreifus [vD93]) apropriado.

Com a Mecânica Estatística de equilíbrio<sup>1</sup> podemos estudar as propriedades dos gases, sólidos cristalinos, etc. Propriedades como a magnetização, por exemplo, e saber se há ou não transição de fase. Há vários modelos que permitem estudar a mudança de fase como, por exemplo, o modelo de Ising, o modelo de Ising com campo aleatório, o modelo de Sherrington e Kirkpatrick, o modelo de Edwards e Anderson, o modelo de energia aleatória, etc.

O modelo de Ising foi introduzido por Wilhelm Lenz em 1920 e foi usado para estudar a transição de fase da magnetização no reticulado unidimensional, por seu aluno Ernst Ising em sua tese de doutorado [Isi25] em 1925. Por não conseguir explicar o fenômeno de transição de fase, o modelo ficou em desuso por muitos anos até que Rudolph Peierls [Pei36], em 1936, conseguir usá-lo para mostrar que há transição de fase para o modelo de Ising em  $\mathbb{Z}^d$  para  $d \geq 2$ . Todos os resultados mencionados anteriormente consideram campo zero e interações de primeiros vizinhos.

A transição de fase pode ser vista em termos da magnetização espontânea (que é uma função que depende da temperatura) como segue: se a magnetização espontânea torna-se estritamente maior que zero para valores maiores que o ponto crítico<sup>2</sup>, na temperatura inversa ( $\beta$ ) e para valores menores, na temperatura inversa, torna-se nulo, dizemos que há transição de fase. Os matemáticos e físicos se interessam em estudar a continuidade desta função no ponto crítico, que é o ponto onde poderia ter saltos. Assim em 1944 Lars Onsager [Ons44] mostrou a continuidade no modelo 2-dimensional. Posteriormente, Aizenman e Fernandez [AF86] conseguiram mostrar, em 1986, que, para  $d \geq 4$ , a magnetização espontânea é contínua e para completar todas as dimensões, para  $d = 3$ ,

---

<sup>1</sup>O sistema estar em equilíbrio significa que ao longo do tempo as grandezas macroscópicas, tais como pressão, susceptibilidade etc permanecem constantes.

<sup>2</sup>É um ponto na temperatura onde ocorre uma mudança de fase: a água muda de líquido para gás, um ímã passa de ter magnetização para não ter.

foi provado por Duminil-Copin, Aizenman e Sidoravicius [ADCS15], em 2015. Nos dois últimos artigos foi usada a técnica de expansão em correntes aleatórias. Essa forma de ver a transição de fase em termos da magnetização espontânea é útil quando  $h = 0$  e as interações são invariantes por traslação. No caso em que o campo não é uniforme a mesma técnica não pode ser aplicada.

Podemos ter transição de fase da magnetização em  $\mathbb{Z}^1$  se as suas interações não decaem mais rápido que  $J_{x,y} = c/||x - y||^2$  como em Thouless e Dyson [Dys69, Tho69]. O modelo de Ising com campo constante não apresenta transição de fase como o afirma a teoria de Lee e Yang [LY52].

Os resultados anteriores foram considerando  $h$  contante ou nulo, assim podemos perguntarnos mas o que aconteceria se o campo não é uniforme, ou seja,  $\mathbf{h} = (h_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ , com os  $h_x$  diferentes. Nesta linha de ideias foram realizados estudos sobre a transição de fase para campos somáveis e limitados em Bissacot e Cioletti [BC10], estabelecendo que há transição de fase para o caso campo somável e não há para o caso de campo com limite inferior positivo. Posteriormente, temos o estudo para o campo  $\mathbf{h}$  onde  $h_x = h^*/||x||^\alpha$  com  $0 < \alpha, h^*$  de Bissacot, Cassandro, Cioletti e Presutti [BCCP15], mostrando para  $\beta$  suficientemente grande,  $d \geq 2$ , que quando  $\alpha > 1$  temos transição de fase e para  $\alpha < 1$  o modelo só tem uma medida de Gibbs. O artigo anterior é valido para  $\beta$  grandes. Em Cioletti e Vila [CV16] a não transição de fase foi provada, para toda temperatura, quando  $\alpha \in [0, 1)$ .

Existem sistemas que apresentam impurezas, gerando alterações no campo magnético. Para modelar estes casos, tomamos o campo  $\mathbf{h} = (h_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$  onde cada  $h_x$  é uma variável aleatória. Este caso começou a ser estudado por Imry e Ma [IM75] em 1975. Eles previram que o modelo para  $d \geq 3$  possui transição de fase, mas para  $d \leq 2$  não tem essa propriedade. Posteriormente foi provada a transição de fase para esses modelos e a demonstração foi feita para campos i.i.d. não-degenerados. O primeiro caso provado foi  $d \geq 3$ , por Bricmont e Kupiainen [BK88], usando uma técnica muito abstrata, chamada de grupos de renormalização. Dois anos mais tarde, Aizenman e Wehr [AW89, AW90] conseguiram provar a conjectura para  $d \leq 2$ , isso é a ausência de transição de fase.

Em 2015, Chatterjee [Cha15] estudou a quebra de simetria das réplicas para o modelo de Ising com campo aleatório gaussiano para qualquer dimensão. Este fenômeno é geralmente estudado com os modelos de vidros spin (em inglês *spin glasses*), como o modelo de Sherrington e Kirkpatrick [SK75]. Uma vez obtida a solução da réplica, para o modelo, temos que garantir que tenha sentido físico a baixas temperaturas, então para isso precisamos quebrar a simetria das réplicas, mas não o podemos fazer de qualquer maneira. Parisi [PS79] desenvolveu um método para quebrar a simetria de modo que seja fisicamente aceitável e é isso o que chamamos de quebra de simetria da réplica (em inglês *Replica Symmetry Breaking*) (ver [Nis01], [CC05],[SN13], [Jes16]). Posteriormente, alguns estudos focaram na quebra de simetria da réplica para modelos da teoria quântica, como exemplo disso o modelo de Ising com campo aleatório transverso e longitudinal ( Ver Itoi [Ito18]). Uma pergunta que surge aqui é se no modelo de Ising com campo aleatório, mas desta vez com campo não-gaussiano temos a quebra de simetria da réplica. Voltaremos a falar desta questão mais adiante.

Outras propriedades interessantes do modelo de Ising com campo aleatório referem-

se ao decrescimento das correlações da função de um ponto  $\sigma_x$ . O decaimento (em probabilidade) é da seguinte forma

$$\langle \sigma_x \rangle_{S,\beta}^+ - \langle \sigma_x \rangle_{S,\beta}^- \xrightarrow{P} 0, \quad \text{quando } \beta \text{ fixado e } S \rightarrow \mathbb{Z}^2.$$

Essa propriedade foi estudada em Chatterjee [Cha18]. Nesse artigo mostra-se decaimento de correlações, logarítmico com respeito da distância de  $x$  à fronteira, para campo gaussiano e qualquer  $\beta$  (ainda no infinito), usando um método quantitativo. Posteriormente, Aizenman e Peled [AP18] mostraram o decaimento em campos gaussianos, mas sendo desta vez um decaimento potencial com respeito da distância à fronteira. Nesse mesmo ano, foi publicado o artigo de Camia, Jiang e Newman [CJN18] que também estuda o decaimento de correlações, mas usando técnicas de aglomerados aleatórios (random cluster). Em um artigo de 2019, Ding e Xia [DX19] mostraram decaimento exponencial para temperaturas positivas e campo gaussiano. Os resultados ou técnicas nem sempre continuam sendo válidos se mudamos o reticulado sobre o qual está definido o modelo de Ising, neste mesmo ano Aizenman, Harel e Peled [AHP19] obtiveram decaimento exponencial com respeito ao volume.

Um problema distinto ao anterior é estudar o decaimento de correlações do modelo de Ising com campo não-uniforme determinístico. O problema abordado aqui é o decaimento da correlação truncada<sup>3</sup>

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{S,\beta,h}^+ - \langle \sigma_x \rangle_{S,\beta,h}^+ \langle \sigma_y \rangle_{S,\beta,h}^+ \rightarrow 0, \quad \text{quando } \beta \text{ fixado e } \|x - y\| \rightarrow \infty.$$

Esse problema foi estudado por Duminil-Copin, Goswami e Raoufi em [DCGR18] mostrando decaimento exponencial para todo  $h \geq 0$  e  $d \geq 1$ , exceto no ponto crítico. O resultado principal deles é provar decaimento exponencial para  $d \geq 3$  e  $h = 0$ ,  $\beta > \beta_c$ . Com esse resultado e juntando com os já existentes na literatura, eles concluíram que o decaimento exponencial acontece em todo  $d \geq 1$  e  $\beta$ , exceto na temperatura crítica  $\beta_c$ . Entre os resultados já existentes na literatura que foram usados em [DCGR18]. Temos os seguintes:

- O decaimento da correlação truncada é provada para  $h \neq 0$  e todo  $\beta$  em Lebowitz e Penrose [LP68]. Isso aparece como uma aplicação da teoria geral que eles criam e a Teoria de Lee e Yang [LY52].
- Quando  $h = 0$ ,  $\beta < \beta_c$  e  $d \geq 1$  foi mostrado por Aizenman, Barsky e Fernández [ABF87] e com umas técnicas modernas em Duminil-Copin e Tassion [DCT16].
- No caso  $h = 0$  e  $\beta = \beta_c$  não podemos ter decaimento exponencial, veja Aizenman, Duminil-Copin e Sidoravicius [ADCS15].

Há trabalhos que estudam o decaimento de correlações em regiões longe do ponto crítico como em Dobrushin e Shlosman [DS87] e Braga, Lima e O'carroll [BLO98]. Neste último trabalho os autores fazem uma limitação por cima para as correlações truncadas, válida no campo  $h = 0$ . Na prova dessas limitações foi considerado o Hamiltoniano que tem o campo da seguinte forma  $\mathbf{h} = (h_x)$  com  $h_x \in \mathbb{C}$  e foi analisado nos casos em altas

<sup>3</sup>Aqui temos que especificar que é modelo de Ising. Isso devido a que a terminologia de correlação é muito comum para outros modelos ainda fora da Mecânica Estatística como são os sistemas dinâmicos. Também é muito importante especificar se desejamos decaimento perto do ponto crítico ou longe do ponto crítico, já que são problemas bem diferentes.

e baixas temperaturas. Tomando o primeiro caso do campo satisfazendo a condição  $\|\mathbf{h}\|_\infty \leq 1$  e para o segundo caso satisfazendo  $\|\mathbf{h}\|_1 \leq 1$ .

No estudo de decaimento de correlações truncadas com campo constante temos os novos trabalhos de Ott e Velenik [Ott18, OV19], onde usam a representação por correntes aleatórias e a teoria de Ornstein e Zernike.

O modelo de Ising pode ter campo magnético nulo  $h = 0$ , constante  $h$ , aleatório ou não-uniforme determinístico  $\mathbf{h}$ . O modelo de Ising não tem o mesmo comportamento em cada um desses casos. Nesta tese faremos o estudo de algumas propriedades dos casos anteriormente mencionados: o campo aleatório e campo não-uniforme determinístico. Para isso organizamos os capítulos da seguinte maneira.

Capítulo 1: apresentamos o modelo de Ising, na primeira seção, seguindo os textos [Bov06, Geo11, FV17, vEFS93, vD93]. Na segunda seção, mostramos as desigualdades e propriedades mais utilizadas neste modelo.

Capítulo 2: o modelo de Ising com campo aleatório (ver Bovier e Georgii [Bov06, Geo11]) tem uma aleatoriedade adicional dada pelo campo, então precisamos de uma medida de Gibbs que seja válida em média com relação ao campo. Neste capítulo, damos os resultados principais para construir essa medida de Gibbs aleatória a volume infinito.

Capítulo 3: mostramos os resultados mais importantes da teoria do Modelo de Ising com campo aleatório, como são a conjectura de Imry e Ma. Para essa seção seguimos o enfoque usado no livro de Bovier [Bov06]. Também neste capítulo, damos como exemplo a prova da transição de fase do Modelo de Ising diluído. Na seção seguinte enunciamos o resultado principal de Aizenman e Wehr [AW89, AW90]. Desse teorema podemos concluir que o modelo com campo i.i.d. não-degenerado, para  $d \leq 2$ , tem unicidade da sua medida de Gibbs. E também o resultado principal de Bricmont e Kupiainen [BK87, BK88], que implica que no modelo com campo i.i.d. não-degenerado, temos transição de fase para  $d \geq 3$ .

Nos capítulos seguintes apresentamos algumas das contribuições originais desta tese.

Capítulo 4: este capítulo, inspirado em Chatterjee [Cha15], gera o artigo Roldan e Vila [RV18], onde estudamos ausência de quebra da simetria da réplica numa classe de campos não-gaussianos. Na primeira seção deste capítulo apresentamos como surgiu a quebra da simetria da réplica. Na seção seguinte apresentamos as condições impostas aos campos com os que trabalhamos, posteriormente mostramos vários lemas que fazem uso de uma *integração por partes não-gaussiana*, com isto mostramos as *igualdades de Guirlanda e Guerra* [GG98, AC98]. Prosseguindo provamos a ausência de quebra de simetria para o modelo de Ising com uma classe de campos gaussianos não-aleatórios.

Capítulo 5: neste capítulo estudamos o decaimento das correlações que são da forma  $\langle \sigma_x \rangle_{S,\beta}^+ - \langle \sigma_x \rangle_{S,\beta}^-$ , em probabilidade, com  $S$  conjunto finito de vértices do grafo rede hexagonal. Conseguimos mostrar, neste grafo e com campo não-gaussiano, que as correlações têm decaimento logarítmico iterado  $\frac{1}{\ln \ln n}$ , para todo  $\beta$ , com  $n$  dependendo da distância de  $x$  à fronteira de  $S$ . Este capítulo é inspirado em Chatterjee [Cha18] onde Chatterjee consegue mostrar o decaimento para o grafo  $\mathbb{Z}^2$ . Então a contribuição nesta parte é mostrar que o método quantitativo criado por Chatterjee pode ser adaptado à rede hexagonal e com campo diferente do gaussiano, obtendo decaimento logarítmico

iterado também neste caso.

Capítulo 6: consideramos o modelo de Ising com campo não uniforme determinístico e usamos a expansão em polímeros a baixas temperaturas para obter o decaimento da correlação truncada  $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{S,\beta,\mathbf{h}}^+ - \langle \sigma_x \rangle_{S,\beta,\mathbf{h}}^+ \langle \sigma_y \rangle_{S,\beta,\mathbf{h}}^+$ . O decaimento da correlação truncada é válido para campos limitados e temperaturas  $\beta$  suficientemente grande. Para obter esse resultado usamos procedimentos baseados nos que usa Friedli, Velenik e Ueltschi [FV17, Uel04] para obter decaimentos de correlações com campo nulo. Neste capítulo também apresentamos a teoria das expansões a baixas e altas temperaturas.



# Capítulo 1

## Apresentação do modelo de Ising

### 1.1 Volume finito

Consideremos um conjunto infinito enumerável  $W$  que, em geral será o conjunto de vértices de um determinado grafo como  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 1$ . Poderia ser também o conjunto de vértices do grafo árvore infinito, do grafo hexagonal (“*Honeycomb*”) ou de qualquer outro grafo infinito conexo.



**Figura 1.1:**  $W$  seria os vértices destes grafos

Para o caso do Modelo de Ising geralmente considera-se o reticulado  $\mathbb{Z}^d$ , que nos ajuda a supor a estrutura dos átomos num cristal regular, onde cada átomo é identificado com um vértice. Como este modelo surge da física muitas das terminologias também vem dessa área do conhecimento por isso o conjunto  $W$  ou os seus subconjuntos serão chamados de **volume**. Um elemento  $x \in W$  será denominado na terminologia do modelo como um **sítio, átomo ou partícula**.

**Definição 1.1.1.** Uma família de variáveis aleatórias  $(\sigma_x)_{x \in W}$  definidas num espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{E}, \rho)$  e assumindo valores num espaço mensurável  $(E_0, \mathcal{E}_0)$  será chamada de um **sistema de spins**. Cada  $\sigma_x$  será conhecido por **spin**. O conjunto  $W$  será chamado **espaço de parâmetros ou rede** e  $(E_0, \mathcal{E}_0)$  será o **espaço de estados**.

Tomemos  $\Omega = E_0^W := \{\omega = (\omega_x)_{x \in W} : \omega_x \in E_0\}$ , o **espaço de configurações** e  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0^W$  a sigma-álgebra produto em  $\Omega$ , e o spin neste caso

$$\begin{aligned}\sigma_x : \Omega &\rightarrow E_0 \\ \omega &\rightarrow \omega_x.\end{aligned}$$

fornece o valor da projeção da configuração  $\omega$  no sítio  $x$ .

Definimos para cada  $\Lambda \subset W$

$$\begin{aligned} \sigma_\Lambda : \Omega &\rightarrow E_0^\Lambda \\ \omega &\rightarrow \omega_\Lambda = (\omega_x)_{x \in \Lambda}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

a projeção sobre as coordenadas em  $\Lambda$ . Note que se  $\Delta \subset \Lambda \subset W$ , então temos  $\sigma_\Delta \sigma_\Lambda(\omega) = \sigma_\Delta(\omega)$ . Dados  $\zeta \in E_0^\Delta$  e  $\eta \in E_0^{\Lambda \setminus \Delta}$  então definimos a justaposição  $\zeta\eta \in E_0^\Lambda$  de forma que  $\sigma_\Delta(\zeta\eta) = \zeta_\Delta$  e  $\sigma_{\Lambda \setminus \Delta}(\zeta\eta) = \eta_{\Lambda \setminus \Delta}$ .

Como a mesma variável aleatória pode ser definida em distintos espaços de probabilidade<sup>1</sup>. Definimos  $\sigma_x$  no espaço  $(E_0^{\{x\}}, \mathcal{E}_0^{\{x\}}, \rho_0)$  e tomando valores em  $(E_0, \mathcal{E}_0)$ . O espaço de partida é chamado **espaço de um só spin** [Geo11, pág. 12]. A medida  $\rho_0$  é a **medida a priori** e é de probabilidade ( $\int \rho_0(d\sigma_x) = 1$ ). Estendemos o espaço para o volume  $\Lambda$  ou seja  $(\Omega_\Lambda, \mathcal{E}_\Lambda, \rho_\Lambda)$  onde  $\Omega_\Lambda := E_0^\Lambda$ , a sigma-álgebra produto  $\mathcal{E}_\Lambda = \mathcal{E}_0^\Lambda$  em  $\Omega_\Lambda$  e  $\rho_\Lambda := \prod_{x \in \Lambda} \rho_0$ , logo

$$\rho_\Lambda(d\sigma_\Lambda) := \prod_{x \in \Lambda} \rho_0(d\sigma_x).$$

Nesta medida, todos nossos spins estão não interagindo e portanto não é muito interessante (ver [vD93, pág. 7]).

### Observação 1.1.1.

- Em Georgii [Geo11, pág. 12] fala que o espaço de um só spin é  $(E_0, \mathcal{E}_0, \rho_0)$ , isso é porque podem ser identificadas com  $(E_0^{\{x\}}, \mathcal{E}_0^{\{x\}}, \rho_0)$ .
- Em Teoria da Medida acostuma-se denotar a parte a ser integrada desta forma  $d\mu(x)$ , em Mecânica Estatística acostuma-se usar  $\mu(dx)$ .
- A medida a priori  $\rho_0$  é uma medida que conhecemos previamente, com a definição do modelo. A usamos para construir as outras medidas.

Então, para tornar as coisas mais interessantes, vamos definir um espaço  $(\Omega_\Lambda, \mathcal{E}_\Lambda, \mu_\Lambda)$  onde os  $\sigma_x$ 's tenham interação. Tomando  $\Lambda$  a **volume finito**, ou seja, cardinalidade finita e definindo a medida como

$$\mu_\Lambda(d\sigma_\Lambda) := g(\sigma_\Lambda) \prod_{x \in \Lambda} \rho_0(\sigma_x) = g(\sigma_\Lambda) \rho_\Lambda(d\sigma_\Lambda),$$

e  $g(\sigma_\Lambda)$  é tal que  $\mu_\Lambda$  seja medida de probabilidade. Em especial tomemos  $g(\sigma_\Lambda) = \exp(-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda)) Z_{\Lambda, \beta}^{-1}$ , a variável  $Z$  faz a  $\mu_\Lambda$  ser medida de probabilidade. Neste caso a seguinte medida é chamada como a **medida de Gibbs a volume finito**.

$$\mu_{\Lambda, \beta}(d\sigma_\Lambda) := \frac{e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda)} \rho_\Lambda(d\sigma_\Lambda)}{Z_{\Lambda, \beta}}. \quad (1.2)$$

A função

$$H_\Lambda(\sigma_\Lambda) = - \sum_{xy \in E(\Lambda)} \sigma_x \sigma_y - h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x, \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup>De fato, durante o desenvolvimento da teoria veremos a  $\sigma_x$  em diferentes espaços de probabilidade até construir a medida a volume infinito que satisfaz todas as condições que precisaremos. Essa medida é a de Gibbs.

é denominada na literatura física como a **energia ou o hamiltoniano do sistema**, a notação  $xy \in E(\Lambda)$  significa que a aresta  $\{x, y\}$  está no conjunto de arestas  $E(\Lambda)$ , a variável  $\beta \in (0, +\infty)$  e  $h \in \mathbb{R}$  são denominados de **temperatura inversa** e **campo magnético externo** respetivamente.

**Observação 1.1.2.** *Em (1.3) em abuso da notação estamos denotando nossa configuração em  $\Omega_\Lambda$  por  $\sigma_\Lambda$  embora está já tenha sido usada para denotar uma projeção em (1.1). Isto é para simplificar a notação já que se fosse, por exemplo, a variável  $\omega \in \Omega_\Lambda$  denotaríamos o hamiltoniano como*

$$H_\Lambda(\omega) := - \sum_{xy \in E(\Lambda)} \sigma_x(\omega)\sigma_y(\omega) - h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x(\omega).$$

*Em Friedli e Velenik [FV17] usa-se ao início esta notação, mas termina simplificando-a nos seguintes capítulos.*

A **função de partição** é definida como

$$Z_{\Lambda, \beta} := \int_{\Omega_\Lambda} e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda)} \rho_\Lambda(d\sigma_\Lambda).$$

**Observação 1.1.3.** *Estamos procurando uma medida de Gibbs a volume infinito em  $\Omega$ . Então nossa medida de Gibbs a volume finito (1.2) não poderia ser pensada como a distribuição marginal da medida a volume infinito, já que não satisfaria as condições de compatibilidade de Kolmogorov (ver [Bov06, pág. 51])*

Também dado a medida podemos definir o conceito de **esperança com respeito à medida de Gibbs a volume finito** da seguinte forma: Dada um a função  $f : \Omega_\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  sua esperança fica definida por

$$\langle f \rangle_{\Lambda, \beta} := \int_{\Omega_\Lambda} f(\sigma_\Lambda) \mu_{\Lambda, \beta}(d\sigma_\Lambda) \quad (1.4)$$

Até agora não falamos de algo que está muito presente na literatura do modelo de Ising que é a condição de fronteira.

Para isso tomamos um elemento fixado  $\eta \in \Omega$  como **condição de fronteira** das configurações pertencentes ao seguinte conjunto

$$\Omega_\Lambda^\eta := \{\omega \in \Omega : \omega_i = \eta_i, \forall i \in \Lambda^c\}. \quad (1.5)$$

Também como podemos ver a condição de fronteira como em [Cha15] que é  $\eta \in E_0^{\partial\Lambda}$ , onde  $\partial\Lambda$  é a fronteira exterior de  $\Lambda$ .

**Observação 1.1.4.** *Aqui poderíamos dizer que há duas condições de fronteira especiais que são quando  $\eta \equiv +1$  e  $\eta \equiv -1$ . Isso porque suas medidas de Gibbs a volume infinito geralmente são pontos de acumulação de outras medidas de Gibbs.*

**Observação 1.1.5.** Podemos escrever o hamiltoniano (1.3), a medida de Gibbs a volume finito (1.2) e a esperança (1.4) com condição de fronteira:

$$H_\Lambda(\sigma_\Lambda \eta_{\Lambda^c}) := - \sum_{xy \in E(\Lambda)} \sigma_x \sigma_y - h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x - \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \in \Lambda^c \\ \|x-y\|=1}} \sigma_x \eta_y \quad (1.6)$$

$$\mu_{\Lambda, \beta}^\eta(d\sigma_\Lambda) := \frac{e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda \eta_{\Lambda^c})} \rho_\Lambda(d\sigma_\Lambda)}{Z_{\Lambda, \beta}^\eta}, \quad (1.7)$$

$$\langle f \rangle_{\Lambda, \beta}^\eta := \int_{\Omega_\Lambda^\eta} f(\sigma_\Lambda) \mu_{\Lambda, \beta}^\eta(d\sigma_\Lambda). \quad (1.8)$$

A notação  $\sigma_\Lambda \eta_{\Lambda^c}$  significa que se  $x \in \Lambda$  tomamos os valores dados pela configuração  $\sigma$  e se  $x \in \Lambda^c$  tomamos o valor de  $\eta$  nesse vértice.

No caso simplesmente de (1.3), (1.4) dizemos que estamos trabalhando a **condições de fronteira livre** e denotamos por  $\mu_{\Lambda, \beta}^0 = \mu_{\Lambda, \beta}$ ,  $\langle f \rangle_{\Lambda, \beta}^0 = \langle f \rangle_{\Lambda, \beta}$ , onde 0 denota uma configuração que assume em cada coordenada o valor nulo.

**Observação 1.1.6.** Na maioria dos artigos vamos encontrar hamiltonianos mais gerais, que os acabamos de enunciar (ver [BCCP15],[CV16],[DCT16]). Por exemplo considerando a condição de fronteira  $\eta \in \Omega$ .

$$H_\Lambda(\sigma_\Lambda) := - \sum_{xy \in E(\Lambda)} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in \Lambda} h_x \sigma_x - \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \in \Lambda^c \\ \|x-y\|=1}} \sigma_x \eta_y \quad (1.9)$$

Neste caso  $\mathbf{J} = (J_{x,y})_{x,y \in W}$  são as chamadas **contantes de acoplamento** ou também chamadas de **interações** e dizemos que temos um **modelo de Ising ferromagnético** se cada  $J_{y,x} = J_{x,y} \geq 0$  de  $\mathbf{J}$ . Dizemos que nosso modelo é a **primeiros vizinhos** se cada  $J_{x,y} = J \mathbf{1}_{\{\|x-y\|=1\}}$ . Como em [ABF87, DCT16, Med17], pode-se colocar mais condições nas constantes de acoplamento para justificar que o modelo faça sentido ou para ter propriedades desejadas.

Também temos o **campo magnético não uniforme** dado por  $\mathbf{h} = (h_x)_{x \in W}$ . Também podemos estender o modelo colocando aleatoriedades ao grafo relacionado a  $W$ , no campo aleatório ou nas constantes de acoplamento.

Daqui em diante vamos usar a medida a priori sendo a de contagem já que geralmente é com esta medida que achamos expressado (1.4) que é a medida que caracteriza o modelo de Ising.

**Exemplo 1.1.1.** Tomamos o hamiltoniano como em (1.3) que está em condições de fronteira livre. Considere a seguinte medida a priori  $\rho_0 = \frac{1}{2}\delta_+ + \frac{1}{2}\delta_-$ , onde  $\delta_x$  é a medida delta de Dirac suportada no ponto  $x$  ( $\delta_\pm := \delta_{\pm 1}$ ). Se  $\mu_\Lambda$  denota a medida do modelo de Ising com condições de fronteira livre, vamos mostrar que para todo  $A \subset \Omega_\Lambda$  é válida a seguinte identidade:

$$\mu_{\Lambda, \beta}(A) = \left[ \int_{\Omega_\Lambda} \mathbf{1}_A(\sigma) e^{-\beta H_\Lambda(\sigma)} \rho_\Lambda(d\sigma) \right] Z_{\Lambda, \beta}^{-1}. \quad (1.10)$$

Primeiro observe que  $\rho_0(\{\sigma_x = 1\}) = \rho_0(\{\sigma_x = -1\}) = \frac{1}{2}$ , para todo  $x \in \Lambda$ . Logo temos que a medida  $\rho_\Lambda$  comporta-se como uma medida de contagem

$$\rho_\Lambda(d\sigma) = \prod_{x \in \Lambda} \rho_0(d\sigma_x) = \frac{1}{2^{|\Lambda|}} \vartheta(d\omega),$$

onde  $\vartheta$  é a medida de contagem em  $\Omega_\Lambda$ . Desta forma podemos reescrever o lado direito de (1.10) como segue

$$\frac{\int_{\Omega_\Lambda} \mathbf{1}_A(\sigma) e^{-\beta H_\Lambda} \frac{1}{2^{|\Lambda|}} \vartheta(d\sigma)}{\int_{\Omega_\Lambda} e^{-\beta H_\Lambda} \frac{1}{2^{|\Lambda|}} \vartheta(d\sigma)} = \frac{\sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} \mathbf{1}_A(\sigma) e^{-\beta H_\Lambda(\sigma)}}{\sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta H_\Lambda(\sigma)}}. \quad (1.11)$$

Tomando  $A = \{\sigma\}$  temos

$$\mu_\Lambda(\{\sigma\}) = \frac{e^{-\beta H_\Lambda(\sigma)}}{Z_{\Lambda, \beta}}.$$

Note que nossa nova função de partição será  $Z_{\Lambda, \beta} = \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta H_\Lambda(\sigma)}$ .

O modelo de Ising surgiu para estudar o fenômeno da transição da fase, ou seja, onde o sistema possui magnetização e onde não a tem. Para isso damos as seguintes definições (todas a volume finito). A **magnetização**, que definimos como sendo  $M := \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x$ , a **densidade de magnetização** dada por  $m := [\sum_{x \in \Lambda} \sigma_x] |\Lambda|^{-1}$ , a **media da densidade da magnetização** como

$$m_\Lambda^\eta(\beta, h) := \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda} \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\eta,$$

e a **susceptibilidade magnética**

$$\chi_\Lambda^\eta(\beta, h) := \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial h} m_\Lambda^\eta(\beta, h).$$

Colocamos a dependência de  $\chi_\Lambda^\eta$  e  $m_\Lambda^\eta$  em  $h$  já que  $H_\Lambda$  pela sua definição tem a dependência. Também temos a **energia livre** a volume finito

$$f_{\Lambda, \beta, h}^\eta := \frac{1}{\beta |\Lambda|} \ln Z_{\Lambda, \beta, h}. \quad (1.12)$$

**Observação 1.1.7.** A primeira derivada e segunda derivada de  $f_{\Lambda, \beta, h}^\eta$  com respeito ao campo magnético externo,  $h$ , são  $m_\Lambda^\eta$  e  $\chi_\Lambda^\eta$  respectivamente.

Podemos achar as medidas de Gibbs a **volume infinito** ( $\Lambda \rightarrow W$ ) através do uso do seguinte procedimento chamado de **limite termodinâmico**, seja a sequência de subconjuntos  $\Lambda_n$  de  $W$  tal que os  $\Lambda_n$  são:

- crescentes, ou seja,  $\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,
- preencham todo o  $W$ , isto é,  $\cup_{n \geq 1} \Lambda_n = W$ ,

- possuem **convergência no sentido de Van Hove**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial^{in} \Lambda_n|}{|\Lambda_n|} = 0,$$

onde  $\partial^{in} \Lambda_n := \{x \in \Lambda_n : \{x, y\} \in E(\Lambda_n), y \in \Lambda_n^c\}$ .

Se  $\Lambda_n$  são caixas de  $n \times n$  pontos em  $\mathbb{Z}^d$  então satisfaz a terceira condição. A seguir um exemplo onde a condição não é satisfeita.

**Exemplo 1.1.2.** *Seja o grafo um árvore  $d$ -regular, nesse caso não temos convergência no sentido de Van Hove já que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial^{in} \Lambda_n|}{|\Lambda_n|} = 1.$$

Quando temos as sequências de volumes (embora não sejam caixas  $n \times n$  pontos em  $\mathbb{Z}^d$ ) satisfazendo as três condições do limite termodinâmico enunciadas acima podemos ter a convergência da energia livre sem importar-nos qual condição de fronteira tomamos (ver Braga [BA99]).

**Observação 1.1.8.** *Uma definição parecida à condição de Van Hove é a de **grafo amenable** que são os grafos  $G = (V, E)$  tal que*

$$\inf_{\substack{K \subset V \\ |K| < \infty}} \frac{|\partial^{ex} K|}{|K|} = 0,$$

onde a fronteira  $\partial^{ex} K$  são todos os vértices de  $V \setminus K$  que tem um vizinho em  $K$ . Das duas definições temos que se um grafo é amenable então satisfaz a condição de Van Hove. Os exemplos mais comuns de grafos não amensáveis são os arvores  $d$ -regulares.

Podemos tomar o limite termodinâmico em (1.4). Sejam as sequências  $(\Lambda_n)$ , sendo as sequências crescentes e que preenchem o  $\mathbb{Z}^d$  e que satisfazem a convergência no sentido de Van Hove e as sequências de condições de fronteira  $(\eta_n)$ , então dizemos que as medidas de Gibbs a volume finito **convergem via o limite termodinâmico** à medida a volume infinito, se e só se,

$$\int_{\Omega} f(\sigma) \mu_{\beta}(d\sigma) = \langle f \rangle_{\beta} := \lim_{\Lambda_n \rightarrow W} \int_{\Omega} f(\sigma_{\Lambda_n}) \mu_{\Lambda_n, \beta}^{\eta_n}(d\sigma_{\Lambda_n}) = \lim_{\Lambda_n \rightarrow W} \langle f \rangle_{\Lambda_n, \beta}^{\eta_n},$$

para toda  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  **função local**, que é uma função determinada por valores locais ou seja se  $\omega$  e  $\omega'$  são duas configurações que só coincidem num conjunto  $\Delta \subset W$ , quando esse conjunto existe, então  $f(\omega_x) = f(\omega'_x)$  se  $x \in \Delta$ .

No Capítulo 2 voltaremos à medida a volume infinito. Observe agora que, com o limite termodinâmico, temos uma medida a volume infinito, mas não sabemos as propriedades desta, não sabemos se satisfazem as condições de compatibilidade do Teorema de Kolmogorov, que propriedades têm suas distribuições condicionais, suas distribuições marginais etc. No capítulo 2 aclararemos essas dúvidas.

## 1.2 Desigualdades e propriedades importantes no modelo de Ising

Imaginemos que precisamos dar uma cota superior para uma expressão, digamos, a esperança de dois spins. A limitação óbvia seria 1, pois,  $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta} \leq 1$ . Mas, dependendo dos parâmetros  $\beta$ ,  $h$  etc gostaríamos de obter uma cota menor que 1. Então, se pensamos em expressar na forma desenvolvida (1.4) e com  $f(\sigma) = \sigma_x \sigma_y$ , que dependendo da configuração pode ser  $-1$  ou  $1$ , então não podemos fazer uma simples limitação de  $f$  porque ficaríamos no caso anterior, onde a esperança é limitada por 1. Portanto, temos que ter outras desigualdades para poder trabalhar.

No que segue, apresentaremos as desigualdades que são muito importantes na literatura e que se não as conhecemos, pouco ou nada podemos fazer no modelo de Ising e em outros modelos da Mecânica Estatística. Essas desigualdades são as desigualdades *GKS* chamadas assim por Griffiths, Kelly e Sherman. Foi Griffiths quem primeiro desenvolveu a teoria nestes três primeiros artigos [Gri67a],[Gri67b], [Gri67c] de 1967 e um ano depois foi generalizado por Kelly e Sherman em [KS68].

Vamos denotar o produto  $\sigma_A := \prod_{x \in A} \sigma_x$  (embora seja um abuso da notação, desta vez  $\sigma_A$  denota o produto de spins e não uma projeção de uma configuração num subconjunto) onde  $A \subset W$  finito. Nos resultados seguintes trabalhamos com o modelo de Ising com a medida a priori dada por  $\rho_0 = \frac{1}{2}(\delta_+ + \delta_-)$ , onde  $\delta$  é a medida delta de Dirac.

Às desigualdades que envolvem esperanças, com respeito à medida de Gibbs de alguma função local  $f$ , as chamaremos de **desigualdades de correlação de  $f$** . Como exemplo, uma desigualdade envolvendo  $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta}$ , será chamada de: desigualdade de correlação de dois pontos.

**Teorema 1.2.1. (Desigualdade GKS)** *Para o modelo de Ising em  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 1$ , com hamiltoniano*

$$H_\Lambda(\sigma) = - \sum_{xy \in E(\Lambda)} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in \Lambda} h_x \sigma_x - \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \in \Lambda^c \\ \|x-y\|=1}} \sigma_x \eta_y,$$

com  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$  finito,  $\beta > 0$ ,  $\mathbf{h} = (h_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$  onde cada  $h_x \geq 0$  e  $\mathbf{J} = (J_{x,y})_{x,y \in \mathbb{Z}^d}$  com  $J_{x,y} \geq 0$ , regular y a primeiros vizinhos, com condições de fronteira  $\eta$  sendo  $+$  ou  $0$  e  $A, B \subset \Lambda$ . Temos

$$\text{GKS-I} \quad \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{J}, \mathbf{h}}^\eta \geq 0, \quad (1.13)$$

$$\text{GKS-II} \quad \langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{J}, \mathbf{h}}^\eta \geq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{J}, \mathbf{h}}^\eta \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{J}, \mathbf{h}}^\eta. \quad (1.14)$$

As provas para campos constantes ou nulos podem ser encontradas em Braga e Rolandan [BA99, BA00, Rol14]. Esta última encontra-se no apêndice nas seções A.1 e A.2. Também o podemos encontrá-las em [Med17].

**Exemplo 1.2.1.** *Tomemos  $\mathbf{h}$  constante ou nulo temos logo:*

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^0, \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+, \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+, \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^0 \geq 0.$$

Mas, se mudamos as condições de fronteira por exemplo com  $-$ , ou outras já não podemos ter certeza que essas esperanças anteriores sejam positivas.

Do teorema anterior seguem vários resultados, como por exemplo

**Corolário 1.2.1.** *Com as mesmas condições do Teorema 1.2.1 segue que a correlação  $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta$*

- *é não decrescente e côncava com respeito a uma componente  $h_x$  do campo  $\mathbf{h}$ .*
- *é não decrescente em cada entrada  $J_{x,y}$  de  $\mathbf{J}$ .*

Podemos mostrar que a correlação é não decrescente com respeito ao campo  $h_x$  ou à constante de acoplamento  $J_{x,y}$ . Mostramos isso derivando a correlação com respeito a essas variáveis e logo usando *GKS – II*. A prova da afirmação anterior esta em Medeiros e Braga [Med17], [BA00] e como um exercício em Friedli e Velenik [FV17]. Com respeito à prova da concavidade. Precisamos derivar duas vezes em relação ao campo e logo usamos uma desigualdade que se chama *GHS*.

**Teorema 1.2.2. (Desigualdade GHS)** *Com as condições do Teorema 1.2.1, e campo  $\mathbf{h}$  campo constante ou nulo, temos*

$$\begin{aligned} & \langle \sigma_x \sigma_y \sigma_z \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta - \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta \langle \sigma_z \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta - \langle \sigma_x \sigma_z \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta \langle \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta \\ & - \langle \sigma_y \sigma_z \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta + 2 \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta \langle \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta \langle \sigma_z \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta \leq 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Este resultado surgiu em 1970 no artigo do Griffiths, Hurst e Sherman em [GHS70], cuja prova utiliza uma espécie de proto-correntes aleatórias. Podemos encontrar uma prova alternativa usando a técnica de correntes aleatórias em Medeiros [Med17].

Vamos dotar  $\Omega$  de uma **ordem parcial**. Dizemos que  $\omega \leq \omega'$  se para todo  $x$  temos  $\omega_x \leq \omega'_x$ . Desta forma, uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **não decrescente** se e só se  $\omega \leq \omega'$  então  $f(\omega) \leq f(\omega')$ . Também podemos dizer se um **evento**  $E \subset \Omega$  é **não decrescente** se e só se a função  $f = \mathbb{1}_E$  é não decrescente.

Notemos que: a função  $f(\omega) = \sigma_x(\omega) \sigma_y(\omega) = \omega_x \omega_y$ , onde  $\omega$  é a configuração e  $\sigma$  é o spin, a podemos escrever de forma resumida assim  $f = \sigma_x \sigma_y$ . Esta ultima função não é crescente nem decrescente, mas tem muita importância na literatura.

**Corolário 1.2.2.** *Dados  $\Lambda, \Delta$  subconjuntos finitos em  $\mathbb{Z}^d$ , com  $A \subset \Lambda \subset \Delta$ ,  $\mathbf{J}$  a primeiros vizinhos, regular e o campo  $\mathbf{h}$  com cada componente maior ou igual a zero. Então*

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+ \leq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+ . \quad (1.16)$$

**Demonstração.** Seja  $\Lambda_1 = \Lambda \cup \{z\}$ ,  $z \notin \Lambda$ . Somamos  $r > 0$  à componente do campo  $\mathbf{h}$  no ponto  $z$ , ou seja,  $h_z + r$  e com isto temos um novo campo que denotaremos por  $\mathbf{h}_1$ . Logo pelas propriedades de monotonicidade respeito ao campo, segue que:

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_1, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+ \leq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_1, \beta, \mathbf{h}_1, \mathbf{J}}^+ \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_1, \beta, \mathbf{h}_1, \mathbf{J}}^+ . \quad (1.17)$$

Abrindo a segunda esperança temos

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_1, \beta, \mathbf{h}_1, \mathbf{J}}^+ = \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda_1}^+} \sigma_A e^{-\beta H_{\Lambda_1, \beta, \mathbf{h}_1, \mathbf{J}}^+} \left[ Z_{\Lambda_1, \beta, \mathbf{h}_1, \mathbf{J}}^+ \right]^{-1}.$$

Para continuar, note que  $H_{\Lambda_1, \beta, \mathbf{h}_1, \mathbf{J}}^+ = H_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+ - \sigma_z(h_z + r)$ , e com isso

$$\begin{aligned} \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_1, \beta, \mathbf{h}_1, \mathbf{J}}^+ &= \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda_1}^+} \sigma_A e^{-\beta H_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+} e^{\beta \sigma_z(h_z + r)} \left[ Z_{\Lambda_1, \beta, \mathbf{h}_1, \mathbf{J}}^+ \right]^{-1} \\ &= \sum_{\sigma = \pm 1} e^{\beta \sigma_z(h_z + r)} \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^+} \sigma_A e^{-\beta H_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+} \left[ \sum_{\sigma = \pm 1} e^{\beta \sigma_z(h_z + r)} \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^+} \sigma_A e^{-\beta H_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+} \right]^{-1} \\ &\stackrel{r \rightarrow +\infty}{\leq} \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^+} \sigma_A e^{-\beta H_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+} \left[ \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}^+} \sigma_A e^{-\beta H_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+} \right]^{-1} \\ &= \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+. \end{aligned}$$

Portanto, voltando a (1.17) segue  $\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_1, \beta, \mathbf{h}_1, \mathbf{J}}^+ \leq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+$ . Procedendo iterativamente desta forma concluimos (1.16).  $\square$

Também das desigualdades *FKG – II* temos outro corolário:

**Corolário 1.2.3.** *Dados  $\Lambda, \Delta$  subconjuntos finitos em  $\mathbb{Z}^d$ , com  $\Lambda \subset \Delta$ ,  $\mathbf{J}$  a primeiros vizinhos, regular e o campo  $\mathbf{h}$  com cada componente maior ou igual a zero. Então, para  $A \subset \Lambda$  temos*

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^0 \leq \langle \sigma_A \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^0. \quad (1.18)$$

Para mostrar este corolário, usamos a monotonicidade nas constantes de acoplamento. Definimos uma nova matriz  $\mathbf{J}^1 = (J_{x,y}^1)_{x,y \in \mathbb{Z}^d}$  onde  $J_{x,y}^1 = 0$  se um dos dois  $x$  ou  $y$  está em  $\Lambda$  e o outro está em  $\Delta \setminus \Lambda$ , para as outras arestas deixamos  $J_{x,y}^1 = J_{x,y}$ . Ao abrir a esperança  $\langle \sigma_A \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}^1}^0$ , a constante de acoplamento  $\mathbf{J}^1$  nos permite separar o somatório com respeito aos conjuntos  $\Lambda$  e  $\Delta \setminus \Lambda$  e isto nos dá a seguinte igualdade  $\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^0 = \langle \sigma_A \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}^1}^0$ . Como  $J_{x,y}^1 \leq J_{x,y}$  para todo  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  o resultado do corolário segue da monotonicidade nas interações.

Outra propriedade importante que satisfazem as esperanças de Gibbs a volume finito é a propriedade de Markov espacial.

**Proposição 1.2.1. (Propriedade de Markov espacial)** *Sejam  $\Lambda, \Delta$  subconjuntos finitos em  $\mathbb{Z}^d$ , com  $\Lambda \subset \Delta$ ,  $\mathbf{J}$  a primeiros vizinhos, regular e o campo  $\mathbf{h}$ , a condição de fronteira  $\eta \in \Omega$  e  $\zeta \in \Omega_{\Delta}^{\eta}$ . Então*

$$\langle \cdot | \sigma_x = \zeta_x, \forall x \in \Delta \setminus \Lambda \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^{\eta} = \langle \cdot \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^{\zeta}. \quad (1.19)$$

**Demonstração.** Chamemos o seguinte conjunto de  $B := \{\sigma_x = \zeta_x, \forall x \in \Delta \setminus \Lambda\}$ . Logo, para  $f : \Omega_{\Delta}^{\eta} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\langle f | B \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^{\eta} = \langle f \mathbf{1}_B \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^{\eta} \left[ \langle \mathbf{1}_B \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^{\eta} \right]^{-1} \quad (1.20)$$

Aqui notamos que o hamiltoniano

$$\begin{aligned} H_{\Delta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta(\sigma) &= - \sum_{xy \in E(\Delta)} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in \Delta} h_x \sigma_x - \sum_{\substack{x \in \Delta, y \in \Delta^c \\ \|x-y\|=1}} \sigma_x \eta_y \\ &= H_{\Lambda, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\zeta(\sigma) - \sum_{xy \in E(\Delta \setminus \Lambda)} J_{x,y} \zeta_x \zeta_y - \sum_{x \in \Delta \setminus \Lambda} h_x \zeta_x - \sum_{\substack{x \in \Delta, y \in \Delta^c \\ \|x-y\|=1}} \zeta_x \eta_y. \end{aligned}$$

Ao abrir as esperanças de (1.20) notamos que há parcelas do hamiltoniano que não dependem de  $\sigma$ . Então podem sair do somatório tanto no denominador como no numerador e logo a divisão dessas parcelas seria um. Com isso ficamos

$$\langle f | B \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta = \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\zeta. \quad (1.21)$$

□

A seguir, apresentamos uma das desigualdades mais importantes não só para o modelo de Ising como também para muitos outros modelos tais como o modelo de Potts, aglomerados aleatórios, etc. Esta desigualdade é conhecida como a **Desigualdade de FKG** em homenagem a Fortuin, Kastelym e Ginebre, veja [FKG71]. A prova desta desigualdade pode ser encontrada em detalhes na referência [dHK86].

**Teorema 1.2.3. (Desigualdade FKG)** *Para  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 1$  finito,  $\beta > 0$ ,  $\mathbf{h} = (h_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ ,  $\mathbf{J} = (J_{x,y})_{x,y \in \mathbb{Z}^d}$  com  $J_{x,y} \geq 0$ , regular e a primeiros vizinhos, com condições de fronteira  $\eta \in \Omega$  e  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  funções não decrescentes. Então temos que*

$$\langle f g \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta \geq \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta \langle g \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta. \quad (1.22)$$

A prova deste teorema podemos encontrar em [Bov06, pág. 68] para campos não uniformes.

**Exemplo 1.2.2.** *Como a função  $\sigma_x$  é uma função não decrescente, podemos usar a desigualdade FKG e afirmar que*

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \geq \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \langle \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^-.$$

Esta desigualdade tem importantes consequências como

**Corolário 1.2.4.** *Dados  $\Lambda, \Delta$  subconjuntos finitos em  $\mathbb{Z}^d$ , com  $\Lambda \subset \Delta$ ,  $\mathbf{J}$  e o campo  $\mathbf{h}$ , e  $f : \Omega_\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  uma função não decrescente.*

$$\langle f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+ \geq \langle f \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+ \quad e \quad \langle f \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \geq \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^-. \quad (1.23)$$

**Demonstração.** Para mostrar esta propriedade vamos usar a propriedade de Markov espacial em seguida FKG. Então sendo  $B := \{\sigma_x = -1, \forall x \in \Delta \setminus \Lambda\}$  um evento não crescente, temos

$$\begin{aligned} \langle -f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- &= \langle (-f) \mathbf{1}_B \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \left[ \langle \mathbf{1}_B \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \right]^{-1} \\ &\geq \langle -f \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \langle \mathbf{1}_B \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \left[ \langle \mathbf{1}_B \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \right]^{-1} \\ &= \langle -f \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^-. \end{aligned}$$

Assim,  $\langle f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \leq \langle f \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^-$  e de forma similar para o caso com condição de fronteira +.  $\square$

Como  $\sigma_x$  é uma função crescente, podemos usar o corolário anterior para obter:

**Exemplo 1.2.3.** *Com as condições do corolário anterior,*

$$\langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+ \geq \langle \sigma_x \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+ \quad e \quad \langle \sigma_x \rangle_{\Delta, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \geq \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- . \quad (1.24)$$

Esta desigualdade nos dá muitas outras propriedades como a seguinte:

**Corolário 1.2.5.** *Sejam  $\Lambda$  um subconjunto finito em  $\mathbb{Z}^d$ , uma interação  $\mathbf{J}$  e um campo  $\mathbf{h}$ , e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função não decrescente. Então*

$$\langle f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^- \leq \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^\eta \leq \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^+ . \quad (1.25)$$

A prova deste corolário pode ser encontrada em Bovier [Bov06, pág. 69] ou em [FV17, pág. 100].

Agora pensemos nas grandezas tipo energia livre ou a média da densidade da magnetização a volume infinito. Podemos pensar em tomar o limite termodinâmico. Pode ser que o limite não exista, para sair dessa situação, temos os seguintes teoremas:

**Teorema 1.2.4.** *A energia livre a volume infinito*

$$f_{\beta, \mathbf{h}} := \lim_{\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{\beta |\Lambda_n|} \ln Z_{\Lambda_n, \beta, \mathbf{h}} , \quad (1.26)$$

*existe e está bem definida, isto é, não depende da sequência de regiões finitas nem da condição de fronteira escolhidas.*

A prova deste teorema pode ser encontrada em Braga [BA99, pág 20] e Medeiros [Med17, pág 84].

Continuamos com a definição da **média da densidade da magnetização a volume infinito**. Para todos os  $h$ 's tais que a derivada da função energia livre a volume infinito seja derivável

$$m^\eta(\beta, h) := \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda} \langle \sigma_x \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}}^\eta . \quad (1.27)$$

Agora temos um limite com respeito a sequências de volumes e muitas possíveis condições de fronteiras. Sendo assim, poderíamos estar trabalhando simplesmente com algo que nem existe e nossa definição do limite estaria errada.

Afortunadamente, em [FV17, pág 89], [Bov06, pág 70] temos teoremas que mostram que o limite (1.27) está bem definido.

**Teorema 1.2.5.** *Seja  $f_{\beta, \mathbf{h}}$  a função energia livre a volume infinito como em (1.26). Para os  $h$ 's, onde  $\frac{df_{\beta, \mathbf{h}}}{dh}$  existe, temos que o limite (1.27) existe independentemente da condição de fronteira e da sequência de volumes escolhida.*

Outra grandeza importante a ser estudada é a **magnetização espontânea**

$$m^*(\beta) := \lim_{h \rightarrow 0^+} m^\eta(\beta, h) . \quad (1.28)$$

**Observação 1.2.1.** Note que em  $h = 0$  não necessariamente existe a derivada da energia livre a volume infinito, mas a definição está bem definida, por questões de convexidade da  $f_{\beta,h}$ .

Se estivermos trabalhando com interações  $\mathbf{J}$  invariante por translações, isto é  $J_{x,y} = J_{\theta_j x, \theta_j y}$ , onde a **translação** é  $\theta_j : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$  e é dada por  $\theta_j x := x + j$ ,  $j \in \mathbb{Z}^d$ . Também com campo constante ou nulo. Podemos enunciar o seguinte teorema:

**Proposição 1.2.2.** Para  $\mathbf{J}$  invariante por traslações, regular, ferromagnético e  $h \in \mathbb{R}$ , temos que

$$m^+(\beta, h) = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, \mathbf{J}, h}^+ . \quad (1.29)$$

A prova pode ser encontrada em Friedli e Velenik [FV17, pág. 106].

**Observação 1.2.2.** Observe que o teorema anterior não é válido para volumes finitos, já que a invariância por translações não é válida neste caso nem quando o campo  $\mathbf{h}$  possui suas componentes não uniformes.

Quando estamos a volume infinito, a esperança  $\langle \cdot \rangle^+$  do produto de dois spins pode ser decomposta em produto de esperanças:

**Proposição 1.2.3.** Seja  $\beta \geq 0$  e  $h \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{J}$  invariante por translação, ferromagnético, regular e  $f, g$  funções locais. Então

$$\lim_{\|j\| \rightarrow \infty} \langle f \cdot \theta_j g \rangle_{\beta, \mathbf{J}, h}^+ = \langle f \rangle_{\beta, \mathbf{J}, h}^+ \langle \theta_j g \rangle_{\beta, \mathbf{J}, h}^+ . \quad (1.30)$$

Podemos encontrar a prova em [Med17, pág. 66]. Usaremos este resultado no seguinte exemplo:

**Exemplo 1.2.4.** Com as mesmas hipóteses da Proposição (1.2.3), temos que

$$\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta, \mathbf{J}, h}^+ = (\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, \mathbf{J}, h}^+)^2 . \quad (1.31)$$

Definamos o seguinte ponto  $\beta_c(d) := \inf\{\beta \geq 0 : m^*(\beta) > 0\} = \sup\{\beta \geq 0 : m^*(\beta) = 0\}$ , o qual é chamado de temperatura inversa crítica.

**Proposição 1.2.4.** Seja  $\beta \geq 0$ ,  $d \geq 2$  e  $\mathbf{J}$  invariante por translação, ferromagnético, regular. Então o ponto  $\beta_c(d)$  é um numero finito. Também se satisfaz

$$m^+(\beta, 0) = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, \mathbf{J}, 0}^+ = m^*(\beta).$$

**Observação 1.2.3.** A magnetização espontânea na literatura é usado para definir transição de fase (ver por exemplo [ABF87]), no sentido que aumentando a temperatura chegamos a um ponto onde já não há magnetização. Ou seja sendo  $\beta$  a temperatura inversa, se  $\beta > \beta_c$  temos  $m^*(\beta) > 0$  e passado esse ponto ( $\beta_c > \beta$ ) temos uma transição a  $m^*(\beta) = 0$ .

A parte bonita da Proposição 1.2.4 é que nos fala que existe transição de fase para o modelo de Ising na rede hiper-cubica com  $d \geq 2$ . Podemos achar a prova em [FV17, pág. 106, 109, 114], a qual utiliza uma ferramenta chamada argumento de Peierls.

Outro resultado muito interessante, pois nos permite ver uma relação entre o campo magnético e a condição de fronteira, é o seguinte:

**Proposição 1.2.5.** *Seja  $\beta \geq 0$ , e  $\mathbf{J}$  invariante por translação, ferromagnético, regular. Então*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, \mathbf{J}, h}^0 = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, \mathbf{J}, 0}^+ . \quad (1.32)$$

Uma prova para esta proposição pode ser encontrada em Medeiros [Med17, pág. 89], fazendo uso do teorema de Strassen.



## Capítulo 2

# Medida de Gibbs aleatória

Seja  $W$  um conjunto enumerável infinito, por exemplo, o conjunto de vértices do grafo  $\mathbb{Z}^d$ , ou do reticulado do grafo hexagonal. Definimos o seguinte espaço de probabilidade  $(E_0, \mathcal{E}_0, \rho_0)$  para cada um dos spins <sup>1</sup>, onde  $E_0$  é um conjunto separável completo e metrizável (espaço polonês), será o conjunto no qual nossos spins tomam seus valores, geralmente em mecânica estatística é  $E_0 = \{-1, 1\}$ . Também seja  $\mathcal{E}_0$  a sigma-álgebra gerada pelos conjuntos abertos numa topologia métrica e uma medida de probabilidade  $\rho_0$  que vamos chamar de medida a priori do spin.

Pensemos agora em muitos spins, possivelmente infinitos. Vamos construir um espaço para todos esses spins, que não estão interagindo entre eles<sup>2</sup>. Para isso tomamos o conjunto  $E = E_0^W$ , e o dotamos de uma topologia produto. Nossas bolas abertas são os cilindros  $B_{\epsilon, S}(\sigma) := \{\sigma' \in E / \max_{x \in S} |\sigma_x - \sigma'_x| < \epsilon\}$ , onde  $\sigma \in E$ ,  $S \subset W$ , e  $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ . Devido à definição de  $E_0$  temos que o espaço topológico produto  $E$  é completo, separável e metrizável. Usando os abertos da topologia construímos a sigma-álgebra de Borel, que denotaremos por  $\mathcal{E}$  que satisfaz  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0^W$ . Uma propriedade adicional para o espaço topológico produto  $E$  é de ser compacto quando o espaço topológico  $E_0$  é compacto, isto devido ao Teorema de Tychonov.

Considerando o espaço produto a priori <sup>3</sup>  $(E, \mathcal{E}, \nu)$ , definimos adicionalmente o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ , onde em  $\Omega$  também colocamos a condição de ser um espaço polonês. Neste último espaço mensurável é onde está definido o campo aleatório.

**Observação 2.0.1.** *No capítulo 1 a notação  $\Omega$ , foi usado para o conjunto das configurações, isso com a finalidade de fazer compatível a notação com a maioria de textos de Mecânica Estatística. Neste capítulo como trabalhamos com o espaço do campo aleatório e o espaço das configurações, deixamos a notação do conjunto como  $\Omega$ , para o espaço do campo  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ , assim o espaço para as configurações neste capítulo é denotado por  $(E, \mathcal{E}, \nu)$ . A medida  $\nu$  por agora é so referencial. Neste capítulo construiremos a medida de Gibbs.*

---

<sup>1</sup>Em inglês *single spin space* ver Georgii [Geo11, pág 12].

<sup>2</sup>Isso significa que são independentes.

<sup>3</sup>Quando pensamos em tomar a medida de um só spin poderíamos pensar que  $\rho_0$  e  $\nu$  são as mesmas, mas geralmente isso não é verdade.

Seja  $B(E, \mathcal{E})$  o espaço das funções a valores reais, mensuráveis e limitadas. Para poder falar de uma medida aleatória é importante começar pelo conceito de interação aleatória.

**Definição 2.0.1.** Uma **interação aleatória**  $\Phi$ , é uma família  $\{\Phi_A\}_{A \subset W}$ , de variáveis aleatórias em  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$  tomando valores em  $B(E, \mathcal{E}_A)$ , i.e. uma transformação mensurável  $\Phi_A : \Omega \ni \omega \rightarrow \Phi_A[\omega] \in B(E, \mathcal{E}_A)$ . Uma **interação aleatória é chamada regular** se, para  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega$ , para qualquer  $i \in W$ , existe uma constante finita  $c_i[\omega]$  tal que

$$\sum_{A \ni i} \|\Phi_A[\omega]\|_\infty \leq c_i[\omega] < \infty.$$

Uma **interação regular aleatória é chamada contínua** se, para cada  $A \subset W$ ,  $\Phi_A$  é conjuntamente contínua nas variáveis  $\eta$  e  $\omega$ .

A maioria dos estudos em Mecânica Estatística é com interações regulares, mas existem também sistemas com interação irregular por exemplo, alguns modelos de spin-glasses (ver Fröhlich e Zegarlinski [FZ87]).

A partir de interações vamos criar hamiltonianos. Seja  $S$  um subconjunto finito  $W$ , definimos

$$H_S(\sigma) := - \sum_{A \cap S \neq \emptyset} \Phi_S(\sigma), \quad (2.1)$$

este hamiltoniano possui as boas propriedades dos hamiltonianos do modelo de Ising  $H_S(\sigma) := - \sum_{\substack{x \in S, y \in S \cup S^c \\ \|x-y\|=1}} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in S} h_x \sigma_x$ , ou seja, se  $S \subset S'$  a seguinte propriedade se

satisfaz

$$(H_{S'})_S(\sigma) = H_S(\sigma).$$

O que significa que primeiro obtemos o hamiltoniano no conjunto de vértices  $S'$  e depois restringimos ao subconjunto  $S$ .

## 2.1 Resumo da medida de Gibbs determinística

Antes de continuar, lembraremos algumas definições e comentários da teoria das medidas de Gibbs sem campo aleatório. No caso determinístico temos o conceito de especificações que é usado na construção da medida de Gibbs.

**Definição 2.1.1.** Uma **especificação local** é uma família de núcleos de probabilidade  $\{\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}\}_{S \subset W}$ , tal que:

1. Para todo  $S \subset W$  e  $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$ ,  $\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}(\mathcal{A})$  é uma função mensurável com respeito à sigma-álgebra  $\mathcal{E}_{S^c}$ .
2. Para todo  $\eta \in E$ ,  $\mu_{S,\beta}^\eta$  é uma medida de probabilidade em  $(E, \mathcal{E})$ .
3. Para qualquer par de volumes  $S, S' \subset W$ , com  $S \subset S'$ , e qualquer função mensurável  $f$ ,

$$\int \mu_{S',\beta}^\eta(d\sigma') \mu_{S,\beta}^{\sigma'_{S' \setminus S}}(d\sigma) f(\sigma_S \sigma'_{S' \setminus S} \eta_{S'^c}) = \int \mu_{S',\beta}^\eta(d\sigma') f(\sigma'_{S'} \eta_{S'^c}),$$

ou sua versão resumida

$$\mu_{S',\beta}^\eta \mu_{S,\beta}^{(\cdot)} = \mu_{S',\beta}^\eta.$$

Podemos pensar nas especificações locais como “probabilidades condicionais esperando uma probabilidade” (ver [Bov06, pág. 57], [FV17, pág 258]), ou seja, as propriedades das probabilidades condicionais e as especificações locais são parecidas, faltando apenas dar uma versão de uma probabilidade para a especificação. Entre as propriedades que coincidem temos a condição de compatibilidade, que no caso das esperanças condicionais é conhecida como a “*tower rule*” i.e. (falando ligeiramente). Seja  $\mu(f|\mathcal{G})$  a esperança condicional de  $f$  dada a sigma-álgebra  $\mathcal{G}$ , e as sigmas-álgebras  $\mathcal{F}, \mathcal{G}'$  satisfazendo  $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}' \subset \mathcal{F}$  temos  $\mu(\mu(f|\mathcal{G}')|\mathcal{G}) = \mu(f|\mathcal{G})$ .

Uma especificação Gibbsiana tem a seguinte forma (ver Friedli e Velenik [FV17, pág. 260]):

$$\mu_{S,\beta}^{(\eta)}(\sigma) := \frac{1}{Z_{S,\beta}^{(\eta)}} e^{-\beta H_S(\sigma_S \eta_{S^c})} \rho_S(d\sigma),$$

ou na sua forma integral

$$\int \mu_{S,\beta}^{(\eta)}(\sigma) f(\sigma) := \int \rho_S(d\sigma) \frac{1}{Z_{S,\beta}^{(\eta)}} e^{-\beta H_S(\sigma_S \eta_{S^c})} f(\sigma_S \eta_{S^c}),$$

onde o hamiltoniano é criado por uma interação regular como (2.1).

No caso das funções dadas por  $\mu(\mathbb{1}_A|\mathcal{G})(\eta)$  (sendo  $\eta$  a variável) fica a dúvida se é uma probabilidade para todo  $\eta \in E$ . Para evitar isso, temos

**Definição 2.1.2.** *Dadas duas sigma-álgebras  $\mathcal{F} \supset \mathcal{G}$ , uma distribuição regular é uma função  $\mu_{\mathcal{G}}^{\eta}$  tal que*

1. *Para cada  $\eta \in E$ ,  $\mu_{\mathcal{G}}^{\eta}$  é uma medida de probabilidade em  $\mathcal{E}$ , e*
2. *Para cada  $A \in \mathcal{E}$ ,  $\mu_{\mathcal{G}}^{(\cdot)}(A)$  é uma função  $\mathcal{G}$  mensurável tal que sua versão é  $\mu(\mathbb{1}_A|\mathcal{G})(\cdot)$ , i.e. para quase todo  $\eta \in E$  se satisfaz  $\mu_{\mathcal{G}}^{\eta}(A) = \mu(\mathbb{1}_A|\mathcal{G})(\eta)$ .*

Uma versão satisfazendo estas condições sempre vai existir já que estamos tomando  $E$  como um espaço polonês (ver [Bil08]).

A seguir, apresentaremos uma medida de probabilidade que permitirá a descrição de um sistema de infinitas partículas em equilíbrio. Este conceito é a medida de Gibbs que foi desenvolvida primeiro por Dobrushin em 1968-1969 [Dob68], e posteriormente por Ruelle e Landford [LR69].

**Definição 2.1.3.** *Seja  $\{\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}\}_{S \subset W}$  uma especificação local. Uma medida  $\mu_{\beta}$  é chamada de compatível com sua especificação local se, e só se, para todo  $S \subset W$  e todo  $f \in B(E, \mathcal{E})$ ,*

$$\mu_{\beta}(f|\mathcal{F}_{S^c}) = \mu_{S,\beta}^{(\cdot)}(f), \quad \mu_{\beta}\text{-quase certamente.}$$

*Chamaremos de medida de Gibbs correspondente a  $\Phi$ ,  $\beta, \nu$  a medida que for compatível com a especificação Gibbsiana local para uma interação regular  $\Phi$ , a temperatura inversa  $\beta$ , e a medida a priori  $\nu$ .*

Por ser interessante é bom ver a mesma definição em diferentes textos como [Geo11, pág. 16], [Bov06, pág. 57] [FV17, pág. 261].

**Observação 2.1.1.** A distribuição condicional regular  $\mu_\beta(f|\mathcal{F}_{S^c})$  é obtida de  $f$  integrando sobre todas as variáveis  $\sigma_x$  com  $x \in S$  e deixando fixadas todas os  $\sigma_x$  com  $x \in S^c$ .

Também temos na teoria, teoremas que nos ajudam a saber quando uma medida é uma medida de Gibbs.

**Teorema 2.1.1.** Uma medida de probabilidade  $\mu_\beta$  é uma medida de Gibbs para  $\Phi, \beta, \rho$  se, e somente se, para todo  $S \subset W$ ,

$$\mu_\beta \mu_{S,\beta}^{(\cdot)} = \mu_\beta. \quad (2.2)$$

Como já falamos antes foram Dobrushin, Landford e Ruelle os que iniciaram o enfoque de estudar as medidas para sistemas de infinitas partículas baseando-se nas propriedades das probabilidades condicionais. Em honra a eles as equações dadas por (2.2) ficaram conhecidas como as equações *DLR*.

**Teorema 2.1.2.** Seja  $\Phi$  uma interação regular e contínua e seja  $\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}$  a especificação Gibbsiana correspondente. Seja  $S_n$  uma sequência de volumes finitos crescentes e absorventes. Se, para algum  $\eta \in E$ , a sequência de medidas  $\mu_{S,\beta}^\eta$  converge fracamente a uma medida de probabilidade  $\lambda$ , então  $\lambda$  é a medida de Gibbs com respeito  $\Phi, \rho, \beta$ .

As provas do (2.1.1) e (2.1.2) podem ser encontradas em Bovier [Bov06, cap. 4].

**Observação 2.1.2.** A medida  $\mu_\beta$  é nossa medida de Gibbs como  $\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}$  é a distribuição condicional regular da medida de Gibbs e ambos são elementos de uma coleção de especificações Gaussianas.

## 2.2 Resumo da medida de Gibbs aleatória

Voltando ao estudo das medidas de Gibbs aleatórias damos a versão aleatória das especificações.

**Definição 2.2.1.** Uma especificação local aleatória é uma família de núcleos de probabilidade  $\{\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}[\omega]\}_{S \subset W}$ , dependendo do parâmetro aleatório,  $\omega$ , tal que:

1. Para todo  $S \subset W$  e  $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$ ,  $\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}(\mathcal{A})$  é uma função mensurável com respeito à sigma-álgebra  $\mathcal{E}_{S^c} \times \mathcal{B}$ .
2. Para  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega$ , para todo  $\eta \in E$ ,  $\mu_{S,\beta}^{(\eta)}[\omega](d\omega)$  é uma medida de probabilidade em  $E$ .
3. Para  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega$ , a família  $\{\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}[\omega]\}_{S \subset W}$  é uma especificação Gibbsiana para a interação  $\Phi[\omega]$  e a temperatura inversa  $\beta$ .
4. A especificação local aleatória é dita contínua se, para qualquer  $S$  finito,  $\mu_{S,\beta}^{(\eta)}[\omega]$  é conjuntamente contínua em  $\eta$  e  $\omega$ .

Também, como no caso determinístico temos as especificações aleatórias.

**Definição 2.2.2.** *Seja  $\Phi$  uma interação regular aleatória. A seguinte expressão é uma especificação local aleatória e é chamada de especificação aleatória Gibbsiana:*

$$\mu_{S,\beta}^{(\eta)}[\omega](d\sigma) := \frac{1}{Z_{S,\beta}^{(\eta)}[\omega]} e^{-\beta H_S[\omega](\sigma_S \eta_{S^c})} \rho_S(d\sigma_S) \delta_{\eta_{S^c}}(d\sigma_{S^c}).$$

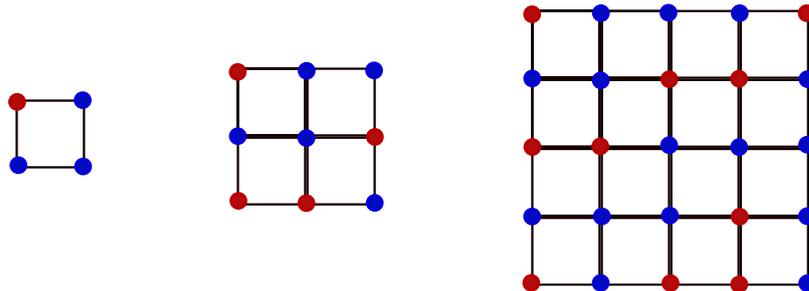
*Além disso, se  $\Phi$  é contínua, a especificação Gibbsiana é contínua.*

Agora daremos a definição principal de medida de Gibbs aleatória infinita. Seja o  $M(E, \mathcal{E})$  o conjunto das medidas de probabilidade em  $(E, \mathcal{E})$ .

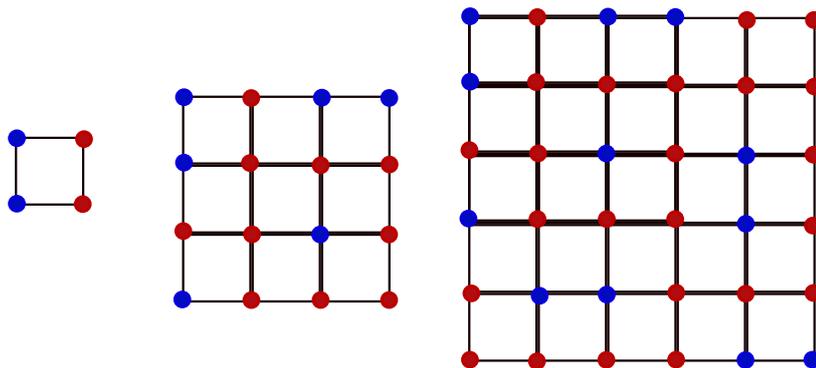
**Definição 2.2.3.** *Uma aplicação mensurável,  $\mu_\beta : \Omega \rightarrow M(E, \mathcal{E})$  é chamada medida aleatória de Gibbs para a interação aleatória  $\Phi$  a temperatura inversa  $\beta$  se, para todo  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega$ , a medida  $\mu_\beta[\omega]$  é compatível com a especificação local  $\{\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}[\omega]\}_{S \subset W}$  para esta interação.*

Para as medidas de Gibbs usuais, sem a aleatoriedade, existem teoremas que garantem a existência das medidas de Gibbs. Agora, com nossa definição de medida de Gibbs aleatória será que tal medida em verdade existe?

Para mostrar a existência de tal medida aleatória, poderíamos pensar em usar as estratégias, do caso determinístico. Por exemplo, quando  $E$  é compacto, para quase todo  $\omega$ . Qualquer sequência  $\mu_{S_n,\beta}^\eta[\omega]$ , quando as  $S_n$  são crescentes e absorventes, possui pontos de acumulação. Logo temos a subsequência  $S_{n_m}[\omega]$  tal que  $\mu_{S_{n_m}[\omega],\beta}^\eta[\omega]$  que converge na medida de Gibbs, para uma interação  $\Phi$  (Ver Bovier [Bov06, pág. 100]). Isto nos diz que se pegássemos uma realização  $\omega_1$  e outra  $\omega_2$  teríamos a subsequência de volumes  $S_{n_m}[\omega_1]$  e  $S_{n_m}[\omega_2]$ , ou seja, nossa medida de Gibbs limite teria problemas de mensurabilidade. A seguir apresentamos damos exemplos de como poderiam ser estas subsequências.



**Figura 2.1:** *Subsequência de volumes  $S_{n_m}[\omega_1]$  na realização  $\omega_1$ .*



**Figura 2.2:** *Subseqüência de volumes  $S_{n_m}[\omega_2]$  na realização  $\omega_2$ . Nos pontos vermelhos o spin toma +1 e nos azuis é -1.*

Segundo [Bov06] o estudo deste problema começou com van Enter [vEG83], Aizenman wehr [AW89] e na literatura dos spin glasses com Charles Newman and Daniel Stein [NS98].

No caso de ter campos aleatórios, as medidas a volume infinito criadas usando limites de subseqüências de volumes finitos absorventes não são suficientes para descrever bem o sistema. Uma medida não descreve bem o sistema quando, por exemplo, só é válida para muito poucos volumes finitos que dependem de alguma realização da desordem. No entanto, para outros volumes o sistema é descrito por outras medidas, embora conhecendo todas as medidas, ainda não estaríamos aproximando bem.

Para superar essa dificuldade definimos a seguinte medida de probabilidade.

**Definição 2.2.4.** *Denotamos por  $K_{S,\beta}^{(\cdot)}$  a medida conjunta em  $\Omega \times S$  tal que sua distribuição marginal, em  $\Omega$ , é  $\mathbb{P}$  e sua distribuição condicional, dado  $\mathcal{B}$  é  $\mu_{S,\beta}^{(\cdot)}[\omega]$ .*

Com o seguinte teorema mostramos a existência da extensão das medidas de Gibbs para o caso quando o campo apresenta aleatoriedade.

**Teorema 2.2.1.** *Seja  $\Phi$  uma interação aleatória regular e contínua. Seja  $K_{S,\beta}^{(\cdot)}$  a medida conjunta definida em (2.2.4). Logo*

1. *Se, para alguma seqüência crescente e absorvente de volumes  $S_n$  e algum  $\eta \in E$ , o limite fraco  $\lim_{\uparrow \infty} K_{S_n,\beta}^\eta =: K_\beta^\eta$  existe, então sua distribuição condicional regular  $K_\beta^\eta(\cdot | \mathcal{B} \times E)$ , dado  $\mathcal{B}$ , é uma medida de Gibbs aleatória para a interação  $\Phi$ .*
2. *Se  $E$  é compacto, e se  $\mathbb{P}$  é “tight”(rígida) no sentido que para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ , que é compacto, e  $\mathbb{P}(\Omega_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$ , logo existe uma seqüência crescente e absorvente  $S_n$  tal que a hipótese do item anterior é válida.*

**Demonstração.** Sabemos que quando  $\Omega$  e  $E$  são espaços poloneses sempre existem versões de esperanças condicionais que são distribuições condicionais regulares.

Faremos a prova do item 1, ou seja, a distribuição condicional regular  $K_\beta^\eta(\cdot | \mathcal{B} \times E)$ , dado  $\mathcal{B}$ , é uma medida de Gibbs aleatória para a interação  $\Phi$ .

Sendo  $\mathcal{B}_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , uma filtração da sigma-álgebra  $\mathcal{B}$  onde cada  $\mathcal{B}_k$  é gerado pelo potencial

de interação  $\Phi_A$  com  $A \subset S_k$  com  $S_k$  seqüências de volumes crescentes e absorventes. Também é importante notar que para a função contínua e mensurável  $f \in C(S, \mathcal{E})$  temos  $K_\beta^\eta(f|\mathcal{B} \times E)[\omega] = \lim_{k \uparrow \infty} \lim_{n \uparrow \infty} K_{S_n, \beta}^\eta(f|\mathcal{B}_k \times E)[\omega]$ .

Para quaisquer  $S \subset S_n$  e  $n$  suficientemente grande

$$K_{S_n, \beta}^\eta(f(\omega, \eta)|\mathcal{B}_k \times E)[\omega] = \mathbb{E} \left[ \mu_{S_n, \beta}^\eta(f) | \mathcal{B}_k \times E \right] [\omega] \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E} \left[ \mu_{S_n, \beta}^\eta \left( \mu_{S, \beta}^{(\cdot)}(f) \right) | \mathcal{B}_k \times E \right] [\omega] \\ &= \mathbb{E} \left[ \mu_{S_n, \beta}^\eta \left( \mu_{S, \beta}^{(\cdot)}[\omega](f) \right) | \mathcal{B}_k \times E \right] [\omega] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[ \mu_{S_n, \beta}^\eta \left( \mu_{S, \beta}^{(\cdot)}(f) - \mu_{S, \beta}^{(\cdot)}[\omega](f) \right) | \mathcal{B}_k \times E \right] [\omega]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

A esperança  $\mathbb{E}$  é em relação a medida de probabilidade  $\mathbb{P}$ .

Agora vamos usar a hipótese da convergência dos  $K_{S_n, \beta}^\eta$  e o Teorema 2.1.2 segue que a primeira parte de (2.4) converge para  $K_\beta^\eta \left( \mu_{S, \beta}^{(\cdot)}[\omega](f) | \mathcal{B} \times E \right) [\omega]$ , e para a segunda parte pela continuidade das especificações locais em  $\omega$  e a continuidade uniforme em  $n$ . Temos

$$\mathbb{E} \left[ \mu_{S_n, \beta}^\eta \left( \mu_{S, \beta}^{(\cdot)}(f) - \mu_{S, \beta}^{(\cdot)}[\omega](f) \right) | \mathcal{B}_k \times E \right] [\omega] \leq \sup_{\omega' \in \mathcal{B}_k[\omega]} \sup_{\eta \in E} \left| \mu_{S, \beta}^{(\cdot)}[\omega'](f) - \mu_{S, \beta}^{(\cdot)}[\omega](f) \right|. \quad (2.5)$$

Observe que  $f$  tem dependência em  $\omega, \eta$ , e que a parte do lado direito vai para 0, quando  $k$  cresce para o infinito. Acima,  $\mathcal{B}_k[\omega]$  é o conjunto de todos os  $\omega'$  que estão no mesmo evento que  $\omega$ , ou seja

$$\mathcal{B}_k[\omega] := \{\omega' \in \Omega | \forall \mathcal{A} \in \mathcal{B}_k : \omega \in \mathcal{A} \text{ and } \omega' \in \mathcal{A}\}.$$

Assim provamos o primeiro item

$$K_\beta^\eta(f|\mathcal{B} \times E) = K_\beta^\eta \left( \mu_{S, \beta}^{(\cdot)}[\omega](f) | \mathcal{B} \times E \right).$$

A seguir damos a prova do item 2.

Seja  $f$  é uma função contínua e limitada em  $\Omega \times E$  e  $\epsilon > 0$  fixado, logo

$$\begin{aligned} \int K_{\beta, S}(d\omega, d\sigma) f(\omega, \sigma) &= \mathbb{E} \int \mu_{\beta, S}[\omega](d\sigma) f(\omega, \sigma) \\ &= \mathbb{E} \mathbf{1}_{\Omega_\epsilon} \int \mu_{\beta, S}[\omega](d\sigma) f(\omega, \sigma) \\ &\quad + \mathbb{E} \mathbf{1}_{\Omega_\epsilon^c} \int \mu_{\beta, S}[\omega](d\sigma) f(\omega, \sigma). \end{aligned}$$

Tomamos  $\limsup$

$$\begin{aligned} \limsup_{n \uparrow \infty} \int K_{\beta, S_n}(d\omega, d\sigma) f(\omega, \sigma) &\leq \limsup_{n \uparrow \infty} \mathbb{E} \mathbf{1}_{\Omega_\epsilon} \int \mu_{\beta, S_n}[\omega](d\sigma) f(\omega, \sigma) \\ &\quad + \limsup_{n \uparrow \infty} \mathbb{E} \mathbf{1}_{\Omega_\epsilon^c} \int \mu_{\beta, S_n}[\omega](d\sigma) f(\omega, \sigma). \end{aligned} \quad (2.6)$$

e similarmente o fazemos para  $\liminf$ .

Sabemos que  $\Omega \times E$  é completo, separável e metrizável e como o subconjunto  $\Omega_\epsilon \times E$  é compacto, então é fechado e limitado, logo como é um subespaço fechado de um espaço completo segue que  $\Omega_\epsilon \times E$  também é completo.

Agora denotemos a seguinte sequência de medidas  $K_{S_{n\epsilon}}^\epsilon$  em  $\Omega_\epsilon \times E$  possui uma subsequência convergente, usaremos a mesma notação para não deixar mais complexas as coisas, ou seja

$$\lim_{n \uparrow \infty} K_{S_{n\epsilon}, \beta}^\epsilon(f) := \lim_{n \uparrow \infty} \mathbb{E} \mathbb{1}_{\Omega_\epsilon} \int \mu_{S_{n\epsilon}, \beta}[\omega](d\sigma) f(\omega, \sigma) = K_\beta^\epsilon(f).$$

E como

$$\mathbb{E} \mathbb{1}_{\Omega_\epsilon} \int \mu_{\beta, S}[\omega](d\sigma) f(\omega, \sigma) \leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\Omega_\epsilon} C] = C \mathbb{P}(\Omega_\epsilon^c) \leq C \epsilon.$$

Segue que

$$\left| \limsup_{n \uparrow \infty} \int K_{S_n, \beta}(d\omega, d\sigma) f(\omega, \sigma) - \liminf_{n \uparrow \infty} \int K_{S_n, \beta}(d\omega, d\sigma) f(\omega, \sigma) \right| \leq C \epsilon.$$

Logo, fazendo  $\epsilon$  tender para 0 temos a seguinte convergência fraca  $\lim_{n \uparrow \infty} K_{S_n, \beta}^\eta = K_\beta^\eta$ .  
□

A medida  $K_\beta^\eta$  em  $\Omega \times E$  não é propriamente uma medida de Gibbs, como se ve em Külske [Kül01].  $K_\beta^\eta$  está mais relacionada com às medidas de Gibbs fracas. Como vemos na prova do teorema anterior, esta medida contém a média sobre as realizações, ou seja, não pode dar uma boa medida para uma realização, somente. Para superar essa dificuldade generaliza-se a medida de Gibbs, mas dessa vez não mais em  $\Omega \times E$ , ou seja, defini-se  $K_\beta^\eta$  em  $\Omega \times M(S)$ ,  $M(S)$  é o espaço de medidas em  $S$ .

**Definição 2.2.5.** Denotamos por  $\mathcal{K}_{S, \beta}^{(\cdot)}$  a medida conjunta em  $\Omega \times M(S)$  tal que sua distribuição marginal, em  $\Omega$ , é  $\mathbb{P}$ , e sua distribuição condicional, dado  $\mathcal{B}$ , é  $\delta_{\mu_{S, \beta}^{(\cdot)}[\omega]}$ , onde  $\delta$  é a medida de Dirac.

Como fizemos anteriormente mostraremos que nesta generalização também temos um teorema para mostrar a existência destas medidas.

**Teorema 2.2.2.** Seja  $\Phi$  uma interação aleatória regular e contínua. Seja  $\mathcal{K}_{S, \beta}^{(\cdot)}$  a medida conjunta definida em (2.2.5).

1. Se, para alguma sequência crescente e absorvente de volumes  $S_n$  e algum  $\eta \in E$ , o limite fraco  $\lim_{n \uparrow \infty} \mathcal{K}_{S_n, \beta}^\eta =: \mathcal{K}_\beta^\eta$  existe, então sua distribuição condicional regular  $\mathcal{K}_\beta^\eta(\cdot | \mathcal{B} \times E)$ , dado  $\mathcal{B}$ , é uma distribuição de probabilidade em  $M(S)$  que proporciona para cada  $\omega$  uma medida de Gibbs a volume infinito correspondente na interação  $\Phi[\omega]$  e temperatura inversa  $\beta$ . Além disso, satisfaz

$$K_\beta^\eta(\cdot | \mathcal{B} \times E) = \mathcal{K}_\beta^\eta(\mu | \mathcal{B} \times E).$$

2. Se  $E$  é compacto, e se  $\mathbb{P}$  é “tight”(rígida), então existe uma sequência crescente e absorvente  $S_n$  tal que a hipótese do item anterior é válida.

A distribuição condicional regular  $\mathcal{K}_\beta^\eta(\mu|\mathcal{B}\times E)$  é chamada de **meta-estados de Aizenman-Wehr**. Também podemos definir outras extensões das medidas de Gibbs, como

$$k_N(\cdot)[\omega] := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta_{\mu_{S_n}[\omega]},$$

o que foi feito por Newman e Stein (ver Bovier [Bov06, pág. 103]).



# Capítulo 3

## Modelo de Ising com campo aleatório

Vamos estudar o modelo de Ising com os campos sendo variáveis aleatórias. Note que o modelo pode ser ainda mais geral considerando a aleatoriedade nas constantes de acoplamento  $\mathbf{J}$  ou na estrutura do grafo.

Os primeiros a estudarem o modelo de Ising com campo aleatório (em inglês *Random Field Ising Model* é abreviado por RFIM) foram Imry e Ma que em [IM75] conjecturaram que, para a rede hipercúbica em dimensão  $d \leq 2$ , não há transição de fase, mas para  $d \geq 3$  há mais de duas medidas aleatórias de Gibbs. Posteriormente, chegariam as provas em Bricmont e Kupiainen [BK87, BK88] para  $d \geq 3$  e Aizenman e wehr [AW89, AW90] para  $d \leq 2$ .

Antes de continuar o estudo do RFIM lembremos o argumento de Peierls [Pei36]; que é a base da maioria de métodos para mostrar a existência de várias medidas de Gibbs (ver Bovier [Bov06, Ch. 4]).

### 3.1 Apresentação do argumento de Peierls

Seja  $xy$  uma aresta no  $\mathbb{Z}^d$  e denote por  $xy^*$  sua **plaqueta** dual. Isto é, o único lado  $(d - 1)$ -dimensional que corta cada aresta pela metade. Denotemos por

$$\Gamma(\sigma) := \{xy^* | \sigma_x \sigma_y = -1\},$$

o conjunto  $\Gamma(\sigma) \subset \mathbb{R}^d$ , é uma superfície.

Chamaremos as componentes conexas de  $\Gamma$  de **contornos** e escreveremos  $\gamma_i \in \Gamma$ . Os contornos têm a propriedade de serem fechados de longitude finita ou infinitas (Ver [Bov06, pag 63], [Vel97, cap 2],[FV17], [Pro05]).

**Lema 3.1.1.** *Seja  $\mu_\beta$  uma medida de Gibbs com campo nulo,  $\beta > 0$  e  $\gamma$  um contorno finito. Então*

$$\mu_\beta[\gamma \in \Gamma(\sigma)] \leq 2e^{-2\beta|\gamma|}.$$

Uma versão da prova para  $d = 2$  está em Friedli e Velenik [FV17]. A prova deste lema e dos dois teoremas seguintes podem ser encontradas em Bovier [Bov06].

**Teorema 3.1.1.** *Seja  $\mu_\beta$  uma medida de Gibbs, o hamiltoniano dado por  $H(\sigma) := \sum_{xy \in \mathbb{Z}^d} \sigma_x \sigma_y$ . Assumimos que  $d \geq 2$ . Então existe  $\beta_d < \infty$  tal que para todo  $\beta > \beta_d$  temos*

$$\mu_\beta[\exists \gamma \in \Gamma(\sigma) : \underline{\gamma} \ni 0] < \frac{1}{2},$$

onde  $\underline{\gamma}$  é o conjunto de vértices de  $\mathbb{Z}^d$  que ficam no interior do contorno  $\gamma$ .

Com este último resultado estamos muito perto de mostrar a existência de duas medidas de Gibbs.

**Teorema 3.1.2.** *Com as condições do Teorema 3.1.1 temos que existe ao menos duas medidas extremas de Gibbs  $\mu_\beta^+$  e  $\mu_\beta^-$  satisfazendo  $\mu^+(\sigma_0) = -\mu^-(\sigma_0) > 0$ .*

Como o evento  $\{\sigma_0 = -1\}$  está incluído em  $\{\exists \gamma \in \Gamma(\sigma) : \underline{\gamma} \ni 0\}$  segue que para qualquer  $n$  temos  $\mu_{\beta, \Lambda_n}^+[\sigma_0 = -1] \leq \mu_{\beta, \Lambda_n}^+[\exists \gamma \in \Gamma(\sigma) : \underline{\gamma} \ni 0] < \frac{1}{2}$ , uniformemente. Conseguimos mostrar a última desigualdade (menor que  $1/2$ ) da mesma forma que a demonstração do Teorema 3.1.1. Usando o limite termodinâmico segue que

$$\mu_\beta^+[\sigma_0 = -1] \leq \mu_\beta^+[\exists \gamma \in \Gamma(\sigma) : \underline{\gamma} \ni 0] < \frac{1}{2}.$$

Portanto  $\mu_\beta^+[\sigma_0] = 1 - 2\mu_\beta^+[\sigma_0 = 1] > 0$ .

## 3.2 O argumento de Imry e Ma

As impurezas influem nos sistemas, então considerar modelos com campos aleatórios melhora as comparações entre resultados teóricos e experimentais. No artigo de 1975 [IM75], Imry e Ma estudaram como o campo aleatório afeta a transição de fase. O método usado foi estender o argumento de Peierls [Pei36] para o campo com aleatoriedade.

Consideraremos o hamiltoniano como sendo

$$H[w](\sigma) = - \sum_{xy \in E_{\mathbb{Z}^d}} \sigma_x \sigma_y - \epsilon \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} h_x[w] \sigma_x. \quad (3.1)$$

A dependência em  $w$  será omitida se for o caso. A essência do argumento de Peierls está em que mudando o *estado fundamental (ground state)*  $+1$  no interior de um contorno  $\gamma$  para outro estado fundamental  $-1$  tem como custo uma *energia de superfície* de  $2|\gamma|$  e como o campo é nulo, por simetria, a energia considerando só os sítios que ficam no contorno (*bulk energy*), dos estados fundamentais  $+1$  e  $-1$  são as mesmas. O que é diferente no modelo de Ising aleatório é que as *bulk energies* não são as mesmas. Notemos que se todos os  $\sigma_x$  em um contorno são  $\pm 1$  temos

$$E_{bulk}(\gamma) := \pm \epsilon \sum_{i \in \gamma} h_i[w],$$

e mudando os spins  $+1$  por spins  $-1$  em  $\gamma$  produzimos um aporte ao termo de *energia de superfície* de ordem  $2\epsilon \sum_{i \in \gamma} h_i[w]$  que pode ser negativo ou positivo. E se o campo aleatório fosse uniformemente limitado teríamos que a contribuição seria limitada por

$2\epsilon|\underline{\gamma}|$  em valor absoluto, mas isto é muito maior que o termo de superfície, embora considerando  $\epsilon$  muito pequeno, se  $|\underline{\gamma}|$  é suficientemente grande. Então aqui Imry e Ma argumentaram que podemos obter uma quantidade melhor que essa, muito menor. Usando o teorema do limite central, o valor de  $E_{bulk}(\underline{\gamma})$  para  $\underline{\gamma}$  grande seria

$$E_{bulk}(\underline{\gamma}) \sim \pm\epsilon\sqrt{|\underline{\gamma}|}. \quad (3.2)$$

Fazendo uso da desigualdade isoperimétrica em  $\mathbb{Z}^d$ , teríamos  $|\underline{\gamma}| \leq 2d|\underline{\gamma}|^{\frac{d}{d-1}}$ . Se substituíssemos em (3.2) notamos que a *bulk energy* é somente  $E_{bulk}(\underline{\gamma}) \sim \pm 2d\epsilon|\underline{\gamma}|^{\frac{d}{2(d-1)}}$ , para  $d > 2$ , que é muito menor que  $|\underline{\gamma}|$ . Com esse raciocínio, Imry e Ma conjecturaram que o modelo de Ising com campo aleatório possui transição de fase para  $d \geq 3$  e não para  $d \leq 2$ .

No que segue procuramos reproduzir o argumento de Peierls, com as variações dadas no livro de Bovier [Bov06], mostrado acima, já que foi essa a ideia seguida por Imry e Ma para prever a existência de uma medida de Gibbs para o modelo de Ising com campo aleatório.

O lema seguinte é uma adaptação do Lema 3.1.1 mas desta vez considerando o hamiltoniano com campo aleatório.

**Lema 3.2.1.** *No modelo de Ising aleatório, para qualquer medida de Gibbs  $\mu_\beta$ ,*

$$\mu_\beta[\underline{\gamma} \in \Gamma(\sigma)] \leq \exp(-2\beta|\underline{\gamma}| + |\ln Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^+ - Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^-|). \quad (3.3)$$

No lema anterior  $\Gamma(\sigma)$  é a coleção de contornos associadas à configuração  $\sigma$ , o número de plaquetas de  $\underline{\gamma}$  é denotado por  $|\underline{\gamma}|$ . Assim, também  $\underline{\gamma}$  é o conjunto de vértices contidos no interior do contorno e  $\gamma^{in}$  ( $\gamma^{ex}$ ) o conjunto de vértices que estão no interior (exterior) e a uma aresta de distância do vértice que está no exterior (interior).

**Demonstração.** Temos a seguinte igualdade

$$\mu_\beta[\underline{\gamma} \in \Gamma(\sigma)] \equiv \mu_\beta[\sigma_{\gamma^{ex}} = +1, \sigma_{\gamma^{in}} = -1] + \mu_\beta[\sigma_{\gamma^{ex}} = -1, \sigma_{\gamma^{in}} = +1], \quad (3.4)$$

onde  $[\sigma_{\gamma^{ex}} = +1, \sigma_{\gamma^{in}} = -1]$  representa o conjunto de todas as configurações que tem contornos  $\underline{\gamma}$  que têm a propriedade de na fronteira interior tomar  $-1$  e  $+1$  na fronteira exterior. Esta é uma prova baseada no [Bov06].

Usamos uma equação DLR (Dobrushin, Landford, Ruelle)

$$\mu_\beta[\sigma_{\gamma^{ex}} = +1, \sigma_{\gamma^{in}} = -1] = \mu_\beta[\sigma_{\gamma^{ex}} = +1] \mu_{\underline{\gamma}, \beta}^+[\sigma_{\gamma^{in}} = -1].$$

Agora, analisamos

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{\gamma}, \beta}^+[\sigma_{\gamma^{in}} = -1] &= \frac{\mathbb{E}_{\sigma_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}}} \rho(\sigma_{\gamma^{in}} = -1) e^{-\beta H_{\underline{\gamma}}(\sigma_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}} \eta \sigma')}}{\mathbb{E}_{\sigma_{\gamma^{in}}} \mathbb{E}_{\sigma_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}}} e^{-\beta H_{\underline{\gamma}}(\sigma_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}} \eta \sigma')}} \\ &= \frac{e^{-\beta|\underline{\gamma}|} Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^{-1} \rho(\sigma_{\gamma^{in}} = -1)}{\mathbb{E}_{\sigma_{\gamma^{in}}} e^{\beta \sum_{x \in \gamma^{in}, y \in \gamma^{ex}} \sigma_x \sigma_y} Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^{-1}} \\ &\leq e^{-\beta|\underline{\gamma}|} \frac{Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^{-1}}{Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^{+1}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

E para a outra parte

$$\mu_{\underline{\gamma},\beta}^-[\sigma_{\gamma^{in}} = +1] \leq e^{-\beta|\gamma|} \frac{Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^{+1}}{Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^{-1}}.$$

De (3.4) e das últimas desigualdades, segue que

$$\mu_{\beta}[\gamma \in \Gamma(\sigma)] \leq e^{-\beta|\gamma|} \left[ \frac{Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^{-1}}{Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^{+1}} + \frac{Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^{+1}}{Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^{-1}} \right].$$

□

A meta é obter um resultado similar ao Teorema 3.1.2, para campo nulo. Desta vez será considerado campo aleatório e  $d \geq 3$ , para isso enunciaremos um resultado devido a M. Talagrand [Tal96].

Antes lembramos que uma mediana de uma variável aleatória  $Z$  é um número  $M_z$  que satisfaz  $\mathbb{P}[Z \geq M_z] \geq \frac{1}{2}$  e  $\mathbb{P}[Z \leq M_z] \geq \frac{1}{2}$ .

**Teorema 3.2.1.** *Seja  $f : [-1, 1]^N \rightarrow \mathbb{R}$  uma função cujos conjuntos de nível são convexos. Assumimos que  $f$  é Lipchitz contínua com constante uniforme  $C_{Lip}$ , i.e. para cada  $X, Y \in [-1, 1]^N$ ,*

$$|f(X) - f(Y)| \leq C_{Lip} \|X - Y\|_2.$$

*Logo, se  $X_1, X_2, \dots, X_N$  são variáveis aleatórias i.i.d. tomando valores em  $[-1, 1]$ , e  $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ , e se  $M_z$  é uma mediana de  $Z$ , então*

$$\mathbb{P}[|Z - M_z| \geq z] \leq 4 \exp\left(-\frac{z^2}{16C_{Lip}^2}\right).$$

Usaremos o teorema anterior para mostrar o seguinte lema:

**Lema 3.2.2.** *Seja o campo aleatório  $\mathbf{h} = (h_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ , com distribuição simétrica e limitado ( $h_x \leq 1$ ), ou a sua distribuição é Gaussiana. Logo há uma constante  $C < \infty$  tal que, para qualquer  $z \geq 0$ ,*

$$\mathbb{P}[|\ln Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^+ - \ln Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^-| > z] \leq C \exp\left(-\frac{z^2}{\epsilon^2 \beta^2 C |\underline{\gamma}|}\right).$$

**Demonstração.** A função  $Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\mathbf{h},\beta}^+$  é dependente do campo aleatório, mas por simplicidade não escreveremos a dependência. Como o campo tem distribuição simétrica, temos

$$\mathbb{E} \ln Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^+ = \mathbb{E} \ln Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^-.$$

Disso, segue que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[|\ln Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^+ - \ln Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^-| > z] \\ & \leq \mathbb{P}[|\ln Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^+ - \mathbb{E} \ln Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^+| + |\ln Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^- - \mathbb{E} \ln Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^-| > z] \\ & \leq 2 \mathbb{P}[2 |\ln Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^+ - \mathbb{E} \ln Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^+| > z]. \end{aligned}$$

Sabemos, também, que  $\ln Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^+$  com respeito ao campo é convexa. Para poder usar o Teorema 3.2.1 só falta mostrar que o  $\ln Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^+$  é Lipschitz contínua. Lembrando o seguinte

$$\frac{\partial \ln Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^+}{\partial h_i} = \beta \mu_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^+(\sigma_i) = \beta \langle \sigma_i \rangle_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^+ \leq 1$$

e usando o teorema do valor médio para múltiplas variáveis, temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} & |\ln Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^+ - \ln Z_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^-| \\ & \leq \sup_{\omega''} \left| \sum_{i \in \underline{\gamma}\backslash\gamma^{in}} (h_i[\omega] - h_i[\omega']) \mu_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^+(\sigma_i)[\omega''] \right| \\ & \leq \epsilon \beta \sup_{i \in \underline{\gamma}\backslash\gamma^{in}} |\mu_{\underline{\gamma}\backslash\gamma^{in},\beta}^+(\sigma_i)| \sum_{i \in \underline{\gamma}\backslash\gamma^{in}} (h_i[\omega] - h_i[\omega']) \\ & \leq \epsilon \beta \sqrt{|\underline{\gamma}|} \|\mathbf{h}_{\underline{\gamma}}[\omega] - \mathbf{h}_{\underline{\gamma}}[\omega']\|_2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para obter a última limitação usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz.  $\square$

Usando a desigualdade (3.6) podemos deduzir que (3.3) fica modificada como  $\mu_\beta[\omega][\gamma \in \Gamma(\sigma)] \leq \exp(-2\beta|\gamma| + \epsilon\beta\sqrt{|\underline{\gamma}|})$  isso implicaria para algum  $i^* \in \underline{\gamma}$  fixado, o seguinte  $\mu_\beta[\omega][\exists \gamma \in \Gamma(\sigma) : i^* \in \underline{\gamma}] \leq \sum_{\gamma: \gamma \ni i^*} \mu_\beta[\omega][\gamma \in \Gamma(\sigma)]$  isto nos faz lembrar ao Teorema 3.1.1, mas desta vez temos uma variável adicional  $\omega$ , que é a aleatoriedade. Neste caso teríamos que mostrar uma limitação em probabilidade. A pergunta é: como fazer isso?

Apresentaremos uma forma de limitar probabilisticamente uma medida Gibbs aleatória (nem sempre vamos poder proceder da mesma forma) que é válida para o modelo de Ising diluído (dilute Ising Model).

### Exemplo: O modelo de Ising diluído.

Neste modelo são as constantes de acoplamento  $J_{xy}$  a parte com a aleatoriedade, i.e.  $J_{xy}$  são variáveis aleatórias i.i.d. tais que

$$\mathbb{P}[J_{xy} = 0] = p \quad \text{e} \quad \mathbb{P}[J_{xy} = 1] = 1 - p.$$

Para o exemplo não precisaremos saber muito sobre a distribuição dos  $J_{xy}$ , apenas que  $\mathbb{E}[J_{xy}] = J_0 > 0$ , e  $\text{var}[J_{xy}] \ll J_0$ .

Seja o hamiltoniano a primeiros vizinhos

$$H[\omega](\sigma) := - \sum_{xy \in \mathbb{Z}^d} J_{xy}[\omega] \sigma_x \sigma_y.$$

Que também o podemos escrever como uma parte determinística e uma parte aleatória da seguinte forma:

$$H[\omega](\sigma) := H(\sigma) + H^{(1)}[\omega](\sigma) = H(\sigma) + \sum_{xy \in \mathbb{Z}^d} (-1 - J_{xy})[\omega] \sigma_x \sigma_y.$$

Pode-se dividir o hamiltoniano em duas partes. A primeira  $H(\sigma) = \sum_{xy \in \mathbb{Z}^d} \sigma_x \sigma_y$  é determinística e a segunda parte fica com a aleatoriedade. Esta última parte pode ver-se

como uma pequena perturbação da primeira para  $p$  pequeno. Então se a primeira parte, não aleatória, apresenta transição de fase. Então o  $H[\omega](\sigma)$  também terá transição de fase, isto não necessariamente é verdade com outros hamiltonianos, nem quando a perturbação aleatória é forte. Mais sobre este modelo podemos encontrar em Fontes e Neves também em Avrom, Roepstorff e Schulman [FN95], [ARS81].

O seguinte teorema apresenta a ideia de como obter uma limitação em probabilidade similar ao Teorema 3.1.1 para este modelo.

**Teorema 3.2.2.** *Seja  $\mu_\beta$  uma medida de Gibbs para o modelo de Ising diluído,  $i^*$  é um vértice fixado e  $d \geq 2$ . Então existe  $p_0 > 0$  tal que, para todo  $p \leq p_0$ , existe  $\beta(p) < \infty$  tal que, para  $\beta \geq \beta(p)$ ,*

$$\mathbb{P}[\mu_\beta[\exists \gamma \in \Gamma(\sigma) : \underline{\gamma} \ni i^*] < \frac{1}{2}] > 0.$$

**Demonstração.** Seja  $\langle xy \rangle^*$  a plaqueta pertencente ao contorno  $\gamma$ , correspondente a  $xy$ . Definimos a energia do contorno como

$$E[\omega](\gamma) := \sum_{\langle xy \rangle^* \in \gamma} J_{xy}[\omega].$$

Procedendo de forma similar como foi feito na prova do Lema 3.2.1, obtemos

$$\mu_\beta[\gamma \in \Gamma(\sigma)] \leq e^{-2\beta E[\omega](\gamma)}.$$

Notemos que  $\mathbb{E}[E(\gamma)] = \sum_{\langle xy \rangle^* \in \gamma} J_0 = J_0 |\gamma|$ . Além disso

$$\mathbb{P}[E(\gamma) = J_0 |\gamma|] = \binom{|\gamma|}{J_0 |\gamma|} (1-p)^{J_0 |\gamma|} p^{(1-J_0) |\gamma|}, \quad (3.7)$$

para  $J_0 |\gamma|$  inteiro. Essa igualdade é obtida considerando que  $E(\gamma)$  é uma soma de variáveis aleatórias. Definamos o evento

$$\mathcal{A} := \{\exists \gamma : \underline{\gamma} \ni i^*, E(\gamma) < |\gamma|/2\}.$$

Logo, limitando  $\mathbb{P}[\mathcal{A}] \leq \sum_{\exists \gamma : \underline{\gamma} \ni i^*} \mathbb{P}[E(\gamma) < |\gamma|/2]$ , usando (3.7) e contando sobre o número de lados de cada  $\gamma$  temos

$$\mathbb{P}[\mathcal{A}] \leq \sum_{\exists \gamma : \underline{\gamma} \ni i^*} 2^{|\gamma|} p^{|\gamma|/2} \leq \sum_{k=2d}^{\infty} 3^k 2^k p^{-k/2} \leq \frac{(36p)^d}{1-6\sqrt{p}}, \text{ se } p < 1/36. \quad (3.8)$$

E se  $\omega \in \mathcal{A}^c$ , temos

$$\mu_\beta[\omega][\exists \gamma \in \Gamma(\sigma) : i^* \in \underline{\gamma}] \leq \sum_{\gamma : \underline{\gamma} \ni i^*} \mu_\beta[\omega][\gamma \in \Gamma(\sigma)] \leq \sum_{\gamma : \underline{\gamma} \ni i^*} e^{-\beta |\gamma|},$$

onde a última soma é menor que 1/2 se  $\beta$  é suficientemente grande. Assim, para  $\beta$  dado e para  $p < 1/36$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\mu_\beta[\omega][\exists \gamma \in \Gamma(\sigma) : i^* \in \underline{\gamma}] < 1/2] &\geq \mathbb{P}[\mathcal{A}^c] \mathbb{P}[\mu_\beta[\omega][\exists \gamma \in \Gamma(\sigma) : \underline{\gamma} \ni i^*] < 1/2 \mid \mathcal{A}^c] \\ &\geq 1 - \frac{(36p)^d}{1-6\sqrt{p}}. \end{aligned}$$

Quando  $p \rightarrow 0$ , temos que  $\mathbb{P}[\mu_\beta[\omega][\exists \gamma \in \Gamma(\sigma) : i^* \in \underline{\gamma}] < 1/2] \rightarrow 1$ .  $\square$

Tendo este último resultado, podemos deduzir o seguinte corolário.

**Corolário 3.2.1.** *No modelo diluído de Ising, para  $d \geq 2$ , existe  $p_0 > 0$  tal que, para todo  $p \leq p_0$ , existe  $\beta(p) > 0$  tal que, para todo  $\beta \geq \beta(p)$ , com probabilidade um, existe ao menos duas medidas aleatórias de Gibbs extremas.*

Podemos encontrar a prova deste corolário em [Bov06].

Se queremos usar o método do Teorema 3.2.2 para o modelo de Ising com o hamiltoniano (3.1) notaremos que isto não é possível diretamente porque não conseguimos uma desigualdade tipo (3.8). Ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\exists \gamma : \underline{\gamma} \ni i^* , |\ln Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^+ - \mathbb{E} \ln Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^+| > z] &\leq \sum_{\exists \gamma : \underline{\gamma} \ni i^*} \mathbb{P}[|\ln Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^+ - \mathbb{E} \ln Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^+| > z] \\ &\leq \sum_{\exists \gamma : \underline{\gamma} \ni i^*} \exp\left(-\frac{|\gamma|^2}{C\epsilon^2|\underline{\gamma}|}\right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

A expressão  $\frac{|\gamma|^2}{|\underline{\gamma}|}$  pode ser muito pequena como  $|\gamma|^{(d-2)/(d-1)}$ , e o número de gamas que satisfazem isso é muito grande (da ordem de  $C^{|\gamma|}$ ). Portanto a última soma diverge (ver Bovier [Bov06]).

Então onde está o erro? Está na desigualdade (3.9) já que dois contornos  $\gamma$  e  $\gamma'$  podem ter muito em comum. Existem métodos que dão uma melhor limitação. São métodos chamados de *encadeamento* (*chaining*) que foram feitos nos artigos de Chalker e Fisher [Cha83],[FFS84].

O seguinte teorema permitirá provar uma versão do Teorema 3.1.1 ou o Teorema 3.2.2 para o hamiltoniano (3.1), já que durante a sua prova é possível obter uma maneira de satisfazer uma desigualdade como (3.8).

**Teorema 3.2.3.** *Consideremos que há uma constante positiva  $C$  tal que, para todo  $\Lambda, \Lambda' \subset \mathbb{Z}^d$ ,*

$$\mathbb{P}[|\ln Z_{\Lambda, \beta}^+ - \ln Z_{\Lambda', \beta}^+ - \mathbb{E}[\ln Z_{\Lambda, \beta}^+ - \ln Z_{\Lambda', \beta}^+]| \geq z] \leq \exp\left(-\frac{z^2}{C\epsilon^2\beta^2|\Lambda \Delta \Lambda'|}\right), \quad (3.10)$$

onde  $\Lambda \Delta \Lambda'$  é a diferença simétrica. Então, se  $d \geq 3$ , existem  $\epsilon_0 > 0$  e  $\beta_0 < \infty$  tal que para todo  $\epsilon \leq \epsilon_0$  e  $\beta \geq \beta_0$ , para  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega \in \Omega$ , existe ao menos duas medidas de Gibbs extremas a volume infinito  $\mu_\beta^+$  e  $\mu_\beta^-$ .

**Demonstração.** Definamos uma sequência de conjunto de contornos *granulados* (em inglês *coarse grained*)  $\Gamma_l$ ,  $l \in \mathbb{N}$  e uma transformação  $\gamma_l : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_l$ , representaremos por  $\Gamma_0$  o conjunto de contornos originais. O argumento de encadeamento consiste em fazer para um  $k$  dado

$$F_\gamma = F_{\gamma_k(\gamma)} + (F_{\gamma_{k-1}(\gamma)} - F_{\gamma_k(\gamma)}) + (F_{\gamma_{k-2}(\gamma)} - F_{\gamma_{k-1}(\gamma)}) + \cdots + (F_{\gamma_k(\gamma)} - F_{\gamma(\gamma)}), \quad k \in \mathbb{N},$$

onde

$$F_\gamma := \ln Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^+ - \mathbb{E} \ln Z_{\underline{\gamma} \setminus \gamma^{in}, \beta}^+.$$

Logo limitamos a seguinte quantidade (que nos faz lembrar a primeira probabilidade em (3.9))

$$\mathbb{P} \left[ \sup_{\substack{\gamma: \underline{\gamma} \ni i^* \\ |\gamma|=n}} F_\gamma > z \right] \leq \sum_{l=1}^{k(n)} \mathbb{P} \left[ \sup_{\substack{\gamma: \underline{\gamma} \ni i^* \\ |\gamma|=n}} F_{\gamma_l(\gamma)} - F_{\gamma(\gamma)} > z_l \right] + \mathbb{P} \left[ \sup_{\substack{\gamma: \underline{\gamma} \ni i^* \\ |\gamma|=n}} F_{\gamma_k(\gamma)} > z_{k+1} \right],$$

para qualquer escolha de  $k = k(n)$  e seqüências  $z_l$  com  $\sum_{l=1}^{k+1} z_l \leq z$ .

Limitamos as probabilidades do lado direito acima de forma similar como fizemos em (3.9).

$$\mathbb{P} \left[ \sup_{\substack{\gamma: \underline{\gamma} \ni i^* \\ |\gamma|=n}} F_{\gamma_l(\gamma)} - F_{\gamma(\gamma)} > z_l \right] \leq A_{l-1, n} A_{l, n} \exp \left( - \frac{z_l^2}{C \epsilon^2 \beta^2 \sup_{\gamma} |\underline{\gamma}_l(\gamma) \Delta \underline{\gamma}_{l-1}(\gamma)|} \right),$$

sendo  $A_{l, n}$  é o número de  $\gamma_l(\gamma) \in \Gamma_l$ , com  $\gamma$  sujeito as restrições  $\underline{\gamma} \ni i^*$ ,  $|\gamma| = n$ . Deste último, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \sup_{\substack{\gamma: \underline{\gamma} \ni i^* \\ |\gamma|=n}} F_\gamma > z \right] &\leq \sum_{l=1}^{k(n)} A_{l-1, n} A_{l, n} \exp \left( - \frac{z_l^2}{C \epsilon^2 \beta^2 \sup_{\gamma} |\underline{\gamma}_l(\gamma) \Delta \underline{\gamma}_{l-1}(\gamma)|} \right) \\ &+ A_{k(n), n} \exp \left( - \frac{z_{k+1}^2}{C \epsilon^2 \beta^2 \sup_{\gamma} |\underline{\gamma}_k(\gamma)|} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Até agora não temos definido precisamente  $\Gamma_l$  nem a transformação  $\gamma_l$ . Para definir isso consideremos quadrados (só a fronteira) de lado  $2^l$  que estão sobre uma rede  $(2^l \mathbb{Z})^d$ . O conjunto  $\Gamma_l$  será o conjunto de todos os quadrados.

Para definir a transformação  $\gamma_l$  primeiro criamos  $V_l(\gamma)$  como o conjunto de todos os cubos, aos quais chamaremos de  $\mathcal{C}$ , de lados  $2^l$ . Estes cubos ficam contidos na rede criada acima, e satisfazem a seguinte desigualdade

$$|\mathcal{C} \cap \gamma| \geq 2^{d_l-1}.$$

Seja  $\gamma_l(\gamma) := \partial V_l(\gamma)$  o conjunto de fronteiras do cubo  $V_l(\gamma)$ . As imagens  $\gamma_l(\gamma)$  podem ser não conexas. É possível verificar que esse número de componentes conexas não ultrapassa  $C|\gamma|2^{-(d-1)(l-1)}$  e a máxima distância entre qualquer componente é menor que  $|\gamma|$ .

Usando as referências Bovier e Fisher [Bov06, FFS84] temos as seguintes desigualdades

$$A_{l, n} \leq \exp \left( \frac{C l n}{2^{(d-1)l}} \right), \text{ e } |\underline{\gamma}_l(\gamma) \Delta \underline{\gamma}_{l-1}(\gamma)| \leq |\gamma| 2^l, \text{ para todo } \gamma.$$

Usando estas últimas desigualdades em (3.11) para um  $\epsilon$  pequeno o suficiente e escolhendo  $k(n)$  tal que  $2^{k(n)} \sim n^{1/3}$ , conseguimos limitar as duas somas por

$$\sum_{l=1}^{k(n)} \exp\left(-\frac{z_l^2}{C\epsilon^2\beta^2 2^l n} + \frac{C(l-1)n}{2^{(d-1)(l-1)}}\right) \quad \text{e} \quad \exp\left(C \ln n n^{1/3} - \frac{z_{k(n)+1}^2}{C\beta^2\epsilon^2 n^{d/(d-1)}}\right)$$

respectivamente. Com os resultados acima, escolhemos  $z_l = c\beta n l^{-2}$  e disso dizemos que

$$\mathbb{P}\left[\sup_{\substack{\gamma:\gamma\ni i^* \\ |\gamma|=n}} F_\gamma > C\beta n\right] \leq e^{-C' n^{2/3} \epsilon^{-2}}.$$

Como  $n \geq 2d \geq 1$ , segue que

$$\mathbb{P}\left[\sup_{\gamma:\gamma\ni i^*} F_\gamma > C\beta|\gamma|\right] \leq e^{-C' \epsilon^{-2}}.$$

A partir daqui podemos chegar na conclusão do teorema. □

A parte da prova que enunciamos é baseada no artigo de Fisher [FFS84], que só é válida quando não se considera os contornos entre contornos. Um argumento mais sólido, que essa suposição, é colocar a condição (3.10), mas que também só vale para certos casos, como podemos ver e Bovier [Bov06, p. 116].

Considerando (3.10) e as seguintes hipóteses para  $d \geq 3$ , existem  $\epsilon_0 > 0$  e  $\beta_0 < \infty$  tais que para todo  $\epsilon \leq \epsilon_0$  e  $\beta \geq \beta_0$ , para  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega \in \Omega$  podemos proceder como no caso do modelo aleatório diluído e concluir que temos duas medidas de Gibbs.

A prova da existência de mais de duas medidas para o modelo de Ising com  $d \geq 3$ , sem colocar as hipóteses do paragrafo anterior, foi dada por Brémont and Kupiainen [BK88].

### 3.3 O método de Aizenman e Wehr

Imry e Ma notaram que em  $d \leq 2$  a energia da superfície pode ser superada pela *bulk energy* isto significaria que a influência de uma realização do campo aleatório é determinante na orientação local dos spins. Então não importa qual seja a condição de fronteira, a sua influência não é perceptível no interior do sistema, o que implica uma única medida de Gibbs aleatória.

Aizenman e Wehr [AW90] concretizaram matematicamente esses raciocínios. O resultado principal deles foi:

**Teorema 3.3.1.** *No modelo de Ising com campo aleatório i.i.d. cuja distribuição é não concentrada num simples ponto (não degenerada) e possui ao menos  $2 + \epsilon$  momentos finitos, para algum  $\epsilon > 0$ , se  $d \leq 2$ , existe uma única medida de Gibbs a volume infinito.*

A prova deste teorema podemos encontrar em Bovier [Bov06].

### 3.4 O resultado de Bricmont e Kupiainen

Bricmont e Kupiainen [BK88] abordaram o estudo do modelo para  $d \geq 3$  de uma forma bem diferente aos estudos anteriores Fisher, Fröhlich e Spencer [FFS84]. Eles usaram a ferramenta dos grupos de renormalização. Essa teoria pode ser encontrada em Bovier [Bov06] e com mais detalhes no artigo, do mesmo autor [BK94].

O teorema a seguir implica a transição de fase para  $d \geq 3$ . Foi o resultado principal de [BK88].

**Teorema 3.4.1.** *Seja  $d \geq 3$  e assumimos que as variáveis aleatórias  $h_x$  são i.i.d. simetricamente distribuídas e satisfazem  $\mathbb{P}[|h_x| > h] \leq \exp(-h^2/A^2)$  para um  $A$  suficientemente pequeno e  $h \geq 0$ . Logo, existe  $\beta_0 < \infty$ ,  $a_0 > 0$ , tal que para todo  $\beta \geq \beta_0$  e  $A \leq A_0$  para qualquer sequência crescente e absorvente de volumes  $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ , a sequência de medida  $\mu_{\Lambda_n, \beta}^\pm$  converge a medidas de Gibbs disjuntas  $\mu_\beta^\pm$ ,  $\mathbb{P}$ -quase certamente.*

## Capítulo 4

# Ausência de quebra da simetria das réplicas para o modelo de Ising com campo aleatório numa classe de campos não gaussianos

No artigo de Chatterjee [Cha15], Chatterjee mostrou que o modelo de Ising com campo aleatório gaussiano não tem quebra da simetria da réplica, que é uma propriedade presente em alguns modelos com aleatoriedade nos campos ou nas constantes de acoplamento. O que ocorre também em certos modelos da Mecânica Quântica, como podemos ver em Itoi [Ito18]. Esta propriedade proporciona informação sobre os estados e as fases do modelo (ver Nishimori, Castellani e Cavagna [Nis01, CC05]). Neste capítulo, baseado em Roldan e Vila [RV18], estudamos o problema para o caso em que o campo aleatório (desordem) não é gaussiano. A pergunta é muito geral, por esse motivo criamos uma classe de campos (4.2) com propriedades adequadas que permite provar as igualdades de Guirlanda-Guerra (4.8) e com isso, posteriormente obter a ausência de quebra de simetria para este modelo, isso será enunciado no Teorema 4.2.1. Nas seções finais mostramos exemplos de como são os campos.

Aprofundando na teoria dos modelos de Sherrington e Kirpatrick e dos  $p$ -spin, podemos achar resultados parecidos a os lemas deste capítulo. A diferença é que o modelo de Ising com campo aleatório não é um *spin glass*, porque não tem frustração (ver Jesi [Jes16]) e também que as técnicas do modelo S-K e  $p$ -spin são próprias desses modelos. Podemos ver esses resultados no livro de Panchenko [Pan13], no artigo de Auffinger e Chen [AC16, AC18].

### 4.1 Introdução à quebra da simetria da réplica

**spin glasses** Os *spin glasses* ou vidros de spin são materiais magnéticos que apresentam aleatoriedade na interação dos spins e frustração<sup>1</sup>. Para estudar materiais que

---

<sup>1</sup>Um sistema tem frustração se tomamos circuitos fechados e multiplicamos todos os acoplamentos, e se o resultado for negativo dizemos que temos frustração (ver Jesi e Dasgupta [Jes16, pág. 10], [Das15]).

apresentam a propriedade dos *spin glasses*<sup>2</sup>, temos uma ampla literatura. Isso é devido a que o modelo permite estudar casos de outras teorias mais complexas, de uma forma simples. Outra coisa que o torna interessante, à teoria usada para estudar este tipo de materiais, é o fato desta possuir aplicabilidade a outras áreas, como: redes neuronais, códigos para o dobramento de proteínas, problema do caixeiro viajante, etc. (ver Jesi e Stein [Jes16, SN13]).

Os físicos vêm estudando os *spin glasses* desde a segunda metade do século XX, mas foi só no 1970 que Anderson [And70] usou termo pela primeira vez.

**Modelo de Sherrington-Kirpatrick** Posteriormente em 1975 [EA75], [EA76] Anderson criou um modelo simples e matematicamente capaz de descrever os fenômenos observados sobre *spin glasses*. Este modelo tem o seguinte hamiltoniano

$$H(\sigma) = \sum_{xy \in E(\Lambda_N)} J_{xy} \sigma_x \sigma_y - h \sum_{x \in \Lambda_N} \sigma_x.$$

Onde a parte aleatória está nos  $(J_{xy})$  a primeiros vizinhos, sendo cada  $J_{xy}$  independente e uniformemente distribuído. As distribuições mais comuns que costumamos ver na literatura são a gaussiana e a distribuição que assume  $\pm J$  com determinadas probabilidades.

Usualmente quando se tem um modelo complexo na Mecânica Estatística procura-se outro mais simples que se comporte em alguns aspectos como o modelo a ser estudado. O modelo simplificado que elimina em certa forma a dependência do espaço todo o conhecemos como *mean field model* (ver Stein [SN13, pág. 91]). Para o modelo de Edward-Anderson foi criado, poucos meses depois de aparecer, um modelo simplificado por David Sherrington e Scott Kirkpatrick [SK75], cujo hamiltoniano é da seguinte forma

$$H(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{1 \leq x < y \leq N} J_{xy} \sigma_x \sigma_y - h \sum_{1 \leq x \leq N} \sigma_x,$$

sendo  $x, y \in \{1, \dots, N\}$ . Com aleatoriedade nos  $(J_{xy})$  a longo alcance, sendo cada  $J_{xy}$  independente e uniformemente distribuído.

**Método das réplicas** Para solucionar o modelo S-K<sup>3</sup> usamos o método das réplicas que consiste em expressar o logaritmo como um limite de potências, da forma:

$$\mathbb{E}[\ln Z] = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[Z^n] - 1}{n}.$$

A esperança é com respeito a aleatoriedade das constantes de acoplamento  $\mathbf{J}$ , e a função de partição  $Z$  depende ainda do tamanho do volume  $N$  mas por simplicidade o escrevemos sem subíndice. Como

$$\mathbb{E}[Z^n] = \int Z^n \prod_{x < y} P(J_{xy}) dJ_{xy},$$

<sup>2</sup>Não confundir *spin glasses* com materiais que apresentam *glassy phase*, o primeiro só é um caso particular do segundo, os quais tem muita aplicabilidade na indústria [Jes16].

<sup>3</sup>Isso significa que podemos achar uma forma explícita para a energia livre como função dos parâmetros de ordem desse modelo.

dessa expressão podemos fazer expansões nas réplicas (Ver [Nis01]).

Quando estamos tratando com réplicas também temos os parâmetros dados por

$$q_{\alpha\beta} = \mathbb{E}[\langle \sigma_x^\alpha \sigma_x^\beta \rangle], \quad m_\alpha = \mathbb{E}[\langle \sigma_x^\alpha \rangle].$$

**Observação 4.1.1.** *Em Jesi [Jes16] vemos como caracterizar as fases do modelo spin glass quando temos dois parâmetros (volume infinito) dados por*

$$q = \mathbb{E}[\langle \sigma_x \rangle^2], \quad m = \mathbb{E}[\langle \sigma_x \rangle],$$

o primeiro é o parâmetro de ordem para o spin glass e o segundo é a magnetização. As fases do modelo são

- paramagnético em altas temperaturas:  $q = 0$  e  $m = 0$ ,
- ferromagnético:  $q > 0$  e  $m > 0$ ,
- spin glass a baixas temperaturas:  $q > 0$  e  $m = 0$ .

**Solução de réplica simétrica** Procuramos a solução do sistema e para isso fazemos a expansão de  $\mathbb{E}[Z^n]$  em termos das suas réplicas assim aparecem os termos  $q_{\alpha\beta}$  e  $m_\alpha$ . Em Sherrington e Kirkpatrick [SK75] forneceram a solução para o sistema, mas para tanto foi necessário *supor* que as réplicas são equivalentes, ou seja,  $q_{\alpha\beta} = q$ , para todo  $\alpha \neq \beta$  e  $m_\alpha = m$  (ver [Nis01, pag 17], [SN13, pag 95]). Essa solução funcionou bem para altas temperaturas, mas para baixas temperaturas produzia resultados não físicos e isso originava um problema.

**Quebra da simetria da réplica** O erro estava em supor que  $q_{\alpha\beta}$  para  $\alpha \neq \beta$  pode ser determinado por um só valor  $q$ , ou seja, considerar que todas as réplicas são simétricas. Parisi em [Par79] desenvolveu um método que conseguiu solucionar o problema. Embora ficaram algumas questões matemáticas não claras, a solução conseguia numericamente e experimentalmente ser boa. Posteriormente, em 2006 matemáticos como Talagrand mostraram rigorosamente esta técnica [Tal06]. Embora foi criada inicialmente para os problemas na solução do modelo SK, posteriormente viu-se que a quebra de simetria da réplica consegue dar muito mais informação sobre o modelo (ver Nishimori, Castellani e Cavagna [Nis01],[CC05]).

Em [Par02] Parisi deu a interpretação física da quebra de simetria. Podemos entender quebra de simetria da réplica como quando duas réplicas idênticas podem estar em diferentes estados. Também Parisi deu a definição que usaremos a seguir: dizemos que temos quebra da simetria da réplica quando o suporte da distribuição limite da sobreposição das réplicas tem mais de um ponto. Definamos a sobreposição como:

$$r_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^N \sigma_x^\alpha \sigma_x^\beta$$

**Observação 4.1.2.** *A definição (4.7) da Seção 4.2.1 é uma versão generalizada da sobreposição.*

Se  $P_{\mathbf{J}}(r)$  é a distribuição limite da sobreposição  $r$  num dado  $\mathbf{J}$ . Segundo Parisi [Par02] e Castellani [CC05] tem a seguinte forma

$$P_{\mathbf{J}}(r) = \langle \delta(r - r_{\alpha\beta}) \rangle = \sum_{\alpha\beta} w_{\alpha} w_{\beta} \delta(r - r_{\alpha\beta}),$$

onde  $\mathbf{J}$  representa a aleatoriedade nas interações,  $w_{\alpha}$  são pesos que surgem da expansão da medida configuracional ([CC05]).

Então, não temos quebra da simetria se somente temos uma função delta

$$P_{\mathbf{J}}(r) = \delta(r - r_{\alpha\beta}).$$

## 4.2 Apresentação do modelo

Dado  $n \geq 1$ , seja  $V_n = \mathbb{Z}^d \cap [1, n]^d$ ,  $d \geq 1$ , um subconjunto finito de vértices do reticulado hipercúbico  $d$ -dimensional com cardinalidade  $|V_n|$ .

A medida de Gibbs aleatória do RFIM no conjunto de configurações  $\{-1, 1\}^{V_n}$  é dado por

$$G_n(\sigma) = \frac{1}{Z_n} \exp\left(\beta \sum_{xy \in E(V_n)} \sigma_x \sigma_y + h \sum_{x \in V_n} g_x \sigma_x\right), \quad (4.1)$$

onde  $\beta$  e  $h$  são parâmetros positivos, chamados de temperatura inversa e força de campo, respectivamente. A função de partição  $Z_n = Z_n(\beta, h)$  entra na definição de  $G_n$  como um fator normalizante. Os  $g_x$ 's são variáveis aleatórias independentes e *não distribuídas identicamente* (que coletivamente são chamadas de desordem) da forma

$$g_x := h_x \zeta_x, \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d, \quad \sup_{x \in \mathbb{Z}^d} |h_x| \leq 1, \quad (4.2)$$

onde  $(\zeta_x)$  é uma desordem<sup>4</sup> arbitrária com as seguintes propriedades: as  $\zeta_x$ 's são variáveis aleatórias a valores reais independentes identicamente distribuídas (i.i.d.) com média 0 e variância 1 tal que  $\zeta_x^5$  é integrável. A sequência  $(h_x)$  é um campo magnético externo não nulo, não invariante tal que

$$\sum_{x \in V_n} |h_x| = o(|V_n|), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Para lembrar a definição de  $o$  pequeno e de  $O$  grande ver no apêndice a observação B.0.1.

**Exemplo 4.2.1.** *Como exemplo dos campos podemos tomar,  $h_x = h^* \|x\|^{-\alpha}$ , para  $x \neq 0$  e  $h_0 = h^*$ , com  $\alpha > 0$ ,  $h^* \in (0, 1)$  fixados, onde  $\|x - y\|$  denota a distância entre  $x$  e  $y$  na rede hiper-cúbica. De fato, se  $\alpha > d$ ,  $(h_x)$  é somável então (4.3) segue trivialmente. Também quando  $\alpha \leq d$ , o campo externo é não somável neste caso, mas a condição (4.3) é válida.*

<sup>4</sup>Usaremos este termo quando falarmos de campos magnéticos externos com aleatoriedade.

Mostremos que (4.3) é válida quando  $\alpha \leq d$ . Então

Seja  $h_x = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ ,  $\alpha \leq d$  logo

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} h_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^d} \sum_{r=1}^n \sum_{\substack{x \in V_n \\ \|x\|=r}} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^d} \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^\alpha} |\{x \in V_n : \|x\| = r\}|. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Usando a cota superior dada em Vila [Gab16, pag 170] em (4.4) temos

$$\begin{aligned} I &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^d} \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^\alpha} \frac{(2d-1)r^{d-1}}{4} \\ &\leq \frac{d-1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^d} \sum_{r=1}^n r^{d-1-\alpha}. \end{aligned}$$

Para achar o último limite usamos o critério de Stolz-Cesaro <sup>5</sup>. Como  $n^d$  é crescente e  $n^d \rightarrow \infty$  e

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{d-1-\alpha}}{(n+1)^d - n^d} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{d-1-\alpha}}{(n+1)^{d-1} + (n+1)^{d-2}n + \dots + n^{d-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \frac{1}{\sum_{i=1}^d \left(\frac{n}{n+1}\right)^{i-1}} = 0. \end{aligned}$$

Concluimos que  $I$  converge e vai para 0.

**Observação 4.2.1.** Tomando  $h_x = \pm 1$  e  $\zeta_x \sim N(0, 1)$  em (4.2) para todo  $x$ , a condição (4.3) não é satisfeita, mas isto não é requerido pela integração gaussiana por partes. Logo, com isso temos os resultados do artigo [Cha15] para o modelo de Ising com campo gaussiano.

**Observação 4.2.2.** O ideal seria considerar a condição: existe constantes  $c_1, d_1 > 0$  tais que

$$c_1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} |h_x| \quad e \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} |h_x| \leq d_1, \quad (4.5)$$

em vez da condição (4.3). Dada as técnicas usadas neste capítulo que incluem uma generalização da integração por partes, não podemos enfraquecer (4.3) pela condição (4.5). Observe que o campo magnético ( $h_x$ ) considerado aqui satisfaz a desigualdade do lado direito de (4.5) com  $d_1 = 1$ , mas não a condição do lado esquerdo.

<sup>5</sup>Sejam  $(a_n)$  e  $(b_n)$  seqüências tal que  $(b_n)$  é monótona crescente e  $b_n \rightarrow +\infty$ . Se  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ , com  $L \in \mathbb{R}$ . Então  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$ .

### 4.2.1 Algumas definições e resultados prévios

Para a função  $f : (\{-1, 1\}^{V_n})^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $m \geq 1$ , definimos

$$\begin{aligned} \langle f \rangle &:= \int f(\sigma^1, \dots, \sigma^m) dG_n(\sigma^1) \cdots dG_n(\sigma^m) \\ &= \frac{1}{Z_n^m} \sum_{\sigma^1, \dots, \sigma^m} f(\sigma^1, \dots, \sigma^m) \exp \left( \sum_{s=1}^m \left( \beta \sum_{\langle xy \rangle} \sigma_x^s \sigma_y^s + h \sum_x g_x \sigma_x^s \right) \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Seja  $\langle \cdot \rangle_{g=u}$  a esperança de Gibbs definida considerando  $g_x$  em  $\langle \cdot \rangle$  sendo  $u_x$ , para cada  $x \in V_n$ . A aleatoriedade dos  $g_x$ 's será representada pela medida não-gaussiana  $\gamma$  em  $\mathbb{R}^{n^d}$ . Seguindo a notação de Talagrand [Tal03], escrevemos

$$\nu(f) := \mathbb{E} \langle f \rangle = \int \langle f \rangle_{g=u} d\gamma(u).$$

Note que a esperança  $\mathbb{E}$  é com respeito à distribuição dos campos não-gaussianos  $\gamma$ . Os spins  $\sigma^1, \sigma^2, \dots$  são spins i.i.d. com respeito a medida de Gibbs (4.1), são conhecidas como **réplicas**, a **sobreposição generalizada** (ver Chatterjee [Cha09b]) entre duas réplicas  $\sigma^l, \sigma^s$  é definida como

$$R_{l,s} = R_{l,s}(\sigma^l, \sigma^s) := \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} (\mathbb{E} g_x^2)^{1-\delta_{l,s}} \sigma_x^l \sigma_x^s, \quad \forall l, s, \quad (4.7)$$

onde  $\delta$  é a função delta de Kronecker e  $\mathbb{E}(g_x g_y) = \delta_{x,y} h_x h_y$ .

Sem perda de generalidade, assumimos que a constante determinística (com respeito à aleatoriedade do campo)  $R_{l,l}$  é igual a 1 para todo  $\sigma^l$ . Note que  $|R_{l,s}| \leq 1$  (pela desigualdade de Schwartz) e que a matriz aleatória infinita  $R = (R_{l,s})_{l,s \geq 1}$  é simétrica, não negativa definida, **fracamente permutável** (isto é,  $(R_{l,s})_{1 \leq l, s \leq m}$  e  $(R_{\rho(l), \rho(s)})_{1 \leq l, s \leq m}$  tem a mesma distribuição, para qualquer permutação  $\rho : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$  e para qualquer  $m \geq 1$ ). A matriz  $R$  satisfaz as **identidades de Ghirlanda-Guerra** (ver Aizenman, Contucci e Ghirlanda e Guerra [AC98, GG98]) se para qualquer  $m \geq 2$  e qualquer função mensurável  $f = f((R_{l,s})_{1 \leq l, s \leq m})$ ,

$$\nu(f R_{1,m+1}) - \frac{1}{m} \nu(f) \nu(R_{1,2}) - \frac{1}{m} \sum_{s=2}^m \nu(f R_{1,s}) \xrightarrow[n]{} 0, \quad (4.8)$$

em quase todo  $(\beta, h)$ .

Para todo  $(\beta, h) \in (0, \infty)^2$ , seja

$$F_n = F_n(\beta, h) := \log Z_n, \quad \psi_n = \psi_n(\beta, h) := \frac{F_n}{|V_n|}, \quad p_n = p_n(\beta, h) := \mathbb{E} \psi_n, \quad (4.9)$$

onde  $\psi_n$  é proporcional à **energia livre** e  $p_n$  é o valor esperado de  $\psi_n$ .

A seguir, mostraremos que a **pressão a volume infinita existe**. A seguinte prova está inspirada em Chatterjee [Cha15, lem. 2.1].

**Lema 4.2.1.** *Para cada  $\beta$  positivo e  $h$ , o limite  $p = p(\beta, h) := \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$  existe e é finito.*

**Demonstração.** Definamos  $Z_n = Z_n(\beta, h)$ ,  $F_n = F_n(\beta, h)$  e  $p_n = p_n(\beta, h)$  para  $\beta$  e  $h$  fixados. Definiremos o número  $l := mn$ , onde  $m$  e  $n$  são dois números inteiros. Então podemos partir a caixa  $V_l$  em  $m^d$  sub caixas distintas  $V_n$  que chamaremos de ‘bloques’. E prosseguindo definimos um novo hamiltoniano em  $V_l$ . Desta vez tiramos da soma os termos  $\sigma_x \sigma_y$  sempre e quando  $x$  e  $y$  estejam em dois blocos distintos. Para este novo hamiltoniano definimos uma nova função de partição  $Z'_l$ . Com isto temos

$$e^{-\beta L} \leq \frac{Z'_l}{Z_l} \leq e^{\beta L},$$

onde  $L$  é o número de arestas. Notamos que  $L \leq C(d)n^{d-1}m^d$ , onde  $C(d)$  é uma constante que depende da dimensão  $d$ . Logo, segue que

$$|\log Z'_l - \log Z_l| \leq C(d)\beta n^{d-1} m^d.$$

Como temos que  $Z'_l$  fica fatorado em  $m^d$  termos independentes, cada um das quais tem a mesma distribuição que  $Z_n$ . Temos  $\mathbb{E}(\log Z_l) = m^d \mathbb{E}(F_n)$ . Assim, deduzimos

$$\begin{aligned} |p_n - p_l| &= |n^{-d} \mathbb{E}(F_n) - l^{-d} \mathbb{E}(F_l)| = l^{-d} |m^d \mathbb{E}(F_n) - \mathbb{E}(F_l)| \\ &\leq l^{-d} C(d) \beta n^{d-1} m^d = C(d) \beta n^{-1}. \end{aligned}$$

O mesmo também se pode fazer para  $m$ . Logo, obtemos  $|p_m - p_l| \leq C(d) \beta m^{-1}$ . Dos dois resultados anteriores temos que  $|p_m - p_n| \leq C(d) \beta (m^{-1} + n^{-1})$ . Isto permite notar que  $p_n$  é uma sequência de Cauchy e portanto convergente. Para mostrar que o limite é finito, usamos a desigualdade de Jensen e que  $\mathbb{E}[p_n] = n^{-d} \mathbb{E}(F_n)$ .  $\square$

Continuamos apresentando mais propriedades das funções  $p$ ,  $F_n$ ,  $\psi_n$  e  $p_n$ .

**Lema 4.2.2.** *O limite  $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$  é uma função convexa de  $h$  para cada  $\beta$  fixo. O mesmo é verdade para  $F_n$ ,  $\psi_n$  e  $p_n$ .*

**Demonstração.** Só temos que derivar duas vezes  $F_n$  com respeito a  $h$ . Isso nos fornece

$$\frac{\partial F_n}{\partial h} = \sum_{x \in V_n} \beta g_x \langle \sigma_x \rangle$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_n}{\partial h^2} &= \sum_{x, y \in V_n} \beta^2 g_x g_y [\langle \sigma_x \sigma_y \rangle - \langle \sigma_x \rangle \langle \sigma_y \rangle] \\ &= \beta^2 \left[ \left\langle \left( \sum_{x \in V_n} g_x \sigma_x \right)^2 \right\rangle - \left\langle \sum_{x \in V_n} g_x \sigma_x \right\rangle^2 \right]. \end{aligned}$$

Notamos que  $F_n$  é uma função convexa em  $h$ . Assim, também  $\psi_n$ ,  $p_n = \mathbb{E}[F_n]/|V_n|$  e em consequência  $p$  é convexa em  $h$ .  $\square$

Já temos enunciado a desigualdade FKG no Teorema 1.2.3. Para o caso quando o campo é aleatório o enunciamos da seguinte forma.

**Lema 4.2.3.** *Seja  $f$  e  $g$  duas funções monótonas não-decrescentes no espaço de configurações  $\{-1, 1\}^{V_n}$ . Logo  $\langle fg \rangle \geq \langle f \rangle \langle g \rangle$ .*

**Demonstração.** Note que é suficiente verificar que para qualquer valor do campo aleatório, a medida de Gibbs do modelo satisfaz a condição de rede [FKG71] ou em den Hollander [dHK86].

Sendo  $\sigma_1 \wedge \sigma_2 := (\max \sigma_{1x}, \sigma_{2x})_{x \in V_n}$  e  $\sigma_1 \vee \sigma_2 := (\min \sigma_{1x}, \sigma_{2x})_{x \in V_n}$  temos que mostrar que a medida de probabilidade satisfaz,  $\mu(\sigma_1 \wedge \sigma_2)\mu(\sigma_1 \vee \sigma_2) \geq \mu(\sigma_1)\mu(\sigma_2)$ , para todo  $\sigma_1, \sigma_2 \in \{-1, 1\}^{V_n}$ . Fazendo  $\eta = \sigma_1 \wedge \sigma_2$  e  $\xi = \sigma_1 \vee \sigma_2$ , temos

$$e^{\beta \sum_{xy \in E(V_n)} (\eta_x \eta_y + \xi_x \xi_y) + h \sum_{x \in V_n} g_x (\eta_x + \xi_x)} \geq e^{\beta \sum_{xy \in E(V_n)} (\sigma_{1x} \sigma_{1y} + \sigma_{2x} \sigma_{2y}) + h \sum_{x \in V_n} g_x (\sigma_{1x} + \sigma_{2x})}.$$

A última desigualdade é verdade já que  $(\eta_x \eta_y + \xi_x \xi_y) \geq (\sigma_{1x} \sigma_{1y} + \sigma_{2x} \sigma_{2y})$  e  $\eta_x + \xi_x = \sigma_{1x} + \sigma_{2x}$ . Posteriormente, podemos continuar como na prova do FKG em Bovier [Bov06, pág. 68].  $\square$

A seguir, definiremos o conjunto dos pontos onde não temos diferenciabilidade de  $p$  para em seguida podermos trabalhar no complemento desse conjunto.

**Lema 4.2.4.** *Seja  $\mathcal{A}$  o conjunto de todos os  $(\beta, h) \in (0, \infty)^2$  tal que a função  $p$  não é diferenciável em  $h$  no ponto  $(\beta, h)$ . O conjunto  $\mathcal{A}$  tem medida de Lebesgue zero. Além disso, para cada  $\beta$ , o conjunto de todos  $h$  tal que  $(\beta, h) \in \mathcal{A}$  é contável.*

**Demonstração.** Para  $\beta$  fixado e como pelo Lema 4.2.2 temos que  $\frac{dp}{dh}$  é uma função monótona, podemos usar o Teorema de Darboux-Froda que estabelece que: uma função a valores reais, definida num intervalo  $(a, b)$  com  $a \geq -\infty$  e  $b \leq +\infty$  tem um conjunto contável de descontinuidades. Logo,  $p$  tem um conjunto contável de pontos onde não é diferenciável. E como todo conjunto contável tem medida de Lebesgue zero temos terminado a prova.  $\square$

Também podemos expressar o conjunto  $\mathcal{A}$  da seguinte maneira

$$\mathcal{A} := \left\{ (\beta, h) \in (0, \infty)^2 : \frac{\partial p}{\partial h^-}(\beta, h) \neq \frac{\partial p}{\partial h^+}(\beta, h) \right\}. \quad (4.10)$$

## 4.2.2 O resultado principal

Dizemos que o sistema tem **quebra da simetria da réplica** (seguindo a definição de Parisi [Par02]) Se o suporte da distribuição limite das sobreposições, quando  $n \rightarrow \infty$ , tem mais de um ponto no seu suporte.

Neste capítulo mostramos que temos a ausência da quebra da simetria da réplica para o modelo de Ising com campo aleatório (resumiremos isso por suas iniciais em inglês RFIM) com a sobreposição generalizada. Isto é mostramos que para qualquer  $(\beta, h) \notin \mathcal{A}$  existe uma constante  $q_{\beta, h} \in [-1, 1]$  tal que  $q$  é um ponto da distribuição concentrada em  $q_{\beta, h}$ .

Uma condição suficiente para provar isto é verificar a convergência em média quadrática,

$$\nu \left( (R_{1,2} - q_{\beta, h})^2 \right) \xrightarrow{n} 0. \quad (4.11)$$

**Teorema 4.2.1 ( Ausência da quebra da simetria para o RFIM ).** *Para qualquer  $(\beta, h) \notin \mathcal{A}$  tal que a variância de  $F_n$  não cresce mais rápido que  $|V_n|$ , isso é*

$$\text{Var}(F_n) \leq C|V_n|, \quad (4.12)$$

onde  $F_n$  é como em (4.9) e  $C > 0$  é alguma constante que depende dos parâmetros  $\beta$  e  $h$ , o limite a volume infinito. Então,

- o  $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(R_{1,2})$ , existe,
- e a variância de sobreposições (generalizadas)  $R_{1,2}$  desaparece

$$\nu\left((R_{1,2} - \nu(R_{1,2}))^2\right) \xrightarrow{n} 0.$$

Isto é, a sobreposição  $R_{1,2}$  é auto-promediado<sup>6</sup> no RFIM definida por (4.1)–(4.2). Além disso, existe uma constante  $q_{\beta,h} \in [-1, 1]$  tal que (4.11) é satisfeita.

**Observação 4.2.3.** *Se  $(\zeta_x)$  em (4.2) é uma desordem gaussiana, note que a desigualdade (4.12) fica satisfeita usando a desigualdade de Poincaré para a medida gaussiana [Led01]. Noutro caso, não podemos garantir a desigualdade de Poincaré. Na seção 4.5 consideramos uma classe de desordens não gaussianas  $(\zeta_x)$ , onde usamos transformações não lineares para garantir essa desigualdade.*

O Teorema 4.2.1 fornece uma extensão do Teorema 1.1. de [Cha15] para o RFIM com campo não gaussiano (4.2).

## 4.3 Ideia da prova

Nesta seção resumiremos como foi que o Teorema 4.2.1 foi obtido:

- A propriedade FKG do RFIM:* Se  $f$  e  $g$  são duas funções crescentes monótonas no espaço de configurações  $\{-1, 1\}^{V_n}$ , então  $\langle fg \rangle \geq \langle f \rangle \langle g \rangle$ .
- Uma integração gaussiana generalizada por partes:* Se  $f = f((R_{l,s})_{1 \leq l, s \leq m}) : \mathbb{R}^{m(m-1)/2} \rightarrow [-1, 1]$  é uma função mensurável limitada das sobreposições que não mudam com  $n$ , usando o Teorema de Taylor (veja Proposição B.1.1 e B.1.2 no Apêndice) e as condições (4.3), (4.12), mostramos que

$$\sum_x \mathbb{E}(g_x \langle \sigma_x^1 f \rangle) - \sum_x \mathbb{E}(g_x^2) \mathbb{E}\left(\frac{\partial \langle \sigma_x^1 f \rangle}{\partial g_x}\right) = o(|V_n|), \quad (4.13)$$

$$\sum_{x,y} \mathbb{E}(g_x g_y (F_n - \mathbb{E}F_n)) - \sum_{x,y} \mathbb{E}(g_x^2) \mathbb{E}(g_y^2) \mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 F_n}{\partial g_x \partial g_y}\right) = o(|V_n|^2), \quad (4.14)$$

$$\sum_{x,y} \mathbb{E}(g_x g_y \langle \sigma_x; \sigma_y \rangle) - \sum_{x,y} \mathbb{E}(g_x^2) \mathbb{E}(g_y^2) \mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \langle \sigma_x; \sigma_y \rangle}{\partial g_x \partial g_y}\right) = o(|V_n|^2), \quad (4.15)$$

no limite  $n \rightarrow \infty$ , onde  $F_n$  é como em (4.9) e  $\langle \sigma_x; \sigma_y \rangle := \langle \sigma_x \sigma_y \rangle - \langle \sigma_x \rangle \langle \sigma_y \rangle$  denota a correlação de dois pontos truncada para a medida de Gibbs no volume finito definido por (4.1) – (4.2).

---

<sup>6</sup>*Self-averaging* em inglês significa que uma propriedade pode ser descrita bastando tomar uma amostra suficientemente grande

- (iii)  $\mathbb{E} \left( \langle R_{1,2}^2 \rangle - \langle R_{1,2} \rangle^2 \right) = o(1)$  e  $\nu \left( (m(\sigma) - \langle m(\sigma) \rangle)^2 \right) = o(1)$ , quando  $n \rightarrow \infty$  (Lema 4.4.1), onde  $m(\sigma) := \sum_x \sigma_x / |V_n|$  define a magnetização. A prova deste item segue da desigualdade FKG e a igualdade (4.14).
- (iv) Posteriormente mostramos  $\nu \left( |H_n - \nu(H_n)| \right) = o(1)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , para todo  $(\beta, h) \in \mathcal{A}^c$  (ver Lema 4.4.3). Seguindo os mesmos passos como o Lema 2.7 em [Cha15], obtemos que para todo  $(\beta, h) \in \mathcal{A}^c$ , o seguinte  $\nu(H_n) \xrightarrow[n]{\frac{\partial p}{\partial h}}(\beta, h)$  e  $\mathbb{E} | \langle H_n \rangle - \nu(H_n) | \xrightarrow[n]{} 0$ . Combinando estes dois limites com a igualdade (4.15) temos a prova deste item.
- (v) *As identidades de Ghirlanda-Guerra* (Lema 4.4.4): para qualquer função mensurável  $f : \mathbb{R}^{m(m-1)/2} \rightarrow [-1, 1]$ , usando (4.13), mostramos que

$$\nu(H_n(\sigma^1)f) - h \nu \left( \left( \sum_{s=1}^m R_{1,s} - mR_{1,m+1} \right) f \right) = O(|V_n|). \quad (4.16)$$

Equivalentemente, a diferença

$$\nu \left( H_n(\sigma^1)f \right) - \nu(H_n)\nu(f)$$

aproxima-se para

$$h \nu \left( \left( \nu(R_{1,2}) + \sum_{s=2}^m R_{1,s} - mR_{1,m+1} \right) f \right),$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . (Esta última expressão é zero quando o campo é gaussiano, pela integração gaussiana por partes).

Combinando a última aproximação com o limite  $\mathbb{E} | \langle H_n \rangle - \nu(H_n) | \xrightarrow[n]{} 0$  dado em (iv), concluímos que as identidades de Ghirlanda-Guerra (4.8) são satisfeitas.

Finalmente, usando as propriedades da simetria das sobreposições  $R_{l,s}$ , dos itens (v) e (iii), segue que a variância de  $R_{1,2}$ , com respeito a  $\nu$ , converge a zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Então é suficiente provar que o limite de  $\nu(R_{1,2})$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , existe. De fato, tomando  $f = m = 1$  em (4.16) e usando o limite  $\nu(H_n) \xrightarrow[n]{\frac{\partial p}{\partial h}}(\beta, h)$  dado em (iv), obtemos que  $\nu(H_n) = h \left( 1 - \nu(R_{1,2}) \right) + o(|V_n|) \xrightarrow[n]{\frac{\partial p}{\partial h}}(\beta, h)$  e a prova do teorema segue de considerando  $q_{\beta,h} := 1 - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial h}(\beta, h)$ .

Será frequente o uso da integração gaussiana por partes por isso apresentamos esta técnica a seguir.

### 4.3.1 Integração por partes para variáveis aleatórias.

Na literatura de probabilidade geralmente usam o termo, integração por partes gaussiana ou integração por partes simplesmente (ver Chatterjee ou Talagrand [Cha15, Tal03]), o que pode gerar dores de cabeça para o leitor inexperiente, que o confunda com a integração por partes usual do cálculo.

### Integração por partes gaussiana

**Integração por partes gaussiana para uma variável.** Para mostrar isto enunciaremos

**Proposição 4.3.1.** *Seja  $g, f, h \in C_b^\infty(\mathbb{R})$  tais que  $g(t) = t h(t)$  e  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} h(t) f(t) e^{-t^2/2\sigma^2} = 0$ , com  $\sigma > 0$ . Então*

$$\int g(t) f(t) e^{-t^2/2\sigma^2} dt = \sigma^2 \int [h'(t) f(t) + f'(t) h(t)] e^{-t^2/2\sigma^2} dt.$$

Se escrevemos em termos probabilísticos temos a *integração por partes gaussiana*. Em alguns textos é o chamado de *Lema de Stein*, em homenagem ao matemático-estatístico Charles Max Stein, que foi o criador do método, para limitar a distância entre duas distribuições [Ste72].

**Observação 4.3.1 ( Integração por partes gaussiana).** *Se a variável aleatória  $g$  tem distribuição  $N(0, \sigma^2)$  e  $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ . Então*

$$\mathbb{E}[g f(g)] = \mathbb{E}[g^2] \mathbb{E}[f'(g)].$$

Mais informação sobre a integração por partes gaussiana para uma e várias variáveis a podemos achar em Talagrand [Tal03, Ap. A6].

**Integração por partes gaussiana para funções de múltiplas variáveis.** Similarmente à fórmula anterior temos uma outra para quando trabalhamos com vetores aleatórios.

**Proposição 4.3.2.** *Seja  $\mathbf{X} := (X_1, \dots, X_n)$  um vetor aleatório gaussiano centrado,  $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$  e  $\delta_{lk} := \text{Cov}(X_l, X_k)$  com  $\partial_k$  representando a derivada parcial respeito a  $k$ . Então*

$$\mathbb{E}[X_l f(\mathbf{X})] = \sum_{k=1}^n \delta_{lk} \mathbb{E}[\partial_k f(\mathbf{X})].$$

**Observação 4.3.2.** *As componentes  $X_l$  não precisam ser independentes nem identicamente distribuídas.*

**Integração por partes para variáveis aleatórias não gaussianas.**

Muitas vezes vamos querer derivar expressões no interior de esperanças, embora quando não tenham distribuição gaussiana, mas sim outra.

**Proposição 4.3.3.** *Seja  $g$  a variável aleatória real com média zero e variância  $\sigma^2$ . Então para  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com derivada de terceira ordem contínua e limitada. Então*

$$\mathbb{E}[g f(g)] = \sigma^2 \mathbb{E}[\partial_x f(g)] + \gamma_g^2 [\partial_x^2 f],$$

onde

$$\gamma_g^2 [\partial_x^2 f] := \mathbb{E} \left[ g \int_0^g (g-x) \partial_x^2 f(x) dx \right] - \sigma^2 \mathbb{E} \left[ \int_0^g (g-x) \partial_x^3 f(x) dx \right].$$

A primeira esperança de  $\gamma_g^2$  está bem definida, já que

$$\left| g \int_0^g (g-x) \partial_x^2 f(x) dx \right| \leq |g| \int_0^{|g|} \min\{2 \|\partial_x f\|_\infty, \|\partial_x^2 f\|_\infty x\} dx.$$

**Demonstração.** A prova deste resultado pode ser encontrada no artigo de Yu-Ting Chen [Che19] e é como segue:

Começamos usando a fórmula de Taylor

$$\begin{aligned} gf(g) &= gf(0) + g^2 \partial_x f(0) + g \int_0^g (g-x) \partial_x^2 f(x) dx \\ &= gf(0) + g^2 \partial_x f(0) + \sigma^2 \int_0^g \partial_x^2 f(x) dx \\ &\quad + \sigma^2 \int_0^g \left( -\partial_x^2 f(g) + \int_y^g \partial_x^3 f(x) dx \right) dy + g \int_0^g (g-x) \partial_x^2 f(x) dx. \end{aligned}$$

e usando o teorema fundamental do cálculo observemos

$$\int_0^g -\partial_x^2 f(g) dx = -g \partial_x^2 f(0) - g \int_0^g \partial_x^3 f(x) dx$$

Posteriormente tomando esperança e devido a que  $\mathbb{E}[g] = 0$  e  $\mathbb{E}[g^2] = \sigma^2$  temos

$$\mathbb{E}[gf(g)] = \sigma^2 \mathbb{E}[\partial_x f(g)] + \gamma_g^2 [\partial_x^2 f].$$

□

Há formas mais gerais, para múltiplas variáveis, deste tipo de integração por partes que estão apresentadas no Apêndice B.1.

## 4.4 Resultados para a prova

Antes de iniciar os detalhes da prova do teorema principal deste capítulo, enunciaremos e provaremos alguns resultados (proposições e lemas) que facilitarão a apresentação do trabalho.

Para ter a prova da seguinte proposição é muito importante a hipótese (4.12).

**Proposição 4.4.1.** *Para qualquer  $n$  e qualquer  $(\beta, h) \in (0, \infty)^2$ , existe uma aplicação  $\mathcal{L} : V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\sum_{x,y \in V_n} \left( h_x h_y \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 F_n}{\partial g_x \partial g_y} \right) + \mathcal{L}(x, y) \right)^2 - \sum_{x \in V_n} \left( h_x^2 + \mathcal{L}(x, x) \right)^2 \leq 2C|V_n|,$$

com  $C$  a mesma constante como em (4.12).

**Demonstração.** Sejam  $F := F_n - \mathbb{E}F_n$  e denotemos  $W$ s por o conjunto de todos os pares desordenados  $\{x, y\}$ , donde  $x, y \in V_n$  e  $x \neq y$ . Para cada  $e = \{x, y\} \in W$ , seja

$$s_e := \zeta_x \zeta_y, \quad c_e := \mathbb{E}(s_e F) \quad \text{and} \quad S := \sum_{e \in W} c_e s_e,$$

onde  $\zeta_x$  é como em (4.2). Dado que  $\zeta_x$  tem média zero e variância unitária para todo  $x$ , para todo  $e \neq e'$  em  $W$ ,  $\mathbb{E}(s_e s_{e'}) = 0$ , e para todo  $e$ ,  $\mathbb{E}s_e^2 = 1$ . Assim,  $\mathbb{E}S^2 = \sum_e c_e^2 = \sum_e \mathbb{E}(c_e s_e F) = \mathbb{E}(SF)$ . Consequentemente,  $\mathbb{E}F^2 = \mathbb{E}(F - S)^2 + \mathbb{E}S^2$ . Logo, usando a hipótese (4.12), segue

$$\sum_{e \in W} c_e^2 = \mathbb{E}S^2 \leq \mathbb{E}F^2 = \text{Var}(F_n) \leq C|V_n|. \quad (4.17)$$

Seja  $F_{x,y}(u, v)$  a função definida fixando  $g_x$  e  $g_y$  em  $F$  sendo  $u$  e  $v$  respectivamente, para qualquer  $e = \{x, y\}$ . Aplicando uma integração gaussiana por partes generalizada (ver Proposição B.1.2 no Apêndice), com  $f_{x,y}(u, v) := \mathbb{E}F_{x,y}(u, v)$ , temos

$$h_x h_y c_e = \mathbb{E}(g_x g_y F) = h_x^2 h_y^2 \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 f_{x,y}}{\partial g_x \partial g_y} \right) + \gamma_{g_x, g_y}^2(f_{x,y}), \quad (4.18)$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma_{g_x, g_y}^2(f_{x,y}) &:= \mathbb{E} \left( g_x g_y \int_0^{g_x} \int_0^{g_y} (g_x - u) \frac{\partial^3 f_{x,y}}{\partial u^2 \partial v} du dv \right) \\ &\quad - h_x^2 h_y^2 \mathbb{E} \left( \int_0^{g_x} \int_0^{g_y} (g_x - u) \frac{\partial^5 f_{x,y}}{\partial u^3 \partial v^2} du dv \right) \\ &\quad - h_x^2 h_y^2 \mathbb{E} \left( \int_0^{g_x} (g_x - u) \frac{\partial^4 f_{x,y}(u, 0)}{\partial u^3 \partial v} du + \int_0^{g_y} (g_y - v) \frac{\partial^4 f_{x,y}(0, v)}{\partial u \partial v^3} dv \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Combinando (4.17) e (4.18), temos

$$\begin{aligned} &\sum_{x,y} \left( h_x h_y \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 f_{x,y}}{\partial g_x \partial g_y} \right) + (h_x h_y)^{-1} \gamma_{g_x, g_y}^2(f_{x,y}) \right)^2 \\ &\leq \sum_{x \neq y} \left( h_x h_y \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 f_{x,y}}{\partial g_x \partial g_y} \right) + (h_x h_y)^{-1} \gamma_{g_x, g_y}^2(f_{x,y}) \right)^2 + \sum_x \left( h_x^2 + h_x^{-2} \gamma_{g_x, g_x}^2(f_{x,y}) \right)^2 \\ &\leq 2C|V_n| + \sum_x \left( h_x^2 + h_x^{-2} \gamma_{g_x, g_x}^2(f_{x,y}) \right)^2. \end{aligned}$$

Assim, tomando  $\mathcal{L}(x, y) := (h_x h_y)^{-1} \gamma_{g_x, g_y}^2(f_{x,y})$  a prova da proposição segue.  $\square$

A propriedade FKG para o RFIM e a Proposição 4.4.1 têm um importante lugar na prova do seguinte resultado.

**Proposição 4.4.2.** *Para quaisquer  $n$  e  $(\beta, h) \in (0, \infty)^2$  existe uma aplicação  $\mathcal{L} : V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\mathbb{E} \left( \langle R_{1,2}^2 \rangle - \langle R_{1,2} \rangle^2 \right) \leq \frac{2}{h^2} \left( \frac{\sqrt{2C} + 1}{\sqrt{|V_n|}} + \sqrt{\frac{1}{|V_n|^2} \sum_{x \in V_n} \mathcal{L}^2(x, x)} \right) - \frac{2G_{\mathcal{L}}}{h^2 |V_n|^2},$$

com  $C$  a mesma constante como em (4.12) e  $G_{\mathcal{L}} := \sum_{x,y \in V_n} h_x h_y \mathcal{L}(x, y)$ .

**Demonstração.** Conhecemos

$$\frac{1}{h^2} \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial g_x \partial g_y} \right) = \mathbb{E} \langle \sigma_x; \sigma_y \rangle, \quad (4.20)$$

onde  $\langle \sigma_x; \sigma_y \rangle$  é a correlação truncada de dois pontos definida em (4.15). Pela desigualdade FKG,  $\mathbb{E} \langle \sigma_x; \sigma_y \rangle \geq 0$  para cada  $x, y$ . Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \langle R_{1,2}^2 \rangle - \langle R_{1,2} \rangle^2 \right) &= \frac{1}{|V_n|^2} \sum_{x,y} h_x^2 h_y^2 \mathbb{E} \left( \langle \sigma_x; \sigma_y \rangle \left( \langle \sigma_x \sigma_y \rangle + \langle \sigma_x \rangle \langle \sigma_y \rangle \right) \right) \\ &\leq \frac{2}{h^2 |V_n|^2} \sum_{x,y} h_x^2 h_y^2 \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial g_x \partial g_y} \right), \end{aligned}$$

onde na desigualdade usamos (4.20) e a limitação por cima  $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle + \langle \sigma_x \rangle \langle \sigma_y \rangle \leq 2$ . Note que,  $|h_x| \leq 1$  para todo  $x$  e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz o termo do lado direito da desigualdade acima é limitado superiormente por

$$\frac{2}{h^2 |V_n|^2} \left( \sqrt{\sum_{x,y} h_x^2 h_y^2 \sum_{x,y} \left( h_x h_y \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial g_x \partial g_y} \right) + \mathcal{L}(x,y) \right)^2} - G_{\mathcal{L}} \right),$$

onde  $\mathcal{L}(x,y) = (h_x h_y)^{-1} \gamma_{g_x, g_y}^2(f_{x,y})$ . Pela proposição 4.4.1 e pela desigualdade de Minkowski, a expressão da raiz acima, vai estar limitada por

$$\frac{2}{h^2} \left( \frac{\sqrt{2C} + 1}{\sqrt{|V_n|}} + \sqrt{\frac{1}{|V_n|^2} \sum_x \mathcal{L}^2(x,x)} \right).$$

Portanto, a prova da proposição está completa.  $\square$

A desigualdade dada pela proposição 4.4.2 permitirá provar que, em média, a variância da sobreposição  $R_{1,2}$ , com respeito à medida de Gibbs (4.1), converge a zero no limite termodinâmico.

**Lema 4.4.1.** *Para quaisquer  $n$  e  $(\beta, h) \in (0, \infty)^2$ ,*

$$\mathbb{E} \left( \langle R_{1,2}^2 \rangle - \langle R_{1,2} \rangle^2 \right) \xrightarrow{n} 0.$$

**Demonstração.** A proposição 4.4.2 é suficiente para provar

$$\frac{1}{|V_n|^2} \sum_{x \in V_n} \left( h_x^{-2} \gamma_{g_x, g_x}^2(f_{x,x}) \right)^2 \xrightarrow{n} 0 \quad \text{and} \quad \frac{1}{|V_n|^2} \sum_{x,y \in V_n} \gamma_{g_x, g_y}^2(f_{x,y}) \xrightarrow{n} 0, \quad (4.21)$$

onde  $\gamma_{g_x, g_y}^2(f_{x,y})$  é como em (4.19). Dado que  $\left| \frac{\partial^{i+j} F_{x,y}(u,v)}{\partial u^i \partial v^j} \right| \leq C_{ij} h^{i+j}$ , para alguma constante  $C_{ij} > 0$  dependendo nos índices  $i, j$ , segue que

$$\left| \int_0^{g_x} \int_0^{g_y} (g_x - u) \frac{\partial^5 f_{x,y}(u,v)}{\partial u^3 \partial v^2} du dv \right| \leq \frac{C_{32} h^5 h_x^2 |h_y|}{2} \zeta_x^2 \zeta_y \quad (4.22)$$

e pelos itens (B.6)–(B.8) da proposição B.1.1, temos que

$$\left| g_x g_y \int_0^{g_x} \int_0^{g_y} (g_x - u) \frac{\partial^3 f_{x,y}(u,v)}{\partial u^2 \partial v} du dv \right| \leq \frac{C_{21} h^3 |h_x|^3 h_y^2}{2} |\zeta_x|^3 \zeta_y^2, \quad (4.23)$$

$$\left| \int_0^{g_x} (g_x - u) \frac{\partial^4 f_{x,y}(u,0)}{\partial u^3 \partial v} du \right| \leq \int_0^{|g_x|} \left\| \frac{\partial^4 f_{x,y}}{\partial u^3 \partial v} \right\|_{\infty} u du \leq \frac{C_{31} h^4 h_x^2}{2} \zeta_x^2, \quad (4.24)$$

$$\left| \int_0^{g_y} (g_y - v) \frac{\partial^4 f_{x,y}(0,v)}{\partial u \partial v^3} dv \right| \leq \int_0^{|g_y|} \left\| \frac{\partial^4 f_{x,y}}{\partial u \partial v^3} \right\|_{\infty} v dv \leq \frac{C_{13} h^4 h_y^2}{2} \zeta_y^2. \quad (4.25)$$

Usando a definição de  $\gamma_{g_x, g_y}^2(f_{x,y})$  em (4.19) e tomando  $x = y$  nas desigualdades (4.22)–(4.25), segue que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_n|^2} \sum_x \left( h_x^{-2} \gamma_{g_x, g_x}^2(f_{x,y}) \right)^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C}{|V_n|^2} \sum_x h_x^4 (\mathbb{E} |\zeta_x|^5)^2 = 0,$$

onde  $C := (C_{21} + C_{32}h^2 + C_{31}h + C_{13})^2h^6/4$ . A última igualdade segue de (4.3) e da suposição de que os  $\zeta_x$  são identicamente distribuídos e satisfazem  $\mathbb{E}|\zeta_x|^5 < \infty$ . Portanto, o limite do lado esquerdo de (4.21) segue.

Similarmente, usando a definição de  $\gamma_{g_x, g_y}^2(f_{x,y})$  em (4.19) e as inequações (4.22) – (4.25), está provado que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_n|^2} \sum_{x,y} |\gamma_{g_x, g_y}^2(f_{x,y})| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{C}}{|V_n|^2} \sum_{x,y} h_x^2 h_y^2 (\mathbb{E}|\zeta_x|^3 + \mathbb{E}|\zeta_y| + 2) = 0,$$

onde  $\tilde{C} := \max\{C_{21}, C_{32}h^2, C_{31}h, C_{13}h\}h^3/2$ . Novamente, a última igualdade segue a hipótese (4.3) e da suposição de que os  $\zeta_x$  são identicamente distribuídos e satisfazem  $\mathbb{E}|\zeta_x|^3 < \infty$ . Então o limite do lado direito de (4.21) é válido e da prova do lema está completa.  $\square$

Assim, definimos

$$H_n = H_n(\sigma) := \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} g_x \sigma_x. \quad (4.26)$$

**Observação 4.4.1.** *Observe que o valor absoluto da covariância entre  $H_n(\sigma^l)$  e  $H_n(\sigma^s)$  não cresce mais rápido que o valor absoluto da sobreposição  $R_{l,s}$  (4.7) entre duas réplicas  $\sigma^l, \sigma^s$ .*

Lembre-se do conjunto  $\mathcal{A}$  definido em (4.10) e seja  $\mathcal{A}^c$  o complemento de  $\mathcal{A}$  em  $\mathbb{R}^2$ .

**Lema 4.4.2.** *Como  $\langle H_n \rangle = \frac{\partial \psi_n}{\partial h}$ ,  $\nu(H_n) = \frac{\partial p_n}{\partial h}$ ,  $\text{Var}(F_n) \leq C|V_n|$  (Hipótese (4.12)) e  $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$  existe e é finito para todos  $(\beta, h)$ , por argumentos de convexidade da função  $h \mapsto \psi_n(\beta, h)$  segue que: para quaisquer  $(\beta, h) \in \mathcal{A}^c$ ,*

$$\nu(H_n) \xrightarrow{n} \frac{\partial p}{\partial h}(\beta, h), \quad \mathbb{E}|\langle H_n \rangle - \nu(H_n)| \xrightarrow{n} 0.$$

*Para mais detalhes sobre a prova, veja Lema 2.7 em Chatterjee [Cha15].*

**Demonstração.** Note que

$$\langle H_n \rangle = \frac{\partial \psi_n}{\partial h} \quad \text{e} \quad \mathbb{E}[\langle H_n \rangle] = \frac{\partial p_n}{\partial h}. \quad (4.27)$$

Nas expressões anteriores a derivada com respeito a  $h$  consegue entrar nas esperanças porque  $h$  não depende de  $\omega$ . Sabemos pelo Lema 4.2.2 que  $\psi_n$  é convexa. Então para  $h' > h > 0$  fixados

$$\langle H_n \rangle \leq \frac{\psi_n(\beta, h') - \psi_n(\beta, h)}{h' - h}. \quad (4.28)$$

Agora, usando Cauchy-Schwartz e o Lema 4.5.1, temos

$$\mathbb{E}[|\psi(\beta, h) - p_n(\beta, h)|] \leq \sqrt{\text{Var}(\psi(\beta, h))} \leq \left(\frac{C}{|V_n|}\right)^{1/2}. \quad (4.29)$$

Denotando  $p' = \frac{\partial p}{\partial h}$  temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \frac{\psi_n(\beta, h') - \psi_n(\beta, h)}{h' - h} - p'(\beta, h) \right| &\leq \mathbb{E} \left| \frac{\psi_n(\beta, h') - p_n(\beta, h')}{h' - h} \right| + \mathbb{E} \left| \frac{\psi_n(\beta, h) - p_n(\beta, h)}{h' - h} \right| \\ &+ \mathbb{E} \left| \frac{p_n(\beta, h') - p(\beta, h')}{h' - h} \right| + \mathbb{E} \left| \frac{p_n(\beta, h) - p(\beta, h)}{h' - h} \right| \\ &+ \mathbb{E} \left| \frac{p(\beta, h') - p(\beta, h)}{h' - h} - p'(\beta, h) \right|. \end{aligned}$$

Quando  $n \rightarrow \infty$ , por (4.29) as duas primeiras esperanças do lado direito da desigualdade acima ficam anuladas e pelo Lema 4.2.2 temos  $p_n \rightarrow p$  as duas seguintes esperanças também. Logo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| \frac{\psi_n(\beta, h') - \psi_n(\beta, h)}{h' - h} - p'(\beta, h) \right| \leq \mathbb{E} \left| \frac{p(\beta, h') - p(\beta, h)}{h' - h} - p'(\beta, h) \right|.$$

Assim, usando (4.27)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\langle H_n \rangle - p'(\beta, h)] \leq \mathbb{E} \left| \frac{p(\beta, h') - p(\beta, h)}{h' - h} - p'(\beta, h) \right|$$

e, usando limite pela direita em  $h$  e o fato que  $p$  é diferenciável, segue que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\langle H_n \rangle - p'(\beta, h)]^+ = 0,$$

Em que a notação  $x(h)^+$  significa a parte positiva da função real  $x(h)$ . Procedendo de forma similar calculamos o limite pela esquerda, mas desta vez da parte negativa que também fica nula. Logo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|\langle H_n \rangle - p'(\beta, h)| = 0.$$

Da desigualdade de Jensen segue

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}[\langle H_n \rangle] - p'(\beta, h)| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|\langle H_n \rangle - p'(\beta, h)| = 0.$$

□

Na seguinte proposição trabalhamos com derivadas de quarto ordem. Em Chatterjee [Cha15] tem um método diferente de obter a prova. No apêndice B.0.1 colocamos a prova de Chatterjee em detalhes. A prova de Proposição 4.4.2 tem um papel importante na prova do seguinte resultado.

**Proposição 4.4.3.** *Para quaisquer  $n$  e  $(\beta, h) \in (0, \infty)^2$ , existe uma aplicação  $\mathcal{L} : V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\frac{1}{4h^2} \sum_{x, y \in V_n} h_x^2 h_y^2 \mathbb{E} \left( \frac{\partial^4 F_n}{\partial g_x^2 \partial g_y^2} \right) \leq |V_n| \left( (\sqrt{2C} + 1) \sqrt{|V_n|} + \sqrt{\sum_{x \in V_n} \mathcal{L}^2(x, x)} \right) - G_{\mathcal{L}},$$

com  $C$  a mesma constante que em (4.12) e  $G_{\mathcal{L}} := \sum_{x, y \in V_n} h_x h_y \mathcal{L}(x, y)$ .

**Demonstração.** Como consequência da prova de Proposição 4.4.2 temos

$$\sum_{x,y} h_x^2 h_y^2 \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 F_n}{\partial g_x \partial g_y} \right) \leq |V_n| \left( (\sqrt{2C} + 1) \sqrt{|V_n|} + \sqrt{\sum_x \mathcal{L}^2(x, x)} \right) - G_{\mathcal{L}}, \quad (4.30)$$

com  $\mathcal{L}(x, y) = (h_x h_y)^{-1} \gamma_{g_x, g_y}^2(f_{x,y})$ .

Por outro lado, afirmamos que

$$\frac{\partial^4 F_n}{\partial g_x^2 \partial g_y^2} \leq 4h^2 \frac{\partial^2 F_n}{\partial g_x \partial g_y}. \quad (4.31)$$

De fato, um cálculo direto mostra que

$$\frac{\partial \langle \sigma_x; \sigma_y \rangle}{\partial g_x} = -2h \langle \sigma_x \rangle \langle \sigma_x; \sigma_y \rangle,$$

onde  $\langle \sigma_x; \sigma_y \rangle$  é a correlação truncada de dois pontos definida em (4.15). Então, usando a identidade (4.20), temos

$$\frac{\partial^4 F_n}{\partial g_x^2 \partial g_y^2} = 4h^2 \left( \langle \sigma_x \rangle \langle \sigma_y \rangle - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2 F_n}{\partial g_x \partial g_y}.$$

como  $\langle \sigma_x \rangle \leq 1$  para todos os  $x$ , e a derivada  $\frac{\partial^2 F_n}{\partial g_x \partial g_y}$  não é negativa, a afirmação segue.

Finalmente, combinando (4.30) e (4.31) segue a prova do lema.  $\square$

**Lema 4.4.3.** Para quaisquer  $(\beta, h) \in \mathcal{A}^c$ ,

$$\nu \left( |H_n - \nu(H_n)| \right) \xrightarrow[n]{} 0.$$

**Demonstração.** Seja  $\langle \cdot \rangle_{g_x=u, g_y=v}$  a esperança de Gibbs definida fixando  $g_x$  e  $g_y$  sendo  $u$  e  $v$  respectivamente, e considere  $F_{x,y}^*(u, v) := \langle \sigma_x; \sigma_y \rangle_{g_x=u, g_y=v}$ . Uma integração gaussiana por partes generalizada (veja Proposição B.1.2 no Apêndice), com  $f_{x,y}^*(u, v) = \mathbb{E} F_{x,y}^*(u, v)$ , dá

$$\mathbb{E} (g_x g_y f_{x,y}^*) = h_x^2 h_y^2 \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 f_{x,y}^*}{\partial g_x \partial g_y} \right) + \gamma_{g_x, g_y}^2(f_{x,y}^*),$$

onde  $\gamma_{g_x, g_y}^2(f_{x,y}^*)$  é definido analogamente como em (4.19) com  $f_{x,y}^*$  no lugar de  $f_{x,y}$ . Dividindo essa igualdade por  $|V_n|^2$  e somando todos os  $x, y \in V_n$ , e usando (4.20), obtemos

$$\mathbb{E} (\langle H_n^2 \rangle - \langle H_n \rangle^2) = \frac{1}{h^2 |V_n|^2} \sum_{x,y} \left( h_x^2 h_y^2 \mathbb{E} \left( \frac{\partial^4 F_n}{\partial g_x^2 \partial g_y^2} \right) + h^2 \gamma_{g_x, g_y}^2(f_{x,y}^*) \right). \quad (4.32)$$

Pela Proposição 4.4.3 a expressão (4.32) é no máximo

$$4 \left( \frac{\sqrt{2C} + 1}{\sqrt{|V_n|}} + \sqrt{\frac{1}{|V_n|^2} \sum_x \mathcal{L}^2(x, x)} \right) - \frac{1}{|V_n|^2} \sum_{x,y} (4h_x h_y \mathcal{L}(x, y) - \gamma_{g_x, g_y}^2(f_{x,y}^*)),$$

onde  $\mathcal{L}(x, y) = (h_x h_y)^{-1} \gamma_{g_x, g_y}^2(F)$ . Assim sendo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\langle H_n^2 \rangle - \langle H_n \rangle^2) &\leq 4 \left( \frac{\sqrt{2C} + 1}{\sqrt{|V_n|}} + \sqrt{\frac{1}{|V_n|^2} \sum_x \mathcal{L}^2(x, x)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{|V_n|^2} \sum_{x, y} \left( 4h_x h_y \mathcal{L}(x, y) - \gamma_{g_x, g_y}^2(f_{x, y}^*) \right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Analogamente à prova do item (4.21), usando os itens (B.6) – (B.8) da Proposição B.1.1, verifica-se que

$$\frac{1}{|V_n|^2} \sum_{x, y} \gamma_{g_x, g_y}^2(f_{x, y}^*) \xrightarrow{n} 0. \quad (4.34)$$

Combinando (4.33) com a desigualdade

$$\nu(|H_n - \langle H_n \rangle|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(\langle H_n^2 \rangle - \langle H_n \rangle^2)},$$

e usando (4.21) e (4.34), obtemos  $\nu(|H_n - \langle H_n \rangle|) \xrightarrow{n} 0$ . Assim, para qualquer  $(\beta, h) \in \mathcal{A}^c$ , a prova segue por observação 4.4.2.  $\square$

Tome o inteiro  $m \geq 2$  e denote por  $\sigma^1, \dots, \sigma^m, \sigma^{m+1}$  os  $m + 1$  spins que são criadas sendo independentes, com respeito a medida de Gibbs. Seja  $R_{l, s}$  a sobreposição entre  $\sigma^l$  e  $\sigma^s$  definidos em (4.7), com  $l, s = 1, \dots, m + 1$ . Seja  $f : \mathbb{R}^{m(m-1)/2} \rightarrow [-1, 1]$  uma função mensurável limitada destas sobreposições que não mudam com  $n$ .

**Lema 4.4.4** (Identidades de Ghirlanda-Guerra). *Considere o RFIM definido pela medida de Gibbs em (4.1) – (4.2). Então, a identidade (4.8) está satisfeita para quase todos os  $(\beta, h)$ . Isto é, se  $f$  é como acima,*

$$\nu(f R_{1, m+1}) - \frac{1}{m} \nu(f) \nu(R_{1, 2}) - \frac{1}{m} \sum_{s=2}^m \nu(f R_{1, s}) \xrightarrow{n} 0,$$

para cada  $(\beta, h)$  em  $\mathcal{A}^c$ .

**Demonstração.** Seja  $\langle \cdot \rangle_{g_x = u}$  a esperança de Gibbs com  $g_x$ , em  $\langle \cdot \rangle$ , fixada em  $u$  e  $F_x(u) := \langle \sigma_x^1 f \rangle_{g_x = u}$ . Usando (4.6), um cálculo simples mostra que

$$\frac{\partial^j F_x(u)}{\partial u^j} = h^j \left\langle \sigma_x^1 \cdot \left( \sum_{s=1}^m \sigma_x^s - m \sigma_x^{m+1} \right)^j f \right\rangle_{g_x = u}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.35)$$

A integração gaussiana por partes generalizada (veja Proposição B.1.1 no Apêndice B), com  $f_x(u) := \mathbb{E} F_x(u)$ , dá

$$\mathbb{E}(g_x f_x) - h_x^2 \mathbb{E} \left( \frac{d f_x}{d g_x} \right) = \gamma_{g_x}^2(f_x),$$

onde  $\gamma_{g_x}^2(f_x) = \mathbb{E} \left( g_x \int_0^{g_x} (g_x - u) \frac{d^2 f_x(u)}{d u^2} du \right) - h_x^2 \mathbb{E} \left( \int_0^{g_x} (g_x - u) \frac{d^3 f_x(u)}{d u^3} du \right)$ .

Dividindo a igualdade acima por  $|V_n|$ , somando sobre todos os  $x \in V_n$ , e usando (4.35) com  $j = 1$ , temos

$$\nu(H_n(\sigma^1)f) - h\nu\left(\left(\sum_{s=1}^m R_{1,s} - mR_{1,m+1}\right)f\right) = \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} \gamma_{g_x}^2(f_x). \quad (4.36)$$

Dado que  $|\frac{\partial^j F_x(u)}{\partial u^j}| \leq (2mh)^j \|f\|_\infty$ , segue  $|\int_0^{g_x} (g_x - u) \frac{d^3 f_x(u)}{du^3} du| \leq 4(2mh)^3 \|f\|_\infty h_x^2 \zeta_x^2$  e, pelo item (B.3) da Proposição B.1.1, que

$$\left|g_x \int_0^{g_x} (g_x - u) \frac{d^2 f_x(u)}{du^2} du\right| \leq |g_x| \int_0^{|g_x|} \left\| \frac{d^2 f_x}{du^2} \right\|_\infty u du \leq 2(2mh)^2 \|f\|_\infty |h_x|^3 |\zeta_x|^3.$$

Logo,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_f \left| \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} \gamma_{g_x}^2(F_x) \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+mh)(2mh)^2 \|f\|_\infty}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} |h_x|^3 \mathbb{E}|\zeta_x|^3 = 0.$$

Aqui, a última igualdade segue de (4.3) e da suposição de que os  $\zeta_x$  são identicamente distribuídos e satisfazem  $\mathbb{E}|\zeta_x|^3 < \infty$ . Portanto, em (4.36), segue

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_f \left| \nu(H_n(\sigma^1)f) - h\nu\left(\left(\sum_{s=1}^m R_{1,s} - mR_{1,m+1}\right)f\right) \right| = 0. \quad (4.37)$$

Dado que  $\nu(|H_n - \nu(H_n)|) \xrightarrow[n]{\rightarrow} 0$  para quaisquer  $(\beta, h) \in \mathcal{A}^c$  (veja o Lema 4.4.3), é bem conhecido (por exemplo, Talagrand [Tal03], Seção 2.12) que (4.37) é suficiente para garantir a validade das identidades de Ghirlanda-Guerra (4.8). A prova do lema está completa.  $\square$

#### Prova do Teorema 4.2.1.

A prova segue o mesmo caminho de [Cha15] e a apresentamos por uma questão de completude. Seja  $q_{\beta, h, n} := \nu(R_{1,2})$ . Tomando  $f = 1$  e  $m = 1$  em (4.36) obtemos

$$\nu(H_n(\sigma^1)) = h(1 - q_{\beta, h, n}) + \frac{1}{|V_n|} \sum_x \gamma_{g_x}^2(f_x), \quad \text{where } \frac{1}{|V_n|} \sum_x \gamma_{g_x}^2(f_x) \xrightarrow[n]{\rightarrow} 0. \quad (4.38)$$

Por outro lado, escolhendo  $m = 2$  e  $f = R_{1,2}$  no Lema 4.4.4 dá

$$\nu(R_{1,2}R_{1,3}) - \frac{1}{2}q_{\beta, h, n}^2 - \frac{1}{2}\nu(R_{1,2}^2) \xrightarrow[n]{\rightarrow} 0. \quad (4.39)$$

Escolhendo  $m = 3$  e  $f = R_{2,3}$  temos

$$\nu(R_{2,3}R_{1,4}) - \frac{1}{3}q_{\beta, h, n}^2 - \frac{1}{3} \sum_{s=2}^3 \nu(R_{2,3}R_{1,s}) \xrightarrow[n]{\rightarrow} 0. \quad (4.40)$$

Por simetria entre réplicas a volume finito,  $\nu(R_{2,3}R_{1,2}) = \nu(R_{2,3}R_{1,3}) = \nu(R_{1,2}R_{1,3})$ .

Então, podemos multiplicar (4.39) por 2/3 e adicionar a (4.40) para obter

$$\frac{2}{3}(\nu(R_{1,2}^2) - q_{\beta, h, n}^2) - \mathbb{E}(\langle R_{1,2}^2 \rangle - \langle R_{2,3}R_{1,4} \rangle) \xrightarrow[n]{\rightarrow} 0. \quad (4.41)$$

Como a sequência  $(\sigma^l)$  é uma sequência independente, com respeito às medidas de Gibbs,

$$\langle R_{2,3}R_{1,4} \rangle = \frac{1}{|V_n|^2} \sum_{x,y \in V_n} h_x^2 h_y^2 \langle \sigma_x^2 \sigma_x^3 \sigma_y^1 \sigma_y^4 \rangle = \frac{1}{|V_n|^2} \sum_{x,y \in V_n} h_x^2 h_y^2 \langle \sigma_x \rangle^2 \langle \sigma_y \rangle^2 = \langle R_{1,2} \rangle^2.$$

Combinando essa identidade com (4.41) e depois de usar o Lema 4.4.1 temos

$$\nu(R_{1,2}^2) - q_{\beta,h,n}^2 \xrightarrow{n} 0.$$

Por esse motivo,

$$\nu\left((R_{1,2} - q_{\beta,h,n})^2\right) = \nu\left((R_{1,2} - \nu(R_{1,2}))^2\right) = \nu(R_{1,2}^2) - q_{\beta,h,n}^2 \xrightarrow{n} 0. \quad (4.42)$$

Note que por (4.38) e pelo Lema 4.4.2,

$$q_{\beta,h} := \lim_{n \rightarrow \infty} q_{\beta,h,n} = 1 - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial h}(\beta, h) \quad (4.43)$$

existe. Portanto, fazendo  $n \rightarrow \infty$  na desigualdade, obtemos

$$\nu\left((R_{1,2} - q_{\beta,h})^2\right) \leq 2\nu\left((R_{1,2} - q_{\beta,h,n})^2\right) + 2(q_{\beta,h,n} - q_{\beta,h})^2$$

e usando (4.42), (4.43), segue a prova do Teorema 4.2.1.  $\square$

## 4.5 Exemplos de campos não gaussianos

Nesta seção apresentamos desordens da forma (4.2), isto é,  $g_x = h_x \zeta_x$ , tal que

$$\zeta_x := \left( \frac{A^{-1} \circ \xi_x - \vartheta}{\theta} \right), \quad (4.44)$$

onde  $(\xi_x)$  é uma desordem gaussiana i.i.d.,  $\vartheta \in \mathbb{R}$  e  $\theta > 0$  denotam a média e desvio padrão de  $A^{-1} \circ \xi_{x_0}$ , respectivamente, e  $(h_x)$  é quaisquer valor diferente de zero, uniformemente limitado por 1 e não uniforme. Este campo externo satisfaz (4.3). Aqui,  $A : D \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função mensurável não-linear, diferenciável (com operador derivada denotado por  $A'$ ) e inversível Borel mensurável (com função inversa denotada por  $A^{-1}$ ) definida em  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Também impomos a condição

$$\left( A' \circ A^{-1} \circ \xi_x \right)^2 \cdot (\ell \circ A^{-1} \circ \xi_x) \geq c, \quad (4.45)$$

onde  $\ell : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  é alguma função mensurável da Borel tal que, para alguns  $x_0$ ,

$$\ell \circ A^{-1} \circ \xi_{x_0} \text{ e } (A^{-1} \circ \xi_{x_0})^5 \text{ são variáveis aleatórias integráveis ;} \quad (4.46)$$

e  $c$  é alguma constante positiva que depende apenas dos parâmetros da distribuição de  $A^{-1} \circ \xi_{x_0}$ . A condição (4.46) garante que  $\vartheta$  e  $\theta$  em (4.2) são bem definidos, Além disso, esta também garante que  $\zeta_x^5$  e  $g_x^5$  são variáveis aleatórias integráveis para todos os  $x$ .

Por outro lado, a condição (4.45) é puramente técnica porque nos permite verificar (4.12) (uma condição semelhante para o caso gaussiano foi provada no Lema 2.4 da referência Chatterjee [Cha15]).

Note que os  $g_x$ 's são variáveis aleatórias não gaussianas, independentes com funções de densidade de probabilidade (f.d.p.'s) dadas por

$$f(t; x) = \frac{\operatorname{sgn}(h_x) \theta}{\sqrt{2\pi} h_x \int_{A(D)} \phi(z) dz} \exp\left(-\frac{1}{2} A^2\left(\frac{\theta t + \vartheta h_x}{h_x}\right)\right) A'\left(\frac{\theta t + \vartheta h_x}{h_x}\right), \quad t \in D, \quad (4.47)$$

para cada  $x \in V_n$ , onde  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  é a função de sinal.

**Proposição 4.5.1.** *Para quaisquer  $\beta$ ,  $h$  e  $n$ , a condição (4.12) é satisfeita. Ou seja, existe uma constante  $C_0 > 0$  tal que*

$$\operatorname{Var}(F_n) \leq C_0 h^2 |V_n|.$$

**Demonstração.** Como  $(\xi_x)$  é um campo aleatório gaussiano i.i.d., pela desigualdade de Poincaré para a medida gaussiana (ver Ledoux [Led01, p. 49]), temos

$$\operatorname{Var}(F_n) \leq \sum_{x \in V_n} \mathbb{E} \left( \frac{\partial F_n}{\partial \xi_x} \right)^2 = \frac{h^2}{\theta^2} \sum_{x \in V_n} h_x^2 \mathbb{E} \left( \frac{\langle \sigma_x \rangle}{A' \circ A^{-1} \circ \xi_x} \right)^2.$$

Como  $\langle \sigma_x \rangle \leq 1$  para todos os  $x$ , por (4.45) a expressão do lado direito da desigualdade acima é no máximo

$$\frac{h^2}{\theta^2 c} \sum_{x \in V_n} h_x^2 \mathbb{E}(\ell \circ A^{-1} \circ \xi_x).$$

Como  $|h_x| \leq 1$  para todos os  $x$ , a prova segue com  $C_0 := \mathbb{E}(\ell \circ A^{-1} \circ \xi_{x_0}) / (\theta^2 c) > 0$ , para alguns  $x_0$ .  $\square$

Dado que a Proposição (4.5.1) verifica a validade da condição (4.12), e como estamos assumindo que (4.3) é válido, então, pelo Teorema 4.2.1 concluímos que o RFIM, com desordem definida por (4.44), não exhibe quebra de simetria da réplica.

### Distribuições conhecidas

Nesta subseção apresentamos distribuições conhecidas que permitem criar as desordens 4.44. Aqui mostramos que estas distribuições satisfazem as condições 4.45 e 4.46.

**A. Distribuição de Birnbaum-Saunders.** A distribuição BS foi introduzida por Birnbaum e Saunders (1969) [BS69] para modelar os tempos de falha de um material exposto a fadiga. Definiremos a seguir a distribuição.

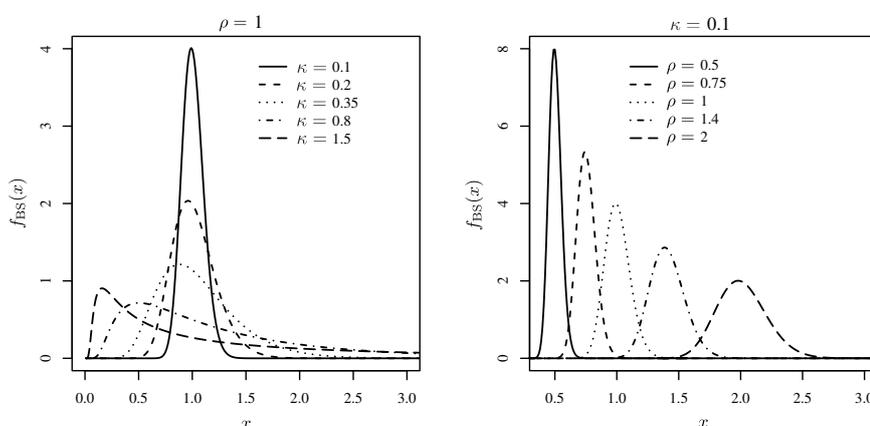
Seja  $A : D \rightarrow \mathbb{R}$  um função definida em  $D = (0, \infty)$ , por

$$A(t) := \frac{1}{\kappa} \left[ \sqrt{\frac{t}{\rho}} - \sqrt{\frac{\rho}{t}} \right], \quad \kappa, \rho > 0. \quad (4.48)$$

A função  $A$  é contínua, inversível e mensurável a Borel. Dizemos que uma variável aleatória  $T$  segue uma distribuição Birnbaum-Saunders (BS) com parâmetros  $(\kappa, \rho)$ , denotada  $T \sim \text{BS}(\kappa, \rho)$ , se sua f.d.p. é dada por

$$\begin{aligned} f_{\text{BS}}(t) &= \frac{1}{2\kappa\rho\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\kappa^2} \left[\frac{t}{\rho} + \frac{\rho}{t} - 2\right]\right) \cdot \left[\left(\frac{\rho}{t}\right)^{1/2} + \left(\frac{\rho}{t}\right)^{3/2}\right] \\ &= \phi(A(t)) A'(t), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde  $\phi$  denota f.d.p. da distribuição normal padrão,  $\kappa$  é o parâmetro da forma,  $\rho$  é o parâmetro de escala e também a média da distribuição.



**Figura 4.1:** *f.d.p da Birnbaum-Saunders para alguns valores dos parâmetros.*

Algumas propriedades da distribuição BS são conhecidas, por exemplo (ver [Sau74]): para  $c > 0$ ,  $cT \sim \text{BS}(\kappa, c\rho)$ ,  $1/T \sim \text{BS}(\kappa, 1/\rho)$ ,  $\mathbb{E}[T] = \rho(2 + \kappa^2)/2$  e  $\text{Var}[T] = (\kappa\rho)^2(4 + 5\kappa^2)/4$ .

Se  $T \sim \text{BS}(\kappa, \rho)$ , fazendo cálculos mostramos que

$$T = A^{-1} \circ Z = \frac{\rho}{4} \left[ \kappa Z + \sqrt{(\kappa Z)^2 + 4} \right]^2, \quad Z \sim \text{N}(0, 1), \quad (4.50)$$

onde  $A^{-1}$  denota a função inversa de  $A$ . Dado que

$$[A'(t)]^2 = \frac{(1/4\kappa^2\rho)}{t} \left[ 1 + \left(\frac{\rho}{t}\right)^2 + 2\left(\frac{\rho}{t}\right) \right] \geq \frac{(1/4\kappa^2\rho)}{t}, \quad t > 0,$$

temos  $(A' \circ T)^2 \cdot (\ell \circ T) \geq c$ , com  $c := 1/(4\kappa^2\rho)$  e  $\ell = \text{Id}_{\mathbb{R}^+}$  a função identidade em  $(0, +\infty)$ . Note também  $\mathbb{E}[\ell \circ T] < \infty$ . Além disso, como  $A^{-1} \circ Z \leq \rho(\kappa^2 Z^2 + \kappa|Z| + 1)$ , temos que  $(A^{-1} \circ Z)^p$ ,  $p > 0$ , é uma variável aleatória integrável. Segue que (4.45) e (4.46) são satisfeitas.

**Observação 4.5.1.** *A representação  $T$  em (4.50) para  $T \sim \text{BS}(\kappa, \rho)$  não é única. Note que  $T$  pode também ser representada como  $T = (\Phi \circ T)^{-1}(F \circ Y)$ ,  $Y \stackrel{d}{=} F$ , onde  $Y$  é uma variável aleatória contínua e  $\stackrel{d}{=}$  denota igualdade em distribuição.*

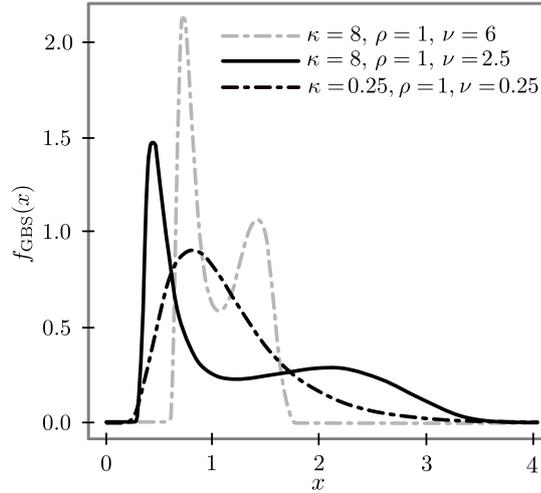
**B. A distribuição de Birnbaum-Saunders generalizada** A distribuição BS (4.49) pode ser generalizada, se consideramos a função  $A_\delta : D \rightarrow \mathbb{R}$  definida, em  $D = (0, \infty)$ , por

$$A_\delta(t) := \frac{1}{\kappa} \left[ \left( \frac{t}{\rho} \right)^\delta - \left( \frac{\rho}{t} \right)^\delta \right], \quad \kappa, \rho, \delta > 0,$$

no lugar de  $A$  definida em (4.48). A função  $A_\delta$  é uma função contínua inversível e Borel mensurável. Dizemos que uma variável aleatória  $T$  segue uma distribuição generalizada BSG com parâmetros  $(\kappa, \rho, \delta)$ , denotada  $T \sim \text{GBS}(\kappa, \rho, \delta)$ , se sua f.d.p. é dada por

$$\begin{aligned} f_{\text{BSG}}(t) &= \frac{\delta}{\kappa \rho \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2\kappa^2} \left[ \left( \frac{t}{\rho} \right)^{2\delta} + \left( \frac{\rho}{t} \right)^{2\delta} - 2 \right] \right) \cdot \left[ \left( \frac{\rho}{t} \right)^{1-\delta} + \left( \frac{\rho}{t} \right)^{1+\delta} \right] \\ &= g(A_\delta(t)) A'_\delta(t), \quad t > 0. \end{aligned}$$

Esta generalização da distribuição BS foi proposta por Díaz-García and Domínguez-



**Figura 4.2:** A f.d.p. da distribuição de Birnbaum-Saunders Generalizada com certos parâmetros.

Molina [DGDM06]. A distribuição BSG tem propriedades similares à distribuição BS ainda válidas. Sendo  $\rho$  a mediana e o parâmetro de escala para a distribuição, os valores  $\kappa$  e  $\delta$  são parâmetros de forma e se  $T \sim \text{BSG}(\kappa, \rho, \delta)$ , a seguinte representação estocástica é válida

$$T = A_\delta^{-1} \circ Z = \frac{\rho}{2^{1/\delta}} \left[ \kappa Z + \sqrt{(\kappa Z)^2 + 4} \right]^{1/\delta}, \quad Z \sim \text{N}(0, 1).$$

Dado

$$[A'_\delta(t)]^2 = \frac{(\delta/\kappa\rho^\delta)^2}{t^{2(1-\delta)}} \left[ 1 + \left( \frac{\rho}{t} \right)^{4\delta} + 2 \left( \frac{\rho}{t} \right)^{2\delta} \right] \geq \frac{(\delta/\kappa\rho^\delta)^2}{t^{2(1-\delta)}}, \quad t > 0,$$

segue que  $(A'_\delta \circ T)^2 \cdot (\ell \circ T) \geq c$ , com  $c := (\delta/\kappa\rho^\delta)^2$  e  $\ell(t) = t^{2(1-\delta)}$ ,  $t > 0$ . Observe também que  $\mathbb{E}[\ell \circ T] < \infty$ . Logo,  $T$  satisfaz as condições (4.45) e (4.46).

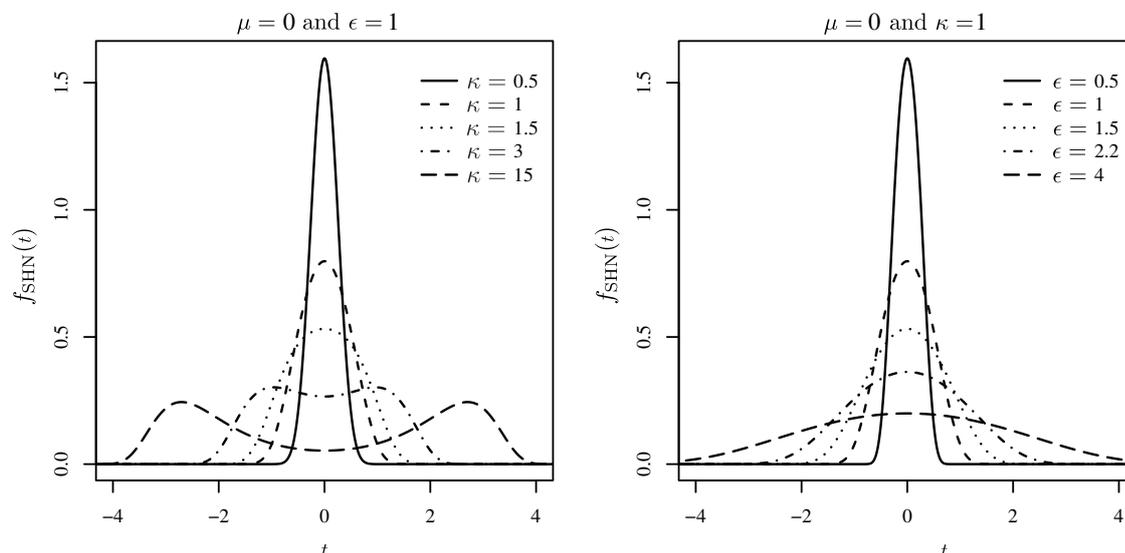
**C. A distribuição Sinh-Normal.** Seja  $A : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida, em  $D = \mathbb{R}$ , por

$$A(t) := \frac{2}{\kappa} \sinh\left(\frac{t - \mu}{\epsilon}\right), \quad \kappa, \epsilon > 0 \text{ e } \mu \in \mathbb{R}.$$

Note que  $A$  é uma função Borel mensurável contínua e inversível. Dizemos que a variável aleatória  $T$  segue uma distribuição Sinh-Normal (SHN) com parâmetros  $(\kappa, \mu, \epsilon)$ , denotada  $T \sim \text{SHN}(\kappa, \mu, \epsilon)$ , se sua f.d.p. é dada por

$$\begin{aligned} f_{\text{SHN}}(t) &= \frac{2}{\kappa\epsilon\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{\kappa^2} \sinh^2\left(\frac{t - \mu}{\epsilon}\right)\right) \cdot \cosh\left(\frac{t - \mu}{\epsilon}\right) \\ &= \phi(A(t)) A'(t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde  $\kappa, \mu$  e  $\epsilon$  são os parâmetros de forma, locação e escala respectivamente. Se  $T \sim$



**Figura 4.3:** *f.d.p da Sinh-Normal para alguns parâmetros.*

$\text{SHN}(\kappa, \mu, \epsilon)$ , com mais cálculos podemos mostrar que

$$T = A^{-1} \circ Z = \mu + \epsilon \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\kappa Z}{2}\right), \quad Z \sim N(0, 1).$$

Como sabemos que  $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , e a desigualdade  $\ln(y) \leq y - 1$ ,  $y > 0$ , obtemos  $|A^{-1} \circ Z| \leq |\mu| + \epsilon |\ln(C|Z| + 1)| \leq |\mu| + C|Z|$ , onde  $C$  é uma constante. Com isso, notamos  $(A^{-1} \circ Z)^p$ ,  $p > 0$ , é uma variável aleatória integrável.

Dado que

$$\begin{aligned} [A'(t)]^2 &= \frac{\exp\left(\frac{2\mu}{\epsilon}\right)/(\kappa\epsilon)^2}{\exp\left(\frac{2t}{\epsilon}\right)} \left[1 + \exp 4\left(\frac{t - \mu}{\epsilon}\right) + \exp 2\left(\frac{t - \mu}{\epsilon}\right)\right] \\ &\geq \frac{\exp\left(\frac{2\mu}{\epsilon}\right)/(\kappa\epsilon)^2}{\exp\left(\frac{2t}{\epsilon}\right)}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

temos  $(A' \circ T)^2 \cdot (\ell \circ T) \geq c$ , com  $c := \exp\left(\frac{2\mu}{\epsilon}\right) / (\kappa\epsilon)^2$  e  $\ell(t) = \exp\left(\frac{2}{\epsilon}t\right)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Podemos mostrar que  $\ell \circ A^{-1} \circ Z \leq \exp(2\mu/\epsilon)(CZ^2 + 1)$ . Segue que

$$\mathbb{E}[\ell \circ T] = \exp\left(\frac{2\mu}{\epsilon}\right) \left[ \frac{K_{5/2}(1/\kappa^2) + K_{3/2}(1/\kappa^2)}{2K_{1/2}(1/\kappa^2)} \right]$$

existe, onde  $\mathbb{E}[T] = \mu$  e  $K_\lambda(\cdot)$  é uma função de Bessel modificada de terceiro tipo. (ver Gradshteyn [GR65, p. 907]). Portanto SHN( $\kappa, \mu, \epsilon$ ) satisfaz as condições (4.45) e (4.46).

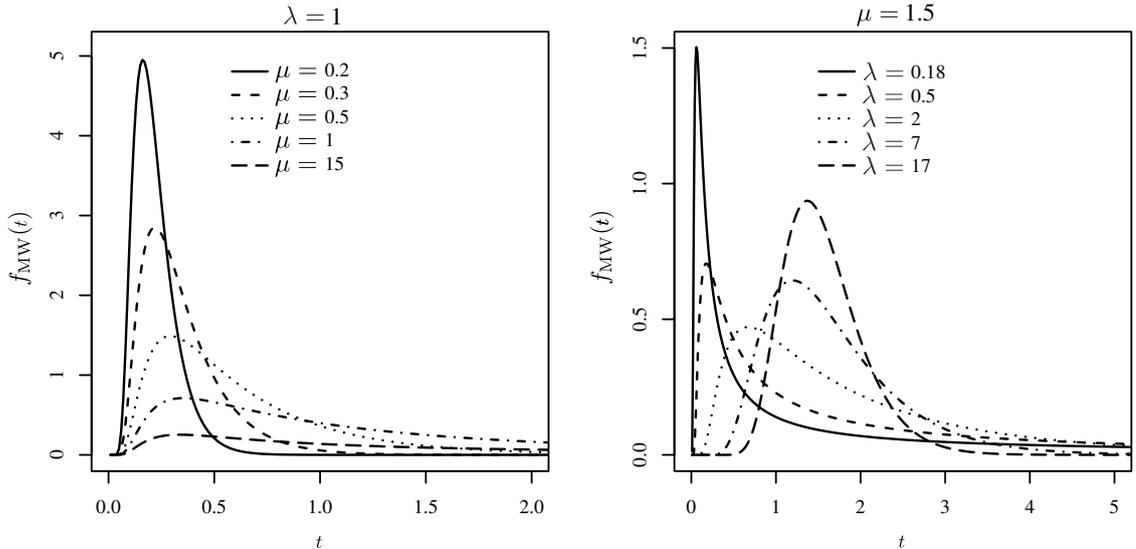
**Observação 4.5.2** (A distribuição Log-Birnbaum-Saunders). *Rieck and Nedelman [RN91] provaram que se  $T \sim BS(\kappa, \rho)$ , logo  $Y = \ln T \sim SHN(\kappa, \mu = \ln \rho, \epsilon = 2)$ . Neste caso particular, a SHN distribuição é também conhecida como Log-Birnbaum-Saunders distribuição e é denotada por Log-BS( $\kappa, \rho$ ). Se  $Y \sim \text{Log-BS}(\kappa, \rho)$ , temos a relação  $M_Y(r) = \mathbb{E}[\exp(rY)] = \mathbb{E}[T^r]$ ,  $T \sim BS(\kappa, \rho)$ . Logo, momentos de qualquer ordem da Log-BS distribuição podem ser calculados através da BS distribuição.*

**D. Uma distribuição de Wald modificada.** Seja  $A : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida, em  $D = (0, \infty)$ , por

$$A(t) := \frac{\sqrt{\lambda}(t - \mu)}{\mu\sqrt{t}}, \quad \mu, \lambda > 0. \quad (4.51)$$

Note que  $A$  é uma função contínua inversível e Borel mensurável. Dizemos que a variável aleatória  $T$  segue a distribuição de Wald Modificada (WDM) com parâmetros  $(\mu, \lambda)$ , denotada  $X \sim \text{WDM}(\mu, \lambda)$ , se sua f.d.p. é dada por

$$f_{\text{MWD}}(t) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{\lambda(t - \mu)^2}{2\mu^2 t}\right) \cdot \frac{(t + \mu)}{2\mu} = \phi(A(t)) A'(t), \quad t > 0.$$



**Figura 4.4:** f.d.p da Wald modificada para alguns valores dos parâmetros.

Podemos expressar a seguinte variável aleatória  $T \sim \text{MWD}(\mu, \lambda)$  da seguinte forma

$$T = A^{-1} \circ Z = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu^2 Z^2}{\lambda} + 2\mu \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu^2 Z^2}{\lambda} \left( \frac{\mu^2 Z^2}{\lambda} + 4\mu \right)}, \quad Z \sim N(0, 1).$$

Segue que  $T \leq \mu(\mu Z^2 + \sqrt{\mu\lambda}|Z| + 1)/\lambda$ . Então, a variável aleatória  $(A^{-1} \circ Z)^p$ ,  $p > 0$ , é integrável.

Além disso,  $[A'(t)]^2 = (\lambda/(4\mu^2t))(1 + (\mu/t))^2 \geq \lambda/(4\mu^2t)$ ,  $t > 0$ . Logo,  $(A' \circ T)^2 \cdot (\ell \circ T) \geq c$ , onde  $c := \lambda/(4\mu^2)$  e  $\ell = \text{Id}_{\mathbb{R}^+}$ . Dado  $\mathbb{E}[\ell \circ T] < \infty$ , temos que  $T \sim \text{MWD}(\mu, \lambda)$  satisfaz as condições (4.45) e (4.46).

**Observação 4.5.3.** *Uma variável  $T$  segue a Wald distribuição (WD) com parâmetros  $(\mu, \lambda)$ , denotado  $T \sim \text{WD}(\mu, \lambda)$ , se sua f.d.p. é dada por*

$$f_{\text{WD}}(t) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi t^3}} \exp\left(\frac{-\lambda(t - \mu)^2}{2\mu^2 t}\right) = \phi(A(t)) \sqrt{\frac{\lambda}{t^3}}, \quad t > 0,$$

onde  $\mu$  e  $\lambda$  são a média e o parâmetro de forma, respectivamente, e  $A$  é como em (4.51). A generalização desta distribuição é conhecida como Sichel distribuição [Chh88].

Para variáveis aleatórias mutuamente estatisticamente independentes  $T_1 \sim \text{WD}(\rho, 1/\rho)$ ,  $T_2^{-1} \sim \text{WD}(1/\rho, 1/\rho^3)$ , e  $\mathcal{T}_b \sim \text{Bernoulli}(0.5)$ , a seguinte relação é válida (ver [Des86]):  $\mathcal{T}_b T_1 + (1 - \mathcal{T}_b) T_2 \stackrel{d}{=} \text{BS}(\rho, \rho) \stackrel{d}{=} \text{WD}(\rho, \rho)$ .

# Capítulo 5

## Decaimento da correlação com campo aleatório no reticulado hexagonal

No artigo do 2018 Chatterjee [Cha18] publicou pela primeira vez um método quantitativo, para estudar o decaimento de correlações, do tipo  $\langle \sigma_x \rangle_S^+ - \langle \sigma_x \rangle_S^-$ , com campo gaussiano em probabilidade, com relação a  $S$  em  $\mathbb{Z}^2$ . Ele obteve um decaimento logarítmico iterado  $\frac{1}{\ln \ln n}$ , com  $n$  sendo uma distância de  $x$  à fronteira de  $S$ . Posteriormente, no artigo de Aizenman e Peled [AP18], usando formas quantificadas dos métodos de Aizenman e Wehr, apresentaram limitações superiores para as correlações do tipo potencial  $\frac{1}{n^\gamma}$ , ainda considerando campos gaussianos. Embora eles acreditavam ser possível estender os seus métodos a outros campos. Também no estudo de decaimento de correlações no modelo de Ising com campo aleatório temos o artigo de Camia, Jiang e Newman [CJN18], onde usam as técnicas dos aglomerados aleatórios e linha de Kertész para obter cotas superiores, em termos de soma de exponenciais das distâncias de pontos pertencentes às fronteiras do volume finito que está sendo analisado. Em Ding e Xia [DX19] provam decaimento exponencial para correlações com campo gaussiano a temperatura positiva em  $\mathbb{Z}^2$ .

Neste capítulo mostramos que a cota logarítmica iterada ainda permanece válida quando mudamos a rede  $\mathbb{Z}^2$  pelo reticulado hexagonal e com um campo não gaussiano. Este resultado é o Teorema 5.1.1. As propriedades do modelo, com campo aleatório gaussiano, podem não se preservar, se mudamos o grafo, por exemplo,  $\mathbb{Z}^2$  por  $\mathbb{Z}^3$  (Os resultados anteriores de Chatterjee, Aizenman e Peled [Cha18], [AP18] são para  $\mathbb{Z}^2$ )

Deixamos para trabalhos futuros: Se é uma propriedade do RFIM ter decaimento exponencial em todo grafo planar?. Em  $\mathbb{Z}^2$  já está provado e neste capítulo provamos para o grafo hexagonal. Faltaria por exemplo os grafos tipo arvores. Teríamos que fazer uma análise para grafos amenables e grafos não amenables.

## 5.1 Descrição do modelo

### Modelo de Ising na rede hexagonal

Sejam  $\mathbb{W} = (W, E(W))$  a rede plana, hexagonal regular, infinita e  $\mathbb{S} = (S, E(S))$  uma sub-rede hexagonal e finita de  $\mathbb{W}$ . O espaço de configurações é dado por  $\{-1, 1\}^S$  e a sua fronteira (externa) é definida por  $\partial S := \{x \in W \setminus S : d_{\mathbb{W}}(S, x) = 1\}$ , donde  $d_{\mathbb{W}}$  é a distância de grafos de  $y \in S$  a  $x$ . No modelo, o campo aleatório é  $\mathbf{g} = (g_x)_{x \in S}$  (comumente chamado de *desordem*), onde cada  $g_x$  é uma variável aleatória definida num espaço arbitrário.

A energia do sistema é dada por

$$H_{S, \mathbf{g}}^\gamma(\sigma) := - \sum_{xy \in E(S)} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in S} \sigma_x g_x - \sum_{\substack{x \in S, y \in S^c \\ d_{\mathbb{W}}(x, y) = 1}} \sigma_x \gamma_y, \quad \sigma \in \Omega_S, \quad (5.1)$$

onde  $xy$  são as arestas do conjunto  $E(S)$  e  $\gamma \in \Gamma := \{-1, 1\}^{\partial S} \cup \{0\}$ . O conjunto  $\Gamma$  é chamado o conjunto das condições de fronteira.

A medida de Gibbs finita é dada por  $\mu_{S, \beta, \mathbf{g}}(\sigma) := [Z_{S, \beta, \mathbf{g}}^\gamma]^{-1} \exp(-\beta H_{S, \mathbf{g}}^\gamma(\sigma))$ . Para uma função  $f : \{-1, 1\}^S \rightarrow \mathbb{R}$  local definimos a esperança com respeito á medida de Gibbs como sendo

$$\langle f \rangle_{S, \beta, \mathbf{g}}^\gamma := \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^S} f(\sigma) \mu_{S, \beta, \mathbf{g}}(\sigma).$$

### Apresentação do campo não gaussiano

Como já mencionamos antes, trabalharemos com campos gaussianos não aleatórios  $\mathbf{g} = (g_x)_{x \in S}$  similares aos campos dados no capítulo anterior, Seção 4.5.

Escolheremos campos da seguinte forma

$$g_x := h_x (A^{-1} \circ \xi_x - \vartheta) \theta^{-1}, \quad (5.2)$$

onde  $\vartheta$  e  $\theta$  são a média e o desvio padrão de  $A^{-1} \circ \xi_x$ , respectivamente. Além disso,  $(\xi_x)$  é uma desordem gaussiano i.i.d e  $(h_x)$  é um campo externo não nulo e não uniforme tal que  $|h_x| \leq 1$  para todo  $x$ .

A função não linear  $A : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável, inversível e Borel mensurável; o conjunto  $D$  é compacto.  $A'$  denotará a sua primeira derivada e  $A^{-1}$  a sua função inversa. Chamemos de  $m_1 = \min_{x \in D} |A'(x)|$  e  $M_1 = \sup_{x \in D} |A'(x)|$ .

**Observação 5.1.1.** *A diferença com o campo da Seção 4.5 é que aqui estamos considerando  $D$  compacto e não precisamos das condições (4.45), (4.46) e os  $g_x$ 's são independentes e com distribuição não gaussiana com função de densidade dada por (4.47).*

O resultado principal deste capítulo é o seguinte teorema, no qual mostramos o decaimento de correlações quando estamos no reticulado hexagonal e com campo aleatório não gaussiano, dado em (5.2).

**Teorema 5.1.1.** *Sejam  $\mathbb{S}$  uma rede hexagonal finita e  $S$  seu conjunto de vértices. Consideremos o RFIM em  $S$  com temperatura inversa  $\beta \in [0, \infty]$  e com campo aleatório  $\mathbf{g}$*

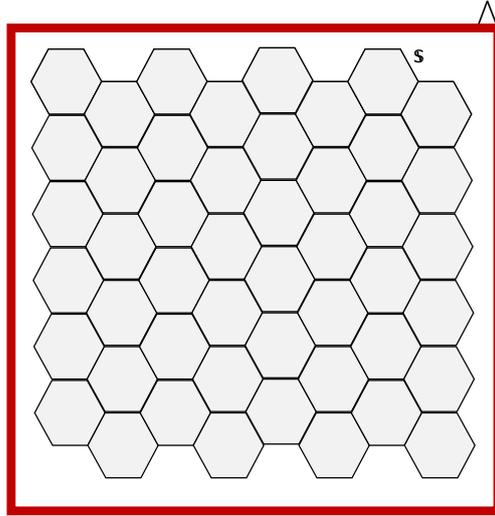
dado por (5.2). Tome qualquer  $x \in S$ ,  $n \geq 3$ , onde  $n$  é o máximo inteiro maior que a distância  $l^\infty$  de  $x$  a  $\partial S$ . Então temos

$$\mathbb{E}\left[\sup_{\gamma, \gamma'} |\langle \sigma_x \rangle_S^\gamma - \langle \sigma_x \rangle_S^{\gamma'}|\right] \leq \frac{C}{\sqrt{\ln \ln n_1}},$$

onde  $C$  é uma constante universal, e  $n_1 := \lfloor \frac{2n^2}{6 \cos(\pi/6)} \rfloor$ . Observe que esta limitação é válida também para  $\beta = \infty$ .

## 5.2 Desigualdades prévias

Primeiro estudaremos o decaimento de correlações de  $\mathbb{E}[\langle \sigma_x \rangle_{S, \beta, g}^+ - \langle \sigma_x \rangle_{S, \beta, g}^-]$ , para a rede  $\mathbb{S} \subset \mathbb{W}$ , que é criado como a rede hexagonal máxima, cujos hexágonos que a compõem são de lado 1, que podem ser colocados numa caixa  $\Lambda$  de longitude de lado  $n$ , da rede  $\mathbb{Z}^2$  (cada aresta de  $\mathbb{Z}^2$  tem longitude de lado 1), com  $n \geq 3$ .



**Figura 5.1:** Exemplo ilustrativo da maior rede de hexágonos  $\mathbb{S}$  preenchendo a caixa  $\Lambda$

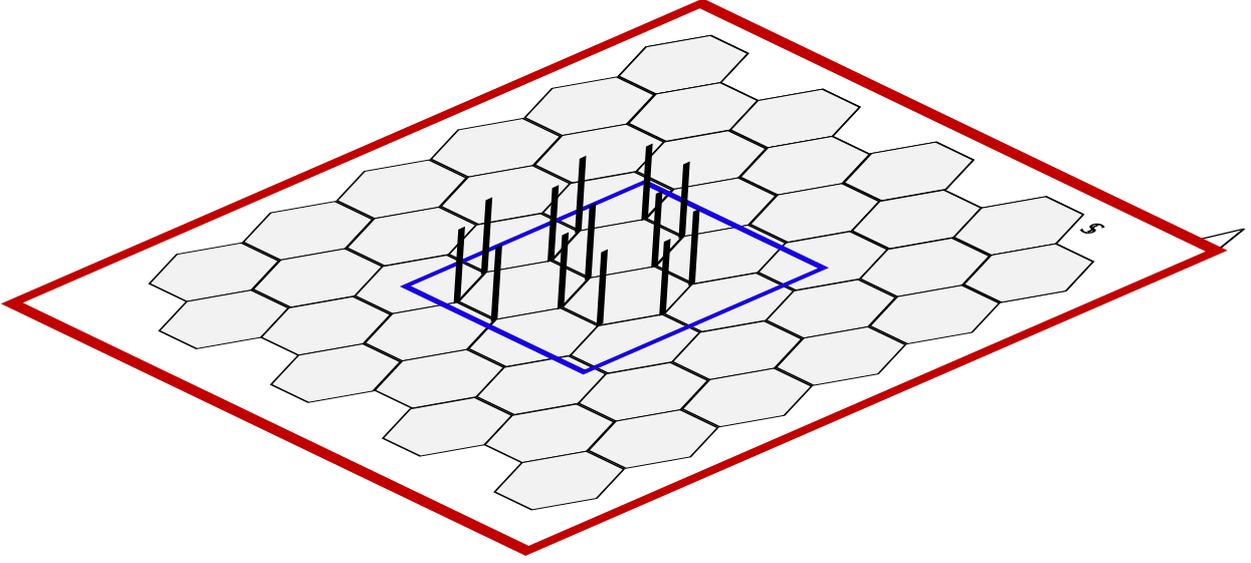
**Observação 5.2.1.** Podemos escolher qualquer número positivo  $s$  para a longitude do lado do hexágono e  $s \times n$  para o lado da caixa.

Seja  $\mathbb{B}$  um subgrafo de  $\mathbb{S}$ , que é a máxima rede hexagonal que é contida numa subcaixa de  $\Lambda$ , com lado  $m$ , e  $m < n$ . O conjunto de vértices de  $\mathbb{B}$  será denotado por  $B$ . Definamos

$$M^+(B) := \sum_{x \in B} \langle \sigma_x \rangle_{S, \beta, g}^+, \quad M^-(B) := \sum_{x \in B} \langle \sigma_x \rangle_{S, \beta, g}^- \quad \text{e} \quad F^\gamma(0) := \ln(Z_{S, \beta, g}^\gamma),$$

onde  $F^\gamma(0)$  denota a energia livre do sistema.

Mudando o campo aleatório no conjunto de vértices  $B$ , isto é, substituindo o campo  $g_x$  por  $g_x + r$ , com  $r \in \mathbb{R}$ , e deixando o campo sem mudanças nos vértices fora de  $B$  obtemos um novo sistema.



**Figura 5.2:** Nos vértices de  $\mathbb{B}$  mudamos  $g_x$  por  $g_x + r$ . A caixa menor é a caixa de lado  $m$  e a maior tem lado  $n$ .

A energia deste novo sistema será denotada por  $F^\gamma(r)$ .

Observemos as seguintes relações na rede hexagonal  $\mathbb{B}$ . (por simplicidade omitiremos a dependência das correlações em  $\beta, \mathbf{g}$ )

$$\sum_{x \in B} \mathbb{E}[\langle \sigma_x \rangle_S^+ - \langle \sigma_x \rangle_S^-] = \mathbb{E}[M^+ - M^-] = \frac{1}{\beta} \mathbb{E}[F^{+, (1)}(0) - F^{-, (1)}(0)], \quad (5.3)$$

onde  $F^{\gamma, (k)}(0)$  é  $k$ -ésima derivada no ponto  $r = 0$ ,  $\gamma \in \Gamma$ . Assim

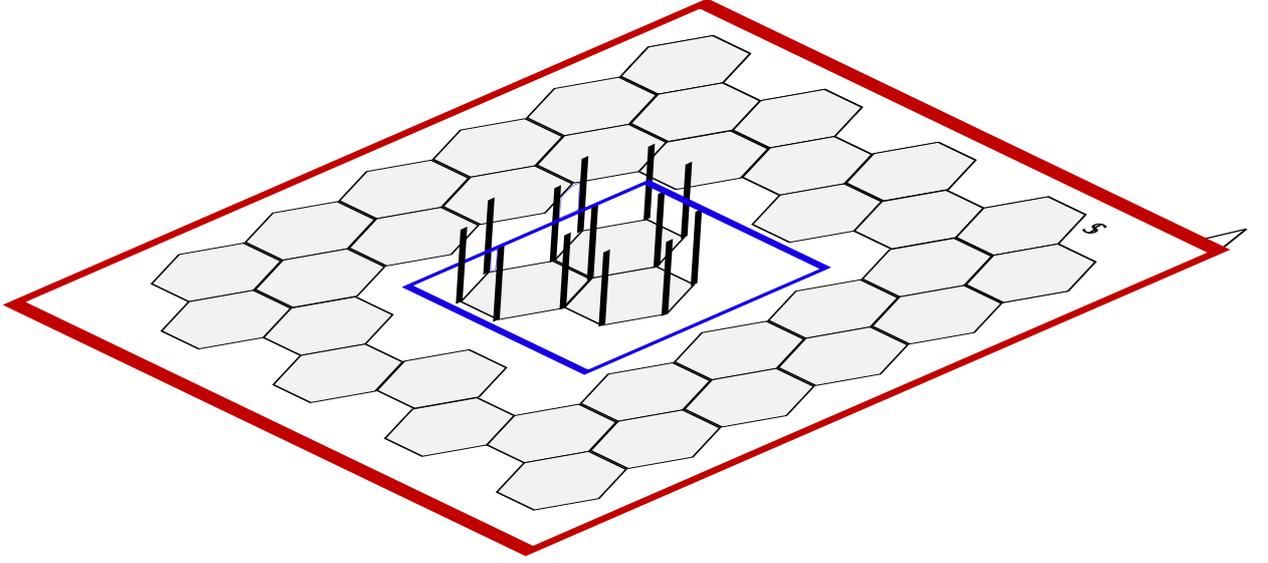
$$|\mathbb{E}[F^{+, (1)}(0) - F^{-, (1)}(0)]| \leq \Theta^+ + \Upsilon + \Theta^-, \quad (5.4)$$

Sendo  $\Theta^+ := |\mathbb{E}[F^{+, (1)}(0) - R^+]|$ ,  $\Upsilon := |R^+ - R^-|$ ,  $\Theta^- := |\mathbb{E}[F^{-, (1)}(0) - R^-]|$  e  $R^\pm := (F^\pm(r) - F^\pm(0))/r$ .

Para cada uma das expressões  $\Theta^+$ ,  $\Upsilon$ ,  $\Theta^-$ , obtemos limitações usando análises inspiradas em Chatterjee [Cha18]. Primeiramente nas seguintes subseções, será obtida uma limitação para  $\Upsilon$  e posteriormente damos as limitações superiores para  $\Theta^+$ ,  $\Theta^-$ .

### 5.3 Uma limitação considerando as arestas que enlaçam $\mathbb{B}$ com o exterior.

Mudemos o sistema uma vez mais. Deixemos com o campo  $g_x + r$  todos os vértices de  $B$ , mas desta vez tiramos as arestas que conectam  $B$  com  $S \setminus B$ .



**Figura 5.3:** Nos vértices de  $\mathbb{B}$  o campo é  $g_x + r$  adicionalmente tem-se cortada todas as arestas que conectam  $\mathbb{B}$  com o exterior.

Denotemos por  $G^\gamma(r)$  a energia livre deste novo sistema. Observe que  $G^\gamma(r)$  será a soma de uma parte que depende dos vértices de  $B$  e  $r$ , e não de  $\gamma$ , e de outra parte da soma que depende dos vértices  $S \setminus B$ , mas que não usa  $r$ , e que sim depende de  $\gamma$ . Com isso temos a seguinte identidade

$$G^\gamma(r) = G^\gamma(0) + T(r),$$

onde  $T(r)$  é uma quantidade que depende só de  $r$  e não de  $\gamma$ . Isto é válido para todas as condições de fronteira  $\gamma$ , em especial para  $+$  e  $-$ .

Consequentemente, temos

$$\Upsilon \leq \frac{|F^+(r) - G^+(r) - F^+(0) + G^+(0)|}{r} + \frac{|F^-(r) - G^-(r) - F^-(0) + G^-(0)|}{r}.$$

**Proposição 5.3.1.** Considerando a definição de energia livre, para a condição de fronteira  $\gamma$ , com  $H_1$  e  $H_2$  sendo os hamiltonianos de  $F^\gamma(r)$  e  $G^\gamma(r)$ , respectivamente, a desigualdade abaixo é satisfeita

$$\left| \ln \sum_{\sigma} e^{-\beta H_1(\sigma)} - \ln \sum_{\sigma} e^{-\beta H_2(\sigma)} \right| \leq \beta \max_{\sigma} |H_1(\sigma) - H_2(\sigma)|. \quad (5.5)$$

**Demonstração.** A prova é baseada em Medeiros [Med17, Lema 1.22.]. Já que,

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{Z_1}{Z_2} \right) &= \ln \sum_{\sigma} \frac{e^{-\beta H_1(\sigma)} e^{-\beta H_2(\sigma)}}{e^{-\beta H_2(\sigma)} Z_2} \\ &= \ln \sum_{\sigma} e^{-\beta(H_1(\sigma) - H_2(\sigma))} \mu_2 \\ &= \ln \langle e^{-\beta(H_1 - H_2)} \rangle_{\mu_2} \\ &\geq \ln e^{\langle -\beta(H_1 - H_2) \rangle_{\mu_2}} \\ &\geq -\beta \max_{\sigma} |H_1(\sigma) - H_2(\sigma)|, \end{aligned}$$

onde os subíndices 1, 2 fazem referência ao fato que as expressões trabalham com os hamiltonianos de  $H_1$  e  $H_2$ , respectivamente. E invertendo a ordem obtemos

$$\ln\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right) \leq \beta \max_{\sigma} |H_1(\sigma) - H_2(\sigma)|.$$

Assim, concluímos (5.5).  $\square$

**Limitaremos a diferença de hamiltonianos.** Como na diferença de  $H_1$  e  $H_2$  só fica as arestas que enlaçam  $\mathbb{B}$  com os hexágonos de fora, temos que limitar o número de arestas por lado, da caixa de lado  $m$  que contém a  $\mathbb{B}$ . Seja  $q_0$  esse número. Então

$$q_0 \leq \lfloor \frac{2m}{\sqrt{3}} \rfloor.$$

Logo, o número de arestas é limitado por  $Cm$ , onde  $C$  é uma constante.

$$\Upsilon \leq 4\beta q_0 \leq 4\beta \lfloor \frac{2m}{\sqrt{3}} \rfloor \leq \beta Cm. \quad (5.6)$$

## 5.4 Uma limitação considerando a forma da rede hexagonal.

A limitação de  $\Theta^+$ ,  $\Theta^-$  será dada no Lema 5.4.5. Para conseguir isto usaremos a integração de variáveis aleatórias por partes (ver Seção 4.3.1) e outros resultados.

### 5.4.1 Resultados para limitar $\Theta^\pm$

Seja  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  centrado e gaussiano,  $\mathbf{X}^t := e^{-t}\mathbf{X} + \sqrt{1 - e^{-2t}}\mathbf{X}'$  e  $\mathbf{X}^{-t} := e^{-t}\mathbf{X} + \sqrt{1 - e^{-2t}}\mathbf{X}''$  com  $t \geq 0$  e  $\mathbf{X}', \mathbf{X}''$  duas cópias independentes  $\mathbf{X}$ . Usando a integração por partes gaussiana temos

**Lema 5.4.1.** *Se  $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ , a seguinte igualdade é válida*

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[f(\mathbf{X}^t)f(\mathbf{X}^{-t})] = -2e^{-2t} \sum_{l,k=1}^n \delta_{lk} \mathbb{E}[\partial_l f(\mathbf{X}^t) \partial_k f(\mathbf{X}^{-t})]. \quad (5.7)$$

A derivada pode entrar na esperança já que  $f \in C_b^\infty$ , posteriormente fazemos a derivação para funções de múltiplas variáveis e depois usamos a integração por partes da Proposição 4.3.2. A prova completa está em Chatterjee [Cha09a, pag. 16].

O seguinte resultado será usado frequentemente para obter a prova do Lema 5.4.5

**Teorema 5.4.1.** *Se  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$  é um vetor gaussiano padrão, i.e., as  $g_l$  são independentes com distribuição  $N(0, 1)$  e  $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$  é uma função de  $\mathbf{g}$ , então*

$$\text{Var}[f] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l_1, \dots, l_k=1}^n \mathbb{E}^2 \left( \frac{\partial^k f}{\partial g_{l_1} \cdots \partial g_{l_k}} \right).$$

**Demonstração.** Usamos duas cópias independentes de  $\mathbf{g}$ . Logo criamos vetores aleatórios apropriados  $\mathbf{g}^t := e^{-t}\mathbf{g} + \sqrt{1-e^{-2t}}\mathbf{g}'$  e  $\mathbf{g}^{-t} := e^{-t}\mathbf{g} + \sqrt{1-e^{-2t}}\mathbf{g}''$ , para  $t \geq 0$ . Aplicamos  $f$  a um destes dois vetores aleatórios, respectivamente, e posteriormente calculamos a esperança. Assim  $\mathbb{E}[f(\mathbf{g}^t)f(\mathbf{g}^{-t})] =: \xi(t)$ . Em seguida mudamos a variável nesta forma  $\eta(u) = \xi(t(u))$ , onde  $t(u) := -(\ln u)/2$  e  $u \in (0, 1]$ . Depois disso, notamos que  $\eta(u)$  é uma função absolutamente monótona (ver [Fel08]). Com a ajuda das propriedades deste tipo de funções podemos deduzir o Teorema 5.4.1. Para mais detalhes ver Chatterjee [Cha09a].  $\square$

A seguir, obtemos uma extensão para campos gaussianos não identicamente distribuídos. A prova é similar à anterior, mas na literatura é muito pouco frequente encontrar uma prova para campos não identicamente distribuídos.

**Lema 5.4.2.** *Seja  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$  um vetor aleatório, onde os  $g_l$  são independentes, com distribuição  $N(0, v_l^2)$ , com cada  $v_l$  finito, e  $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Logo*

$$\text{Var}[f] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l_1, \dots, l_k=1}^n \prod_{r=1}^k v_{l_r}^2 \mathbb{E}^2 \left( \frac{\partial^k f}{\partial g_{l_1} \cdots \partial g_{l_k}} \right). \quad (5.8)$$

**Demonstração.** Dado  $\mathbf{g}$ , definimos duas cópias independentes  $\mathbf{g}'$  e  $\mathbf{g}''$ . Com isso criamos as duas variáveis  $\mathbf{g}^t := e^{-t}\mathbf{g} + \sqrt{1-e^{-2t}}\mathbf{g}'$  e  $\mathbf{g}^{-t} := e^{-t}\mathbf{g} + \sqrt{1-e^{-2t}}\mathbf{g}''$ , para  $t \geq 0$ . Seja  $\xi(t) := \mathbb{E}[f(\mathbf{g}^t)f(\mathbf{g}^{-t})]$ , derivemos fazendo uso do Lema (5.4.1)

$$\xi'(t) = \frac{d}{dt} \mathbb{E}[f(\mathbf{g}^t)f(\mathbf{g}^{-t})] = -2e^{-2t} \sum_{i=1}^n v_i^2 \mathbb{E}[\partial_i f(\mathbf{g}^t) \partial_i f(\mathbf{g}^{-t})].$$

Já que os processos  $g_l$ 's são independentes e centrados, isso resulta em  $\text{cov}(g_l, g_j)$  sendo 0 se  $l \neq k$  e  $v_l^2$  se  $l = k$ .

Vamos fazer uma mudança de variáveis com o objetivo de tirar o termo  $2e^{-2t}$ . Definimos  $\eta(u) = \xi(t(u))$ , onde  $t(u) := -\frac{1}{2} \ln(u)$  e  $u \in (0, 1]$ . Se derivamos  $\eta$  em  $u$  temos

$$\eta'(u) = -\frac{1}{2u} \xi'(t(u)) = \sum_{i=1}^n v_i^2 \mathbb{E}[\partial_i f(\mathbf{g}^{t(u)}) \partial_i f(\mathbf{g}^{-t(u)})],$$

e se derivamos duas vezes

$$\eta''(u) = \sum_{l_1, l_2=1}^n v_{l_1}^2 v_{l_2}^2 \mathbb{E}[\partial_{l_1} \partial_{l_2} f(\mathbf{g}^{t(u)}) \partial_{l_1} \partial_{l_2} f(\mathbf{g}^{-t(u)})].$$

Assim, temos para a  $k$ -ésima derivada

$$\eta^{(k)}(u) = \sum_{l_1, \dots, l_k=1}^n \prod_{r=1}^k v_{l_r}^2 \mathbb{E}[\partial_{l_1} \cdots \partial_{l_k} f(\mathbf{g}^{t(u)}) \partial_{l_1} \cdots \partial_{l_k} f(\mathbf{g}^{-t(u)})]. \quad (5.9)$$

Agora notamos que as esperanças na fórmula (5.9) são positivas; por exemplo

$$\mathbb{E}[\partial_i f(\mathbf{g}^t) \partial_i f(\mathbf{g}^{-t})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}^2[\partial_i f(\mathbf{g}^t) | \mathbf{g}],$$

já que  $\mathbf{g}^{-t}$  e  $\mathbf{g}^t$  condicionadas a  $\mathbf{g}$  são independentes e como são identicamente distribuídas as esperanças condicionais se tornam as mesmas.

Estendemos a definição de  $\eta$  para 0. Para isso definimos  $\eta(0) := \mathbb{E}[\partial_l f(\mathbf{g}') \partial_l f(\mathbf{g}'')] = \mathbb{E}^2[\partial_l f(\mathbf{g}')]^2$ . Com isso, temos  $\eta$  sendo contínua em todo o intervalo  $[0, 1]$  e como é  $C^\infty$  para  $(0, 1)$  e todas as suas derivadas são positivas, esta função é absolutamente monótona. Das propriedades das funções absolutamente monótonas (ver Feller [Fel08]) segue que podemos escrever como uma série  $\eta(u) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k u^k$ . Logo, podemos observar que  $\eta(1) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k$ . Derivando até a  $k$ -ésima derivada e logo tomamos limite para 0. Obtemos o seguinte

$$p_k = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta^{(k)}(u)}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{l_1, \dots, l_k=1}^n \prod_{r=1}^k v_{l_r}^2 (\mathbb{E}[\partial_{l_1} \dots \partial_{l_k} f(\mathbf{g})])^2.$$

E com isso podemos obter  $\text{Var}[f] = \mathbb{E}[f^2] - \mathbb{E}^2[f]$ , já que  $\eta(1) = \mathbb{E}[f^2]$  e  $\eta(0) = \mathbb{E}^2[f]$ . com isso obtemos (5.8).

□

Entre os teoremas que usaremos, temos a desigualdade de Poincaré gaussiana.

**Teorema 5.4.2 (Desigualdade de Poincaré).** *Sejam  $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$  e  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$  um vetor de variáveis aleatórias  $\zeta_l$  independentes, com distribuição  $N(0, 1)$ . Então*

$$\text{Var}[f] \leq \mathbb{E}[|\nabla f|^2] = \mathbb{E} \left[ \sum_{l=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial \zeta_l} \right)^2 \right]. \quad (5.10)$$

A prova deste teorema pode ser encontrada em Chatterjee e Ledoux [Cha14], [Led01, p. 49]. Nestes textos a prova usa semigrupos, enquanto em [BLM13] temos uma versão da desigualdade de Poincaré para variáveis aleatórias (sem a necessidade de ser gaussianas) com valores em  $[0, 1]$  e funções convexas em alguma coordenada. Além disso, neste mesmo texto temos uma prova para a desigualdade de Poincaré gaussiana sem a necessidade de usar semigrupos.

Agora definamos

$$\rho^\pm(x_1, \dots, x_k) := \mathbb{E} \left[ \frac{\partial^k F^\pm}{\partial \xi_{x_1} \dots \partial \xi_{x_k}} \right].$$

Aqui,  $F^\gamma = F^\gamma(0)$  denota a energia livre do sistema (logaritmo da função de partição). O lema seguinte apresenta uma limitação para uma somatória que aparecerá com muita frequência.

**Lema 5.4.3.** *Para  $\rho^\pm$  definido como antes, a seguinte limitação por cima é válida*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{x_1, \dots, x_k \in S} (\rho^\pm(x_1, \dots, x_k))^2 \leq \beta^2 C_0 |S|.$$

**Demonstração.**

Do Teorema 5.4.2, temos

$$\text{Var}[F^+] \leq \left[ \sum_{x \in S} \left( \frac{\beta \langle \sigma_x \rangle h_x}{A'_x} \right)^2 \right] \leq \beta^2 C_0 |S|, \quad (5.11)$$

já que  $h_x, \langle \sigma_x \rangle \leq 1$ , onde  $A'_x := \frac{\partial}{\partial t_x} A(t_x)$ . Como  $A$  está definida num compacto temos que possui mínimo e máximo i.e.  $m_1 \leq A'_x \leq M_1$ . Então  $C_0 := \frac{1}{(m_1 \theta)^2}$ .  $\square$

Observemos que a derivada  $F^+(r)$  com respeito a  $r$  é

$$\frac{\partial F^+(r)}{\partial r} = \beta \sum_{x_1 \in B} \langle \sigma_{x_1} \rangle_S^+ = \sum_{x_1 \in B} \frac{\partial F^+(r)}{\partial g_{x_1}} = \sum_{x_1 \in B} \frac{\partial F^+(r)}{\partial \xi_{x_1}} \frac{\partial \xi_{x_1}}{\partial g_{x_1}} = \sum_{x_1 \in B} \frac{\partial F^+(r)}{\partial \xi_{x_1}} \frac{A'_{x_1}}{h_{x_1}}$$

Logo a  $k$ -ésima derivada é

$$F^{+, (k)}(r) := \frac{\partial^{(k)} F^+(r)}{\partial r^k} = \sum_{x_1, \dots, x_k \in B} \prod_{l=1}^k \left( \frac{A'_{x_l}}{h_l} \right) \frac{\partial^{(k)} F^+(r)}{\partial \xi_{x_1} \dots \partial \xi_{x_k}}. \quad (5.12)$$

Também podemos enunciar o seguinte lema para a rede hexagonal  $\mathbb{S}$  com conjunto finito de vértices  $S$ .

**Lema 5.4.4.** *Seja  $F^+(r)$  a energia do sistema modificado. Logo para todo  $r \geq 0$ ,*

$$\mathbb{E}[F^+(r)] = \mathbb{E}[F^+(0)] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k!} \mathbb{E}[F^{+, (k)}(0)]. \quad (5.13)$$

-1em

**Demonstração.** Aplicamos a esperança á expansão de Taylor de  $F^+(r)$

$$\mathbb{E}[F^+(r)] = \mathbb{E}[F^+(0)] + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{r^j}{j!} \mathbb{E}[F^{+, (j)}(0)] + \int_0^r \frac{(r-u)^{k-1}}{(k-1)!} \mathbb{E}[F^{+, (k)}(u)] du.$$

A expressão acima será válida se garantimos que o termo resíduo vai para zero quando  $k \rightarrow \infty$ , ou seja, se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{(r-u)^{k-1}}{(k-1)!} \mathbb{E}[F^{+, (k)}(u)] du = 0. \quad (5.14)$$

Usamos a convergência da seguinte série para mostrar o limite anterior.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^r \frac{(r-u)^{k-1}}{(k-1)!} |\mathbb{E}[F^{+, (k)}(u)]| du \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^r \frac{(r)^{k-1}}{(k-1)!} |\mathbb{E}[F^{+, (k)}(u)]| du. \quad (5.15)$$

Denotemos

$$\rho_r^+(x_1, \dots, x_k) := \mathbb{E} \left[ \frac{\partial^k F^+(r)}{\partial \xi_{x_1} \dots \partial \xi_{x_k}} \right].$$

Para mostrar a convergência da última somatória em (5.15) é suficiente mostrar que a

seguinte soma é limitada:

$$\begin{aligned}
I(u) &:= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(r)^{k-1}}{(k-1)!} |\mathbb{E}[F^{+, (k)}(u)]| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kr^{k-1}}{k!} \sum_{x_1, \dots, x_k \in S} \prod_{l=1}^k \left( \frac{|A'_{x_l}|}{|h_l|} \right) |\rho_u^+(x_1, \dots, x_k)| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{kr^{k-1}}{\sqrt{k!}} \right) \left( \sum_{x_1, \dots, x_k \in S} (M_1 q_S^{n_1})^k \frac{|\rho_u^+(x_1, \dots, x_k)|}{\sqrt{k!} |S|^k} \right) \\
&\leq \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 r^{2k-2} |S|^{2k} P_S^{2k}}{k!} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{x_1, \dots, x_k \in S} \frac{|\rho_u^+(x_1, \dots, x_k)|}{\sqrt{k!} |S|^k} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(r, S, q_S) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{x_1, \dots, x_k \in S} (\rho_u^+(x_1, \dots, x_k))^2 \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{5.16}$$

onde  $|A'_{x_l}| \leq M_1$ ,  $P_U := M_1 q_U$ , e  $q_U := \max_{x \in U} \frac{1}{|h_x|}$ , com  $U \subset S$  e  $\|\cdot\|_{\infty}$  sendo a norma do supremo em  $\mathbb{R}^2$ .  $C(r, S, q_S)$  é a raiz do valor no qual converge a somatória da primeira raiz da ante-penúltima linha. Sabemos que converge pelo critério de d'Alambert. Na segunda raiz da ante-penúltima linha usamos que  $(\sum_{j=1}^m |a_j|)^2 \leq m^2 (\sum_{j=1}^m a_j^2)$ . Utilizando o Lema 5.4.3 segue

$$I(u) \leq C(r, S, q_S) \frac{\beta}{\theta m_1} |S|^{1/2}. \tag{5.17}$$

Com esta limitação voltamos a (5.15) e obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^r \frac{(r-u)^{k-1}}{(k-1)!} |\mathbb{E}[F^{+, (k)}(u)]| du \leq \int_0^r I(u) \leq C(r, S, q_S) \frac{\beta}{\theta m_1} |S|^{1/2} r \tag{5.18}$$

E com isso temos garantido a validade de (5.14) e (5.13).  $\square$

Agora mostraremos como escolher a rede hexagonal  $\mathbb{B}$  que permitirá limitar  $\Theta^+$  e  $\Theta^-$  de (5.4). Para isto, definimos  $m_l := (\ln n_1)^l$ , para  $l \geq 1$  e  $m_0 = 0$ . Para cada  $x_1, \dots, x_k \in S$  e qualquer  $k$  definimos  $d(x_1, \dots, x_k) := \max_{1 \leq s < t \leq k} \|x_s - x_t\|_{\infty}$ . onde  $\|\cdot\|_{\infty}$  é a norma do supremo em  $\mathbb{R}^2$ . Para cada  $l \geq 1$  seja

$$a_l := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \in S \\ m_{l-1} \leq d(i_1, \dots, i_k) < m_l}} (\rho^+(i_1, \dots, i_k)^2 + \rho^-(i_1, \dots, i_k)^2).$$

Logo, pelo Lema 5.4.3 temos

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l \leq 2 \frac{\beta^2}{(\theta m_1)^2} |S|. \tag{5.19}$$

Note que, o número de vértices  $S$  é menor que 6 vezes o número de hexágonos  $n_1 := \lfloor 2n^2/6 \cos(\pi/6) \rfloor$ , onde  $\lfloor x \rfloor$  denota o inteiro menor igual a  $x$ .

**Observação 5.4.1.** *Podemos fazer a análise também para a rede quadrada ou triangular, já que são polígonos regulares com os quais podemos cobrir o plano. Para isso tomamos*

$$n_1 = \left\lfloor \frac{2n^2}{p \cos(\pi/p)} \right\rfloor, \quad p = 3, 4.$$

Logo, fizermos  $L := \frac{1}{(\theta m_1)^2}$ ,  $p = 6$  limitamos (5.19) por

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l \leq 2p\beta^2 L n_1. \quad (5.20)$$

Seja  $\lambda$  o menor inteiro para o qual é verdade que  $m_\lambda \geq \sqrt[4]{n_1}$ . Pela desigualdade (5.20), existe  $l$  tal que  $1 \leq l \leq \lambda$  e

$$a_l \leq \frac{2p\beta^2 L n_1}{\lambda} \leq 8p\beta^2 L n_1 \frac{\ln \ln n_1}{\ln n_1}, \quad n_1 \geq 3. \quad (5.21)$$

Fixado  $l$ , seja  $m$  o maior inteiro que é estritamente menor que  $m_l$ . Observe que  $m \geq 1$ , pois  $m_1 \geq 1$ .

Dado a rede hexagonal  $\mathbb{S}$ , com conjuntos de vértices  $S$ , que está contido numa caixa quadrada  $\Lambda$  de lado  $n$  (cada vértice de  $\Lambda$  está em  $\mathbb{Z}^2$ ), obtemos uma subcaixa  $\Lambda_0$ , de lado  $\lfloor n/m \rfloor m$ . Seja  $\mathbb{S}_0$  uma rede hexagonal, com  $S_0 \subset S$ , contidos numa subcaixa  $\Lambda_0$ . Assim, o número de vértices dos hexágonos fora a sub-rede  $\mathbb{S}_0$  é limitada por

$$\begin{aligned} |S \setminus S_0| &\leq p \{ \# \text{ de hexágonos entre } S_0 \text{ e } S \} \\ &\leq \frac{2}{\cos(\pi/p)} \left[ n^2 - (\lfloor \frac{n}{m} \rfloor m)^2 \right] \\ &\leq \frac{4}{\cos(\pi/p)} n m \leq \frac{4}{\cos(\pi/p)} n m_\lambda \\ &\leq \frac{4}{\cos(\pi/p)} n \sqrt[4]{n_1} \ln n_1 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Por outro lado, notamos que  $m_{\lambda-1} \leq \sqrt[4]{n_1} \leq m_\lambda \leq \sqrt[4]{n_1} \ln n_1 \leq m_{\lambda+1}$ .

Agora particionamos  $\Lambda_0$  em  $m \times m$  sub-quadrados. Cada  $m$ -sub quadrado contém uma sub-rede hexagonal  $\mathbb{B}$ , cujos conjuntos de vértices denotaremos por  $B$ . Denotaremos por  $\mathcal{C}$  a coleção de todos os  $\mathbb{B}$  que estão contidos nos subquadrados de longitude  $m$  gerados de particionar  $\Lambda_0$  em  $m \times m$ .

Note que o número de sub-redes hexagonais  $\mathbb{B}$  contidas em  $\mathcal{C}$  é igual a  $\lfloor n/m \rfloor^2 (\geq n^2/(4m^2))$ . Seja

$$P(B) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{x_1, \dots, x_k \in B \\ d(x_1, \dots, x_k) < m_{l-1}}} (\rho^+(x_1, \dots, x_k)^2 + \rho^-(x_1, \dots, x_k)^2).$$

Podemos obter uma limitação superior para a sua média usando (5.20):

$$\bar{P} := \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum_{B \in \mathcal{C}} P(B) \leq \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum_{l=1}^{\infty} a_l \leq \frac{2p\beta^2 L n_1}{|\mathcal{C}|} \leq 8p \frac{m^2}{n^2} \beta^2 L n_1. \quad (5.23)$$

Definamos também

$$Q(B) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{x_1, \dots, x_k \in B \\ m_{l-1} \leq d(x_1, \dots, x_k) < m_l}} (\rho^+(x_1, \dots, x_k)^2 + \rho^-(x_1, \dots, x_k)^2).$$

Usando (5.21) e que  $l \leq \lambda$ , definimos e limitamos a sua média por

$$\bar{Q} := \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum_{B \in \mathcal{C}} Q(B) \leq \frac{a_l}{|\mathcal{C}|} \leq 32p\beta^2 L n_1 \frac{m^2 \ln \ln n_1}{n^2 \ln n_1}. \quad (5.24)$$

A seguir, definimos  $K := (\ln n)^{1/12}$  e  $\mathcal{D}$  como um subconjunto de  $\mathcal{C}$  cujos elementos satisfazem a seguinte condição:  $\mathbb{B} \in \mathcal{D}$  se e só se  $P(B) \leq K^2 \bar{P}$  e  $Q(B) \leq K^2 \bar{Q}$ .

Usando a desigualdade de Markov,

$$|\mathcal{C} \setminus \mathcal{D}| \leq 2|P(B) > K^2 \bar{P}| \leq \frac{2}{K^2 \bar{P}} \sum_{B \in \mathcal{C}} P(B) = 2 \frac{|\mathcal{C}|}{K^2}. \quad (5.25)$$

O seguinte Lema apresenta a limitação procurada para  $\Theta^+$ ,  $\Theta^-$  de (5.4). Podemos fazer isso através de considerar  $r$  cuidadosamente escolhido.

**Lema 5.4.5.** *Seja  $\mathcal{D}$ ,  $m$ ,  $K$ ,  $F^+(r)$  definidos acima. Para  $\mathbb{B} \in \mathcal{D}$  fixado e  $r := \frac{\sqrt{\ln \ln n_1}}{2\sqrt{|B|P_B}}$ . Temos*

$$\left| \mathbb{E}[F^{+, (1)}(0)] - \frac{\mathbb{E}[F^+(r)] - \mathbb{E}[F^+(0)]}{r} \right| \leq C\beta\sqrt{L}P_S K m^2 \frac{\sqrt{\ln \ln n_1}}{\sqrt[4]{\ln n_1}}.$$

Onde  $C$  é uma constante. O mesmo é válido para  $F^-$ .

**Demonstração.** Usando o Lema 5.13,  $m < m_l$  e da propriedade (5.12), segue que

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{r^{k-1}}{k!} \left| \mathbb{E}[F^{+, (k)}(0)] \right| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{r^{k-1}}{k!} \sum_{x_1, \dots, x_k \in B} \prod_{l=1}^k \left( \frac{A'_{x_l}}{h_l} \right) |\rho_r^+(x_1, \dots, x_k)| \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{r^{k-1}}{k!} \sum_{\substack{x_1, \dots, x_k \in B \\ m_{l-1} \leq d(x_1, \dots, x_k) < m_l}} \prod_{l=1}^k \left( \frac{A'_{x_l}}{h_l} \right) |\rho^+(x_1, \dots, x_k)| \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{k-1}}{k!} \sum_{\substack{x_1, \dots, x_k \in B \\ d(x_1, \dots, x_k) < m_{l-1}}} \prod_{l=1}^k \left( \frac{A'_{x_l}}{h_l} \right) |\rho^+(x_1, \dots, x_k)|. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Vamos limitar a primeira somatória. Como  $\mathbb{B} \in \mathcal{D}$  temos que  $|B|$  (número de vértices em  $B$ ) fica limitado por  $p \lfloor \frac{2m^2}{p \cos(\pi/p)} \rfloor$ . O número de formas de escolher  $x_1, x_2, \dots, x_k \in B$

é  $|B|^k$  que fica limitado por  $(p \lfloor \frac{2m^2}{p \cos(\pi/p)} \rfloor)^k$ . Assim,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=2}^{\infty} \frac{r^{k-1}}{k!} \sum_{\substack{x_1, \dots, x_k \in B \\ m_{l-1} \leq d(x_1, \dots, x_k) < m_l}} \prod_{l=1}^k \left( \frac{A'_{x_l}}{h_l} \right) \left| \rho^+(x_1, \dots, x_k) \right| \\
& \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k!}} r^{k-1} |B|^{\frac{k}{2}} P_B^k \sum_{\substack{x_1, \dots, x_k \in B \\ m_{l-1} \leq d(x_1, \dots, x_k) < m_l}} \frac{1}{|B|^{\frac{k}{2}} \sqrt{k!}} \left| \rho^+(x_1, \dots, x_k) \right| \\
& \leq \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{r^{2k-2} |B|^k P_B^{2k}}{k!} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{|B|^k k!} \left( \sum_{\substack{x_1, \dots, x_k \in B \\ m_{l-1} \leq d(x_1, \dots, x_k) < m_l}} \rho^+(x_1, \dots, x_k) \right)^2} \\
& \leq \sqrt{|B| P_B} e^{r^2 |B| P_B^2} \sqrt{Q(B)} \leq \sqrt{|B| P_B} (\ln n_1)^{\frac{1}{4}} K \sqrt{Q} \\
& \leq \frac{8\sqrt{2p}}{\cos(\pi/p)} \beta P_B \sqrt{L} K m^2 \frac{\sqrt{\ln \ln n_1}}{\sqrt[4]{\ln n_1}}.
\end{aligned}$$

Acima  $P_B$  é como em (5.17). Para obter a última limitação nos passos anteriores usamos Cauchy-Schwartz, e que  $|B| \leq \frac{2m^2}{\cos(\pi/p)}$ ,  $r = \frac{\sqrt{\ln \ln n_1}}{2 P_B \sqrt{|B|}}$ ,  $\sqrt{n_1} \leq \sqrt{2n}$ .

Agora, iremos limitar a segunda soma (5.26). Se  $l = 1$  não tem sentido. Se  $l > 1$  o número de formas de escolher  $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$  tal que  $d(x_1, x_2, \dots, x_k) < m_{l-1}$  fica limitado por  $|B| \times A^{k-1}$ , porque há  $|B|$  formas de escolhe  $x_1$  e para  $x_2, \dots, x_k$  há  $N^{k-1}$  maneiras de escolher esses elementos. Onde  $N$  é o número de vértices que ficam limitados numa caixa de lado  $m_{l-1}$ . Logo

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=2}^{\infty} \frac{r^{k-1}}{k!} \sum_{\substack{x_1, \dots, x_k \in B \\ d(x_1, \dots, x_k) < m_{l-1}}} \prod_{l=1}^k \left( \frac{A'_{x_l}}{h_l} \right) \left| \rho^+(x_1, \dots, x_k) \right| \\
& \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{r^{k-1} |B|^{\frac{1}{2}} N^{\frac{k-1}{2}} P_B^k}{\sqrt{k!}} \sum_{\substack{x_1, \dots, x_k \in B \\ d(x_1, \dots, x_k) < m_l}} \frac{|\rho^+(x_1, \dots, x_k)|}{|B|^{\frac{1}{2}} N^{\frac{k-1}{2}} \sqrt{k!}} \\
& \leq \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{r^{2k-2} |B| (2\epsilon^2 |B|)^{k-1} P_B^{2k}}{k!} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{x_1, \dots, x_k \in B \\ d(x_1, \dots, x_k) < m_l}} (\rho^+(x_1, \dots, x_k))^2} \\
& \leq \sqrt{2r} \epsilon |B| P_B^2 e^{r^2 \epsilon^2 |B| P_B^2} K \sqrt{P} \\
& \leq \frac{\sqrt{8p}}{\sqrt{\cos(\pi/p)}} \sqrt{L} P_B \beta K m^2 (\ln n_1)^{\frac{\epsilon^2}{4} - 1} \sqrt{\ln \ln n_1} \\
& \leq \frac{\sqrt{8p}}{\sqrt{\cos(\pi/p)}} \sqrt{L} P_B \beta K m^2 \frac{\sqrt{\ln \ln n_1}}{\sqrt[4]{\ln n_1}}.
\end{aligned}$$

A última desigualdade segue do uso de Cauchy-Schwarz, de  $\frac{m^2}{\cos(\pi/p)} \leq |B| \leq \frac{2m^2}{\cos(\pi/p)}$ ,  $N \leq \frac{2m_{l-1}^2}{\cos(\pi/p)} \leq 2\epsilon^2 |B|$  e  $\epsilon = \frac{1}{\ln n_1}$ .  $\square$

Temos até agora obtido limitações superiores para  $\Theta^+$ ,  $\Theta^-$  e  $\Upsilon$ . Com isso em mente, mostraremos o seguinte lema para redes hexagonais contidas em caixas quadradas.

**Lema 5.4.6.** *Seja  $S$  a máxima rede hexagonal, cujos hexágonos componentes tem lado 1, contida numa caixa  $\Lambda$  de lado  $n$ , para algum  $n \geq 3$ . Consideremos a RFIM em  $S$  com temperatura inversa  $\beta \in (0, \infty)$ . Logo existe  $x \in S$  tal que*

$$\mathbb{E}[\langle \sigma_x \rangle_S^+ - \langle \sigma_x \rangle_S^-] \leq \frac{C}{\sqrt{\ln \ln n_1}},$$

onde  $n_1 := \lfloor \frac{2n^2}{6 \cos(\pi/6)} \rfloor$  e  $C$  é uma constante apropriada.

**Demonstração.** Vamos começar por limitar a seguinte expressão, sendo  $B$ ,  $r$ ,  $F^\gamma(r)$  e  $G^\gamma(r)$  definidos como nos lemas anteriores

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mathbb{E}[F^{+, (1)}(0)]}{\beta} - \frac{\mathbb{E}[G^0(r) - G^0(0)]}{\beta r} \right| \\ & \leq \frac{1}{\beta} \left| \mathbb{E}[F^{+, (1)}(0)] - \frac{\mathbb{E}[F^+(r) - F^+(0)]}{r} \right| \\ & \quad + \frac{1}{\beta} \left| \frac{\mathbb{E}[F^+(r) - F^+(0)]}{r} - \frac{\mathbb{E}[G^0(r) - G^0(0)]}{r} \right| \end{aligned}$$

Da desigualdade (5.6) e do Lema (5.4.5), a última expressão acima fica limitada por

$$C\sqrt{L}P_B K m^2 \frac{\sqrt{\ln \ln n_1}}{\sqrt[4]{\ln n_1}} + \frac{CP_B \sqrt{|B|m}}{\sqrt{\ln \ln n_1}} \leq \frac{Cm^2 P_B (\sqrt{L} + 1)}{\sqrt{\ln \ln n_1}}. \quad (5.27)$$

A desigualdade anterior é válida para valores muito grandes de  $n_1$ . Para valores de  $n_1$  menores pode ser compensada por tomar uma constante adequada.

Observe que  $F^{+, (1)}(0) = \beta \sum_{x \in B} \langle \sigma_x \rangle_S^+$ . Considerando  $S_1$  a união de todos os conjuntos de vértices  $B$  tais que  $\mathbb{B} \in \mathcal{D}$ . Seja

$$\Phi := \frac{|\mathcal{D}| \mathbb{E}[G^0(r) - G^0(0)]}{\beta r}.$$

Como  $|\mathcal{D}| \leq |\mathcal{C}| = \lfloor \frac{n^2}{m^2} \rfloor \leq \frac{n^2}{m^2}$ ,  $\frac{n^2}{p \cos(\pi/p)} \leq n_1^2 \leq 2n^2$  e de (5.27) obtemos

$$\left| \mathbb{E} \left[ \sum_{x \in S_1} \langle \sigma_x \rangle_S^+ \right] - \Phi \right| \leq \frac{Cn_1 P_B (\sqrt{L} + 1)}{\sqrt{\ln \ln n_1}}.$$

Agora, de (5.22) e (5.25) segue que

$$\begin{aligned} |S \setminus S_1| & \leq |S \setminus S_0| + |\{x \in B : B \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D}\}| \\ & \leq \frac{4}{\cos(\pi/p)} n \sqrt[4]{n_1} \ln n_1 + \frac{1}{K^2} \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor^2 \left\lfloor \frac{2m^2}{\cos(\pi/p)} \right\rfloor \\ & \leq \frac{4\sqrt{p}}{\cos(\pi/p)} n_1^{\frac{3}{4}} \ln n_1 + 2p \frac{n_1}{(\ln n_1)^{\frac{1}{6}}} \leq \frac{Cn_1}{(\ln n_1)^{\frac{1}{6}}}, \end{aligned}$$

Para uma constante  $C$  adequada. Assim, temos

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left[ \sum_{x \in S} \langle \sigma_x \rangle_S^+ \right] - \Phi \right| &\leq \left| \mathbb{E} \left[ \sum_{x \in S \setminus S_1} \langle \sigma_x \rangle_S^+ \right] \right| + \left| \mathbb{E} \left[ \sum_{x \in S_1} \langle \sigma_x \rangle_S^+ \right] - \Phi \right| \\ &\leq |S \setminus S_1| + \frac{C n_1 P_B (\sqrt{L} + 1)}{\sqrt{\ln \ln n_1}} \leq \frac{C n_1}{(\ln n_1)^{\frac{1}{6}}} + \frac{C n_1 P_B (\sqrt{L} + 1)}{\sqrt{\ln \ln n_1}} \\ &\leq \frac{C n_1 P_B (\sqrt{L} + 1)}{\sqrt{\ln \ln n_1}}, \end{aligned}$$

que, como antes, é válida para  $n_1$  grande. Fazendo o mesmo para  $\langle \sigma_x \rangle_S^-$  e com  $\Phi$  definido como antes, temos a desigualdade. Logo, existe um  $x \in S$  que minimiza  $\mathbb{E}[\langle \sigma_x \rangle_S^+ - \langle \sigma_x \rangle_S^-]$ . Logo,

$$\mathbb{E}[\langle \sigma_x \rangle_S^+ - \langle \sigma_x \rangle_S^-] \leq \left| \mathbb{E} \left[ \sum_{x \in S} (\langle \sigma_x \rangle_S^+ - \langle \sigma_x \rangle_S^-) \right] \right| \leq \frac{C n_1 P_B (\sqrt{L} + 1)}{\sqrt{\ln \ln n_1}}.$$

e como  $n_1 \leq |S|$  segue o resultado desejado. □

Finalmente podemos provar o Teorema 5.1.1 que é válido para uma rede hexagonal finita  $\mathbb{S}$ , não necessariamente a rede máxima contida num quadrado.

### Prova do Teorema 5.1.1.

Seja  $\Lambda$  um quadrado de lado  $n$ , onde  $n$  é o mínimo inteiro maior que a distância  $l^\infty$  de  $x$  a  $\partial S$ . Consideremos também uma sub-rede de  $\mathbb{S}$ , de tamanho máximo com respeito a  $\Lambda$ , cujo conjunto de vértices é denotado por  $S' \subset S$ , com  $x \in S'$ .

Notemos que  $x$  pode ser qualquer ponto, desde que escolhamos adequadamente  $S'$ . Também pelo lema anterior temos

$$\mathbb{E} \left[ \langle \sigma_x \rangle_{S'}^+ - \langle \sigma_x \rangle_{S'}^- \right] \leq C / \sqrt{\ln \ln n_1}, \quad (5.28)$$

onde  $C$  é uma constante adequada. Pelas desigualdades *FKG* temos  $\langle \sigma_x \rangle_S^+ \leq \langle \sigma_x \rangle_{S'}^+$  e  $\langle \sigma_x \rangle_S^- \geq \langle \sigma_x \rangle_{S'}^-$ . Assim,  $\langle \sigma_x \rangle_{S'}^+ - \langle \sigma_x \rangle_{S'}^- \geq \langle \sigma_x \rangle_S^+ - \langle \sigma_x \rangle_S^- \geq 0$ , como  $\langle \sigma_x \rangle_S^- \leq \langle \sigma_x \rangle_S^\gamma \leq \langle \sigma_x \rangle_S^+$ , para todo  $\gamma$ , segue

$$|\langle \sigma_x \rangle_S^\gamma - \langle \sigma_x \rangle_S^{\gamma'}| \leq \langle \sigma_x \rangle_S^+ - \langle \sigma_x \rangle_S^-.$$

Com isso, obtemos

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{\gamma, \gamma'} |\langle \sigma_x \rangle_S^\gamma - \langle \sigma_x \rangle_S^{\gamma'}| \right] \leq \frac{C}{\sqrt{\ln \ln n_1}}.$$

Quando  $\beta = 0$  então  $\langle \sigma_x \rangle_S^\gamma = 1$ , para todo  $\gamma$ . No caso  $\beta = \infty$  o deduzimos via limite, pois, a cota superior não depende de  $\beta$  e já que  $\langle \sigma_x \rangle_S^\gamma$  com  $S$  finito é uma função contínua em  $\beta$ . □



## Capítulo 6

# Decaimento para a correlação truncada com campo não uniforme

Quando procuramos por decaimento de correlações truncadas no modelo de Ising, obtemos a seguinte informação:

Para o caso em que temos campo nulo  $h = 0$ . Temos os trabalhos de Aizenman, Barsky, Fernández, Duminil-Copin e Tassion [ABF87], [DCT16] onde determinam decaimento exponencial para altas temperaturas. Também, usando métodos de expansão em aglomerados em Braga, Lima e O’Carroll [BLO98] consegue-se o decaimento da correlação truncada. Em Aizenman, Duminil-Copin e Sidoravicius [ADCS15] os autores mostram que no ponto crítico não é possível ter decaimento de correlações truncadas.

Quando o campo é constante é possível deduzir decaimento exponencial da correlação truncada usando os resultados de Lee e Yang [LY52], também há novos artigos falando sobre o assunto, mas com métodos como correntes aleatórias, como os de Ott e Velenik [Ott18],[OV19]. No artigo, os autores Duminil-Copin, Goswami e Raoufi [DCGR18] deixaram estabelecido o decaimento exponencial para a correlação truncada para qualquer dimensão, com campo nulo ou constante, a única exceção é no ponto crítico da temperatura.

Quando o campo é aleatório temos o artigo de von Dreifus, Klein e Perez [VDKP95], onde não só estuda funções de dois pontos senão de vários, e consegue mostrar decaimento exponencial, para campos i.i.d.

O caso em que campo não é uniforme determinístico  $\mathbf{h} = (h_x)$  encontramos poucos trabalhos na literatura, sobre o decaimento das correlações truncadas. Se intentamos abordar o estudo do problema com o método de correntes aleatórias como é usado em [DCGR18], para o caso quando o campo é constante teríamos que conseguir explicitamente a dependência do campo nas somatórias das correntes.

Neste capítulo, para o estudo do decaimento usamos o técnica de expansão em polímeros. Fazendo uma prolongação da técnica que usa Velenik, no livro [FV17], quando demonstra o decaimento da correlação truncada para campo nulo. O resultado principal é o Teorema 6.4.1, que mostra decaimento exponencial da correlação truncada, quando temos campo não uniforme para  $\beta$  grande.

Uma pergunta que fica para estudos posteriores é se a correlação truncada tem decaimento exponencial, quando o grafo é outro diferente a  $\mathbb{Z}^d$ .

## 6.1 Preliminares: expansão em polímeros

O método de expansão em aglomerados data da época de 1927, com Ursell. Depois progrediu com Mayer em 1937 [May37, Pfi91]. Em [HPR18] usam termo expansão em aglomerados, para referir-se à expansão da função de partição em séries de potências como em (6.4). Fazer expansão em aglomerados é uma das técnicas mais usadas para estudar decaimento de correlações em baixa temperatura, como podemos ver em Braga, Lima e O'carroll [BLO98].

A expansão em polímeros foi desenvolvida pela primeira vez em Kunz [Kun78]. Os polímeros podem ser chamados de contornos ou animais do reticulado (*lattice animals* ver Procacci [Pro05]), quando vêm da expansão a baixas e altas temperaturas respectivamente.

Esta seção está baseada nos seguintes livros e artigos Friedli, Velenik e Procacci [FV17, Pro99, FP07].

Sejam um conjunto finito  $\mathcal{P}$  e  $\gamma \in \mathcal{P}$ . Consideramos uma função chamada **peso ou atividade**  $\xi(\gamma)$ , podendo ser real ou complexa. Definimos, também, uma função  $\delta : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  que nos permitirá ter informações das **interações entre**  $\gamma$ 's, isto é

$$\delta(\gamma, \gamma) = 0, \quad \text{para todo } \gamma \in \mathcal{P}, \quad (6.1)$$

$$|\delta(\gamma, \gamma')| \leq 1, \quad \text{para todo } \gamma, \gamma' \in \mathcal{P}. \quad (6.2)$$

Esta função é simétrica, ou seja,  $\delta(\gamma, \gamma') = \delta(\gamma', \gamma)$ . Dentro deste contexto chamaremos  $\gamma \in \mathcal{P}$  de **polímero**.

Em seguida, definimos o grafo completo<sup>1</sup>  $G_n = (V_n, E_n)$ , onde  $V_n := \{1, 2, \dots, n\}$ .

Trabalharemos com os subgrafos do grafo  $G_n$ . Para isso definimos

$$\zeta(\gamma, \gamma') := \delta(\gamma, \gamma') - 1,$$

que implica

$$\prod_{\{i,j\} \in E_n} \delta(\gamma_i, \gamma_j) = \sum_{E \subset E_n} \prod_{\{i,j\} \in E} \zeta(\gamma_i, \gamma_j) = \sum_{G \subset G_n} \prod_{\{i,j\} \in G} \zeta(\gamma_i, \gamma_j).$$

A notação do último somatório acima vem do fato de que cada subconjunto de arestas  $E \subset E_n$  pode ser colocado em correspondência injetiva com os subgrafos  $G = (V_n, E)$  de  $G_n$ . A notação  $\{i, j\} \in G$  significa que  $\{i, j\}$  pertence a  $E$  (conjunto das arestas do grafo  $G = (V_n, E)$ ).

---

<sup>1</sup>Um grafo completo é o grafo que possui uma aresta unindo dois vértices distintos quaisquer.

Agora, para  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathcal{P}^{|V_n|}$  definimos a função de Ursell da seguinte forma

$$\varphi(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) := \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ \frac{1}{n!} \sum_{\substack{G \subseteq G_n \\ \text{con.}}} \prod_{\{i,j\} \in G} \zeta(\gamma_i, \gamma_j), & \text{se } n \geq 2. \end{cases} \quad (6.3)$$

A interação de polímeros  $\delta$  satisfaz a condição  $0 \leq |\delta(\gamma, \gamma')| \leq 1$ ,  $\gamma, \gamma' \in \mathcal{P}$ . A seguir trabalhamos com a interação tomando os valores de  $\{0, 1\}$  (Interação Hard core).

Se  $\delta(\gamma, \gamma') = 0$  dizemos que  $\gamma$  e  $\gamma'$  são **incompatíveis**. Se  $\delta(\gamma, \gamma') = 1$  os chamamos de **compatíveis**.

Por outro lado, a coleção  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$  será dita **decomponível** se esta pode ser dividida em dois conjuntos disjuntos e não vazios tal que se tomamos dois elementos arbitrários, um de cada conjunto a interação entre eles seja 1, isto é, se esses dois elementos são compatíveis.

A coleção  $K = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$  será chamada de **aglomerado**. Note que  $K$  é um multiconjunto<sup>2</sup>.

A segunda expansão de Mayer [May37, FV17] é dada por

$$\ln \Xi_{S, \beta, h}^+ = \sum_{n \geq 1} \sum_{\gamma_1} \cdots \sum_{\gamma_n} \varphi(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \prod_{i=1}^n \xi(\gamma_i). \quad (6.4)$$

Dado o aglomerado  $K = \{\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_n\}$  definimos

$$\Psi_{\beta, h}(K) := \prod_{\gamma \in \mathcal{P}} \frac{1}{n_K(\gamma)!} \sum_{\substack{G \subseteq G_n \\ \text{con.}}} \prod_{\{i,j\} \in G} \zeta(\tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_j) \prod_{i=1}^n \xi(\tilde{\gamma}_i). \quad (6.5)$$

### Observação 6.1.1.

- O fator  $n_K(\gamma)$  denota o número de vezes que o polímero  $\gamma$  aparece em  $K$ .
- Na equação acima o primeiro produtório é avaliado em todos os polímeros  $\gamma \in \mathcal{P}$  e não somente nos polímeros que pertencem a  $K$ .

Então de (6.5) e (6.4) temos que

$$\ln \Xi_{S, \beta, h}^+ = \sum_K \Psi_{\beta, h}(K), \quad (6.6)$$

A seguir, apresentamos a dedução de (6.6). Como

$$\ln \Xi_{S, \beta, h}^+ = \sum_{n \geq 1} \sum_{\gamma_1} \cdots \sum_{\gamma_n} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{G \subseteq G_n \\ \text{con.}}} \prod_{\{i,j\} \in G} \zeta(\gamma_i, \gamma_j) \prod_{i=1}^n \xi(\gamma_i).$$

<sup>2</sup>Um multiconjunto é um conjunto onde elementos repetidos são levados em conta por exemplo  $\{2, 2, 2, 7\}$  seria um multiconjunto distinto de  $\{2, 7\}$ .

Fazemos

$$\mathcal{A} = \sum_{\substack{G \subset G_n \\ \text{con.}}} \prod_{\{i,j\} \in G} \zeta(\gamma_i, \gamma_j) \prod_{i=1}^n \xi(\gamma_i),$$

podemos observar o seguinte

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{\gamma_1} \cdots \sum_{\gamma_n} \frac{1}{n!} \mathcal{A} = \sum_K \frac{1}{\prod_{\gamma \in \Gamma} n_K(\gamma)!} \mathcal{A},$$

onde a expressão  $\sum_K$  é a soma sobre todos os aglomerados. Na expressão do lado direito segue de agrupar adequadamente os somatórios do lado direito, para cada tamanho  $n$  do aglomerado.

## 6.2 Convergência da expansão

Ao fazer a expansão em aglomerados temos que garantir a convergência das séries geradas. Há opções de critérios de convergência como são os de Kotecký-Preiss, de Dobrushin e de Fernandez-Procacci. O artigo [FP07] faz a comparação destes três critérios.

Continuamos a enunciar o critério de Kotecký-Preiss, seguindo o texto de Yvan Velenik [FV17].

**Teorema 6.2.1.** *Suponha que  $|\mathcal{P}| < \infty$ ,  $|\delta(\gamma, \gamma')| \leq 1$ , para todo  $\gamma, \gamma' \in \mathcal{P}$  e que existe  $a : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que para cada  $\gamma_* \in \mathcal{P}$ ,*

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{P}} |\xi(\gamma)| e^{a(\gamma)} |\zeta(\gamma, \gamma_*)| \leq a(\gamma_*). \quad (6.7)$$

Então, isso implica, para todo  $\gamma_1 \in \mathcal{P}$ , que

$$1 + \sum_{n \geq 2} n \sum_{\gamma_2} \cdots \sum_{\gamma_n} |\varphi(\gamma_1, \dots, \gamma_n)| \prod_{i=2}^n \xi(\gamma_i) \leq e^{a(\gamma_1)}. \quad (6.8)$$

Da condição (6.8) segue a convergência da seguinte soma

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{\gamma_1} \cdots \sum_{\gamma_n} |\varphi(\gamma_1, \dots, \gamma_n)| \prod_{i=1}^n \xi(\gamma_i) < \infty. \quad (6.9)$$

Como foi feito em [FV17], podemos retirar a condição  $|\mathcal{P}| < \infty$  e substituir por  $\sum_{\gamma \in \mathcal{P}} |\xi(\gamma)| e^{a(\gamma)} < \infty$  para conseguir (6.8).

## 6.3 Expansão a baixas temperaturas

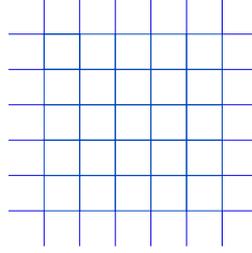
### 6.3.1 Expansão em baixas temperaturas

Nesta subseção começaremos considerando a expansão em baixas temperaturas. Para este fim primeiro analisemos o hamiltoniano.

Seja  $\sigma \in \Omega_S^+$  e

$$H_{S,h}(\sigma) = - \sum_{xy \in E(S)} J\sigma_x\sigma_y - \sum_{x \in S} h_x\sigma_x - \sum_{\substack{\|x-y\|=1 \\ x \in S, y \notin S}} J\sigma_x.$$

Definimos o conjunto  $\mathcal{E}_S$  como o conjunto de todas as arestas  $E(S)$ , juntamente com todas as arestas que unem  $S$  a sua fronteira  $\partial S$ . Também neste conjunto se  $y \in \partial S$ , então escrevemos  $\sigma_y = 1$ . Onde  $\partial S := \{y \in S^c : \|x - y\| = 1 \text{ para alguns } x \in S\}$ .



**Figura 6.1:** Representação do conjunto  $\mathcal{E}_S$ .

Logo, obtemos

$$H_{S,h}(\sigma) = - \sum_{xy \in \mathcal{E}_S} J\sigma_x\sigma_y - \sum_{x \in S} h_x\sigma_x$$

Seja  $xy$  uma aresta no  $\mathbb{Z}^d$  e denote por  $xy^*$  uma **plaqueta** dual. Isso é a único lado  $(d-1)$ -dimensional que corta cada aresta pela metade. Denotemos por

$$\Gamma(\sigma) := \{xy^* | \sigma_x\sigma_y = -1\},$$

o conjunto  $\Gamma(\sigma) \subset \mathbb{R}^d$  é uma superfície.

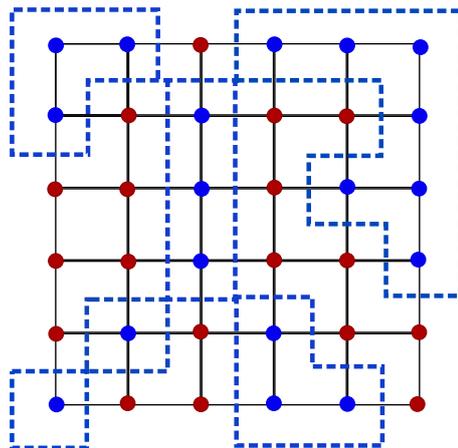
Chamamos as componentes conexas de  $\Gamma$  de **contornos** e escreveremos  $\gamma_i \in \Gamma$ . Os contornos têm a propriedade de serem fechados, de longitude finita ou infinitas. (ver [Bov06, pag 63], [Vel97, cap 2],[FV17], [Pro05])

Para poder trabalhar com contornos. Somamos nas parcelas do hamiltoniano mais e menos um, da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} H_{S,h}(\sigma) &= - \sum_{xy \in \mathcal{E}_S} J(\sigma_x\sigma_y - 1 + 1) - \sum_{x \in S} h_x(\sigma_x - 1 + 1) \\ &= -J|\mathcal{E}_S| - \sum_{x \in S} h_x - \sum_{xy \in \mathcal{E}_S} J(\sigma_x\sigma_y - 1) - \sum_{x \in S} h_x(\sigma_x - 1). \end{aligned}$$

Se  $\sigma_x\sigma_y = 1$  algumas partes da expressão acima ficam anuladas. Quando  $\sigma_x\sigma_y = -1$  gera contornos (polímeros  $\gamma_k$ ) e no interior deles os spins tomam o valor de  $-1$ .

$$\begin{aligned} H_{S,h}(\sigma) &= -J|\mathcal{E}_S| - \sum_{x \in S} h_x + 2J \sum_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} |\gamma_k| + 2 \sum_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \sum_{x \in \underline{\gamma_k}} h_x \\ &= -J|\mathcal{E}_S| - \sum_{x \in S} h_x + 2 \sum_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \left[ J|\gamma_k| + \sum_{x \in \underline{\gamma_k}} h_x \right]. \end{aligned}$$



**Figura 6.2:** Considerando condição de fronteira +, as linhas pontilhadas representam os contornos, os pontos azuis são quando os spins tomam  $-1$  e os pontos vermelhos quando valem  $+1$ .

Onde  $\Gamma(\sigma)$  é o conjunto de contornos associados à configuração  $\sigma$  e  $\underline{\gamma}$  é o conjunto dos vértices de  $\mathbb{Z}^d$  que ficam rodeados pelo contorno  $\gamma$ . Aqui,  $|\gamma|$  denota o **número de lados do contorno**  $\gamma$  em  $d = 2$ . Denotemos por

Assim, para  $\sigma \in \Omega_S^-$  o hamiltoniano é dado por

$$H_{S,h}(\sigma) = -J|\mathcal{E}_S| + \sum_{x \in S} h_x + 2 \sum_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \left[ J|\gamma_k| - \sum_{x \in \underline{\gamma}_k} h_x \right].$$

A função partição é descrita como

$$Z_{S,\beta,h}^+ = \sum_{\sigma \in \Omega_S^+} e^{-\beta H_{S,h}(\sigma)} = C_{\beta,h}^+(S) \sum_{\sigma \in \Omega_S^+} \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \xi(\gamma_k), \quad (6.10)$$

onde  $C_{\beta,h}(S) := \exp\{J\beta|\mathcal{E}_S| + \beta \sum_{x \in S} h_x\}$  e  $\xi(\gamma_k) := \exp\{-2\beta J|\gamma_k| - 2\beta \sum_{x \in \underline{\gamma}_k} h_x\}$ .

Se retiramos a configuração sem contornos, temos a seguinte expressão

$$Z_{S,\beta,h}^+ = C_{\beta,h}(S) \left[ 1 + \sum_{\substack{\sigma \in \Omega_S \\ \sigma \neq 1}} \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \xi(\gamma_k) \right].$$

Usando argumentos de expansão em polímeros (ver [Pro05, FV17, Pfi91, Vel97], na tese de Velenik pode-se encontrar informação sobre configuração e contorno) obtemos

$$Z_{S,\beta,h}^+ = C_{\beta,h}(S) \left[ 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \\ S^* \text{-compatíveis}}} \prod_{k=1}^n \xi(\gamma_k) \right].$$

A medida de Gibbs, para  $\sigma \in \Omega_S^+$ , é dada por

$$\mu_{S,\beta,\mathbf{h}}^+(\sigma) := e^{-\beta H_{S,\mathbf{h}}(\sigma)} \left[ \sum_{\sigma \in \Omega_S^+} e^{-\beta H_{S,\mathbf{h}}(\sigma)} \right]^{-1} = \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \xi(\gamma_k) \left[ \sum_{\sigma \in \Omega_S^+} \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \xi(\gamma_k) \right]^{-1}$$

e as funções de correlação de um sítio, são descritas por

$$\langle \sigma_x \rangle_{S,\beta,\mathbf{h}}^+ := \sum_{\sigma \in \Omega_S^+} \sigma_x e^{-\beta H_{S,\mathbf{h}}(\sigma)} [Z_{S,\beta,\mathbf{h}}^+]^{-1} = \frac{\Xi_{S,\beta,\mathbf{h}}^+(x)}{\Xi_{S,\beta,\mathbf{h}}^+},$$

onde  $\Xi_{S,\beta,\mathbf{h}}^+(A) := \sum_{\sigma \in \Omega_S^+} \sigma_A \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \xi(\gamma_k)$ , sendo  $A$  um subconjunto finito de  $S$  e  $\Xi_{S,\beta,\mathbf{h}}^+ := \sum_{\sigma \in \Omega_S^+} \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \xi(\gamma_k)$ .

Podemos descrever o spin de  $x$  em termos dos contornos que o rodeiam, da seguinte maneira

$$\sigma_x = (-1)^{\sum_{\gamma \in \Gamma(\sigma)} \mathbb{1}_{[x \in \underline{\gamma}]}} = \prod_{\gamma \in \Gamma(\sigma)} (-1)^{\mathbb{1}_{[x \in \underline{\gamma}]}} = \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} (-1)^{\mathbb{1}_{[x \in \underline{\gamma_k}]}}.$$

Usando a última identidade acima na expansão da correlação podemos obter

$$\langle \sigma_x \rangle_{S,\beta,\mathbf{h}}^+ = \frac{\sum_{\sigma \in \Omega_S} \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \xi_x(\gamma_k)}{\sum_{\sigma \in \Omega_S} \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \xi(\gamma_k)},$$

onde  $\xi_x(\gamma_k) = (-1)^{\mathbb{1}_{[x \in \underline{\gamma_k}]}} \exp\{-2\beta J|\gamma_k| - 2\beta \sum_{x \in \underline{\gamma_k}} h_x\}$ .

Com um procedimento análogo ao utilizado acima, obtemos a expansão da correlação de um subconjunto finito  $A \subset S$ , como sendo

$$\langle \sigma_A \rangle_{S,\beta,\mathbf{h}}^+ = \frac{\sum_{\sigma \in \Omega_S^+} \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \xi_A(\gamma_k)}{\sum_{\sigma \in \Omega_S^+} \prod_{k=1}^{|\Gamma(\sigma)|} \xi(\gamma_k)},$$

considerando  $\sigma_A = (-1)^{\sum_{x \in A} \sum_{\gamma \in \Gamma(\sigma)} \mathbb{1}_{[x \in \underline{\gamma}]}}$  e  $\xi_A(\gamma_k) = (-1)^{\sum_{x \in A} \mathbb{1}_{[x \in \underline{\gamma_k}]}} \xi(\gamma_k)$ .

## 6.4 Decaimento da correlação truncada

Pode-se deixar a expansão da correlação simplesmente em termos de contornos, sem falar de configurações, já que temos uma equivalência entre um conjunto de contornos e uma configuração (como se ve na tese de Velenik [Vel97, Lem. 2.1.2]). De agora em diante, escreveremos  $\Gamma_S$  para denotar o conjunto de todos os contornos surgidos de configurações e o definimos como  $\Gamma_S := \{\gamma \in \Gamma(\sigma) : \sigma \in \Omega_S^+\}$ . Logo podemos escrever

a soma com respeito às configurações como somas com respeito aos contornos que são admissíveis para essas configurações, assim.

$$\sum_{\sigma \in \Omega_S^+} = \sum_{\substack{\Gamma \subset \Gamma_S \\ \text{Admi.}}} .$$

Desse modo a correlação fica

$$\langle \sigma_A \rangle_{S,\beta,h}^+ = \frac{\Xi_{S,\beta,h}^+(A)}{\Xi_{S,\beta,h}^+}, \quad (6.11)$$

sendo agora

$$\Xi_{S,\beta,h}^+(A) = \sum_{\substack{\Gamma \subset \Gamma_S \\ \text{Admi.}}} \prod_{\gamma \in \Gamma} \xi_A(\gamma) \quad \text{e} \quad \Xi_{S,\beta,h}^+ = \sum_{\substack{\Gamma \subset \Gamma_S \\ \text{Admi.}}} \prod_{\gamma \in \Gamma} \xi(\gamma). \quad (6.12)$$

Como já vimos em (6.4) e no Teorema 6.2.1 a expansão em aglomerados de  $\ln \Xi_{S,\beta,h}^+$  é convergente para  $\beta > \epsilon_0$  (ver Lema 6.4.1) e disso deduzimos a convergência de  $\ln \Xi_{S,\beta,h}^+(A)$ , já que  $|\xi_A(\gamma)| = |\xi(\gamma)|$ , para todo  $\gamma$ .

Logo, podemos expressar

$$\langle \sigma_A \rangle_{S,\beta,h}^+ = \exp\{\ln \Xi_{S,\beta,h}^+(A) - \ln \Xi_{S,\beta,h}^+\}. \quad (6.13)$$

De [FV17, pag 228] ou de (6.6) temos que

$$\ln \Xi_{S,\beta,h}^+(A) = \sum_{K: \bar{K} \subset S} \Psi_{\beta,h}^A(K) \quad \text{e} \quad \ln \Xi_{S,\beta,h}^+ = \sum_{K: \bar{K} \subset S} \Psi_{\beta,h}(K), \quad (6.14)$$

onde  $\bar{K} := \bigcup_{n=1} \gamma_n$  e  $K$  é um aglomerado. Aqui,  $K$  é um multiconjunto de polímeros chamados, neste caso de contornos.

Note que, a diferença de logaritmos em (6.13) ou usando as equivalências (6.14) a diferença de somatórios, fica como

$$\langle \sigma_A \rangle_{S,\beta,h}^+ = \exp \left\{ \sum_{K: \bar{K} \subset S} \Phi_{\beta,h}^A(K) \right\} = \exp \left\{ \sum_{K \sim A: \bar{K} \subset S} \Phi_{\beta,h}^A(K) \right\}.$$

Acima temos escrito  $\Phi_{\beta,h}^A(K) := \Psi_{\beta,h}^A(K) - \Psi_{\beta,h}(K)$ . A expressão  $X \sim A$  representa os aglomerados  $X$  que tem ao menos um contorno tal que seu interior tem pontos do conjunto  $A$ . Existem muitos aglomerados que têm contornos dos quais seus interiores não interseam o conjunto  $A$ .

É conhecido que no modelo de Ising com campo externo nulo a baixas temperaturas ( $\beta$  grande) as partículas começam a se agrupar segundo seu sinal. Assim, podemos criar os contornos de cada grupo. A função de correlação de dois pontos  $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{S,\beta,0}^+$ , nessas condições, não decai, como se mostra em [FV17, pag 242], mas a função de correlação truncada  $\langle \sigma_x; \sigma_y \rangle_{S,\beta,0}^+ := \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{S,\beta,0}^+ - \langle \sigma_x \rangle_{S,\beta,0}^+ \langle \sigma_y \rangle_{S,\beta,0}^+$  sim.

Para começar o estudo da correlação truncada por expansão em polímeros será necessário que esta expansão seja convergente. Para isso vamos usar o Teorema 6.2.1. Assim, temos que garantir a condição (6.7).

A seguir, apresentamos lemas necessários para satisfazer (6.7), considerando que o campo  $\mathbf{h}$  não é uniforme. Nos seguintes lemas denotaremos  $\rho := 0$ , se  $h_x > 0$  para todo  $x \in S$  ou  $\rho := \inf_{x \in S} h_x$ , caso contrário.

**Lema 6.4.1.** *Para  $d \geq 2$ ,  $\sup_{x \in S} |h_x| < \infty$ ,  $\mathcal{P} = \Gamma_S$ , e o peso  $\xi(\gamma)$  definido em (6.10). Então, existe a função  $a : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que (6.7) é satisfeito, para  $\beta \geq \epsilon_0(\beta, J, d, \rho, |S|)$ .*

**Demonstração.** Como os polímeros são admissíveis, satisfazem a seguinte condição  $d_1(\gamma_1, \gamma_2) := \inf\{\|i - j\| : i \in \underline{\gamma}_1, j \in \underline{\gamma}_2\} > 1$ .

Seja  $\delta(\gamma_1, \gamma_2) = 1$ , se  $d_1(\gamma_1, \gamma_2) > 1$  e 0 caso contrario.  $\zeta(\gamma_1, \gamma_2) := \delta(\gamma_1, \gamma_2) - 1$  e  $[\gamma] := \{j \in \mathbb{Z}^d : d_1(\underline{\gamma}, j) \leq 1\}$ .

Observe agora que  $\zeta(\gamma, \gamma_*) = -1$  se, e somente se  $\underline{\gamma} \cap [\gamma_*] \neq \emptyset$ .

Para cada  $\gamma_* \in \mathcal{P}$ , veja que

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \mathcal{P}} |\xi(\gamma)| e^{a(\gamma)} |\zeta(\gamma, \gamma_*)| &= \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P} \\ \underline{\gamma} \cap [\gamma_*] \neq \emptyset}} |\xi(\gamma)| e^{a(\gamma)} \\ &\leq |[\gamma_*]| \max_{j \in [\gamma_*]} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P} \\ \underline{\gamma} \ni j}} |\xi(\gamma)| e^{a(\gamma)}. \end{aligned}$$

Se definimos  $a(\gamma_*) := |[\gamma_*]|$  e mostramos que

$$\max_{j \in [\gamma_*]} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P} \\ \underline{\gamma} \ni j}} |\xi(\gamma)| e^{a(\gamma)} \leq 1, \quad (6.15)$$

teremos concluído a prova.

Note que  $|\underline{\gamma}| \leq |[\gamma_*]| \leq (2d+1)|\underline{\gamma}|$  e

$$\begin{aligned} \max_{j \in [\gamma_*]} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P} \\ \underline{\gamma} \ni j}} |\xi(\gamma)| e^{a(\gamma)} &= \max_{j \in [\gamma_*]} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P} \\ \underline{\gamma} \ni j}} e^{-2\beta J|\underline{\gamma}| - 2\beta \sum_{x \in \underline{\gamma}} h_x} e^{(2d+1)|\underline{\gamma}|} \\ &\leq \max_{j \in [\gamma_*]} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P} \\ \underline{\gamma} \ni j}} e^{-4\beta d J |\underline{\gamma}|^{\frac{d-1}{d}} + (2d+1)|\underline{\gamma}| - 2\beta \sum_{x \in \underline{\gamma}} h_x}. \end{aligned}$$

Na desigualdade acima, usamos a desigualdade isoperimétrica  $2d|\underline{\gamma}|^{\frac{d-1}{d}} \leq |\underline{\gamma}|$ , para  $d \geq 2$ .

Separando o conjunto  $S = S_P \cup S_N$ ; com  $S_P := \{x \in S : h_x \geq 0\}$  e  $S_N := \{x \in S : h_x < 0\}$ , da mesma forma temos  $\underline{\gamma} = \underline{\gamma}_P \cup \underline{\gamma}_N$ . Consideremos  $\rho_{\underline{\gamma}_N} := \inf_{x \in \underline{\gamma}_N} h_x$  e  $\rho := \inf_{x \in S} h_x$ .

Se  $S_N \neq \emptyset$  (caso contrário procedemos analogamente aos argumentos expostos abaixo com  $\rho = 0$ )

$$\begin{aligned} \max_{j \in [\gamma_*]} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P} \\ \underline{\gamma} \ni j}} |\xi(\gamma)| e^{a(\gamma)} &\leq \max_{j \in [\gamma_*]} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P} \\ \underline{\gamma} \ni j}} e^{-4\beta d J |\underline{\gamma}|^{\frac{d-1}{d}} + (2d+1)|\underline{\gamma}| - \sum_{\underline{\gamma} \in \mathcal{P}} h_x - 2\beta \rho_{\underline{\gamma}_N} |\underline{\gamma}_N|} \\ &\leq \max_{j \in [\gamma_*]} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P} \\ \underline{\gamma} \ni j}} e^{-4\beta d J |\underline{\gamma}|^{\frac{d-1}{d}} + (2d+1-2\beta \rho) |\underline{\gamma}|}. \end{aligned}$$

Seja  $j_* \in [\gamma_*]$  o elemento no qual somatório do lado direito da desigualdade acima atinge seu máximo. Então escrevemos

$$\begin{aligned} \max_{j \in [\gamma_*]} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P} \\ \underline{\gamma} \ni j}} |\xi(\gamma)| e^{a(\gamma)} &\leq \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P} \\ \underline{\gamma} \ni j_*}} e^{-4\beta d J |\underline{\gamma}|^{\frac{d-1}{d}} + (2d+1-2\beta \rho) |\underline{\gamma}|} \\ &\leq \sum_{k=1}^{|\mathcal{S}|} e^{-4\beta d J k^{\frac{d-1}{d}} + (2d+1-2\beta \rho) k} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P}: \underline{\gamma} \ni j_* \\ |\underline{\gamma}|=k}} 1. \end{aligned}$$

Sabe-se que  $|\{\gamma \in \mathcal{P} : \underline{\gamma} \ni j_*, |\underline{\gamma}| = k\}| \leq (2d)^{2k}$ . Segue que

$$\max_{j \in [\gamma_*]} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P} \\ \underline{\gamma} \ni j}} |\xi(\gamma)| e^{a(\gamma)} \leq \sum_{k=1}^{|\mathcal{S}|} e^{-4\beta d J k^{\frac{d-1}{d}} + (2d+1-2\beta \rho + 2 \ln(2d)) k}.$$

Se fazemos

$$\eta(y, \beta, J, d, \rho) := \sum_{k=1}^{|\mathcal{S}|} e^{-4y d J k^{\frac{d-1}{d}} + (2d+1-2y \rho + 2 \ln(2d)) k}$$

e

$$\epsilon_0 = \epsilon_0(\beta, J, d, \rho, |\mathcal{S}|) := \inf\{y : \eta(y, \beta, J, d, \rho, |\mathcal{S}|) \leq 1\}.$$

Então para  $\beta \geq \epsilon_0$  temos (6.15), e assim temos que a condição (6.7) é satisfeita.  $\square$

Para enunciar o seguinte lema vamos modificar um pouco  $\xi$  e com isso, os valores  $\eta$  e  $\epsilon_0$  seriam modificados e os enunciamos como:

$$\eta_1(y, \beta, J, d, \rho) := \sum_{k=1}^{|\mathcal{S}|} e^{-2y d J k^{\frac{d-1}{d}} + (2d+1-2y \rho + 2 \ln(2d)) k}$$

e

$$\epsilon_1 = \epsilon_1(\beta, J, d, \rho, |\mathcal{S}|) := \inf\{y : \eta_1(y, \beta, J, d, \rho, |\mathcal{S}|) \leq 1\}.$$

**Lema 6.4.2.** Para  $d \geq 2$ ,  $\sup_{x \in \mathcal{S}} |h_x| < \infty$ ,  $\beta \geq \epsilon_1$  e  $\xi^*(\gamma) := \exp\{-J\beta|\gamma| - 2\beta \sum_{x \in \underline{\gamma}} h_x\}$  é o peso que usamos para  $\Psi_{\beta, \mathbf{h}}(K)$ . Então temos

$$\sum_{K: \bar{K} \ni v} |\Psi_{\beta, \mathbf{h}}(K)| \leq 1. \quad (6.16)$$

**Demonstração.** Usando a definição (6.5) de  $\Psi$ , segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{K:\bar{K}\ni v} |\Psi_{\beta,h}(K)| &= \sum_{K:\bar{K}\ni v} \left| \prod_{\gamma \in \mathcal{P}} \frac{1}{n_K(\gamma)!} \sum_{\substack{G \subseteq G_n \\ \text{CON}}} \prod_{\{i,j\} \in G} \zeta(\gamma_i, \gamma_j) \prod_{i=1}^n \xi(\gamma_i) \right| \\
&= \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{\gamma_1 \\ \gamma_1 \ni v}} \sum_{\gamma_2} \cdots \sum_{\gamma_n} \frac{n!}{\prod_{\gamma \in \mathcal{P}} n_K(\gamma)!} \varphi(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \prod_{i=1}^n \xi(\gamma_i) \\
&\leq \sum_{n \geq 1} n \sum_{\substack{\gamma_1 \\ \gamma_1 \ni v}} \sum_{\gamma_2} \cdots \sum_{\gamma_n} \varphi(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \prod_{i=1}^n \xi(\gamma_i) \\
&\leq \sum_{\substack{\gamma_1 \\ \gamma_1 \ni v}} \xi(\gamma_1) \sum_{n \geq 2} n \sum_{\gamma_2} \cdots \sum_{\gamma_n} \varphi(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \prod_{i=2}^n \xi(\gamma_i) \\
&\leq \sum_{\substack{\gamma_1 \\ \gamma_1 \ni v}} \xi(\gamma_1) e^{|\underline{\gamma}_1|} \\
&\leq \eta_1(y, \beta, J, d, \rho) \leq 1.
\end{aligned}$$

Acima usamos a desigualdade (6.8) do Teorema 6.2.1 e um procedimento similar ao usado para obter a desigualdade (6.15).  $\square$

No seguinte teorema mostraremos o decaimento exponencial da função de correlação truncada em baixas temperaturas. O modelo tem campo não uniforme.

**Teorema 6.4.1.** *Sejam  $d \geq 2$ ,  $\sup_{x \in \mathbb{Z}^d} |h_x| < \infty$ , e  $\beta \geq \epsilon_1$ . Existe  $C > 0$  tal que*

$$\langle \sigma_x; \sigma_y \rangle_{\beta,h}^+ \leq C e^{-\beta J \|x-y\|},$$

onde  $\|\cdot\|$  é a distância usual da teoria de grafos.

**Demonstração.** As funções de correlação podem ser expressadas da seguinte forma

$$\langle \sigma_i \rangle_{S,\beta,h}^+ = \exp \left\{ \sum_{K \sim \{i\}} \Phi_{\beta,h}^{\{i\}}(K) \right\}, \quad \langle \sigma_j \rangle_{S,\beta,h}^+ = \exp \left\{ \sum_{K \sim \{j\}} \Phi_{\beta,h}^{\{j\}}(K) \right\} \quad (6.17)$$

e

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{S,\beta,h}^+ = \exp \left\{ \sum_{K \sim \{i,j\}} \Phi_{\beta,h}^{\{i,j\}}(K) \right\} \quad (6.18)$$

Notamos que a união das seguintes classes disjuntas

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_i &:= \{K : K \sim \{i\} \text{ mas não } K \sim \{j\}\}, \\
\mathcal{B}_j &:= \{K : K \sim \{j\} \text{ mas não } K \sim \{i\}\}, \\
\text{e } \mathcal{B}_{i,j} &:= \{K : K \sim \{i\} \text{ e } K \sim \{j\}\}
\end{aligned}$$

é justamente o aglomerado  $K \sim \{i, j\}$ .

Observe que

$$\sum_{K \sim \{i,j\}} \Phi_{\beta,h}^{\{i\}}(K) = 0 + \sum_{K \in \mathcal{B}_i} \Phi_{\beta,h}^{\{i\}}(K) + \sum_{K \in \mathcal{B}_{i,j}} \Phi_{\beta,h}^{\{i\}}(K) = \sum_{K \sim \{i\}} \Phi_{\beta,h}^{\{i\}}(K) \quad (6.19)$$

e

$$\sum_{K \sim \{i,j\}} \Phi_{\beta,h}^{\{j\}}(K) = \sum_{K \in \mathcal{B}_j} \Phi_{\beta,h}^{\{j\}}(K) + 0 + \sum_{K \in \mathcal{B}_{i,j}} \Phi_{\beta,h}^{\{j\}}(K) = \sum_{K \sim \{j\}} \Phi_{\beta,h}^{\{j\}}(K). \quad (6.20)$$

Logo, somando e subtraindo as quantidades (6.19) e (6.20) acima no expoente de (6.18), e usando (6.17), segue que

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{S,\beta,h}^+ = \langle \sigma_i \rangle_{S,\beta,h}^+ \langle \sigma_j \rangle_{S,\beta,h}^+ \exp \left\{ \sum_{K \sim \{i,j\}} \left( \Phi_{\beta,h}^{\{i,j\}}(K) - \Phi_{\beta,h}^{\{i\}}(K) - \Phi_{\beta,h}^{\{j\}}(K) \right) \right\}.$$

Uma vez que  $|\xi_A(\gamma)| = |\xi(\gamma)|$  temos  $|\Phi_{\beta,h}^{\{i,j\}}(K)| \leq 2|\Psi_{\beta,h}(K)|$ . Assim

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{S,\beta,h}^+ \leq \langle \sigma_i \rangle_{S,\beta,h}^+ \langle \sigma_j \rangle_{S,\beta,h}^+ \exp \left\{ 6 \sum_{K \sim \{i,j\}} |\Psi_{\beta,h}(K)| \right\}. \quad (6.21)$$

A seguir, procedemos a limitar o seguinte somatório

$$\sum_{K \sim \{i,j\}} |\Psi_{\beta,h}(K)|. \quad (6.22)$$

Como os  $K \in \mathcal{B}_{i,j}$  satisfazem que  $|\bar{K}| \geq \|j - i\|$ . Com isso

$$\begin{aligned} \sum_{K \sim \{i,j\}} |\Psi_{\beta,h}(K)| &= \sum_{\substack{K: \bar{K} \ni v \\ |\bar{K}| \geq \|j-i\|}} |\Psi_{\beta,h}(K)| = \sum_{R \geq \|j-i\|} \sum_{\substack{K: \bar{K} \ni v \\ |\bar{K}|=R}} |\Psi_{\beta,h}(K)| \\ &\leq \sum_{R \geq \|j-i\|} R^d \sum_{\substack{K: \bar{K} \ni v \\ |\bar{K}|=R}} |\Psi_{\beta,h}(K)| \leq \sum_{R \geq \|j-i\|} R^d e^{-J\beta R} \\ &= e^{-J\beta \|j-i\|} \sum_{n=0}^{\infty} (\|j-i\| + n)^d e^{-J\beta n} = C_0 e^{-J\beta \|j-i\|}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Em (6.23) usamos que

$$\sum_{\substack{K: \bar{K} \ni v \\ |\bar{K}|=R}} |\Psi_{\beta,h}(K)| \leq \sum_{\substack{K: \bar{K} \ni v \\ |\bar{K}| \geq R}} |\Psi_{\beta,h}(K)| \leq e^{-\beta J R} \sum_{K: \bar{K} \ni v} |\Psi_{\beta,h}(K)| e^{J\beta |\bar{K}|} \leq e^{-\beta J R}.$$

Para limitar a última somatória, notamos que  $|\bar{K}| \leq \sum_{r=1}^n |\gamma_r|$  e com isso

$$\sum_{K: \bar{K} \ni v} |\Psi_{\beta,h}(K)| e^{J\beta |\bar{K}|} \leq \sum_{K: \bar{K} \ni v} |\Psi'_{\beta,h}(K)| \leq 1,$$

onde  $\Psi'$  obtém-se de usar como peso  $\xi^*$  e logo usamos o Lema 6.4.2 para limitar por um.

A correlação truncada fica, usando (6.21) e a limitação da somatória (6.22), como

$$\langle \sigma_x; \sigma_y \rangle_{\beta,h}^+ \leq e^{6C_0 e^{-\beta J \|j-i\|}} - 1.$$

No caso em que  $\|j-i\|$  seja suficientemente grande, sempre é possível encontrar uma constante  $C_1$ , tal que  $e^{6C_0 e^{-\beta J \|j-i\|}} - 1 \leq C_1 e^{-\beta J \|j-i\|}$  e nos outros casos escolhemos outra constante adequada  $C_2$ . Então considerando  $C$  o máximo dessas, constantes segue que

$$\langle \sigma_x; \sigma_y \rangle_{\beta,h}^+ \leq C e^{-\beta J \|j-i\|}.$$

□

## 6.5 Cotas superiores para as correlações com campo não uniforme

### 6.5.1 Expansão em altas temperaturas da correlação campo não uniforme

Para encontrar o decaimento da função de correlação de um e dois sítios, usaremos a expansão em altas temperaturas (ver Velenik [Vel97, FV17]). Como estamos interessados em trabalhar com campo não uniforme iremos adicionar um vértice  $g$  que não está em  $\mathbb{Z}^d$ , que chamaremos de vértice fantasma. Este método é muito usado no estudo de correntes aleatórias [ADCS15, DC16, DCT16].

Seja  $\omega \in \Omega_S^+$ , então o hamiltoniano é como segue

$$\begin{aligned} -H_{S,\mathbf{h}}(\sigma) &= \sum_{xy \in E(S)} J\sigma_x\sigma_y + \sum_{x \in S} h_x\sigma_x + \sum_{\substack{\|x-y\|=1 \\ x \in S, y \notin S}} J_{x,y}\sigma_x \\ &= \sum_{xy \in \mathcal{E}_S} J\sigma_x\sigma_y + \sum_{x \in S} h_x\sigma_x, \end{aligned}$$

onde  $E(S) := \{\{x, y\} : x, y \in S, \|x - y\| = 1\}$ .

Definimos  $\mathcal{E}_S := \{\{x, y\} : \{\text{o conjunto de } x, y\} \cap S \neq \emptyset, \|x - y\| = 1\}$ , note que a diferença entre  $E(S)$  e  $\mathcal{E}_S$  está em que  $\mathcal{E}_S$  inclui as arestas que enlaçam  $S$  com sua fronteira e  $E(S)$  não (ver figura 6.1 que é o gráfico de  $\mathcal{E}_S$ ).

Considerando um vértice fantasma  $g \notin \mathbb{Z}^d$ , definimos o seguinte conjunto de arestas  $\xi(S) := \{\{x, g\} : x \in S\}$ , e  $\sigma_g := 1$  o spin de  $g$ , a constante de acoplamento  $J_{xg} = J_{gx} := h_x$ . Assim, o somatório dos campos é descrito por

$$\sum_{x \in S} h_x\sigma_x = \sum_{xg \in \xi(S)} J_{xg}\sigma_x\sigma_g.$$

Vamos trabalhar para  $h_x \geq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{Z}^d$ .

Logo, o hamiltoniano reduz-se a

$$-H_{S,\mathbf{h}}(\sigma) = \sum_{xy \in \mathcal{E}(S^g)} J_{x,y}\sigma_x\sigma_y,$$

onde  $\mathcal{E}(S^g) := \{e : e \in \mathcal{E}_S \text{ ou } e \in \xi(S)\}$ . Com isso  $J_{x,y} := J$  para todo  $xy \in \mathcal{E}_S$ , ou  $h_x$  na aresta que conecta  $x$  ao sítio fantasma  $g$ .

Estamos prontos para fazer a expansão em altas temperaturas da função de partição. Temos

$$Z_{S,\beta,\mathbf{h}}^+ = \sum_{\Omega_{S^g}} e^{\beta \sum_{xy \in \mathcal{E}(S^g)} J_{x,y}\sigma_x\sigma_y} = \sum_{\sigma \in \Omega_{S^g}} \prod_{xy \in \mathcal{E}(S^g)} e^{\beta J_{x,y}\sigma_x\sigma_y}.$$

Agora, a última exponencial da igualdade acima pode ser expressada em termos do seno e da tangente hiperbólica da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} Z_{S,\beta,\mathbf{h}}^+ &= \sum_{\sigma \in \Omega_{S^g}} \prod_{xy \in \mathcal{E}(S^g)} \cosh(\beta J_{x,y}) (1 + \sigma_x\sigma_y \tanh(\beta J_{x,y})) \\ &= \prod_{xy \in \mathcal{E}(S^g)} \cosh(\beta J_{x,y}) \sum_{\sigma \in \Omega_{S^g}} \prod_{xy \in \mathcal{E}(S^g)} (1 + \sigma_x\sigma_y \tanh(\beta J_{x,y})). \end{aligned}$$

Para continuar enunciamos a seguinte observação, cuja prova a pode ser encontrada em [FV17].

**Observação 6.5.1.** *Para um conjunto finito, não vazio  $\mathcal{C}$ , temos*

$$\prod_{c \in \mathcal{C}} (1 + f(c)) = \sum_{C \subset \mathcal{C}} \prod_{c \in C} f(c). \quad (6.24)$$

No caso  $C = \emptyset$ , definiremos o produto como 1.

**Demonstração.** Provaremos por indução, sobre a cardinalidade de  $\mathcal{C}$ . Para  $|\mathcal{C}_1| = 1$  temos a igualdade (6.24). Suponha que a também seja verdade para  $|\mathcal{C}_n| = n$ , logo

$$\prod_{c \in \mathcal{C}_n} (1 + f(c)) = \sum_{C \subset \mathcal{C}_n} \prod_{c \in C} f(c).$$

Seja  $\mathcal{C}_{n+1}$  de cardinalidade  $n + 1$ , tome  $d \in \mathcal{C}_{n+1} \setminus \mathcal{C}_n$ . Para mostrar a indução temos que garantir que a igualdade (6.24) é válida para  $\mathcal{C}_{n+1}$ . Assim

$$\begin{aligned} \prod_{c \in \mathcal{C}_{n+1}} (1 + f(c)) &= (1 + f(d)) \prod_{c \in \mathcal{C}_n} (1 + f(c)) \\ &= (1 + f(d)) \sum_{C \subset \mathcal{C}_n} \prod_{c \in C} f(c) \\ &= \sum_{C \subset \mathcal{C}_n} \prod_{c \in C} f(c) + \sum_{C \cup \{d\} \subset \mathcal{C}_{n+1}} \prod_{c \in C \cup \{d\}} f(c) \\ &= \sum_{C \subset \mathcal{C}_{n+1}} \prod_{c \in C} f(c). \end{aligned}$$

□

O produto dos  $(1 + \sigma_x \sigma_y \tanh(\beta J_{x,y}))$  pode ser escrito em termos de somas de subconjuntos de  $\mathcal{E}(S^g)$ , usando o lema anterior. Logo

$$Z_{S,\beta,\mathbf{h}}^+ = \prod_{xy \in \mathcal{E}(S^g)} \cosh(\beta J_{x,y}) \sum_{\sigma \in \Omega_{S^g}} \sum_{E \subset \mathcal{E}(S^g)} \prod_{xy \in E} \sigma_x \sigma_y \tanh(\beta J_{x,y}).$$

Nesta parte é importante notar que os subconjuntos  $E \subset \mathcal{E}(S^g)$ , não necessariamente são conexos e independentes das configurações  $\sigma \in \Omega_{S^g}^+$ . Ordenando termos

$$Z_{S,\beta,\mathbf{h}}^+ = \prod_{xy \in \mathcal{E}(S^g)} \cosh(\beta J_{x,y}) \sum_{E \subset \mathcal{E}(S^g)} \prod_{xy \in E} \tanh(\beta J_{x,y}) \sum_{\sigma \in \Omega_{S^g}} \prod_{xy \in E} \sigma_x \sigma_y.$$

Observe que

$$\prod_{xy \in E} \sigma_x \sigma_y = \prod_{x \in S} \sigma_x^{I(x,E)} \quad \text{e} \quad \sigma_i \sigma_j = \prod_{x \in S} \sigma_x^{\mathbf{1}_{\{i,j\}}(x)},$$

onde  $I(x, E) := |\{y \in S^g : \{x, y\} \in E\}|$ , para  $x \in S^g$ . Acima não consideramos  $\sigma_g$ , já que neste caso sempre tem valor de 1. Com isso,

$$Z_{S,\beta,\mathbf{h}}^+ = \prod_{xy \in \mathcal{E}(S^g)} \cosh(\beta J_{x,y}) \sum_{E \subset \mathcal{E}(S^g)} \prod_{xy \in E} \tanh(\beta J_{x,y}) \sum_{\sigma \in \Omega_{S^g}} \prod_{x \in S} \sigma_x^{I(x,E)}. \quad (6.25)$$

Da mesma forma temos

$$\langle \sigma_i \rangle_{S, \beta, \mathbf{h}}^+ Z_{S, \beta, \mathbf{h}}^+ = \prod_{xy \in \mathcal{E}(S^g)} \cosh(\beta J_{x,y}) \sum_{E \subset \mathcal{E}(S^g)} \prod_{xy \in E} \tanh(\beta J_{x,y}) \sum_{\sigma \in \Omega_{S^g}} \prod_{x \in S} \sigma_x^{I(x,E) + \mathbf{1}_{\{i\}}(x)}, \quad (6.26)$$

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{S, \beta, \mathbf{h}}^+ Z_{S, \beta, \mathbf{h}}^+ = \prod_{xy \in \mathcal{E}(S^g)} \cosh(\beta J_{x,y}) \sum_{E \subset \mathcal{E}(S^g)} \prod_{xy \in E} \tanh(\beta J_{x,y}) \sum_{\sigma \in \Omega_{S^g}} \prod_{x \in S} \sigma_x^{I(x,E) + \mathbf{1}_{\{i,j\}}(x)}. \quad (6.27)$$

Podemos simplificar ainda mais a última parte das últimas igualdades acima. Para isso definimos  $\partial' E := \{x \in S : I(x, E) \text{ é ímpar}\}$ . Observe que  $g \notin \partial' E$ , embora  $I(g, E)$  pode ser ímpar. Logo

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \Omega_{S^g}} \prod_{x \in S} \sigma_x^{I(x,E)} &= 2^{|S|} \mathbf{1}_{[\partial' E = \emptyset]}, \\ \sum_{\sigma \in \Omega_{S^g}} \prod_{x \in S} \sigma_x^{I(x,E) + \mathbf{1}_{\{i\}}(x)} &= 2^{|S|} \mathbf{1}_{[\partial' E = \{i\}]}, \\ \sum_{\sigma \in \Omega_{S^g}} \prod_{x \in S} \sigma_x^{I(x,E) + \mathbf{1}_{\{i,j\}}(x)} &= 2^{|S|} \mathbf{1}_{[\partial' E = \{i,j\}]}. \end{aligned}$$

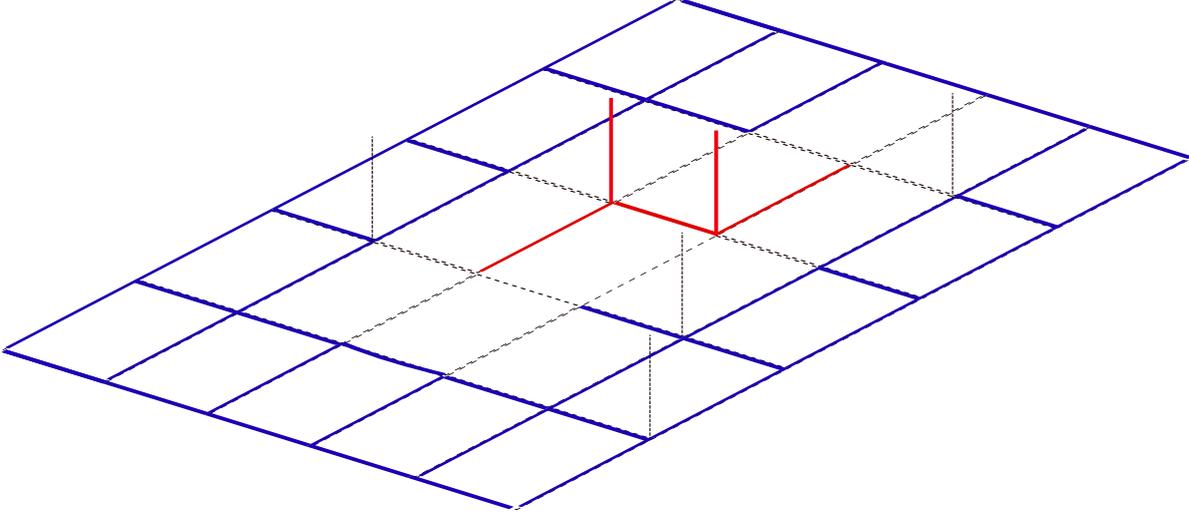
Usando as identidades acima analisaremos as correlações de um e dois sítios com campo magnético não uniforme, com a finalidade de estudar seu comportamento e saber se possuem decaimento exponencial.

### 6.5.2 Limitação da correlação de um sítio com campo não uniforme

No caso da esperança de um sítio, com campo nulo, temos decaimento exponencial para altas temperaturas como podemos ver em Friedli e Velenik [FV17, pag 118]. No caso em que o modelo apresente campo, procedemos da seguinte maneira.

$$\langle \sigma_i \rangle_{S, \beta, \mathbf{h}}^+ = \sum_{E \subset \mathcal{E}(S^g)} \prod_{xy \in E} \tanh(\beta J_{xy}) \mathbf{1}_{\partial' E = \{i\}}(E) \left[ \sum_{E \subset \mathcal{E}(S^g)} \prod_{xy \in E} \tanh(\beta J_{xy}) \mathbf{1}_{\partial' E = \{\emptyset\}}(E) \right]^{-1}. \quad (6.28)$$

Se  $E \subset \mathcal{E}(S^g)$ , denotamos por  $\Delta(E)$  o conjunto de todas as arestas de  $\mathcal{E}(S^g)$  que **não** compartilham pontos finais com  $E$ .



**Figura 6.3:** O conjunto  $E$  de vermelho e  $\Delta(E)$  de azul.

Definimos, também, os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} G^{\{i\}} &:= \{E : E \subset \mathcal{E}(S^g), \partial' E = \{i\}\}, \\ G_{con}^{\{i\}} &:= \{E : E \subset \mathcal{E}(S^g), E \text{ conexo}, \partial' E = \{i\}\} \text{ e} \\ G^\emptyset &:= \{E : E \subset \mathcal{E}(S^g), \partial' E = \emptyset\}. \end{aligned}$$

Se  $E \in G^{\{i\}}$  podemos decompor como  $E = A \cup B$ , onde  $B \subset \Delta(E)$ ,  $B \in G^\emptyset$  e  $A \in G_{con}^{\{i\}}$ .

A igualdade (6.28) fica escrita como

$$\langle \sigma_i \rangle_{S,\beta,h}^+ = \sum_{A \in G_{con}^{\{i\}}} \sum_{B \in G^\emptyset : B \subset \Delta(E)} \prod_{xy \in A \cup B} \tanh(\beta J_{xy}) \left[ \sum_{B \in G^\emptyset} \prod_{xy \in B} \tanh(\beta J_{xy}) \right]^{-1}.$$

Uma vez que

$$\sum_{B \in G^\emptyset : B \subset \Delta(E)} \prod_{xy \in B} \tanh(\beta J_{xy}) \left[ \sum_{B \in G^\emptyset} \prod_{xy \in B} \tanh(\beta J_{xy}) \right]^{-1} \leq 1,$$

segue que

$$\langle \sigma_i \rangle_{S,\beta,h}^+ \leq \sum_{A \in G_{con}^{\{i\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}). \quad (6.29)$$

Separamos o conjunto  $G_{con}^{\{i\}}$  em dois subconjuntos disjuntos  $G_{con,g}^{\{i\}}$  e  $G_{con,w}^{\{i\}}$ , que estão definidos da seguinte maneira

$$G_{con,g}^{\{i\}} := \{E \in G_{con}^{\{i\}} : \text{pelo menos uma aresta do tipo } \{x, g\} \text{ pertence a } E\},$$

$$G_{con,w}^{\{i\}} := \{E \in G_{con}^{\{i\}} : \text{nenhuma aresta do tipo } \{x, g\} \text{ pertence a } E\}.$$

Logo, (6.29) é reescrito como

$$\langle \sigma_i \rangle_{S,\beta,h}^+ \leq \sum_{A \in G_{con,g}^{\{i\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}) + \sum_{A \in G_{con,w}^{\{i\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}). \quad (6.30)$$

No que segue, limitaremos os dois somatórios de (6.30). Para isso usaremos o seguinte lema de grafos, cuja prova pode ser encontrada em Friedli e Velenik [FV17, pag 117].

**Lema 6.5.1.** *Seja  $G$  um grafo conexo com  $A$  arestas. Se iniciamos de um vértice arbitrário do  $G$ , existe um caminho em  $G$  que percorre cada aresta de  $G$  exatamente duas vezes.*

O segundo somatório de (6.30) é considerando sobre todos os conjuntos de arestas que não usam nenhuma aresta que conecte com o vértice fantasma e que tem  $i$  como único vértice ao qual chegam um numero ímpar de arestas. O seguinte lema fornece uma cota superior para esse somatório.

**Lema 6.5.2.** *Para  $d \geq 1$ ,  $4d^2 J\beta < 1/4$  e  $G_{con,w}^{\{i\}}$  definido como acima, temos que*

$$\sum_{A \in G_{con,w}^{\{i\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}) \leq C e^{-cn(i)},$$

onde  $c = c(\beta, J, d) > 0$  e  $C = C(\beta, J, d) > 0$  e  $n(i) := \min\{\|i - z\| : z \in S^c\}$ .

**Demonstração.** Como  $A \in G_{con,w}^{\{i\}}$  não usamos nenhuma aresta do tipo  $\{x, g\}$ .

Pelo lema do aperto de mãos temos que  $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} I[x, A] = 2|A|$ . Observe que só estamos considerando  $\mathbb{Z}^d$  e não  $(\mathbb{Z}^d)^g$  já que não estamos trabalhando com o sítio fantasma ou com nenhuma aresta que conecte com ele. Logo, pelo lema do aperto de mãos segue que deve existir outro termo ímpar além de  $I[i, A]$  já que a soma total é par. Dado que para  $x \neq i$ ;  $I[x, A]$  é par para todo  $x \in S$ , então  $x$ , tal que  $I[x, A]$  seja ímpar, deve pertencer a  $S$  complementar. Portanto, se  $|A| = k$  temos que  $k \geq n(i)$ , onde  $n(i) := \min\{\|i - z\| : z \in S^c\}$ .

$$\sum_{A \in G_{con,w}^{\{i\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}) \leq \sum_{k=n(i)}^{\infty} (\beta J)^k \sum_{\substack{A \in G_{con,w}^{\{i\}} \\ |A|=k}} 1. \quad (6.31)$$

Em seguida limitaremos a seguinte soma

$$\sum_{\substack{A \in G_{con,w}^{\{i\}} \\ |A|=k}} 1.$$

A soma acima indica o numero de grafos induzidos pelo conjunto de arestas  $A$  de longitude  $k$ . Segundo o Lema 6.5.1 este número é menor que o número de todos os caminhos que percorrem duas vezes cada aresta. Note que o último número é menor que  $(2d)^{2k}$ , devido às  $2d$  opções possíveis por cada aresta do grafo  $A$ . Mas como consideramos o caminho anterior fazemos isso  $2k$  vezes. Logo, segue que

$$\sum_{A \in G_{con,w}^{\{i\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}) \leq \sum_{k=n(i)}^{\infty} (4d^2 \beta J)^k \quad (6.32)$$

$$\leq \frac{(4d^2 \beta J)^{n(i)}}{1 - 4d^2 \beta J} = C e^{-cn(i)}, \quad (6.33)$$

onde  $C = 1/(1 - 4d^2\beta J)$  e  $c = -\ln(4d^2\beta J)$ .  $\square$

Observe que quando  $S \rightarrow \mathbb{Z}^d$ ,  $n(i) \rightarrow \infty$ .

Também podemos encontrar uma limitação similar para o primeiro somatório de (6.30).

**Lema 6.5.3.** *Para  $d \geq 1$ ,  $h$  tal que  $h_x > 0$ , para todo  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\rho_S := \sup_{x \in S} \{h_x\} < \infty$ ,  $4d^2\beta J < 1/4$  e  $G_{con,g}^{\{i\}}$  definido como antes, então*

$$\sum_{A \in G_{con,g}^{\{i\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}) \leq I.$$

Onde  $I$  toma os valores dados na tabela 6.1, de acordo a suas respectivas condições.

I	Condição
$\frac{1}{3}$	$(1 + \sqrt{5})\rho_S/2 < J < 1/4(4d^2\beta)$
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}J < \rho_S \leq 1/4(4d^2\beta)$
0, 123	$J = \rho_S < 1/4(4d^2\beta)$

**Tabela 6.1:** Valores de  $I$  com suas respectivas condições para a correlação de um sítio.

**Demonstração.** Se  $A \in G_{con,g}^{\{i\}}$ , então  $A$  pode ter diversos tamanhos. Pode ser 1, ou seja começando de  $i$  atingimos o sítio fantasma imediatamente ou pode ser 2, iniciando do mesmo ponto avançamos uma aresta e logo imediatamente pegamos a aresta que nos conecta ao sítio fantasma. Assim sucessivamente, percebemos que  $A$  vai atingir uma longitude máxima, denotaremos por  $l_{max}$ , que satisfaz  $l_{max} \leq |\mathcal{E}(S^g)|$ . Assim,

$$\sum_{A \in G_{con,g}^{\{i\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}) = \sum_{k=1}^{l_{max}} \sum_{A \in G_{con,g}^{\{i\}} : |A|=k} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}) \quad (6.34)$$

$$= \sum_{k=1}^{l_{max}} \sum_{\substack{r \geq 1 \\ r \text{ ímpar}}}^{r_{max}(k)} \sum_{\substack{A \in G_{con,g}^{\{i\}} \\ |A|=k \\ |\eta(A)|=r}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}), \quad (6.35)$$

onde  $\eta(A) := \{b \in A : b = \{x, g\}, x \in S\}$  e  $r_{max}(k) \leq k$  com

$$r_{max}(k) = \begin{cases} f(k), & \text{se } f(k) \text{ é ímpar} \\ f(k) - 1, & \text{se } f(k) \text{ é par} \end{cases} \quad \text{e} \quad f(k) = 3n + 1, \text{ se } 3n < k \leq 3(n + 1), n \in \{0\} \cup \mathbb{Z}^+.$$

Separando o produtório (6.35) e fazendo  $\rho_S = \sup_{x \in S} \{J_{xg}\}$ , temos que

$$\sum_{A \in G_{con,g}^{\{i\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}) \leq \sum_{k=1}^{l_{max}} \sum_{\substack{r \geq 1 \\ r \text{ ímpar}}}^{r_{max}(k)} \sum_{\substack{A \in G_{con,g}^{\{i\}} \\ |A|=k \\ |\eta(A)|=r}} (\beta J)^{k-r} (\beta \rho_S)^r \quad (6.36)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{l_{max}} (\beta J)^k \sum_{\substack{r \geq 1 \\ r \text{ ímpar}}}^{r_{max}(k)} \left(\frac{\rho_S}{J}\right)^r \sum_{\substack{A \in G_{con,g}^{\{i\}} \\ |A|=k \\ |\eta(A)|=r}} 1. \quad (6.37)$$

Nas relações acima usamos a desigualdade  $\tanh(x) \leq x$ , para todo  $x \geq 0$ .

O conjunto de arestas  $A$  induz um grafo que liga  $i$  ao  $g$ . Então o número de grafos  $A$  de tamanho  $k$  é menor que  $(2d+1)^k$ , o qual indica que por cada aresta percorrida em  $A$  contamos todas as possíveis opções que podemos andar no grafo  $(\mathbb{Z}^d)^g$ . Como  $A$  tem  $k$  arestas, temos o número acima. Além disso, podemos limitar  $(2d+1)^k$  por  $(2d)^{2k}$ . Assim,

$$\sum_{\substack{A \in G_{con,g}^{\{i\}} \\ |A|=k \\ |\eta(A)|=r}} 1 \leq (2d)^{2k}.$$

Por outro lado,

$$\sum_{\substack{r \geq 1 \\ r \text{ ímpar}}}^{r_{max}(k)} \left(\frac{\rho_S}{J}\right)^r = \frac{J\rho_S}{(J^2 - \rho_S^2)} \left(1 - \left(\frac{\rho_S}{J}\right)^{r_{max}(k)+1}\right), \text{ se } J \neq \rho_S$$

e se  $J = \rho_S$ , o somatório acima é exatamente  $(r_{max}(k) + 1)/2$ .

Combinando a desigualdade acima com (6.37), quando  $J \neq \rho_S$ ,

$$\sum_{A \in G_{con,g}^{\{i\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}) \leq \frac{J\rho_S}{(J^2 - \rho_S^2)} \sum_{k=1}^{l_{max}} (\beta J 4d^2)^k \left(1 - \left(\frac{\rho_S}{J}\right)^{r_{max}(k)+1}\right). \quad (6.38)$$

No caso que  $\varphi \rho_S < J$  e  $\beta J 4d^2 < 1/4$ , onde  $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ , a expressão do lado direito de (6.38) é no máximo

$$\frac{J\rho_S}{(J^2 - \rho_S^2)} \frac{\beta J 4d^2}{(1 - \beta J 4d^2)} < \frac{J\rho_S}{3(J^2 - \rho_S^2)} < \frac{1}{3}. \quad (6.39)$$

No caso  $\sqrt{3}J < \rho_S$ , existem três opções para limitar a expressão do lado direito de (6.38).

- Se  $\sqrt{3}J < \rho_S < 1/4(\beta 4d^2)$ , então

$$\frac{\rho_S^2}{(\rho_S^2 - J^2)} \frac{\beta \rho_S 4d^2}{(1 - \beta \rho_S 4d^2)} < \frac{\rho_S^2}{3(\rho_S^2 - J^2)} < \frac{1}{2}, \quad (6.40)$$

onde temos usado que  $r_{max}(k) + 1 \leq k + 1$ .

- Se  $\sqrt{3}J < \rho_S = 1/4(4d^2\beta)$ , então

$$\frac{\rho_S^2}{(\rho_S^2 - J^2)} \sum_{k=1}^{l_{max}} \frac{1}{4^k} \leq \frac{\rho_S^2}{3(\rho_S^2 - J^2)} < \frac{1}{2}.$$

Já quando  $J = \rho_S$ , (6.37) temos

$$\sum_{A \in G_{con,g}^{\{i\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{l_{max}} (4d^2\beta J)^k (r_{max}(k) + 1) < 2 \sum_{k=1}^{l_{max}} \frac{k+1}{2^{2(k+1)}}. \quad (6.41)$$

pois  $4d^2\beta J < 1/4$ . Logo a expressão a direita de (6.41) é menor que

$$2 \int_2^{l_{max}+1} \frac{x}{2^{2x}} dx < 2^{-4} \left[ \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{(2 \ln 2)^2} \right] \approx 0,123.$$

□

Baseado nos dois lemas anteriores e no item (6.30), obtemos o seguinte resultado.

**Proposição 6.5.1.** *Para  $d \geq 1$ ,  $\mathbf{h}$  tal que  $h_x > 0$ , para todo  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\rho_S := \sup_{x \in S} \{h_x\} < \infty$ ,  $4d^2\beta J < 1/4$ , temos a seguinte cota*

$$\langle \sigma_i \rangle_{S,\beta,\mathbf{h}}^+ \leq I + C e^{-cn(i)}.$$

Onde os valores de  $I, C, c$  são dados pelos lemas 6.5.2 e 6.5.3.

Podemos retirar a condição de que todo  $h_x > 0$ .

**Proposição 6.5.2.** *Para  $d \geq 1$ ,  $\rho_S := \sup_{x \in S} \{h_x\} < \infty$ ,  $4d^2\beta J < 1/4$  temos a seguinte limitação*

$$\langle \sigma_i \rangle_{S,\beta,\mathbf{h}}^+ \leq I + C e^{-cn(i)}, \quad (6.42)$$

onde os valores de  $I, C, c$  são dados pelos lemas 6.5.2 e 6.5.3.

Isto é possível, porque o primeiro somatório de (6.30) para um campo  $\mathbf{h}$  que permite zeros é menor que este mesmo somatório só que considerando um outro campo que troca todos os zeros de  $\mathbf{h}$  por  $\rho_S$ . Usando o Lema 6.5.3, para limitar este somatório, segue (6.42).

**Exemplo 6.5.1.** *Se  $\mathbf{J} \equiv 1$ ,  $\mathbf{h}$  tal que  $\rho_{\mathbb{Z}^d} = 1$ ,  $d = 2$  e  $\beta < 1/4^3$ , então, pela Proposição 6.5.2, temos*

$$\langle \sigma_i \rangle_{\beta,\mathbf{h}}^+ \leq 0,123. \quad (6.43)$$

### 6.5.3 Limitação da Correlação de Dois Spins com Campo Variável

Conhecemos por [FV17, pag 119], que para altas temperaturas a correlação de dois spins com campo nulo satisfaz  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{S,\beta,0}^+ \leq C \exp\{-c\|i - j\|\}$ . Mas quando o campo é variável não possuímos informação.

Usando a expansão (6.27), obtemos

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{S, \beta, \mathbf{h}}^+ = \sum_{E \subset \mathcal{E}(S^g)} \prod_{xy \in E} \tanh(\beta J_{xy}) \mathbb{1}_{\partial' E = \{i, j\}}(E) \left[ \sum_{E \subset \mathcal{E}(S^g)} \prod_{xy \in E} \tanh(\beta J_{xy}) \mathbb{1}_{\partial' E = \{\emptyset\}}(E) \right]^{-1}.$$

Procedendo de forma similar ao que foi feito na Subseção 6.5.2, obtemos

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{S, \beta, \mathbf{h}}^+ \leq \sum_{A \in G_{con}^{\{i, j\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}), \quad (6.44)$$

onde  $G_{con}^{\{i, j\}} := \{E : E \subset \mathcal{E}(S^g), E \text{ conexo}, \partial' E = \{i, j\}\}$ .

Como antes separamos o conjunto  $G_{con}^{\{i, j\}}$  em

$G_{con, g}^{\{i, j\}} := \{E \in G_{con}^{\{i, j\}} : \text{ pelo menos uma aresta do tipo } \{x, g\} \text{ pertence a } E\}$  e  $G_{con, w}^{\{i, j\}} := \{E \in G_{con}^{\{i, j\}} : \text{ pelo menos uma aresta do tipo } \{x, w\} \text{ pertence a } E\}$ .

Observe que estes dois conjuntos são disjuntos. Assim, (6.44) pode ser escrita como

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{S, \beta, \mathbf{h}}^+ \leq \sum_{A \in G_{con, g}^{\{i, j\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}) + \sum_{A \in G_{con, w}^{\{i, j\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}). \quad (6.45)$$

No estudo da correlação com campo variável o seguinte lema é de grande utilidade.

**Lema 6.5.4.** *Para  $d \geq 1$ ,  $4d^2 \beta J < 1/4$  e  $G_{con, w}^{\{i, j\}}$  definido como acima, temos*

$$\sum_{A \in G_{con, w}^{\{i, j\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}) \leq C e^{-c \|i-j\|},$$

onde  $C = C(d, \beta, J) > 0$  e  $c = c(d, \beta, J) > 0$ .

**Demonstração.** Como  $G_{con, w}^{\{i, j\}}$  só trabalha com arestas de  $E(S)$ , temos  $J_{xy} = J$ . De modo que

$$\begin{aligned} \sum_{A \in G_{con, w}^{\{i, j\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}) &= \sum_{A \in G_{con, w}^{\{i, j\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J) \\ &\leq \sum_{A \in G_{con, w}^{\{i, j\}}} \prod_{xy \in A} \beta J. \end{aligned}$$

A última parte da desigualdade acima é igual a

$$\sum_{A \in G_{con, w}^{\{i, j\}}} \prod_{xy \in A} \beta J = \sum_{k=\|i-j\|}^{l_{max}} (\beta J)^k \sum_{\substack{A \in G_{con, w}^{\{i, j\}} \\ |A|=k}} 1,$$

onde  $l_{max}$  é o maior tamanho que pode ter  $A$  e satisfaz que  $l_{max} \leq E(S)$ . No que segue, encontramos o valor do somatório

$$\sum_{\substack{A \in G_{con, w}^{\{i, j\}} \\ |A|=k}} 1.$$

Para isso, definimos  $W_k := \{A \in G_{con,w}^{\{i,j\}} : |A| = k\}$  e  $m_k = |W_k|$ . Uma vez que pelo Lema 6.5.1, o número de grafos de longitude  $k$  é menor igual ao número de caminhos que percorrem 2 vezes cada aresta desse grafo e este número por sua vez, é menor que percorrer em cada direção que permite a dimensão  $2d$  um número de vezes igual a  $2k$ . Ou seja

$$\sum_{\substack{A \in G_{con,w}^{\{i,j\}} \\ |A|=k}} 1 = m_k \leq (2d)^{2k}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{A \in G_{con,w}^{\{i,j\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}) &\leq \sum_{k=\|i-j\|}^{E(S)} (4d^2 \beta J)^k \\ &\leq (4d^2 \beta J)^{\|i-j\|} \left[ \frac{1 - (4d^2 \beta J)^{E(S) - \|i-j\| + 1}}{1 - (4d^2 \beta J)} \right] \\ &\leq (4d^2 \beta J)^{\|i-j\|} \frac{1}{1 - (4d^2 \beta J)}. \end{aligned}$$

A última parte pode ser escrita como

$$\frac{1}{1 - (4d^2 \beta J)} (4d^2 \beta J)^{\|i-j\|} = C(d, \beta, J) e^{-c(d, \beta, J) \|i-j\|},$$

onde  $C(d, \beta, J) = \frac{1}{1 - (4d^2 \beta J)} > 0$  e  $c(d, \beta, J) = -\ln(4d^2 \beta J) > 0$ .

□

No que segue nos ocuparemos do outro somatório.

**Lema 6.5.5.** *Para  $d \geq 1$ ,  $h$  tal que  $h_x > 0$ , para todo  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\rho_S := \sup_{x \in S} \{h_x\} < \infty$ ,  $4d^2 \beta J < 1/4$  e  $G_{con,g}^{\{i,j\}}$  definido como antes, então*

$$\sum_{A \in G_{con,g}^{\{i,j\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}) \leq I,$$

onde  $I$  toma os valores dados na tabela 6.2; de acordo a suas respectivas condições.

I	Condição
$\frac{1}{12}$	$\sqrt{2} \rho_S < J < 1/4(4d^2 \beta)$
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{1,2} J < \rho_S \leq 1/4(4d^2 \beta)$
0, 123	$J = \rho_S < 1/4(4d^2 \beta)$

**Tabela 6.2:** Valores  $I$  e suas respectivas condições

**Demonstração.** Continuando com o mesmo argumento separamos o  $A$  de acordo com os distintos tamanhos que pode ter. Note que o menor tamanho que  $A$  pode ter é dois,

pois só bastam as arestas  $\{i, g\}$  e  $\{g, j\}$  para enlaçar  $i$  e  $j$ . Logo, voltamos a separar os  $A$  de tamanho  $k$ , mas esta vez considerando quantas arestas do tipo  $\{x, g\}$  estão contidas em  $A$ . Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{A \in G_{con,g}^{\{i,j\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}) &= \sum_{k=2}^{l_{max}} \sum_{\substack{A \in G_{con,g}^{\{i,j\}} \\ |A|=k}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}) \\ &\leq \sum_{k=2}^{l_{max}} \sum_{\substack{r=2, \\ \text{par}}}^{r_{max}(k)} \sum_{\substack{A \in G_{con,g}^{\{i,j\}} \\ |A|=k \\ |\eta(A)|=r}} \tanh(\beta J)^{k-r} \prod_{xy \in \eta(A)} \tanh(\beta J_{xy}), \end{aligned}$$

onde  $\eta(A)$  denota o conjunto de todas as arestas do tipo  $\{x, g\}$  que pertencem a  $A$ . O valor de  $r_{max}(k)$  dado  $|A| = k$  é dado por

$$r_{max}(k) = 2(n+1) \text{ se } 3n+2 \leq k \leq 3n+4, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Uma vez que  $J_{xy} = h_x$  se  $xy \in \eta(A)$ , e  $h_x \leq \rho_S$ , segue que

$$\sum_{A \in G_{con,g}^{\{i,j\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}) \leq \sum_{k=2}^{l_{max}} \sum_{\substack{r=2, \\ \text{par}}}^{r_{max}(k)} (\beta J)^{k-r} (\beta \rho)^r \sum_{\substack{A \in G_{con,g}^{\{i,j\}} \\ |A|=k \\ |\eta(A)|=r}} 1.$$

O último somatório consiste em contar todos os grafos induzidos por  $A$  tais que conectam os vértices  $i$  e  $j$ . Este número é menor que o número de todas as possíveis opções para cada aresta em  $A$ , neste caso  $(2d+1)^k$ , o qual podemos majorar por  $(2d)^{2k}$ . Logo,

$$\sum_{A \in G_{con,g}^{\{i,j\}}} \prod_{xy \in A} \tanh(\beta J_{xy}) \leq \sum_{k=2}^{l_{max}} (4d^2 J \beta)^k \sum_{\substack{r=2, \\ \text{par}}}^{r_{max}(k)} \left(\frac{\rho_S}{J}\right)^r \quad (6.46)$$

$$\leq \frac{\rho_S^2}{J^2 - \rho_S^2} \sum_{k=2}^{l_{max}} (4d^2 J \beta)^k \left(1 - \left(\frac{\rho_S}{J}\right)^k\right), \text{ se } \rho_S \neq J. \quad (6.47)$$

Lembrando que  $l_{max} \leq \mathcal{E}(S^g)$ ,  $r_{max}(k) \leq k$  e calculando os somatórios do lado direito de (6.47), de forma muito similar ao que foi feito no lema anterior, percebemos que estes ficam limitadas por  $I$ , com suas respectivas condições dadas na Tabela 6.2.  $\square$

Se juntarmos (6.45) e os dois lemas anteriores podemos obter uma limitação para a função correlação de dois sítios.

**Proposição 6.5.3.** *Para  $d \geq 1$ ,  $\mathbf{h}$  tal que  $h_x > 0$ , para todo  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\rho_S := \sup_{x \in S} \{h_x\} < \infty$ ,  $4d^2 \beta J < 1/4$ , então*

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{S, \beta, \mathbf{h}}^+ \leq I + C e^{-c\|i-j\|}, \quad (6.48)$$

onde  $I, C, c > 0$  são dados pelos Lemas (6.5.5) e (6.5.4).

De forma similar ao que foi feito na seção anterior, usando (6.45) e o Lema 6.5.5 temos a seguinte proposição, para campos  $\mathbf{h}$  tal que alguns  $h_x$  sejam iguais a zero.

**Proposição 6.5.4.** Para  $d \geq 1$ ,  $\rho_S := \sup_{x \in S} \{h_x\} < \infty$ ,  $4d^2\beta J < 1/4$ , então

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{S, \beta, \mathbf{h}}^+ \leq I + C e^{-c\|i-j\|},$$

onde  $I, C, c > 0$  são dados pelos Lemas 6.5.5 e 6.5.4.

A prova desta proposição segue um argumento similar ao usado na dedução da Proposição 6.5.2.

**Exemplo 6.5.2.** Seja  $d = 2$ ,  $\mathbf{J} \equiv 1$ ,  $\mathbf{h}$  somável tal que  $\sqrt{1,2} < \rho_{\mathbb{Z}^2}$  e  $\beta < 1/(4^3 \rho_{\mathbb{Z}^2})$ . Como  $\mathbf{h}$  é somável note que  $\rho_{\mathbb{Z}^2} < \infty$ . Usando a Proposição 6.5.4 segue que

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{S, \beta, \mathbf{h}}^+ \leq \frac{1}{2} + C e^{-c\|i-j\|}.$$

# Apêndice A

## Desigualdades GKS

### A.1 Desigualdade GKS-I

Apresentaremos a prova da Desigualdade GKS-1, para condições de fronteira livre e campo positivo (enunciada no Teorema 1.2.1), ou seja,  $\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^0 \geq 0$ . Notar que o denominador da esperança é  $Z_\Lambda > 0$  é tranquilo, assim que só temos que provar que o numerador é não negativo, ou seja,

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \sigma_A(\omega) e^{-\beta H_\Lambda(\omega)} \geq 0.$$

Com esta finalidade trabalhamos no fator de Boltzmann

$$e^{-\beta H_\Lambda(\omega)} = \prod_{i \in \Lambda} e^{\beta h_i \omega_i} \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_\Lambda} e^{\beta J_{ij} \omega_i \omega_j} \quad (\text{A.1})$$

e, como

$$e^{\beta J_{ij} \omega_i \omega_j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta J_{ij} \omega_i \omega_j)^n}{n!},$$

podemos ordenar os termos de forma a obter as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} e^{\beta J_{ij} \omega_i \omega_j} &= \cosh(\beta J_{ij}) + \sinh(\beta J_{ij}) \omega_i \omega_j \\ &= \cosh(\beta J_{ij}) (1 + \tanh(\beta J_{ij}) \omega_i \omega_j). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Agora, usando (A.2) em (A.1) temos

$$e^{-\beta H_\Lambda(\omega)} = \prod_{i \in \Lambda} e^{\beta h_i \omega_i} \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_\Lambda} \cosh(\beta J_{ij}) (1 + \tanh(\beta J_{ij}) \omega_i \omega_j), \quad (\text{A.3})$$

logo,

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \sigma_A(\omega) e^{-\beta H_\Lambda(\omega)} = \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \prod_{i \in \Lambda} e^{\beta h_i \omega_i} \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_\Lambda} \cosh(\beta J_{ij}) (\sigma_A(\omega) + \tanh(\beta J_{ij}) \omega_i \omega_j \sigma_A(\omega)).$$

Agora, desenvolvendo o produtório obtemos

$$\prod_{i \in \Lambda} e^{\beta h_i \omega_i} \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_\Lambda} \cosh(\beta J_{ij}) (\sigma_A(\omega) + \tanh(\beta J_{ij}) \omega_i \omega_j \sigma_A(\omega)) = \sum_m c_m P_m,$$

onde  $C_m$  é um fator dado por um produto de termos que são ora  $\cosh(\beta J_{ij})$ , ora  $\sinh(\beta J_{ij})$ . Esses fatores são não-negativos pois  $\cosh(x)$  e  $\sinh(x)$  são ambos não-negativos para  $x \geq 0$ . Já os fatores  $P_m$  são da forma

$$P_m = \omega_{i_1}^{n_{i_1}} \dots \omega_{i_m}^{n_{i_m}} \prod_{i \in \Lambda} e^{\beta h_i \omega_i}.$$

Com isto temos que

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \sigma_A(\omega) e^{-\beta H_\Lambda(\omega)} = \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \sum_m c_m P_m = \left( \sum_m c_m \right) \left( \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} P_m \right).$$

Caso todos os  $n_i$  sejam pares, temos imediatamente que

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} P_m = \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \prod_{i \in \Lambda} e^{\beta h_i \omega_i} > 0.$$

Por outro lado, se  $n_{j_1}, \dots, n_{j_r}$  é a lista completa de todos os expoentes ímpares que aparecem em  $P_m$ , então temos que

$$P_m = \omega_{j_1} \dots \omega_{j_r} \prod_{i \in \Lambda} e^{\beta h_i \omega_i}.$$

Somando sobre todas as configurações, obtemos

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} P_m = \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \omega_{j_1} \dots \omega_{j_r} \prod_{i \in \{j_1, \dots, j_r\}} e^{\beta h_i \omega_i} \prod_{i \in \Lambda \setminus \{j_1, \dots, j_r\}} e^{\beta h_i \omega_i}.$$

Como o segundo produtório que aparece acima é positivo e

$$e^{\beta h_j} - e^{-\beta h_j} = 2 \sinh(\beta h_j) \geq 0,$$

segue que

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} P_m \geq 0.$$

Assim, concluímos que

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \sigma_A(\omega) e^{-\beta H_\Lambda(\omega)} \geq 0.$$

## A.2 Demonstração de GKS-II

Nesta parte mostraremos que  $\langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{h}, \mathbf{J}}^0 \geq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{J}, \mathbf{h}}^0 \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda, \beta, \mathbf{J}, \mathbf{h}}^0$  (que é a segunda parte do Teorema 1.2.1). Faremos uma prova para o modelo em condições de fronteira livre. O método utilizado nesta prova será o de duplicação de variáveis, ou seja, para cada sitio  $i \in \Lambda$  criamos uma nova variável  $\mu_i : \Omega_\Lambda \rightarrow \{-1, 1\}$ , e definimos um Hamiltoniano duplicado no volume  $\Lambda$  da seguinte forma

$$H^{(2)}(\sigma, \mu) := H(\sigma) + H(\mu) = - \sum_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_\Lambda} J_{i, j} (\sigma_i \sigma_j + \mu_i \mu_j) - \sum_{i \in \Lambda} h_i (\sigma_i + \mu_i).$$

Denotaremos por  $\langle \cdot \rangle^{(2)}$  o valor esperado com respeito a medida de Gibbs definida pelo o hamiltoniano  $H^{(2)}(\sigma, \mu)$ . Observe que

$$\begin{aligned} \langle \sigma_A \sigma_B - \sigma_A \mu_B \rangle^{(2)} &= \frac{\sum_{\omega_1 \in \Omega_\Lambda} \sum_{\omega_2 \in \Omega_\Lambda} [\sigma_A(\omega_1) \sigma_B(\omega_1) - \sigma_A(\omega_1) \mu_B(\omega_2)] e^{-\beta(H(\sigma))(\omega_1) - \beta(H(\mu))(\omega_2)}}{\sum_{\omega_1 \in \Omega_\Lambda} \sum_{\omega_2 \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta(H(\sigma))(\omega_1) - \beta(H(\mu))(\omega_2)}} \\ &= \frac{\sum_{\omega_1 \in \Omega_\Lambda} \sigma_A(\omega_1) \sigma_B(\omega_1) e^{-\beta(H(\sigma))(\omega_1)} \sum_{\omega_2 \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta(H(\mu))(\omega_2)}}{\sum_{\omega_2 \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta(H(\mu))(\omega_2)} \sum_{\omega_1 \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta(H(\sigma))(\omega_1)}} \\ &\quad - \frac{\sum_{\omega_2 \in \Omega_\Lambda} \mu_B(\omega_2) e^{-\beta(H(\mu))(\omega_2)} \sum_{\omega_1 \in \Omega_\Lambda} \sigma_A(\omega_1) e^{-\beta(H(\sigma))(\omega_1)}}{\sum_{\omega_2 \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta(H(\mu))(\omega_2)} \sum_{\omega_1 \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta(H(\sigma))(\omega_1)}} \\ &= \langle \sigma_A \sigma_B \rangle - \langle \sigma_B \rangle \langle \sigma_A \rangle \end{aligned}$$

e, da mesma forma, temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \langle \sigma_A \rangle^{(2)} &= \langle \mu_A \rangle^{(2)} = \langle \sigma_A \rangle, \\ \langle \sigma_A \mu_B \rangle^{(2)} &= \langle \sigma_A \rangle \langle \mu_B \rangle, \\ \langle \sigma_A \sigma_B \rangle^{(2)} &= \langle \sigma_A \sigma_B \rangle = \langle \mu_A \mu_B \rangle = \langle \mu_A \mu_B \rangle^{(2)}. \end{aligned}$$

Como  $\sigma_A = \prod_{i \in A} \sigma_i$ , temos

$$\langle \sigma_A \sigma_B - \sigma_A \mu_B \rangle^{(2)} = \left\langle \prod_{i \in A} \sigma_i \left( \prod_{i \in B} \sigma_i - \prod_{i \in B} \mu_i \right) \right\rangle^{(2)}. \quad (\text{A.4})$$

Considerando a seguinte mudança de variáveis

$$X_i = \frac{(\sigma_i - \mu_i)}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad Y_i = \frac{(\sigma_i + \mu_i)}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.5})$$

e reescrevendo as igualdades em (A.4) e (A.5), ficamos com

$$\begin{aligned} \langle \sigma_A \sigma_B \rangle - \langle \sigma_B \rangle \langle \sigma_A \rangle &= \langle \sigma_A \sigma_B - \sigma_A \mu_B \rangle^{(2)} \\ &= \left\langle \prod_{i \in A} \left( \frac{X_i + Y_i}{\sqrt{2}} \right) \left[ \prod_{i \in B} \left( \frac{X_i + Y_i}{\sqrt{2}} \right) - \prod_{i \in B} \left( \frac{-X_i + Y_i}{\sqrt{2}} \right) \right] \right\rangle^{(2)}. \end{aligned}$$

Os termos com coeficiente negativo de  $\prod_{i \in B} \left( \frac{-X_i + Y_i}{\sqrt{2}} \right)$  são cancelados com o termo de  $\prod_{i \in B} \left( \frac{X_i + Y_i}{\sqrt{2}} \right)$  e ao final resta um polinômio em  $X_i$  e  $Y_i$  com coeficientes não negativos. A demonstração será concluída se mostrarmos que  $\langle X_A Y_B \rangle^{(2)} \geq 0$ , para quaisquer  $A, B \subset \Lambda$ , onde  $X_A := \prod_{i \in A} X_i$ . Para provar esta desigualdade primeiro observamos que

$$H^{(2)}(\sigma, \mu) = - \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda} J_{i,j} (X_i X_j + Y_i Y_j) - \sqrt{2} \sum_{i \in \Lambda} h_i Y_i,$$

$$\langle X_A Y_B \rangle^{(2)} = \frac{\sum_{\omega_1 \in \Omega_\Lambda} \sum_{\omega_2 \in \Omega_\Lambda} X_A(\omega_1, \omega_2) Y_B(\omega_1, \omega_2) e^{-\beta (H(\sigma, \mu))(\omega_1, \omega_2)}}{\sum_{\omega_1 \in \Omega_\Lambda} \sum_{\omega_2 \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta (H(\sigma, \mu))(\omega_1, \omega_2)}}.$$

O denominador da esperança é positivo, logo expandimos a exponencial do numerador da esperança com sua representação em séries de Taylor. Seguimos fatorando cada termo com respeito a  $i \in \Lambda$ . Assim, só temos que garantir que

$$\begin{aligned} & \sum_{\omega_1 \in \Omega_\Lambda} \sum_{\omega_2 \in \Omega_\Lambda} X_i^m(\omega_1, \omega_2) Y_i^n(\omega_1, \omega_2) \\ &= \sum_{\omega_1 \in \Omega_\Lambda} \sum_{\omega_2 \in \Omega_\Lambda} \left( \frac{\sigma_i(\omega_1) - \mu_i(\omega_2)}{\sqrt{2}} \right)^m \left( \frac{\sigma_i(\omega_1) + \mu_i(\omega_2)}{\sqrt{2}} \right)^n \geq 0, \end{aligned}$$

para quaisquer inteiros  $m, n \geq 0$ . Se  $m$  e  $n$  são positivos, então a soma é nula, devido aos valores que assumem os spins  $\sigma$  e  $\mu$ . Se  $m$  ou  $n$  é zero, então teremos somas em apenas uma destas variáveis  $X_i$  ou  $Y_i$ . Se o expoente dessa variável é par então temos que a soma é positiva, e se o expoente é ímpar, então a soma é nula. Com isso terminamos a prova.

# Apêndice B

## Quebra da Simetria da Réplica

**Observação B.0.1.** Para  $f(x)$ ,  $g(x)$  funções reais,  $g(x) \neq 0$  para todo  $x$  num entorno de  $x_0$ .

A notação **o-pequena**<sup>1</sup> está definida assim

$$f(x) = o(g(x)) \text{ quando } x \rightarrow x_0,$$

se, e só se,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ . Para o caso infinito seria

$$f(x) = o(g(x)) \text{ quando } x \rightarrow \infty,$$

se, e só se,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , isto é,  $\forall \epsilon > 0, \exists R > 0, \forall x \geq R \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \epsilon$ .

A notação **O-grande** é

$$f(x) = O(g(x)) \text{ quando } x \rightarrow x_0,$$

se, e só se, existe  $C > 0$  tal que  $|f(x)| \leq C|g(x)|$ , para  $x$  em uma vizinhança de  $x_0$ . No caso infinito, temos

$$f(x) = O(g(x)) \text{ quando } x \rightarrow \infty,$$

se, e só se, existe  $C > 0$  tal que  $|f(x)| \leq C|g(x)|$ , para  $x$  suficientemente grande, ou seja,  $\exists C > 0, \exists R > 0, \forall x \geq R \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < C$ .

**Lema B.0.1.** Para qualquer  $\beta$ ,  $h$  e  $n$ ,

$$\sum_{x,y} \left( \mathbb{E} \left[ \frac{\partial^4 F_n}{\partial \xi_x^2 \partial \xi_y^2} \right] \right)^2 \leq \sqrt{24} C |V_n|,$$

$C$  é da hipótese da limitação da variância de  $F_n$ .

**Demonstração.** Começamos considerando  $G_n = F_n(\beta, h) - \mathbb{E}[F_n(\beta, h)]$  e um conjunto  $U$  de todos os pares não ordenados  $\{x, y\}$ . Para  $u \in U$  definimos

$$t_u := \begin{cases} \frac{1}{2}(\xi_x^2 - 1)(\xi_y^2 - 1) & \text{se } x \neq y \\ \frac{1}{\sqrt{24}}(\xi_x^4 - 6\xi_x^2 + 3) & \text{se } x = y. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

---

<sup>1</sup>foi criada por Edmund Landau em 1909, no pequeno livro sobre a distribuição dos primos [Lan09].

A expressão  $t_u$  é escolhida assim para facilitar a aplicação da integração por partes Gaussiana na expressão  $d_u := \mathbb{E}[t_u G_n]$ .

Definimos  $T := \sum_{u \in U} d_u t_u$ . Também notamos que para  $u, u' \in U$  temos as seguintes esperanças  $\mathbb{E}[t_u t_{u'}] = 0$  e  $\mathbb{E}[t_u^2] = 1$ , pois as variáveis  $Y$  com distribuição  $N(0, \nu^2)$  possuem a propriedade  $\mathbb{E}[Y^{2k}] = \frac{(2k)!}{k! 2^k} \nu^{2k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (ver [Øks03, pag 17]). E com isto notamos que

$$\mathbb{E}[T^2] = \sum_u d_u^2 = \sum_u \mathbb{E}[d_u t_u G_n] = \mathbb{E}[T G_n]$$

e

$$0 \leq \mathbb{E}[(T - G_n)^2] = \mathbb{E}[G_n^2] - \mathbb{E}[T^2].$$

Mas  $\mathbb{E}[G_n^2]$  é uma variância e conhecemos o Lema 4.5.1 para limitar por cima.

$$\sum_u d_u^2 \leq \mathbb{E}[G_n^2] = \text{Var}[F_n] \leq C|V_n|.$$

Para obter o resultado procurado só temos que aplicar a integração Gaussiana por partes para  $d_u = \mathbb{E}[t_u G_n]$ . Analisamos primeiro o caso  $u = \{x, x\}$  usando várias vezes a Proposição 4.3.1.

$$\begin{aligned} \sqrt{24} d_u &= \sqrt{24} \mathbb{E}[t_u G_n] = \mathbb{E}[(\xi_x^4 - 6\xi_x^2 + 3)G_n] \\ &= \mathbb{E}[\xi_x^4 G_n] - 6\mathbb{E}[\xi_x^2 G_n] + 3\mathbb{E}[G_n] \\ &= 3\mathbb{E}[\xi_x^2 G_n] + \mathbb{E}[\xi_x^3 G'_n] - 6\mathbb{E}[\xi_x^2 G_n] + 3\mathbb{E}[G_n] \\ &= -\mathbb{E}[\xi_x G'_n] + \mathbb{E}[\xi_x^2 G''_n] \\ &= \mathbb{E}[\xi_x G'''_n] = \mathbb{E}[G''''_n] \\ &= \mathbb{E}[F_n'''''] = \mathbb{E}\left[\frac{\partial^4 F_n}{\partial \xi_x^4}\right]. \end{aligned}$$

Agora, de forma similar para  $u = \{x, y\}$  com  $x \neq y$  temos

$$2 d_u = 2 \mathbb{E}[t_u G_n] = \mathbb{E}\left[\frac{\partial^4 F_n}{\partial \xi_x^2 \partial \xi_y^2}\right].$$

Resumindo temos

$$d_u = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbb{E}\left[\frac{\partial^4 F_n}{\partial \xi_x^2 \partial \xi_y^2}\right] & \text{se } x \neq y \\ \frac{1}{\sqrt{24}} \mathbb{E}\left[\frac{\partial^4 F_n}{\partial \xi_x^4}\right] & \text{se } x = y \end{cases}$$

Com isso o último lema fica provado.  $\square$

## B.1 Generalização da integração Gaussiana por partes

A prova do próximo resultado pode ser encontrado em Chen (2019) [Che19, prop 6.1]

**Proposição B.1.1.** *Seja  $Y$  uma variável aleatória de valor real com média zero e variância finita  $\sigma^2$ , com  $\sigma > 0$ . Para qualquer função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com um derivada de terceira ordem contínua e limitada, temos*

$$\mathbb{E}(Y f(Y)) = \sigma^2 \mathbb{E}(f'(Y)) + \gamma_Y^2(f), \quad (\text{B.2})$$

onde

$$\gamma_Y^2(f) := \mathbb{E}\left(Y \int_0^Y (Y-u)f''(u) du\right) - \sigma^2 \mathbb{E}\left(\int_0^Y (Y-u)f'''(u) du\right),$$

com

$$\left|Y \int_0^Y (Y-u)f''(u) du\right| \leq |Y| \int_0^{|Y|} \min\{2\|f'\|_\infty, \|f''\|_\infty u\} du. \quad (\text{B.3})$$

**Demonstração.** Usando o Teorema de Taylor,

$$Yf(Y) = Yf(0) + Y^2f'(0) + Y \int_0^Y (Y-u)f''(u) du + \sigma^2\left(f'(Y) - f'(0) - Yf''(0) + R(Y)\right),$$

onde  $R(Y) := -f'(Y) + f'(0) + Yf''(0)$ .

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo e integração por partes,

$$R(Y) = -\int_0^Y f''(u) du + Yf''(0) = -\int_0^Y (Y-u)f'''(u) du. \quad (\text{B.4})$$

Dado que  $\mathbb{E}Y = 0$  e  $\mathbb{E}Y^2 = \sigma^2$ ,

$$\mathbb{E}(Yf(Y)) = \sigma^2 \mathbb{E}(f'(Y)) + \mathbb{E}\left(Y \int_0^Y (Y-u)f''(u) du\right) + \sigma^2 \mathbb{E}R(Y).$$

Assim, usando (B.4) conseguimos mostrar (B.2). Por outro lado, (B.3) segue combinando a igualdade  $\int_0^Y (Y-u)f''(u) du = \int_0^Y (f'(u) - f'(0)) du$  com o Teorema do Valor Médio.  $\square$

O próximo resultado é novo e pode ser visto como uma generalização de Proposição B.1.1 para o caso bivariada. Para simplificar a notação, vamos escrever  $\partial_{i,j}f$  a derivada parcial da ordem  $i$  e  $j$  para a primeira e segunda componente respectivamente.

**Proposição B.1.2** (Uma integração Gaussiana por partes generalizada). *Seja  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias reais independentes com média zero e variâncias finitas  $\sigma_X^2$  e  $\sigma_Y^2$  respectivamente, com  $\sigma_X, \sigma_Y$  ambos positivos. Para qualquer função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  com derivada de quinta ordem contínua e limitada. Temos*

$$\mathbb{E}(XYf(X,Y)) = \sigma_X^2\sigma_Y^2 \mathbb{E}(\partial_{1,1}f(X,Y)) + \gamma_{X,Y}^2(f), \quad (\text{B.5})$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma_{X,Y}^2(f) := & \mathbb{E}\left(XY \int_0^X \int_0^Y (X-u) \partial_{2,1}f(u,v) dudv\right) \\ & - \sigma_X^2\sigma_Y^2 \mathbb{E}\left(\int_0^X \int_0^Y (X-u) \partial_{3,2}f(u,v) dudv\right) \\ & - \sigma_X^2\sigma_Y^2 \mathbb{E}\left(\int_0^X (X-u) \partial_{3,1}f(u,0) du + \int_0^Y (Y-v) \partial_{1,3}f(0,v) dv\right). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\left| XY \int_0^X \int_0^Y (X - u) \partial_{2,1} f(u, v) \, dudv \right| \quad (\text{B.6})$$

$$\leq |X||Y| \int_0^{|X|} \int_0^{|Y|} \min \{ 2 \|\partial_{1,1} f\|_\infty, \|\partial_{2,1} f\|_\infty u \} \, dudv,$$

$$\left| \int_0^X (X - u) \partial_{3,1} f(u, 0) \, du \right| \leq \int_0^{|X|} \min \{ 2 \|\partial_{2,1} f\|_\infty, \|\partial_{3,1} f\|_\infty u \} \, du, \quad (\text{B.7})$$

$$\left| \int_0^Y (Y - v) \partial_{1,3} f(0, v) \, dv \right| \leq \int_0^{|Y|} \min \{ 2 \|\partial_{1,2} f\|_\infty, \|\partial_{1,3} f\|_\infty v \} \, dv. \quad (\text{B.8})$$

**Demonstração.** O Teorema de Taylor para funções multivariadas nos fornece,

$$\begin{aligned} XY f(X, Y) &= XY f(0, 0) + X^2 Y \partial_{1,0} f(0, 0) + XY^2 \partial_{0,1} f(0, 0) \\ &+ \frac{X^3 Y}{2} \partial_{2,0} f(0, 0) + \frac{XY^3}{2} \partial_{0,2} f(0, 0) + X^2 Y^2 \partial_{1,1} f(0, 0) \\ &+ XY \int_0^X \frac{(X - u)^2}{2} \partial_{3,0} f(u, 0) \, du + XY \int_0^Y \frac{(Y - v)^2}{2} \partial_{0,3} f(0, v) \, dv \\ &+ X^2 Y \int_0^Y (Y - v) \partial_{1,2} f(0, v) \, dv + XY \int_0^X \int_0^Y (X - u) \partial_{2,1} f(u, v) \, dudv \\ &+ \sigma_X^2 \sigma_Y^2 \left( \partial_{1,1} f(X, Y) - \partial_{1,1} f(0, 0) - X \partial_{2,1} f(0, Y) - Y \partial_{1,2} f(0, 0) \right. \\ &\left. - \int_0^X (X - u) \partial_{3,1} f(u, 0) \, du - \int_0^Y (Y - v) \partial_{1,3} f(0, v) \, dv + R(X, Y) \right), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} R(X, Y) &:= -\partial_{1,1} f(X, Y) + \partial_{1,1} f(0, 0) + X \partial_{2,1} f(0, Y) + Y \partial_{1,2} f(0, 0) \\ &+ \int_0^X (X - u) \partial_{3,1} f(u, 0) \, du + \int_0^Y (Y - v) \partial_{1,3} f(0, v) \, dv. \end{aligned}$$

Organizando adequadamente e usando propriedades do Cálculo Diferencial e Integral, temos

$$\begin{aligned} R(X, Y) &= \int_0^X (X - u) (\partial_{3,1} f(u, Y) - \partial_{3,1} f(u, 0)) \, du \\ &= - \int_0^X \int_0^Y (X - u) \partial_{3,2} f(u, v) \, dudv. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Como  $X, Y$  são variáveis aleatórias independentes,  $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0$  e  $\mathbb{E}X^2 = \sigma_X^2$ ,

$\mathbb{E}Y^2 = \sigma_Y^2$ , notamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XYf(X, Y)) &= \sigma_X^2 \sigma_Y^2 \mathbb{E}(\partial_{1,1}f(X, Y)) + \sigma_X^2 \sigma_Y^2 \mathbb{E}R(X, Y) \\ &\quad + \mathbb{E}\left(XY \int_0^X \int_0^Y (X - u) \partial_{2,1}f(u, v) \, dudv\right) \\ &\quad - \sigma_X^2 \sigma_Y^2 \mathbb{E}\left(\int_0^X (X - u) \partial_{3,1}f(u, 0) \, du + \int_0^Y (Y - v) \partial_{1,3}f(0, v) \, dv\right). \end{aligned}$$

Então, usando (B.9) a prova de (B.5) segue. Por outro lado, os itens (B.6), (B.7) e (B.8) seguem combinando o Teorema do Valor Médio com cada uma das seguintes identidades

$$\begin{aligned} \int_0^X \int_0^Y (X - u) \partial_{2,1}f(u, v) \, dudv &= \int_0^X \int_0^Y (\partial_{1,1}f(u, v) - \partial_{1,1}f(0, v)) \, dudv, \\ \int_0^X (X - u) \partial_{3,1}f(u, 0) \, du &= \int_0^X (\partial_{2,1}f(u, 0) - \partial_{2,1}f(0, 0)) \, du, \\ \int_0^Y (Y - v) \partial_{1,3}f(0, v) \, dv &= \int_0^Y (\partial_{1,2}f(0, v) - \partial_{1,2}f(0, 0)) \, dv. \end{aligned}$$

□



# Referências Bibliográficas

- [ABF87] Michael Aizenman, David J Barsky, and Roberto Fernández. The phase transition in a general class of Ising-type models is sharp. *Journal of Statistical Physics*, 47(3-4):343–374, 1987.
- [AC98] Michael Aizenman and Pierluigi Contucci. On the stability of the quenched state in mean-field spin-glass models. *Journal of Statistical Physics*, 92:765–783, 1998.
- [AC16] Antonio Auffinger and Wei-Kuo Chen. Universality of chaos and ultrametricity in mixed p-spin models. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 69(11):2107–2130, 2016.
- [AC18] Antonio Auffinger and Wei-Kuo Chen. On concentration properties of disordered hamiltonians. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 146(4):1807–1815, 2018.
- [ADCS15] Michael Aizenman, Hugo Duminil-Copin, and Vladas Sidoravicius. Random currents and continuity of Ising model’s spontaneous magnetization. *Communications in Mathematical Physics*, 334(2):719–742, 2015.
- [AF86] Michael Aizenman and Roberto Fernández. On the critical behavior of the magnetization in high-dimensional ising models. *Journal of Statistical Physics*, 44(3-4):393–454, 1986.
- [AHP19] Michael Aizenman, Matan Harel, and Ron Peled. Exponential decay of correlations in the 2d random field ising model. *arXiv preprint arXiv:1907.06459*, 2019.
- [And70] Philip Warren Anderson. Localisation theory and the Cu–Mn problem: Spin glasses. *Materials Research Bulletin*, 5(8):549–554, 1970.
- [AP18] Michael Aizenman and Ron Peled. A power-law upper bound on the correlations in the 2d random field Ising model. *Preprint, arXiv:1808.08351*, 2018.
- [ARS81] Joseph Avron, Gert Roepstorff, and Lawrence Schulman. Ground state degeneracy and ferromagnetism in a spin glass. *Journal of Statistical Physics*, 26(1):25–36, 1981.
- [AW89] Michael Aizenman and Jan Wehr. Rounding of first-order phase transitions in systems with quenched disorder. *Physical Review Letters*, 62:2503–2506, 1989.

- [AW90] Michael Aizenman and Jan Wehr. Rounding effects of quenched randomness on first-order phase transitions. *Communications in Mathematical Physics*, 130:489–528, 1990.
- [BA99] Gastao A Braga and Francisco Fontenele Araujo. O limite termodinâmico e independência das condições de contorno para o modelo de Ising d-dimensional. *Anais da VIII semana da iniciação científica da UFMG. Belo Horizonte*, 1999.
- [BA00] Gastao A. Braga and Francisco Fontenele Araujo. Caracterização da fase desordenada do modelo de Ising d-dimensional via desigualdades de correlações. 2000.
- [BC10] Rodrigo Bissacot and Leandro Cioletti. Phase transition in ferromagnetic Ising models with non-uniform external magnetic fields. *Journal of Statistical Physics*, 139(5):769–778, 2010.
- [BCCP15] Rodrigo Bissacot, Marzio Cassandro, Leandro Cioletti, and Errico Presutti. Phase transitions in ferromagnetic Ising models with spatially dependent magnetic fields. *Communications in Mathematical Physics*, 337(1):41–53, Jul 2015.
- [Bil08] Patrick Billingsley. *Probability and measure*. John Wiley & Sons, 2008.
- [BK87] Jean Bricmont and Antti Kupiainen. Lower critical dimension for the random field Ising model. *Physical Review Letters*, 59:1829–1832, 1987.
- [BK88] Jean Bricmont and Antti Kupiainen. Phase transition in the 3d random field Ising model. *Communications in Mathematical Physics*, 116:539–572, 1988.
- [BK94] Anton Bovier and Christof Külske. A rigorous renormalization group method for interfaces in random media. *Reviews in Mathematical Physics*, 6(03):413–496, 1994.
- [BLM13] Stéphane Boucheron, Gábor Lugosi, and Pascal Massart. *Concentration inequalities: A nonasymptotic theory of independence*. Oxford university press, 2013.
- [BLO98] Gastão A. Braga, Paulo C. Lima, and Michael L. O’Carroll. Exponential decay of truncated correlation functions via the generating function: a direct method. *Reviews in Mathematical Physics*, 10(04):429–438, 1998.
- [Bov06] Anton Bovier. *Statistical mechanics of disordered systems: a mathematical perspective*, volume 18. Cambridge University Press, 2006.
- [BS69] Zygmund William Birnbaum and Sam C. Saunders. A new family of life distributions. *Journal of Applied Probability*, 6:319–327, 1969.
- [CC05] Tommaso Castellani and Andrea Cavagna. Spin-glass theory for pedestrians. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2005(05):P05012, 2005.

- [Cha83] John Chalker. On the lower critical dimensionality of the Ising model in a random field. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 16(34):6615, 1983.
- [Cha09a] Sourav Chatterjee. Disorder chaos and multiple valleys in spin glasses. *Preprint, arXiv:0907.3381*, 2009.
- [Cha09b] Sourav Chatterjee. The ghirlanda-guerra identities without averaging. *Preprint, arXiv:0911.4520*, 2009.
- [Cha14] Sourav Chatterjee. *Superconcentration and related topics*. Springer, 2014.
- [Cha15] Sourav Chatterjee. Absence of replica symmetry breaking in the random field Ising model. *Communications in Mathematical Physics*, 337:93–102, 2015.
- [Cha18] Sourav Chatterjee. On the decay of correlations in the random field Ising model. *Communications in Mathematical Physics*, 362:1–15, 2018.
- [Che19] Yu-Ting Chen. Universality of ghirlanda–guerra identities and spin distributions in mixed  $p$ -spin models. In *Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, volume 55, pages 528–550. Institut Henri Poincaré, 2019.
- [Chh88] Raj Chhikara. *The Inverse Gaussian Distribution: Theory: Methodology, and Applications*, volume 95. CRC Press, 1988.
- [CJN18] Federico Camia, Jianping Jiang, and Charles M. Newman. A note on exponential decay in the random field Ising model. *Preprint, arXiv:1804.01428*, 2018.
- [CV16] Leandro Cioletti and Roberto Vila. Graphical representations for Ising and potts models in general external fields. *Journal of Statistical Physics*, 162(1):81–122, Jan 2016.
- [Das15] Chandan Dasgupta. Experimental results for spin glasses; models; the replica method; the edwards-anderson order parameter, 07 2015.
- [DC16] Hugo Duminil-Copin. Random currents expansion of the Ising model. *Proceedings of the 7th European Congress of Mathematicians in Berlin*, 2016.
- [DCGR18] Hugo Duminil-Copin, Subhajit Goswami, and Aran Raoufi. Exponential decay of truncated correlations for the Ising model in any dimension for all but the critical temperature. *arXiv preprint arXiv:1808.00439*, 2018.
- [DCT16] Hugo Duminil-Copin and Vincent Tassion. A new proof of the sharpness of the phase transition for bernoulli percolation and the Ising model. *Communications in Mathematical Physics*, 343(2):725–745, 2016.
- [Des86] Anthony F. Desmond. On the relationship between two fatigue-life models. *IEEE Transactions on Reliability*, 35:167–169, 1986.
- [DGDM06] José A Díaz-García and José Ramón Domínguez-Molina. Some generalisations of birnbaum-saunders and sinh-normal distributions. In *International Mathematical Forum*, volume 1, pages 1709–1727, 2006.

- [dHK86] W. Th. F. den Hollander and M. Keane. Inequalities of FKG type. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 138(1-2):167–182, 1986.
- [Dob68] Roland L. Dobrushin. Description of a random field by means of conditional probabilities, with applications. *Teor. Veroyatnost. i Primenen*, 13, 1968.
- [DS87] Roland L. Dobrushin and S. B. Shlosman. Completely analytical interactions: constructive description. *Journal of Statistical Physics*, 46(5-6):983–1014, 1987.
- [DX19] Jian Ding and Jiaming Xia. Exponential decay of correlations in the two-dimensional random field Ising model at positive temperatures. *arXiv preprint arXiv:1905.05651v2*, 2019.
- [Dys69] Freeman Dyson. Existence of a phase-transition in a one-dimensional Ising ferromagnet. *Communications in Mathematical Physics*, 12(2):91–107, 1969.
- [EA75] Samuel Frederick Edwards and Phil W. Anderson. Theory of spin glasses. *Journal of Physics F: Metal Physics*, 5(5):965, 1975.
- [EA76] Samuel Frederick Edwards and Phil W. Anderson. Theory of spin glasses. ii. *Journal of Physics F: Metal Physics*, 6(10):1927, 1976.
- [Fel08] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications*, volume 2. John Wiley & Sons, 2008.
- [FFS84] Daniel S Fisher, Jürg Fröhlich, and Thomas Spencer. The Ising model in a random magnetic field. *Journal of Statistical Physics*, 34(5-6):863–870, 1984.
- [FKG71] Cees M. Fortuin, Pieter W. Kasteleyn, and Jean Ginibre. Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Communications in Mathematical Physics*, 22(2):89–103, 1971.
- [FN95] Luiz Renato G. Fontes and Eduardo Jordão Neves. Phase uniqueness and correlation length in diluted-field Ising models. *Journal of statistical physics*, 80(5-6):1327–1339, 1995.
- [FP07] Roberto Fernández and Aldo Procacci. Cluster expansion for abstract polymer models. new bounds from an old approach. *Communications in Mathematical Physics*, 274(1):123–140, 2007.
- [FV17] Sacha Friedli and Yvan Velenik. *Equilibrium statistical mechanics of classical lattice systems: A concrete introduction*. 2017.
- [FZ87] Jürg Fröhlich and B. Zegarlinski. The high-temperature phase of long-range spin glasses. *Communications in Mathematical Physics*, 110(1):121–155, 1987.
- [Gab16] Roberto Vila Gabriel. *Representações Gráficas para Sistemas de Spins com presença de Campo Externo*. PhD thesis, Universidade de Brasília, 2016.

- [Geo11] Hans-Otto Georgii. *Gibbs measures and phase transitions*, volume 9. Walter de Gruyter, 2011.
- [GG98] Stefano Ghirlanda and Francesco Guerra. General properties of overlap probability distributions in disordered spin systems. towards parisi ultrametricity. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31:9149–9155, 1998.
- [GHS70] Robert B. Griffiths, Charles A. Hurst, and Seymour Sherman. Concavity of magnetization of an Ising ferromagnet in a positive external field. *Journal of Mathematical Physics*, 11(3):790–795, 1970.
- [GR65] Izrail S. Gradshteyn and Iosif M. Ryzhik. Table of integrals series and products' academic press, new york. 20, 1965.
- [Gri67a] Robert B. Griffiths. Correlations in Ising ferromagnets. i. *Journal of Mathematical Physics*, 8(3):478–483, 1967.
- [Gri67b] Robert B. Griffiths. Correlations in Ising ferromagnets. ii. external magnetic fields. *Journal of Mathematical Physics*, 8(3):484–489, 1967.
- [Gri67c] Robert B. Griffiths. Correlations in Ising ferromagnets. iii. *Communications in Mathematical Physics*, 6(2):121–127, 1967.
- [HPR18] Tyler Helmuth, Will Perkins, and Guus Regts. Algorithmic pirogov-sinai theory. *arXiv preprint arXiv:1806.11548*, 2018.
- [IM75] Yoseph Imry and Shang-keng Ma. Random-field instability of the ordered state of continuous symmetry. *Physical Review Letters*, 35:1399, 1975.
- [Isi25] Ernst Ising. Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 31(1):253–258, 1925.
- [Ito18] Chigak Itoi. Absence of replica symmetry breaking in the transverse and longitudinal random field Ising model. *Journal of Statistical Physics*, 170(4):684–699, Feb 2018.
- [Jes16] Marco Baity Jesi. *Spin Glasses: Criticality and Energy Landscapes*. Springer, 2016.
- [KS68] Douglas G. Kelly and Seymour Sherman. General griffiths' inequalities on correlations in Ising ferromagnets. *Journal of Mathematical Physics*, 9(3):466–484, 1968.
- [Kül01] Christof Külske. Weakly Gibbsian representations for joint measures of quenched lattice spin models. *Probability theory and related fields*, 119(1):1–30, 2001.
- [Kun78] H Kunz. Analyticity and clustering properties of unbounded spin systems. *Communications in Mathematical Physics*, 59(1):53–69, 1978.
- [Lan09] Edmund Landau. *Handbuch der lehre von der verteilung der primzahlen*, volume 1. BG Teubner, 1909.

- [Led01] Michel Ledoux. *The concentration of measure phenomenon*. American Mathematical Society, 2001.
- [LP68] Joel Lebowitz and Oliver Penrose. Analytic and clustering properties of thermodynamic functions and distribution functions for classical lattice and continuum systems. *Communications in Mathematical Physics*, 11(2):99–124, 1968.
- [LR69] Oscar E. Lanford and David Ruelle. Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 13(3):194–215, 1969.
- [LY52] Tsung-Dao Lee and Chen-Ning Yang. Statistical theory of equations of state and phase transitions. ii. lattice gas and Ising model. *Physical Review*, 87(3):410, 1952.
- [May37] Joseph E Mayer. The statistical mechanics of condensing systems. i. *The Journal of chemical physics*, 5(1):67–73, 1937.
- [Med17] Leandro Chiarini Medeiros. A continuidade da transição de fase do modelo de Ising tridimensional. Dissertação de mestrado, Universidade de Brasília, 2017.
- [Nis01] Hidetoshi Nishimori. *Statistical physics of spin glasses and information processing: an introduction*, volume 111. Clarendon Press, 2001.
- [NS98] Charles Newman and Daniel L. Stein. Simplicity of state and overlap structure in finite-volume realistic spin glasses. *Physical Review E*, 57(2):1356, 1998.
- [Øks03] Bernt Øksendal. Stochastic differential equations. In *Stochastic differential equations*, pages 65–84. Springer, 2003.
- [Ons44] Lars Onsager. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review*, 65(3-4):117, 1944.
- [Ott18] Sébastien Ott. Sharp asymptotics for the truncated two-point function of the Ising model with a positive field. *arXiv preprint arXiv:1810.06869*, 2018.
- [OV19] Sébastien Ott and Yvan Velenik. Asymptotics of correlations in the Ising model: a brief survey. *arXiv preprint arXiv:1905.06207*, 2019.
- [Pan13] Dmitry Panchenko. *The Sherrington-Kirkpatrick model*. Springer Science and Business Media, 2013.
- [Par79] Giorgio Parisi. Infinite number of order parameters for spin-glasses. *Physical Review Letters*, 43(23):1754, 1979.
- [Par02] Giorgio Parisi. The physical meaning of replica symmetry breaking. *arXiv preprint cond-mat/0205387*, 2002.

- [Pei36] Rudolf Peierls. On Ising's model of ferromagnetism. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 32, pages 477–481. Cambridge University Press, 1936.
- [Pfi91] Charles-Edouard Pfister. Large deviations and phase separation in the two-dimensional Ising model. *Helvetica Physica Acta*, 64(GR-PF-ARTICLE-1991-004):953–1054, 1991.
- [Pro99] Aldo Procacci. The tree graph identity and the polymer expansion. *World Scientific Publisher*, pages 103–110, 1999.
- [Pro05] Aldo Procacci. Cluster expansion methods in rigorous statistical mechanics. *Preprint (www. mat. ufmg. br/aldo/papers/book. pdf)*, 2005.
- [PS79] Giorgio Parisi and Nicolas Sourlas. Random magnetic fields, supersymmetry, and negative dimensions. *Physical Review Letters*, 43:744–745, 1979.
- [RN91] James R. Rieck and Jerry R. Nedelman. A log-linear model for the birnbaum-saunders distribution. *Technometrics*, 33:51–60, 1991.
- [Rol14] Jamer Roldan. O teorema de aizenman-barsky-fernández e a unicidade da temperatura crítica. Dissertação de mestrado, Universidade de Brasília, 2014.
- [RV18] Jamer Roldan and Roberto Vila. On the absence of replica symmetry breaking for the random field Ising model in the presence of a class of non-gaussian disorders. *arXiv preprint arXiv:1811.07003v2*, 2018.
- [Sau74] Sam C. Saunders. A family of random variables closed under reciprocation. *Journal of the American Statistical Association*, 69:533–539, 1974.
- [SK75] David Sherrington and Scott Kirkpatrick. Solvable model of a spin-glass. *Physical review letters*, 35(26):1792, 1975.
- [SN13] Daniel L. Stein and Charles Newman. *Spin glasses and complexity*, volume 4. Princeton University Press, 2013.
- [Ste72] Charles Stein. A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 2: Probability Theory*. The Regents of the University of California, 1972.
- [Tal96] Michel Talagrand. A new look at independence. *The Annals of probability*, pages 1–34, 1996.
- [Tal03] Michel Talagrand. *Spin glasses: a challenge for mathematicians: cavity and mean field models*, volume 46. Springer Science & Business Media, 2003.
- [Tal06] Michel Talagrand. The Parisi formula. *Annals of mathematics*, pages 221–263, 2006.
- [Tho69] David Thouless. Long-range order in one-dimensional Ising systems. *Physical Review*, 187(2):732, 1969.

- [Uel04] Daniel Ueltschi. Cluster expansions and correlation functions. *Moscow Mathematical Journal*, 4(2):511–522, 2004.
- [vD93] Henrique von Dreifus. *Mecânica Estatística de Modelos Ferromagnéticos*. Impa, 1993.
- [VDKP95] Henrique Von Dreifus, Abel Klein, and J Fernando Perez. Taming griffiths’ singularities: infinite differentiability of quenched correlation functions. *Communications in Mathematical Physics*, 170:21–39, 1995.
- [vEFS93] Aernout C. D. van Enter, Roberto Fernández, and Alan D. Sokal. Regularity properties and pathologies of position-space renormalization-group transformations: scope and limitations of Gibbsian theory. *J. Statist. Phys.*, 72(5-6):879–1167, 1993.
- [vEG83] Aernout C. D. van Enter and Robert B. Griffiths. The order parameter in a spin glass. *Communications in mathematical physics*, 90(3):319–327, 1983.
- [Vel97] Yvan Velenik. *Phase Separation as a Large Deviation Problem*. PhD thesis, 1997.