# O Teorema da Existência de Kolmogorov e o Movimento Browniano

**L. Cioletti** e **L. R. Lucinger**

Setembro de 2025

**Resumo**

O objetivo deste texto é apresentar, de forma didática e autocontida, o Teorema da Existência de Kolmogorov, a construção do Movimento Browniano e várias das propriedades mais importantes de suas trajetórias, tais como continuidade, não diferenciabilidade em nenhum ponto e algumas das propriedades topológicas do conjunto de zeros (quase certamente).

O texto começa apresentando os conceitos básicos relacionados aos espaços produtos e $\sigma$-álgebra produto. Introduzimos o processo de coordenadas em $\mathbb{R}^T$ e o conceito de distribuições finito-dimensionais de um processo estocástico.

Duas versões equivalentes do Teorema da Existência de Kolmogorov são demonstradas: uma versão mais "concreta", que constrói uma medida de probabilidade no espaço produto de forma que o processo de coordenadas possua suas distribuições finito-dimensionais prescritas por uma família consistente de medidas de probabilidade. Apresentamos também uma versão "abstrata", que garante a existência de algum processo sobre um espaço de probabilidade (possivelmente distinto do produto) com as mesmas distribuições finito-dimensionais e mostramos detalhadamente a equivalência entre esta duas versões.

Aqui, como em várias outras referências, a prova do Teorema da Existência de Kolmogorov segue o seguinte roteiro. Primeiro, constrói-se uma pré-medida definida na álgebra dos cilindros finito-dimensionais. Em seguida, prova-se que essa pré-medida é $\sigma$-aditiva nessa álgebra, utilizando a regularidade das medidas de Borel em espaços métricos e argumentos de compacidade. Por fim, aplica-se o Teorema da Extensão de Carathéodory para obter a medida de probabilidade desejada, definida em toda a $\sigma$-álgebra produto.

Analisamos também questões sutis de mensurabilidade no espaço produto. Em particular, comparamos a $\sigma$-álgebra produto com a $\sigma$-álgebra de Borel, gerada pela topologia produto. Provamos que elas coincidem se, e somente se, o conjunto de índices $T$ é enumerável. Como aplicação dessa caracterização, mostramos que o conjunto de funções contínuas $C([0,\infty),\mathbb{R})$ não é mensurável na $\sigma$-álgebra produto de $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$. Uma

consequência desse fato é que o espaço produto nem sempre é o ambiente mais apropriado para tratar certas questões topológicas de interesse sobre processos estocásticos em tempo contínuo.

Em seguida, passamos para a construção do Movimento Browniano. A partir dos axiomas que devem satisfazer o Movimento Browniano construímos uma coleção de medidas gaussianas em $\mathbb{R}^k$ e estendemos esta coleção à uma família consistente, preparando o terreno para aplicação do Teorema de Existência de Kolmogorov. A maior contribuição desta parte do texto é apresentar todos os detalhes da prova das condições de consistência (simetria pela ação de permutações e compatibilidade com as projeções canônicas), o que permite a aplicação do Teorema de Existência de Kolmogorov.

Na sequência, provamos que o processo fornecido pelo Teorema da Existência de Kolmogorov apresenta incrementos independentes e gaussianos, com variância $t - s$. Depois, passamos a estudar as propriedades de continuidade das trajetórias. Neste ponto, procedemos como de costume: trabalhamos com tempos no conjunto dos racionais diádicos positivos e obtemos um controle fino das oscilações locais do processo, usando a desigualdade maximal de Etemadi, combinada com o Lema de Borel–Cantelli e algumas identidades de momentos gaussianos. Feita toda essa análise, mostramos como modificar o processo original para obter uma versão com trajetórias contínuas, mantendo as mesmas distribuições finito-dimensionais.

As últimas seções tratam de propriedades topológicas das trajetórias. Provamos uma propriedade de *autossimilaridade* do Movimento Browniano e sua invariância por inversão temporal, que conecta propriedades locais e globais do processo. Usamos este último resultado para provar que as trajetórias do Movimento Browniano não são diferenciáveis em nenhum ponto (quase certamente). Subsequentemente, apresentamos a noção de tempo de parada, provamos algumas de suas propriedades elementares e mostramos que o Movimento Browniano satisfaz a propriedade forte de Markov. Como consequência desta propriedade estabelecemos alguns fatos importantes, de natureza topológica, do conjunto de zeros das trajetórias do Movimento Browniano.

Na última seção, provamos o Teorema da Continuidade de Kolmogorov–Chentsov. Aplicamos esse resultado para mostrar que as trajetórias do Movimento Browniano são localmente $\alpha$-Hölder contínuas para qualquer $\alpha < 1/2$, preparando o terreno para mostrar que o conjunto de zeros do Movimento Browniano tem dimensão de Hausdorff igual a $1/2$ (quase certamente).

Chamamos a atenção para o Apêndice, que reúne diversas ferramentas fundamentais utilizadas ao longo do texto. Mesmo resultados mais avançados são apresentados de maneira introdutória. Alguns dos mais clássicos, optamos por fornecer apenas o enunciado. Destacamos a discussão as elegantes provas do Teorema da Extensão de Carathéodory e da regularidade das medidas borelianas finitas definidas em um espaço métrico. Boa parte do essencial de Topologia Geral também é apresentado no apêndice.

Por fim, mencionamos que exposição baseia-se na referência [1] e é focada na clareza e na completude. A intenção é que o texto sirva de suporte para uma primeira leitura sobre o Teorema de Existência de Kolmogorov e o Movimento Browniano. Apesar de muito detalhado e de ser de caráter introdutório é esperado que o leitor tenha familiaridade com a Teoria de Probabilidade e que domine o básico de Teoria da Medida e Integração. Este é um material é mais recomendado para o leitor que esteja interessado em compreender todos os detalhes de uma construção matematicamente rigorosa do Movimento Browniano.

CC BY-NC-SA 4.0- Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International

## 1. Espaço Produto

Um dos conceitos centrais que desempenhará papel fundamental nestas notas é o de produto de espaços mensuráveis.

Um espaço produto é definido da seguinte maneira. Dado um conjunto arbitrário de índices $T$, considere para cada $t \in T$ um espaço mensurável $(\Omega_t, \mathscr{F}_t)$. Definimos o espaço produto desta família de espaços mensuráveis como sendo o espaço mensurável

$$(\Omega, \mathscr{F}) \equiv \left( \prod_{t \in T} \Omega_t \ , \ \bigotimes_{t \in T} \mathscr{F}_t \right),$$

onde o conjunto $\Omega$ é o produto cartesiano

$$\prod_{t \in T} \Omega_t \equiv \left\{ f : T \to \bigcup_{t \in T} \Omega_t \ : \ f(t) \in \Omega_t, \ \forall t \in T \right\},$$

isto é, o conjunto de todas as funções que associam a cada índice $t \in T$ um elemento de $\Omega_t$. A $\sigma$-álgebra $\mathscr{F}$ é a chamada $\sigma$-álgebra produto e é definida como sendo a menor $\sigma$-álgebra em $\Omega$, na qual são mensuráveis todas as funções da família $\{\pi_t : t \in T\}$, onde $\pi_t : \Omega \to \Omega_t$ é a função definida por $\pi_t(f) \equiv f(t)$, para toda $f \in \Omega$ e todo $t \in T$. As funções da família $\{\pi_t : t \in T\}$ são frequentemente chamadas de funções coordenadas.

Um cilindro finito-dimensional no espaço produto $(\Omega, \mathscr{F})$ definido acima é um conjunto da forma

$$\pi_{t_1}^{-1}(E_{t_1}) \cap \ldots \cap \pi_{t_n}^{-1}(E_{t_n}) \subset \Omega,$$

onde $t_j \in T$ e $E_{t_j} \in \mathscr{F}_{t_j}$ para cada $j = 1, \ldots n$ e cada $n \in \mathbb{N}$.

**Exemplo 1.** Considere o caso especial em que o conjunto de índices $T = \mathbb{N}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\Omega_n, \mathscr{F}_n) \equiv (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Neste caso, o espaço produto é denotado por

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n \equiv \mathbb{R}^{\mathbb{N}},$$

a um elemento genérico $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que nada mais é que uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ pode ser identificado com uma sequência infinita da forma $x = (x_1, x_2, \ldots)$, onde $x_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando esta identificação para os elementos do espaço produto, as funções coordenadas $\{\pi_n : n \in \mathbb{N}\}$ são dadas por $\pi_n(x) = x_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Os cilindros finito-dimensionais são conjuntos da forma $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e $B_j \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, para cada $j = 1, \ldots, n$.

**Exemplo 2.** Outro exemplo importante de espaço produto que irá aparecer mais à frente no texto é o espaço produto em que tomamos $T \equiv [0, +\infty)$ e para cada índice $t \in [0, +\infty)$ consideramos $(\Omega_t, \mathscr{F}_t) \equiv (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Neste caso, analogamente ao do exemplo anterior, usamos a notação especial

$$\prod_{t \in [0, +\infty)} \Omega_t \equiv \mathbb{R}^{[0, +\infty)}.$$

Aqui, já que a notação de vetor empregada no exemplo anterior não faz tanto sentido, denotamos um elemento genérico deste espaço por

$$\{x(t), t \in [0, +\infty)\} \quad \text{ou} \quad \{x_t\}_{t \in [0, +\infty)}.$$

Neste espaço produto a maneira mais conveniente de nos referirmos a um cilindro finito-dimensional é usando a pré-imagem das funções coordenadas, como no caso geral. Ou seja, fixados $n \in \mathbb{N}$ (que neste caso faz o papel da "dimensão" do cilindro) e uma lista de pontos distintos $t_1, \ldots, t_n \in [0, +\infty)$ e borelianos $E_{t_1}, \ldots, E_{t_n} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$; o cilindro determinado por estas restrições é o subconjunto

$$\pi_{t_1}^{-1}(E_{t_1}) \cap \ldots \cap \pi_{t_n}^{-1}(E_{t_n}) \subset \mathbb{R}^{[0,+\infty)}.$$

Pensando em um elemento genérico do espaço produto $\mathbb{R}^{[0,+\infty)}$ como uma função que leva $[0, +\infty) \ni t \longmapsto x(t)$, podemos descrever o cilindro acima como o conjunto de todas as funções definidas no intervalo $[0, +\infty)$ tais que sua imagem no ponto $t = t_j$ satisfaz a condição $x(t_j) \in E_{t_j}$, para cada $j = 1, \ldots, n$. Intuitivamente, o cilindro descrito acima é o conjunto de todas as funções que obrigatoriamente em cada tempo $t_j$ "passam" pelo conjunto $E_{t_j}$ e é livre para assumir quaisquer valores em $\mathbb{R}$, quando $t \in [0, +\infty) \setminus \{t_1, \ldots, t_n\}$.

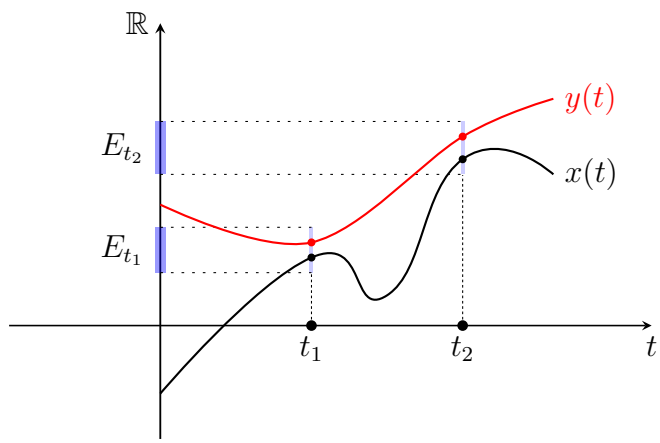



Figura 1: Exemplo de duas funções $x(t)$ e $y(t)$ que pertencem ao cilindro "bidimensional" $\pi_{t_1}^{-1}(E_{t_1}) \cap \pi_{t_2}^{-1}(E_{t_2})$ em $\mathbb{R}^{[0,+\infty)}$.

## 2. Processos Estocásticos

Esta bem como as seções seguintes são baseadas na referência [1]. Boa parte da notação e da ordem da exposição foram mantidos. Algumas poucas mudanças foram motivadas por motivo de clareza e estilo. Embora este texto contenha mais detalhes dos argumentos as ideias principais e as linhas gerais das provas são basicamente as mesmas.

**Definição 3** (Processo Estocástico)**.** Um processo estocástico sobre um espaço mensurável $(\Omega, \mathscr{F})$ é uma coleção $\{X_t : t \in T\}$, onde $T$ é um conjunto de índices não vazio e para cada elemento $t \in T$ do conjunto de índices, $X_t$ é uma função definida sobre $\Omega$ e tomando valores em $\mathbb{R}$ que é $\mathscr{F}$-mensurável. Analogamente, definimos o que é um processo estocástico definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$

**Observação**. No caso de um processo estocástico $\{X_t : t \in T\}$ definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, a presença da medida de probabilidade na estrutura, permite olhar para $X_t$, para cada $t \in T$ fixado, não apenas como uma função real e $\mathscr{F}$-mensurável mas sim como uma variável aleatória.

Como observado em [3], a definição abstrata de processo estocástico, apresentada acima é tão ampla que, por si só, raramente se impõe como uma estrutura matemática útil. Para obter resultados interessantes, costumamos restringir nossa atenção à subclasses em que consideramos hipóteses adicionais como, por exemplo, continuidade das trajetórias amostrais, independência e estacionariedade dos incrementos ou a chamada Propriedade de Markov, conceitos que serão apresentados mais à frente. A introdução de classes mais específicas, não só permite o desenvolvimento de uma teoria mais profunda, como também fornece modelos matemáticos valiosos para o estudo de vários fenômenos do mundo real.

Como aplicação, vamos mostrar como usar o Teorema da Existência de Kolmogorov para introduzir o Movimento Browniano e estudar algumas das propriedades de suas trajetórias, como continuidade. Vamos falar um pouco também sobre o processo de Poisson, protótipo de processos com saltos que modelam contagens de eventos raros. Ambos ilustram como a generalidade da definição se torna, sob hipóteses adequadas, uma fonte de estruturas ricas em propriedades interessantes e úteis nas mais diversas aplicações.

A primeira subclasse de processos estocásticos que vamos considerar, será introduzida a seguir. Para definir esta subclasse restrigimos a escolha do conjunto de índices e também impomos uma condição, bastante natural, de mensurabilidade.

**Definição 4** (Processo Estocástico Mensurável)**.** Sejam $T \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ e $\{X_t : t \in T\}$ um processo estocástico sobre um espaço mensurável $(\Omega, \mathscr{F})$. Dizemos que $\{X_t : t \in T\}$ é um processo estocástico mensurável, sobre $(\Omega, \mathscr{F})$, se a aplicação $\boldsymbol{X} : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ que leva um par $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ define uma aplicação Borel-mensurável, isto é, a imagem inversa de qualquer boreliano $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, por esta aplicação, é um elemento da $\sigma$-álgebra produto $\mathscr{B}(T) \otimes \mathscr{F}$, onde $\mathscr{B}(T)$ é a $\sigma$-álgebra de Borel gerada pela topologia subespaço. Analogamente, definimos o que é um processo estocástico mensurável sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Seja $\{X_t : t \in T\}$ um processo estocástico mensurável sobre $(\Omega, \mathscr{F})$. Para cada $\omega \in \Omega$ fixado, a função de $T$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$t \longmapsto X_t(\omega)$$

é chamada de uma trajetória amostral ou simplesmente trajetória do processo $\{X_t : t \in T\}$.

Segue diretamente da Proposição 41 que cada seção de uma função mensurável definida em um espaço produto, munido da $\sigma$-álgebra produto, é também uma função mensurável, então segue das definições acima que cada trajetória de um processo estocástico mensurável, define uma função mensurável de $T$ em $\mathbb{R}$, isto é, para cada $\omega \in \Omega$ fixado a aplicação $T \ni t \longmapsto X_t(\omega) \in \mathbb{R}$ é uma aplicação mensurável com respeito às $\sigma$-álgebras $\mathscr{B}(T)$ e $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Desta forma a presença da hipótese de mensurabilidade na Definição 4 garante que para cada $\omega \in \Omega$ e cada função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mensurável, está bem-definida a integral (podendo ser $+\infty$) de Lebesgue

$$\int_T |\varphi(X_t(\omega))| \, d\mu(t),$$

onde $\mu$ é uma medida $\sigma$-finita arbitrária definida sobre $\mathscr{B}(T)$.

Além do mais, a processos estocásticos mensuráveis definidos sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, também podemos aplicar o Teorema de Tonelli (Teorema 44) para garantir a validade de igualdades como, por exemplo,

$$\mathbb{E}\left[\int_T |\varphi(X_t(\cdot))| \, d\mu(t)\right] = \int_T \mathbb{E}[|\varphi(X_t)|] \, d\mu(t)$$

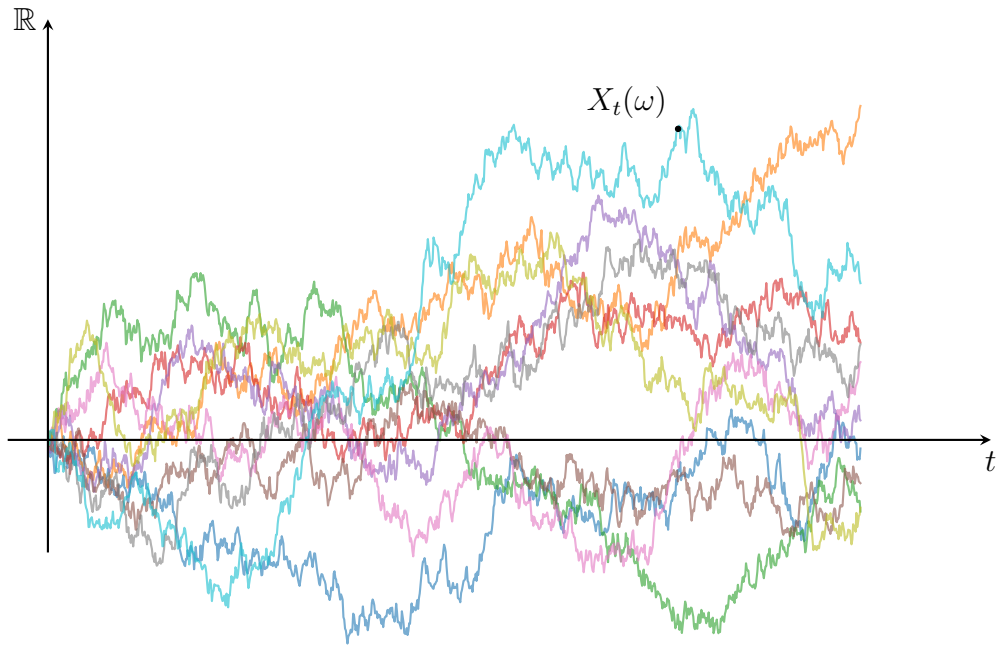



Figura 2: Trajetórias amostrais de um processo estocástico $X_t$

se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Borel-mensurável e $\mu$ uma medida $\sigma$-finita em $\mathscr{B}(T)$.

**Exemplo 5.** Se $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência arbitrária de v.a.'s definidas sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, então podemos pensar nesta sequência como um processo estocástico mensurável sobre $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Tomamos o conjunto de índices como sendo $T = \mathbb{N}$ e neste caso, a $\sigma$-álgebra de Borel $\mathscr{B}(\mathbb{N}) = \mathscr{P}(\mathbb{N})$, que é a coleção das partes de $\mathbb{N}$. A condição de mensurabilidade é simples de ser verificada pois, se $\boldsymbol{X} : \mathbb{N} \times \Omega \to \mathbb{R}$ denota a aplicação definida por $\boldsymbol{X}(n, \omega) \equiv X_n(\omega)$, então para todo boreliano $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ temos

$$\boldsymbol{X}^{-1}(B) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Big[\{n\} \times X_n^{-1}(B)\Big] \in \mathscr{B}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{F},$$

com a convenção que $\{n\} \times \varnothing = \varnothing$.

## 3. Distribuições Finito-Dimensionais e Condições de Consistência

Um processo estocástico $\{X_t : t \in T\}$ definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ é usualmente descrito e estudado por meio das distribuições que ele induz em espaços Euclidianos finito-dimensionais. Estas distribuições são definidas da seguinte maneira. Para cada $k$-úpla $(t_1, \ldots, t_k)$ de elementos distintos de $T$, consideramos o vetor aleatório $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ e a distribuição $\mu_{t_1,\ldots,t_k}$ que este vetor aleatório induz sobre $\mathbb{R}^k$, que é definida por

$$\mu_{t_1,\ldots,t_k}(H) = \mathbb{P}\Big((X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) \in H\Big), \qquad \forall H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k). \tag{1}$$

Nos referimos a família de todas estas medidas de probabilidade da forma $\mu_{t_1,\ldots,t_k}$ como a família das *distribuições finito-dimensionais* do processo estocástico $\{X_t : t \in T\}$.

Como veremos à frente, em geral, a família das distribuições finito-dimensionais de um processo estocástico não determina completamente todas as propriedades deste processo. Por exemplo, é mostrado na referência [1], que o processo de Poisson $\{N_t : t \geq 0\}$, tal como definido na página 317 em (23.5) possui trajetórias amostrais $(t \longmapsto N_t(\omega))$ que são funções do tipo escada. No entanto, na página 327 o autor apresenta um outro processo estocástico caracterizado por (23.28) que possui as mesmas distribuições finito-dimensionais e cujas trajetórias amostrais não são funções escada.

De qualquer forma, o primeiro passo em uma teoria geral consiste em construir processos estocásticos a partir de uma família de distribuições finito-dimensionais, que satisfazem certas condições de consistência. Em seguida, as propriedades adicionais devem ser obtidos por um estudo mais aprofundado de cada classe de processos estocásticos.

Para começar a entender quais seriam as condições de consistência, mencionadas acima, vamos olhar novamente para (1) e considerar o caso em que o conjunto $H \subseteq \mathbb{R}^k$ é dado por um produto cartesiano da forma $H = H_1 \times \cdots \times H_k$, onde cada $H_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Vamos considerar também uma permutação $\pi$ do conjunto $\{1, 2, \ldots, k\}$. É claro que os eventos

$$\Big\{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) \in H_1 \times \cdots \times H_k\Big\} \quad \text{e} \quad \Big\{(X_{t_{\pi(1)}}, \ldots, X_{t_{\pi(k)}}) \in H_{\pi(1)} \times \cdots \times H_{\pi(k)}\Big\}$$

coincidem. Logo segue deste fato e de (1) que as seguintes igualdades devem ser válidas

$$\begin{aligned}
\mu_{t_1,\ldots,t_k}(H_1 \times \cdots \times H_k) &= \mathbb{P}\Big((X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) \in H_1 \times \cdots \times H_k\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big((X_{t_{\pi(1)}}, \ldots, X_{t_{\pi(k)}}) \in H_{\pi(1)} \times \cdots \times H_{\pi(k)}\Big) \\
&= \mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(k)}}(H_{\pi(1)} \times \cdots \times H_{\pi(k)}). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Por exemplo, a condição acima é satisfeita no caso em que $\mu_{s,t} = \nu \times \nu = \mu_{t,s}$, onde $\nu$ é uma medida de probabilidade sobre $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. De fato, para qualquer $H = A \times B$, onde $A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ temos

$$\begin{aligned}
\mu_{s,t}(A \times B) &= \nu \times \nu(A \times B) \\
&= \nu(A)\nu(B) \\
&= \nu(B)\nu(A) \\
&= \nu \times \nu(B \times A) \\
&= \mu_{t,s}(B \times A).
\end{aligned}$$

A segunda condição de consistência é dada por

$$\mu_{t_1,\ldots,t_{k-1},t_k}(H_1 \times \cdots \times H_{k-1} \times \mathbb{R}) = \mu_{t_1,\ldots,t_{k-1}}(H_1 \times \cdots \times H_{k-1}). \qquad (3)$$

A naturalidade desta condição segue do fato dos seguintes eventos coincidirem

$$\Big\{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_{k-1}}) \in H_1 \times \cdots \times H_{k-1}\Big\} = \Big\{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_{k-1}}, X_{t_k}) \in H_1 \times \cdots \times H_{k-1} \times \mathbb{R}\Big\}.$$

Observe que as medidas da forma $\mu_{t_1,\ldots,t_k}$ definidas a partir de um processo $\{X_t : t \in T\}$ por meio de (1) necessariamente satisfazem as condições de consistência (2) e (3). Como veremos à frente o *Teorema da Existência de Kolmogorov* afirma, reciprocamente, que se uma família de medidas satisfaz estas duas condições de consistência, então existe algum processo estocástico $\{X_t : t \in T\}$ definido sobre algum espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ que possui essa família de medidas como sua família de distribuições finito-dimensionais.

A demonstração do Teorema da Existência de Kolmogorov é construtiva e os argumentos envolvidos nesta construção são bastante elaborados, mas se tornam um pouco mais claros quando combinamos as condições de consistência (2) e (3) em uma única condição que será formulada a seguir.

Para cada permutação $\pi$ do conjunto de índices $\{1, \ldots, k\}$, defina $\varphi_\pi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ por

$$\varphi_\pi(x_1, \ldots, x_k) = (x_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, x_{\pi^{-1}(k)}). \tag{4}$$

A aplicação $\varphi_\pi$ realiza a permutação $\pi^{-1}$ nas coordenadas do vetor $(x_1, \ldots, x_k)$ (por exemplo, se $\pi(3) = 1$, então $\pi^{-1}(1) = 3$ e neste caso, $\varphi_\pi$ envia a coordenada $x_3$ para a primeira posição do novo vetor).

Observe que $\varphi_\pi$ define uma bijeção linear de $\mathbb{R}^k$ para $\mathbb{R}^k$ cuja inversa é dada por $\varphi_{\pi^{-1}}$. Desta forma temos que $\varphi_\pi \circ \varphi_{\pi^{-1}}(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_k)$. Portanto

$$\varphi_{\pi^{-1}}(x_1, \ldots, x_k) = \varphi_\pi^{-1}(x_1, \ldots, x_k) \quad \Longrightarrow \quad \varphi_\pi^{-1}(x_1, \ldots, x_k) = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(k)}). \tag{5}$$

Consequentemente,

$$\varphi_\pi^{-1}(H_1 \times \cdots \times H_k) = H_{\pi(1)} \times \cdots \times H_{\pi(k)}. \tag{6}$$

Portanto, se a condição de consistência (2) é satisfeita então

$$\begin{aligned} \mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(k)}} \circ \varphi_\pi^{-1}(H_1 \times \cdots \times H_k) &= \mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(k)}}(H_{\pi(1)} \times \cdots \times H_{\pi(k)}) \\ &= \mu_{t_1,\ldots,t_k}(H_1 \times \cdots \times H_k), \end{aligned}$$

para quaisquer $H_1, \ldots, H_k \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{N}$. Já que para cada $k \in \mathbb{N}$, fixado, a condição acima deve ser válida para todo retângulo mensurável em $\mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$, segue do Teorema da Extensão de Carathéodory que

$$\mu_{t_1,\ldots,t_k} = \mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(k)}} \circ \varphi_\pi^{-1}. \tag{7}$$

É claro que se a condição (7) é satisfeita então a condição (2) também será satisfeita. Desta forma podemos concluir que as condições (2) e (7) são equivalentes.

De forma semelhante, se $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k-1}$ denota a projeção $\varphi(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_{k-1})$, então podemos mostrar que a segunda condição de consistência (3) é equivalente à seguinte condição

$$\mu_{t_1,\ldots,t_{k-1}} = \mu_{t_1,\ldots,t_k} \circ \varphi^{-1}. \tag{8}$$

De fato, se a condição (3) é satisfeita, então para todo $H_1 \times \cdots \times H_{k-1} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{k-1})$, temos

$$\begin{aligned} \mu_{t_1,\ldots,t_{k-1}}(H_1 \times \cdots \times H_{k-1}) &= \mu_{t_1,\ldots,t_{k-1},t_k}(H_1 \times \cdots \times H_{k-1} \times \mathbb{R}) \\ &= \mu_{t_1,\ldots,t_{k-1},t_k}\Big(\varphi^{-1}(H_1 \times \cdots \times H_{k-1})\Big) \\ &= \mu_{t_1,\ldots,t_k} \circ \varphi^{-1}(H_1 \times \cdots \times H_{k-1}). \end{aligned}$$

Novamente, podemos aplicar o Teorema da Extensão de Carathéodory para garantir que $\mu_{t_1,\ldots,t_{k-1}} = \mu_{t_1,\ldots,t_k} \circ \varphi^{-1}$ em toda $\sigma$-álgebra $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{k-1})$.

Reciprocamente, é claro pela definição da projeção $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k-1}$, que a condição (8) implica a condição (3) e assim encerramos a prova de que estas condições são equivalentes.

Como as condições (7) e (8) são baseadas, de certa maneira, em alguns operadores lineares é natural suspeitar que elas possam ser reformuladas, considerando de alguma forma uma composição apropriada destes operadores lineares. No que segue, mostramos como isto pode ser feito de forma que estas duas condições possam ser reduzidas a uma única condição.

Sejam $k, m \in \mathbb{N}$ com $k \leqslant m$ e $\pi$ uma permutação do conjunto de índices $\{1, \ldots, m\}$. Suponha que $(t_1, \ldots, t_m)$ seja uma $m$-úpla de elementos distintos de $T$ e considere a $k$-úpla $(t_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, t_{\pi^{-1}(k)})$.

Para obter a condição unificada, mencionada acima, fixamos $k, m \in \mathbb{N}$ com $1 \leqslant k \leqslant m$, uma permutação $\pi$ do conjunto de índices $\{1, \ldots, m\}$ e consideramos a seguinte aplicação $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ definida por

$$\psi(x_1, \ldots, x_m) = (x_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, x_{\pi^{-1}(k)}). \tag{9}$$

Observe que a aplicação $\psi$ age inicialmente, por meio de $\pi$, permutando as coordenadas do vetor $(x_1, \ldots, x_m)$ e em seguida, projeta o vetor resultante, sobre suas $k$ primeiras componentes. Equivalentemente, se $P_{m,k} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ denota a projeção

$$P_{m,k}(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_k),$$

então $\psi = P_{m,k} \circ \varphi_\pi$, onde $\varphi_\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é a aplicação que permuta as coordenadas como em (4). Desta forma se $H_1 \times \cdots \times H_k$ é um retângulo mensurável em $\mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$, então

$$\begin{aligned}
\psi^{-1}(H_1 \times \cdots \times H_k) &= \varphi_\pi^{-1} \circ P_{m,k}^{-1}(H_1 \times \cdots \times H_k) \\
&= \varphi_\pi^{-1}(H_1 \times \cdots \times H_k \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}) \\
&= \varphi_\pi^{-1}(B_1 \times \cdots \times B_k \times B_{k+1} \times \cdots \times B_m) \\
&= B_{\pi(1)} \times \cdots \times B_{\pi(k)} \times B_{\pi(k+1)} \times \cdots \times B_{\pi(m)},
\end{aligned} \tag{10}$$

onde os conjuntos $B_j$'s na terceira igualdade acima são definidos por $B_1 \equiv H_1, \ldots B_k \equiv H_k$ e $B_{k+1} \equiv \mathbb{R}, \ldots, B_m \equiv \mathbb{R}$ e a quarta igualdade é obtida pela aplicação da fórmula (6).

**Proposição 6.** Sejam $T$ um conjunto arbitrário de índices, $1 \leqslant k \leqslant m \leqslant \mathrm{Card}(T)$ números naturais. Fixe uma $m$-úpla $(t_1, \ldots, t_m)$ de elementos distintos de $T$ e seja $\pi$ uma permutação de $\{1, \ldots, m\}$. Defina $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ como em (9). As condições de consistência (7) e (8) são satisfeitas se, e somente se,

$$\mu_{t_1,\ldots,t_k} = \mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(m)}} \circ \psi^{-1}. \tag{11}$$

**Prova**. Primeiro vamos mostrar que se as condições (7) e (8) são satisfeitas, então vale a condição de consistência (11). Fixe uma $m$-úpla $(t_1, \ldots, t_m)$ arbitrária de elementos distintos do conjunto de índices $T$ e seja $H_1 \times \cdots \times H_k \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$. Aplicando iterativamente a condição de consistência (8) $(m-k)$ vezes, obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
\mu_{t_1,\ldots,t_k}(H_1 \times \cdots \times H_k) &= \mu_{t_1,\ldots,t_k,t_{k+1}}(H_1 \times \cdots \times H_k \times \mathbb{R}) \\
&\vdots \\
&= \mu_{t_1,\ldots,t_k,t_{k+1},\ldots,t_m}(H_1 \times \cdots \times H_k \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}) \\
&= \mu_{t_1,\ldots,t_k,t_{k+1},\ldots,t_m}(B_1 \times \cdots \times B_k \times B_{k+1} \times \cdots \times B_m),
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a notação $B_1 \equiv H_1, \ldots, B_k \equiv H_k$ e $B_{k+1} \equiv \mathbb{R}, \ldots, B_m \equiv \mathbb{R}$. Agora, dada uma permutação $\pi$ do conjunto de índices $\{1, \ldots, m\}$, considere a aplicação $\varphi_\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definida por $\varphi_\pi(x_1, \ldots, x_m) = (x_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, x_{\pi^{-1}(m)})$. Pelas igualdades acima, condição de consistência (7) e igualdades (6) e (10) podemos afirmar que

$$\begin{aligned}
\mu_{t_1,\ldots,t_k}(H_1 \times \cdots \times H_k) &= \mu_{t_1,\ldots,t_k,t_{k+1},\ldots,t_m}\Big(B_1 \times \cdots \times B_k \times B_{k+1} \times \cdots \times B_m\Big) \\
\text{condição de consistência (7)} \quad &= \mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(m)}} \circ \varphi_\pi^{-1}\Big(B_1 \times \cdots \times B_k \times B_{k+1} \times \cdots \times B_m\Big) \\
\text{identidade (6)} \quad &= \mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(m)}}\Big(B_{\pi(1)} \times \cdots \times B_{\pi(k)} \times B_{\pi(k+1)} \times \cdots \times B_{\pi(m)}\Big) \\
\text{identidade (10)} \quad &= \mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(m)}} \circ \psi^{-1}\Big(H_1 \times \cdots \times H_k\Big).
\end{aligned}$$

Como anteriormente, já que a igualdade acima é válida para todo retângulo mensurável de $\mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$, a validade da igualdade em (11) segue imediatamente do Teorema de Extensão de Carathéodory.

Reciprocamente, suponha que condição (11) é satisfeita. Tomando $k = m$ e qualquer permutação $\pi$ do conjunto de índices $\{1, \ldots, k\}$ temos que a função $\psi$ se reduz a função $\varphi_\pi$ como definida em (4). Portanto, segue desta observação e da identidade (11) que

$$\mu_{t_1,\ldots,t_k} = \mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(k)}} \circ \psi^{-1} = \mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(k)}} \circ \varphi_\pi^{-1}$$

que é exatamente a condição de consistência (7).

Para obter a condição de consistência (8) a partir de (11), vamos fazer as seguintes escolhas: substituímos $k$ por $k-1$, tomamos $m = k$ e $\pi$ como sendo a permutação identidade no conjunto de índices $\{1, \ldots, k\}$. Neste caso, temos que a função $\psi$ coincide com a função $\varphi$, onde $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k-1}$ é a projeção definida por $\varphi(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_{k-1})$ e portanto

$$\mu_{t_1,\ldots,t_{k-1}} = \mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(k)}} \circ \psi^{-1} = \mu_{t_1,\ldots,t_k} \circ \varphi^{-1}$$

que é exatamente a condição de consistência (8), o que encerra a prova da proposição. ■

## 4. O Processo Canônico

Na Seção 1 introduzimos o conceito de espaço produto e em seguida, na Seção 2 definimos o que é um processo estocástico. Agora, vamos mostrar como usar a ideia de espaço produto para definir o chamado processo canônico. Por questão de simplicidade, vamos assumir daqui para frente que o conjunto de índices $T$ é um boreliano de $\mathbb{R}$ e que este conjunto de índices está munido da $\sigma$-álgebra de Borel gerada pelos abertos da topologia induzida de $\mathbb{R}$ em $T$, notação $\mathscr{B}(T)$.

Considere o espaço mensurável $(\Omega, \mathscr{F})$, onde $\Omega$ é o espaço produto $\mathbb{R}^T$ e a $\sigma$-álgebra $\mathscr{F}$ é a $\sigma$-álgebra produto, como definidos na Seção 1. Mantendo a notação da Seção 1, para cada $t \in T$, denotamos por $\pi_t : \Omega \to \mathbb{R}$ a função que leva $\omega \longmapsto \pi_t(\omega) \equiv \omega(t)$. Vamos chamar de processo canônico em $\mathbb{R}^T$ o processo estocástico $\{Z_t : t \in T\}$ definido sobre o espaço mensurável $(\Omega, \mathscr{F})$ e dado por $Z_t(\omega) \equiv \omega(t)$.

Embora pareça estranho introduzir uma nova notação para a função coordenada $\pi_t$ isto é feito porque, mais adiante além da estrutura mensurável vamos considerar também que o espaço produto $\mathbb{R}^T$ estará munido de uma medida de probabilidade. Neste contexto, as funções coordenadas $\pi_t$'s podem ser, naturalmente, vistas como variáveis aleatórias. Isto motiva o uso da notação $Z_t$, já que é mais natural associar à estas, conceitos da Teoria de Probabilidade como, função distribuição, esperança, função característica e outros.

Assim como $\mathbb{R}^k$ pode ser considerado o produto cartesiano de $k$ cópias da reta real, $\mathbb{R}^T$ pode ser, intuitivamente, considerado como um *espaço produto* consistindo de infinitas cópias da reta real, uma para cada $t \in T$.

Observamos também que a $\sigma$-álgebra produto em $\mathbb{R}^T$, como definida na Seção 1, em alguns casos consiste na generalização, natural, da ideia de $\sigma$-álgebra de Borel em dimensão $k$. Mais precisamente, considere o espaço produto, no sentido topológico, $(\mathbb{R}^T, \tau(\mathbb{R}^T))$, onde $\tau(\mathbb{R}^T)$ é a topologia produto, isto é, a topologia mais grossa, onde cada um dos elementos da família de projeções $\{\pi_t : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R} \,:\, t \in T\}$ é uma função contínua. Esta topologia é a menor topologia contendo todos os conjuntos da forma $\pi_t^{-1}(A)$, onde $t \in T$ e $A$ é um aberto de $\tau(\mathbb{R})$ (a topologia usual da reta). Vamos ver mais à frente (Teorema 14) que a $\sigma$-álgebra produto é sempre uma sub-$\sigma$-álgebra da $\sigma$-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^T$, isto é, $\mathscr{F} \subseteq \sigma(\tau(\mathbb{R}^T)) \equiv \mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$. Além do mais, estas duas $\sigma$-álgebras coincidem se, e somente se, o conjunto de índices $T$ é enumerável!

Por questão de conveniência e ou clareza, no que segue, um cilindro finito-dimensional em $\mathbb{R}^T$ poderá, dependendo da situação, ser representado por qualquer uma das seguintes notações:

- $\pi_{t_1}^{-1}(E_{t_1}) \cap \ldots \cap \pi_{t_k}^{-1}(E_{t_k})$
- $\{(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_k}) \in E_{t_1} \times \cdots \times E_{t_k}\}$
- $\{\omega \in \mathbb{R}^T : (Z_{t_1}(\omega), \ldots, Z_{t_k}(\omega)) \in E_{t_1} \times \cdots \times E_{t_k}\}$
- $\{\omega \in \mathbb{R}^T : (\omega_{t_1}, \ldots, \omega_{t_k}) \in E_{t_1} \times \cdots \times E_{t_k}\}$
- $\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in E_{t_1} \times \cdots \times E_{t_k}\}$,

onde $t_1, \ldots, t_k \in T$ são elementos distintos e cada $E_j \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. Também vamos usar a notação $\sigma\Big(\{Z_t : t \in T\}\Big)$ para nos referirmos a $\sigma$-álgebra produto $\mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$.

**Proposição 7.** Fixe $k \in \mathbb{N}$, com $1 \leqslant k \leqslant \mathrm{Card}(T)$ e uma lista $t_1, \ldots, t_k \in T$ de elementos distintos de $T$. Dado $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ (não necessariamente um retângulo mensurável) temos que

$$\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H\} \in \mathscr{F}.$$

**Prova**. Fixe $k \in \mathbb{N}$, com $1 \leqslant k \leqslant \mathrm{Card}(T)$ e uma lista $t_1, \ldots, t_k \in T$ de elementos distintos de $T$. Considere a coleção $\mathscr{C}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^k$ dada por

$$\mathscr{C} \equiv \Big\{H \subseteq \mathbb{R}^k : \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H\} \in \mathscr{F}\Big\}.$$

A ideia da prova é mostrar que $\mathscr{C}$ é uma $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^k$ contendo a $\sigma$-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^k$.

Primeiro observamos que para qualquer retângulo mensurável do espaço euclidiano $\mathbb{R}^k$, da forma $H_1 \times \cdots \times H_k$ temos, da definição da $\sigma$-álgebra produto em $\mathbb{R}^T$, que o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H_1 \times \cdots \times H_k\} \in \mathscr{F}$. Este fato garante que a coleção $\mathscr{C}$ é não vazia.

Próximo passo é verificar que a coleção $\mathscr{C}$ é uma coleção fechada por complementação. Seja $H \in \mathscr{C}$ arbitrário. Como $\mathscr{F}$ é uma $\sigma$-álgebra, então podemos afirmar que o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H\}^c \in \mathscr{F}$. Mas já que é válida a seguinte igualdade

$$\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H^c\} = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H\}^c \in \mathscr{F}$$

podemos concluir que a coleção $\mathscr{C}$ é fechada para complementação.

Agora vamos mostrar que $\mathbb{R}^k \in \mathscr{C}$ e que $\varnothing \in \mathscr{C}$. De fato, para verificar que $\mathbb{R}^k \in \mathscr{C}$ basta notar que $\mathbb{R}^T = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}\} \in \mathscr{F}$. Como mostramos que $\mathscr{C}$ é fechada por complementação, segue que $\varnothing \in \mathscr{C}$.

Para encerrar a prova de que a coleção $\mathscr{C}$ é uma $\sigma$-álgebra, temos que mostrar que se $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência arbitrária de elementos da coleção $\mathscr{C}$, então $\cup_{n\in\mathbb{N}} H_n \in \mathscr{C}$. Para isto basta observar que é válida a seguinte igualdade

$$\left\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H_n\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^T).$$

Para finalizar a prova, observamos que $\mathscr{C}$ é uma $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^k$ tal que $\mathscr{C}$ contém a coleção $\mathcal{R}_k$ de todos os retângulos mensuráveis de $\mathbb{R}^k$. Portanto, como a $\sigma$-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^k$ coincide com a $\sigma$-álgebra gerada pelos retângulos mensuráveis de $\mathbb{R}^k$ (Proposição 42), segue da definição de $\sigma$-álgebra gerada que $\mathscr{B}(\mathbb{R}^k) \equiv \sigma(\mathcal{R}_k) \subseteq \mathscr{C}$. O que encerra a prova de que para todo $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ temos $\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H\} \in \mathscr{F}$. ■

**Proposição 8.** A coleção $\mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$ de subconjuntos do espaço produto $\mathbb{R}^T$ definida por

$$\mathscr{A}(\mathbb{R}^T) \equiv \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{t_1,\ldots,t_k\in T \\ t_i\neq t_j}} \bigcup_{H\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^k)} \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H\}$$

forma uma álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^T$, isto é, $\mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$ é uma coleção fechada para uniões finitas e complementação. Além do mais,

- se $\mathrm{Card}(T) < +\infty \implies \mathscr{A}(\mathbb{R}^T) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$.
- se $\mathrm{Card}(T) = +\infty \implies \mathscr{A}(\mathbb{R}^T) \subsetneq \mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$

e no segundo caso acima temos que $\mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$ não é uma $\sigma$-álgebra.

**Prova**. Vamos mostrar inicialmente que $\mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$ é fechado por complementação. De fato, seja $A \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$, então existem $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_k \in T$ pontos distintos e $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ tais que $A = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H\}$. Como $A^c = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H^c\}$, temos diretamente da definição de $\mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$ que $A^c \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$. O que mostra que a coleção $\mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$ é fechada por complementação.

Para mostrar que esta coleção é fechada por uniões finitas, é suficiente mostrar que se $A_1, A_2 \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$, então $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$.

Se $A_1 \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$, então existem $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_k \in T$ distintos e $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ tais que $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H\}$. Similarmente, existem $m \in \mathbb{N}$, $s_1, \ldots, s_m \in T$ e $K \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ tais que $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{s_1}, \ldots, x_{s_m}) \in K\}$. Considere o conjunto de índices $\{t_1, \ldots, t_k\} \cup \{s_1, \ldots, s_m\} = \{r_1, \ldots, r_p\} \subset T$. Note que o número de elementos neste novo conjunto satisfaz $\max\{k, m\} \leqslant p \leqslant k + m$.

A ideia será reescrever $A_1$ e $A_2$ de forma que ambos possam ser vistos como imagem inversa de certas aplicações lineares definidas em $\mathbb{R}^T$ e tomando valores em $\mathbb{R}^p$. Para isto, vamos começar trabalhando no conjunto $A_1$. Seja $\pi$ uma permutação arbitrária de $\{1, \ldots, p\}$, satisfazendo $(\pi^{-1}(r_1), \ldots, \pi^{-1}(r_k)) = (t_1, \ldots, t_k)$. Considere a função $\psi_t : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ definida por $\psi_t(x_1, \ldots, x_p) = (x_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, x_{\pi^{-1}(m)})$. Afirmamos que

$$\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H\} = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{r_1}, \ldots, x_{r_p}) \in \psi_t^{-1}(H)\}. \tag{12}$$

Para provar esta afirmação, vamos mostrar primeiro que o conjunto da direita está contido no da esquerda. Por questão de conveniência vamos olhar para $\psi_t$ como a seguinte composição de funções $\psi_t = P_{p,k} \circ \varphi_\pi$, onde $P_{p,k}$ é a projeção natural de $\mathbb{R}^p$ para $\mathbb{R}^k$ e $\varphi_\pi(x_1, \ldots, x_p) = (x_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, x_{\pi^{-1}(p)})$. Primeiro observamos que se $x \in \mathbb{R}^T$ satisfaz $(x_{r_1}, \ldots, x_{r_p}) \in \psi_t^{-1}(H)$, então $\psi_t(x_{r_1}, \ldots, x_{r_p}) \in H$, ou seja, $P_{p,m} \circ \varphi_\pi(x_{r_1}, \ldots, x_{r_p}) \in H$. Desta última relação, da definição da função $\varphi_\pi$ e lembrando que $(\pi^{-1}(r_1), \ldots, \pi^{-1}(r_k)) = (t_1, \ldots, t_k)$ temos $P_{p,m}\left(x_{\pi^{-1}(r_1)}, \ldots, x_{\pi^{-1}(r_p)}\right) \in H$, logo $(x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H$, mostrando que $\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{r_1}, \ldots, x_{r_p}) \in \psi_t^{-1}(H)\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H\}$.

Reciprocamente, suponha que $x \in \mathbb{R}^T$ satisfaz a condição $(x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H$. Então $\psi_t^{-1}\{(x_{t_1}, \ldots, x_{t_k})\} \in \psi_t^{-1}(H)$. Lembrando que $\psi_t^{-1} = \varphi_\pi^{-1} \circ P_{p,k}^{-1}$ temos

$$\varphi_\pi^{-1} \circ P_{p,k}^{-1}(\{(x_{t_1}, \ldots, x_{t_k})\}) \in \psi_t^{-1}(H)$$

$$\Downarrow$$

$$\bigcup_{\left(x_{\pi^{-1}(r_{k+1})}, \ \ldots \ , x_{\pi^{-1}(r_p)}\right) \in \mathbb{R}^{p-k}} \varphi_\pi^{-1}\Big((x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}, x_{\pi^{-1}(r_{k+1})}, \ldots, x_{\pi^{-1}(r_p)})\Big) \in \psi_t^{-1}(H).$$

Lembrando novamente que $(\pi^{-1}(r_1), \ldots, \pi^{-1}(r_k)) = (t_1, \ldots, t_k)$, da formula da inversa estabelecida em (5), isto é, $\varphi_\pi^{-1}(x_1, \ldots, x_p) = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(p)})$ e usando a relação estabelecida acima temos: para qualquer $x \in \mathbb{R}^T$ satisfazendo $(x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H$

$$(x_{r_1}, \ldots, x_{r_p}) = \varphi_\pi^{-1}\Big((x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}, x_{\pi^{-1}(r_{k+1})}, \ldots, x_{\pi^{-1}(r_p)})\Big) \in \psi_t^{-1}(H).$$

Logo, $\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{r_1}, \ldots, x_{r_p}) \in \psi_t^{-1}(H)\}$ e assim encerramos a prova de (12).

Resumindo, mostramos que

$$A_1 \equiv \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H\} = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{r_1}, \ldots, x_{r_p}) \in \psi_t^{-1}(H)\},$$

onde $\psi_t = P_{p,k} \circ \varphi_\pi$, e $\pi$ é uma permutação arbitrária do conjunto de índices $\{1, \ldots, p\}$ satisfazendo $(\pi^{-1}(r_1), \ldots, \pi^{-1}(r_k)) = (t_1, \ldots, t_k)$.

Vamos proceder de maneira análoga para $A_2$. Lembrando que

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{s_1}, \ldots, x_{s_m}) \in K\},$$

para obter uma representação de $A_2$ semelhante a descrita acima, consideramos a função $\psi_s : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^s$ dada por $\psi_s = P_{p,m} \circ \varphi_\lambda$, onde $\lambda$ denota uma permutação de arbitrária do conjunto de índices $\{1, \ldots, p\}$ tal que $(\lambda^{-1}(r_1), \ldots, \lambda^{-1}(r_m)) = (s_1, \ldots, s_m)$. Procedendo como no caso do conjunto $A_1$ podemos verificar que

$$A_2 \equiv \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{s_1}, \ldots, x_{s_m}) \in K\} = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{r_1}, \ldots, x_{r_p}) \in \psi_s^{-1}(K)\}.$$

Portanto, segue das representações obtidas acima que

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 &= \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{r_1}, \ldots, x_{r_p}) \in \psi_t^{-1}(H)\} \cup \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{r_1}, \ldots, x_{r_p}) \in \psi_s^{-1}(K)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{r_1}, \ldots, x_{r_p}) \in \psi_t^{-1}(H) \cup \psi_s^{-1}(K)\} \end{aligned}$$

o que mostra que $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$ e encerra a prova de que esta coleção é uma álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^T$.

Vamos supor que $\mathrm{Card}(T) < +\infty$. Sejam $m = \mathrm{Card}(T)$ e $\{s_1, \ldots, s_m\}$ uma enumeração arbitrária do conjunto $T$. Se $A \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$ é um elemento arbitrário desta álgebra, então existem um inteiro $k$ satisfazendo $1 \leqslant k \leqslant m$, índices $t_1, \ldots, t_k \in T$ distintos e $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ tais que $A = \{(x_{t_1}, \ldots, x_{x_{t_k}}) \in H\}$. Por outro lado, se $\pi$ é uma permutação do conjunto de índices $\{1, \ldots, m\}$ tal que $(t_1, \ldots, t_k) = (s_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, s_{\pi^{-1}(k)})$ e $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ é a função definida por $\psi(x_{s_1}, \ldots, x_{s_m}) = (x_{s_{\pi^{-1}(1)}}, \ldots, x_{s_{\pi^{-1}(k)}})$, então $A = \{(x_{s_1}, \ldots, x_{s_m}) \in \psi^{-1}(H)\}$. Portanto

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(\mathbb{R}^T) &\equiv \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{\substack{t_1,\ldots,t_k \in T \\ t_i \neq t_j}} \bigcup_{H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)} \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H\} \\ &= \bigcup_{H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)} \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{s_1}, \ldots, x_{s_m}) \in H\} \end{aligned}$$

mostrando que no caso em que $\mathrm{Card}(T) = m < +\infty$, temos que $\mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$ é uma $\sigma$-álgebra.

Se $\mathrm{Card}(T) = \infty$, então $T$ possui pelo menos um subconjunto $S$ que é infinito e enumerável. Considere uma enumeração arbitrária de $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $H_n \equiv [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $\{x_{s_n} \in H_n\} \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$, mas por outro lado a interseção

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x_{s_n} \in H_n\} = [0, 1]^S$$

não pode ser um elemento da álgebra $\mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$, uma vez que este conjunto envolve um número infinito de restrições. ■

## 5. O Teorema da Existência de Kolmogorov

O Teorema da Existência de Kolmogorov pode ser enunciado de duas maneiras equivalentes. Na primeira versão, uma medida de probabilidade é construída em um espaço produto a partir de uma família consistente de medidas e mostramos que o processo canônico (de coordenadas) têm suas distribuições finitos-dimensionais dadas pelos elementos desta família consistente de medidas. Na segunda versão, menciona-se apenas a existência de algum processo estocástico definido sobre algum espaço abstrato de probabilidade $(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P})$ cujas as distribuições finito-dimensionais são dadas pela família consistente de medidas.

É claro que para muitas finalidades o espaço de probabilidade subjacente é irrelevante, o que de fato importa são as distribuições conjuntas das variáveis do processo estocástico e por isto os dois enunciados são igualmente úteis. De qualquer forma, antes de passar para a prova do teorema propriamente dita, vamos mostrar que o Teorema 9 e o Teorema 10 fornecem duas maneiras (essencialmente equivalentes) de se construir um processo estocástico a partir de uma família consistente de medidas.

**Teorema 9.** Se $\{\mu_{t_1,\ldots,t_k}\}$ é uma família consistente de medidas, isto é, satisfazendo as condições de consistência

$$\mu_{t_1,\ldots,t_k}(H_1 \times \cdots \times H_k) \;=\; \mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(k)}}(H_{\pi(1)} \times \cdots \times H_{\pi(k)}) \tag{C1}$$

$$\mu_{t_1,\ldots,t_{k-1}}(H_1 \times \cdots \times H_{k-1}) \;=\; \mu_{t_1,\ldots,t_{k-1},t_k}(H_1 \times \cdots \times H_{k-1} \times \mathbb{R}). \tag{C2}$$

então existe uma medida de probabilidade $\mathbb{P}$ sobre o espaço produto $(\mathbb{R}^T, \mathscr{F})$ tal que o processo de coordenadas $\{Z_t : t \in T\}$ tem a família $\mu_{t_1,\ldots,t_k}$ como sua família de distribuições finito-dimensionais.

**Teorema 10.** Se $\{\mu_{t_1,\ldots,t_k}\}$ é uma família de medidas de probabilidade satisfazendo as condições de consistência (C1) e (C2) então existe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P})$ e um processo estocástico $\{X_t : t \in T\}$ tendo $\{\mu_{t_1,\ldots,t_k}\}$ como sua família de distribuições finito-dimensionais.

É claro que se assumimos como verdadeira a tese do Teorema 9, então obtemos imediatamente a tese do Teorema 10.

Reciprocamente, assuma que seja verdadeira a tese do Teorema 10. Então podemos afirmar que existe algum processo estocástico $\{X_t : t \in T\}$, sobre algum espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P})$, tendo a família consistente $\{\mu_{t_1,\ldots,t_k}\}$ como a família de suas distribuições finito-dimensionais.

Afirmamos que a relação

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \xi(\omega) \equiv \bigcap_{t \in T} Z_t^{-1}(\{X_t(\omega)\}) \tag{13}$$

define uma função $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^T$ e além do mais, esta função satisfaz a seguinte equação funcional

$$Z_t\Big(\xi(\omega)\Big) = X_t(\omega), \qquad t \in T. \tag{14}$$

De fato, se $x, y \in \mathbb{R}^T$ pertencem à interseção em (13), então para cada $t \in T$ temos que $x, y \in Z_t^{-1}(X_t(\omega))$, logo $Z_t(x) = X_t(\omega) = Z_t(y)$, isto é, $x(t) = y(t)$. Como $t \in T$ é arbitrário segue que $x = y$. Deste fato segue que $\xi(\omega)$ como definido em (13) é um conjunto

unitário e portanto a associação $\omega \longmapsto \xi(\omega)$ fornece uma função bem-definida, em todo $\Omega$ e tomando valores em $\mathbb{R}^T$. Observe que o argumento da boa-definição de $\xi(\omega)$ fornece também a validade da equação funcional (14).

$$\begin{tikzcd}
(\Omega, \mathscr{G}) \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "X_t = Z_t \circ \xi"'] & (\mathbb{R}^T, \mathscr{F}) \arrow[d, "Z_t"] \\
& (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))
\end{tikzcd}$$

Observe que segue da equação funcional (14) que para cada boreliano $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ temos $(Z_t \circ \xi)^{-1}(B) = X_t^{-1}(B) \in \mathscr{G}$. Ou seja, $\xi^{-1} \circ Z_t^{-1}(B) \in \mathscr{G}$. De maneira mais geral, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ fixado e $t_1, \ldots, t_k \in T$ distintos, temos

$$\xi^{-1} \circ \Big\{(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_k}) \in H\Big\} = \Big\{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) \in H\Big\} \in \mathscr{G}. \tag{15}$$

$$\begin{tikzcd}
(\Omega, \mathscr{G}) \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})"'] & (\mathbb{R}^T, \mathscr{F}) \arrow[d, "(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_k})"] \\
& (\mathbb{R}^k, \mathscr{B}(\mathbb{R}^k))
\end{tikzcd}$$

O que mostra que $\xi^{-1}(A) \in \mathscr{G}$ para todo $A \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$, que é a álgebra de subconjuntos definida no enunciado da Proposição 8. Pelas propriedades elementares de imagem inversa sabemos que a coleção $\xi^{-1}(\mathscr{A}(\mathbb{R}^T))$ forma uma álgebra de subconjuntos de $\Omega$ e além do mais, pela observação anterior está contida em $\mathscr{G}$. Usando novamente as propriedades da imagem inversa, sabemos que a $\sigma$-álgebra gerada por esta álgebra satisfaz

$$\xi^{-1}(\mathscr{F}) = \xi^{-1}(\sigma(\mathscr{A}(\mathbb{R}^T))) = \sigma(\xi^{-1}(\mathscr{A}(\mathbb{R}^T))) \subseteq \mathscr{G}$$

Mostrando que a aplicação $\xi : (\Omega, \mathscr{G}) \to (\mathbb{R}^T, \mathscr{F})$ é mensurável.

Segue da mensurabilidade da função $\xi$ que o "pushforward" da medida $\mathbb{P}$, isto é, a medida dada por $\mathbb{P}_\xi \equiv \mathbb{P} \circ \xi^{-1} : \mathscr{B}(\mathbb{R}^T) \to [0, 1]$ define uma medida de probabilidade sobre $\mathbb{R}^T$.

Tomando $\mathbb{P}$ em ambos lados da igualdade (15) e usando a hipótese do Teorema 10 obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\xi\Big((Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_k}) \in H\Big) &\equiv \mathbb{P} \circ \xi^{-1} \circ \Big\{(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_k}) \in H\Big\} \\
&= \mathbb{P}\Big((X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) \in H\Big) \\
&= \mu_{t_1, \ldots, t_k}(H).
\end{aligned}$$

O que mostra, finalmente, que a família de distribuições finito-dimensionais do processo canônico $\{Z_t : t \in T\}$, definido sobre o espaço de probabilidade $(\mathbb{R}^T, \mathscr{B}(\mathbb{R}^T), \mathbb{P}_\xi)$, coincide com a família consistente de medidas $\{\mu_{t_1,\ldots,t_k}\}$.

## 6. A Prova do Teorema da Existência de Kolmogorov

Nesta seção vamos apresentar uma prova do Teorema 9. A ideia básica consiste em definir inicialmente uma medida finitamente aditiva em $\mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$ e depois mostrar usando argumentos de regularidade de medida (Teorema 63) e de compacidade que esta aplicação é $\sigma$-aditiva em $\mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$. Para finalizar aplicamos o Teorema da Extensão de Carathéodory (Teorema 40).

**Prova do Teorema 9.** Fixado $A \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$, existem $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_k \in T$ distintos e $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ tais que $A = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H\}$. Assim podemos definir uma relação $\mathscr{A}(\mathbb{R}^T) \ni A \longmapsto \mathbb{P}(A)$ dada por

$$\mathbb{P}(A) \equiv \mu_{t_1,\ldots,t_k}(H).$$

Afirmamos que esta relação nos fornece uma função bem-definida sobre $\mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$. Para isto só precisamos mostrar que se $A$ também pode ser representado de uma outra maneira, digamos, $A = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{s_1}, \ldots, x_{s_m}) \in K\}$ então

$$\mu_{s_1,\ldots,s_m}(K) = \mu_{t_1,\ldots,t_k}(H). \tag{16}$$

Suponha que

$$\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H\} = A = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{s_1}, \ldots, x_{s_m}) \in K\},$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $k \leqslant m$. Usando as mesmas ideias da prova da Proposição 8 podemos afirmar que existe alguma permutação $\pi$ do conjunto de índices $\{1, \ldots, m\}$ tal que a $k$-úpla $(t_1, \ldots, t_k) = (s_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, s_{\pi^{-1}(k)})$ e que $K = \psi^{-1}(H)$, onde $\psi \equiv P_{m,k} \circ \varphi_\pi$, isto é, $\psi(x_1, \ldots, x_m) = (x_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, x_{\pi^{-1}(k)})$. Por outro lado, sabemos pela Proposição 6 que se $\{\mu_{t_1,\ldots,t_k}\}$ é uma família de medidas de probabilidade consistente, então vale a seguinte igualdade

$$\mu_{t_1,\ldots,t_k}(H) = \mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(m)}} \circ \psi^{-1}(H) = \mu_{s_1,\ldots,s_m}(K),$$

o que prova a validade de (16).

Agora que sabemos que $\mathbb{P} : \mathscr{A}(\mathbb{R}^T) \to [0, 1]$ está bem-definida, vamos mostrar que esta aplicação é finitamente aditiva na álgebra $\mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$. De fato, sejam $A, B \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$ cilindros disjuntos. Então existem $k, m \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_k$ e $s_1, \ldots, s_m \in T$ duas listas de elementos distintos de $T$ e borelianos $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ e $K \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ tais que

$$A = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in H\} \qquad \text{e} \qquad B = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{s_1}, \ldots, x_{s_m}) \in K\}$$

Novamente, sem perda de generalidade, podemos assumir que $k \leqslant m$. Argumentando como acima, podemos encontrar uma permutação $\pi$ do conjunto de índices $\{1, \ldots, m\}$ tal que $(t_1, \ldots, t_k) = (s_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, s_{\pi^{-1}(k)})$ e a aplicação $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ dada por $\psi \equiv P_{m,k} \circ \varphi_\pi$ satisfaz

$\psi^{-1}(H) = K$ e $A = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{s_1}, \ldots, x_{s_m}) \in \psi^{-1}(H)\}$. Como estamos assumindo que $A \cap B = \varnothing$, então temos que $\psi^{-1}(H) \cap K = \varnothing$. Logo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) = \mu_{s_1,\ldots,s_m}(\psi^{-1}(H) \cup K) &= \mu_{s_1,\ldots,s_m}(\psi^{-1}(H)) + \mu_{s_1,\ldots,s_m}(K) \\ &= \mu_{t_1,\ldots,t_k}(H) + \mu_{s_1,\ldots,s_m}(K) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).\end{aligned}$$

Para mostrar que $\mathbb{P} : \mathscr{A}(\mathbb{R}^T) \to [0,1]$ é $\sigma$-aditiva em $\mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$ é suficiente mostrar que para toda sequência $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ em $\mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$ satifazendo $A_{n+1} \subseteq A_n$ e $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$, temos que $\mathbb{P}(A_n) \to 0$, quando $n \to \infty$.

Para mostrar a validade da afirmação acima note que é suficiente mostrar que se existe $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon \leqslant \mathbb{P}(A_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \varnothing$.

Fixe $n \in \mathbb{N}$ e considere os conjuntos $A_n$ e $A_{n+1}$. Como estes conjuntos pertencem à álgebra $\mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$ sabemos que existem $k(n), m(n) \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_{k(n)}$ e $s_1, \ldots, s_{m(n)}$ listas de elementos distintos de $T$ e $H_1 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{k(n)})$ e $H_{n+1} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{m(n)})$ tais que

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_{k(n)}}) \in H_n\} \quad \text{e} \quad A_{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{s_1}, \ldots, x_{s_{m(n)}}) \in H_{n+1}\}.$$

Como $A_{n+1} \subseteq A_n$, podemos, sem perda de generalidade, assumir que $k(n) \leqslant m(n)$. Daí segue que existe alguma permutação $\pi$ do conjunto de índices $\{1, \ldots, m(n)\}$ tal que

$$(t_1, \ldots, t_{k(n)}) = (s_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, s_{\pi^{-1}(k(n))})$$

e $H_{n+1} \subset \psi^{-1} H_n$, onde $\psi : \mathbb{R}^{m(n)} \to \mathbb{R}^{k(n)}$ é dada por

$$\psi(x_1, \ldots, x_{m(n)}) = (x_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, x_{\pi^{-1}(k(n))}).$$

Destas observações, segue que dada uma sequência $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ não-crescente em $\mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$, podemos afirmar que existe uma sequência $\{t_{k(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ em $T$ de elementos distintos e uma família de borelianos $\{H_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{k(n)}) : n \in \mathbb{N}\}$ tais que

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_{k(n)}}) \in H_n\}.$$

Pela definição de $\mathbb{P}$ e pela igualdade acima, temos que $\mathbb{P}(A_n) = \mu_{t_1,\ldots,t_{k(n)}}(H_n)$. Como consequência do Teorema 63 e da $\sigma$-compacidade de $\mathbb{R}^{k(n)}$ podemos afirmar que existe algum compacto $K_n \subseteq H_n$ tal que

$$\mu_{t_1,\ldots,t_{k(n)}}(H_n - K_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Seja $B_n \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^T)$ o conjunto determinado pelo conjunto compacto $K_n \subset \mathbb{R}^{k(n)}$, isto é, $B_n \equiv \{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_{k(n)}}) \in K_n\}$. Observamos que segue diretamente da definição de $\mathbb{P}$ e de $K_n$ que

$$\mathbb{P}(A_n - B_n) = \mu_{t_1,\ldots,t_{k(n)}}(H_n - K_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Defina para cada $n \in \mathbb{N}$

$$C_n \equiv \bigcap_{k=1}^{n} B_k.$$

Claramente temos $C_n \subseteq B_n \subseteq A_n$ e

$$\mathbb{P}(A_n - C_n) = \mathbb{P}\left(A_n \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)^c\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (A_n \cap B_k^c)\right)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_n - B_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k - B_k) < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Usando $C_n \subseteq A_n$, a desigualdade acima e lembrando que $0 < \varepsilon \leqslant \mathbb{P}(A_n)$ concluímos que

$$\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(A_n - C_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A_n) - \frac{\varepsilon}{2} < \mathbb{P}(C_n) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\varepsilon}{2} < \mathbb{P}(C_n).$$

Da definição de $C_n$ e da desigualdade acima, concluímos que $C_{n+1} \subseteq C_n$ e $C_n \neq \varnothing$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Da observação acima, sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escolher um ponto $x^{(n)} \in \mathbb{R}^T$ em $C_n$. Pela definição de $C_n$ sabemos que para todo $k$ satisfazendo $1 \leqslant k \leqslant n$ temos $x^{(n)} \in C_n \subseteq C_k \subseteq B_k$. Observe que segue diretamente da definição de $B_k$ que $(x_{t_1}^{(n)}, \ldots, x_{t_{k(k)}}^{(n)}) \in K_k$. Fixada uma coordenada $t_j \in \{t_1, \ldots, t_{k(k)}\}$ segue da compacidade de $K_k$ que a sequência de números reais $\{x_{t_j}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ possui pelo menos uma subsequência convergente. Utilizando o método da diagonal de cantor podemos construir uma subsequência $\{n_r : r \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$\lim_{r\to\infty} x_{t_j}^{(n_r)} = y_{t_j}, \qquad \text{para cada } j \in \mathbb{N}.$$

Seja $z \in \mathbb{R}^T$ um ponto qualquer satisfazendo $z_{t_j} = y_{t_j}$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

É claro que

$$(z_{t_1}, \ldots, z_{t_{k(k)}}) = \lim_{r\to\infty} (x_{t_1}^{(n_r)}, \ldots, x_{t_{k(k)}}^{(n_r)}) \in K_k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Em particula, segue da observação acima que $z \in B_k \subseteq A_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo

$$z \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$

mostrando que esta interseção é não-vazia e encerrando a prova do teorema.

## 7. Alguns Problemas com a Sigma-Álgebra Produto

**Teorema 11.** Sejam $\Omega$ um conjunto arbitrário e $\{X_t : t \in T\}$ uma família de funções definidas sobre o conjunto $\Omega$.

a) Suponha que $A \subset \mathbb{R}^T$ e que existe $S \subseteq T$ tal que $A \in \sigma(\{X_t : t \in S\})$. Se $\omega \in A$ e $X_t(\omega) = X_t(\eta)$, para todo $t \in S$, então $\eta \in A$;

b) Se $A \in \sigma(\{X_t : t \in T\})$, então existe algum subconjunto enumerável $E \subset T$ tal que o evento $A \in \sigma(\{X_t : t \in E\})$.

**Prova**. Vamos proceder de maneira análoga à da prova de que a conclusão do Teorema 10 implica a conclusão do Teorema 9. Primeiro, consideramos a função $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^T$ que é definida implicitamente pela equação

$$Z_t(\xi(\omega)) = X_t(\omega), \qquad \forall t \in T.$$

Vamos também considerar a projeção $\pi_S : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^S$ definida por

$$\pi_S(\{x_t : t \in T\}) = \{x_t : t \in S\}.$$

É claro que se $\mathscr{H}$ denota a $\sigma$-álgebra produto sobre $\mathbb{R}^S$, então a aplicação de projeção definida acima $\pi_S : (\mathbb{R}^T, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}^S, \mathscr{H})$ é mensurável.

Com auxilio da projeção definida acima e da função $\xi$ podemos introduzir uma nova função $\zeta : \Omega \to \mathbb{R}^S$ que é dada por $\zeta(\omega) = \pi_S(\xi(\omega))$. Se $\mathscr{G}_S$ denota a $\sigma$-álgebra gerada pela família $\{X_t : t \in S\}$, então temos que a função $\zeta : (\Omega, \mathscr{G}_S) \to (\mathbb{R}^S, \mathscr{H})$ define uma função mensurável.

$$\begin{tikzcd}
(\Omega, \mathscr{G}_S) \arrow[r, "\xi"] \arrow[rr, bend left, "\zeta"] \arrow[drr, "X_t = Z_t \circ \zeta"'] & (\mathbb{R}^T, \mathscr{F}) \arrow[r, "\pi_S"] & (\mathbb{R}^S, \mathscr{H}) \arrow[d, "Z_t"] \\
& & (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))
\end{tikzcd}$$

Pelas propriedades elementares de imagem inversa e definição de $\xi$ temos, para toda lista $t_1, \ldots, t_k \in S$ distintos a seguinte igualdade:

$$\zeta^{-1} \circ \Big\{(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_k}) \in H\Big\} = \Big\{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) \in H\Big\} \in \mathscr{G}_S. \tag{17}$$

$$\begin{tikzcd}
(\Omega, \mathscr{G}_S) \arrow[r, "\xi"] \arrow[rr, bend left, "\zeta"] \arrow[drr, "(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})"'] & (\mathbb{R}^T, \mathscr{F}) \arrow[r, "\pi_S"] & (\mathbb{R}^S, \mathscr{H}) \arrow[d, "(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_k})"] \\
& & (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))
\end{tikzcd}$$

Pela mensurabilidade de $\zeta$ sabemos que a coleção $\{\zeta^{-1}(H) : H \in \mathscr{H}\}$ é uma sub-$\sigma$-álgebra de $\mathscr{G}_S$. Além do mais, segue da igualdade (17) que o conjunto dos geradores da $\sigma$-álgebra $\mathscr{G}_S$ estão contidos na $\sigma$-álgebra $\{\zeta^{-1}(H) : H \in \mathscr{H}\}$ e portanto $\mathscr{G}_S \subseteq \{\zeta^{-1}(H) : H \in \mathscr{H}\}$. Já que estabelecemos acima a validade da continência reversa, concluímos que estas $\sigma$-álgebras coincidem, isto é,

$$\mathscr{G}_S = \{\zeta^{-1}(H) : H \in \mathscr{H}\}.$$

Desta forma se $A \in \mathscr{G}_S \equiv \sigma(\{X_t : t \in S\})$, então podemos afirmar que existe algum conjunto $H \in \mathscr{H}$ tal que $A = \zeta^{-1}(H)$. Além do mais, se $\omega \in A = \zeta^{-1}(H)$ e $\eta \in \Omega$ é tal que $X_t(\omega) = X_t(\eta)$, para todo $t \in S$, então temos

$$Z_t(\zeta(\eta)) = X_t(\eta) = X_t(\omega) = Z_t(\zeta(\omega)) \qquad \Longrightarrow \qquad \zeta(\eta) = \zeta(\omega).$$

Logo $\eta \in \zeta^{-1}(H) = A$ e isto encerra a prova do item a).

**Prova do item b).** Seja $S \subset T$ subconjunto enumerável arbitrário e considere a $\sigma$-álgebra $\mathscr{F}_S \equiv \sigma(\{X_t : t \in S\})$. Vamos mostrar que a $\sigma$-álgebra $\mathscr{F}_T$ satisfaz

$$\mathscr{F}_T \;=\; \mathscr{G} \equiv \bigcup_{\substack{S \subset T \\ S \text{ enumerável}}} \mathscr{F}_S.$$

Para provar a validade da igualdade acima, é suficiente mostrar que a coleção $\mathscr{G}$ é uma $\sigma$-álgebra e que contém todos os geradores de $\mathscr{F}_T$, já que isto implica $\mathscr{F}_T \subset \mathscr{G}$. Por outro lado, temos para cada $S \subset T$ que $\mathscr{F}_S \subseteq \mathscr{F}_T$, mostrando que $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}_T$ e consequentemente a igualdade desejada.

É claro que $\varnothing$ e $\Omega \in \mathscr{G}$. Se $A \in \mathscr{G}$, então existe algum $S \subset T$, enumerável tal que $A \in \mathscr{F}_S$. Como $\mathscr{F}_S$ é uma $\sigma$-álgebra então temos que $A^c \in \mathscr{F}_S$ e consequentemente $A^c \in \mathscr{G}$, mostrando que está última coleção é fechada para complementação.

Para completar a prova de que $\mathscr{G}$ é uma $\sigma$-álgebra resta mostrar que se $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência em $\mathscr{G}$, então $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{G}$. Para verificar isto observamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $A_n \in \mathscr{G}$, logo existe algum conjunto enumerável $S_n \subset T$ tal que $A_n \in \mathscr{F}_{S_n}$. Já que união enumerável de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável temos que $S \equiv \cup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ é um conjunto enumerável e claramente $A_n \in \mathscr{F}_{S_n} \subseteq \mathscr{F}_S$. Como esta relação é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{F}_S \subseteq \mathscr{G}$.

Para finalizar a prova basta observar que a $\sigma$-álgebra $\mathscr{F}_T$ é gerada pelos conjuntos da forma $\{X_t \in B\} \in \mathscr{F}_{\{t\}} \subset \mathscr{G}$. ■

**Corolário 12.** Seja $T = [0, +\infty)$ e considere o espaço produto $(\mathbb{R}^{[0,+\infty)}, \mathscr{F})$, onde $\mathscr{F}$ é a $\sigma$-álgebra produto, isto é, a $\sigma$-álgebra gerada pelo processo de coordenadas $\{Z_t : t \in [0, +\infty)\}$. Seja $C([0, +\infty), \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções à valores reais, contínuas e definidas sobre $[0, +\infty)$. Então $C([0, +\infty), \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{[0,+\infty)}$, mas $C([0, +\infty), \mathbb{R}) \notin \mathscr{F}$.

**Prova**. A prova será feita por contradição. Suponha que $C([0, +\infty), \mathbb{R}) \in \mathscr{F}$. Então pelo item b) do Teorema 11 existe algum conjunto enumerável $S \subset [0, +\infty)$ tal que

$$C([0, +\infty), \mathbb{R}) \in \mathscr{F}_S \equiv \sigma(\{Z_t : t \in S\}).$$

Por outro lado, o item a) afirma que qualquer conjunto mensurável segundo a $\sigma$-álgebra $\sigma(\{Z_t : t \in S\})$ possui a seguinte propriedade: para qualquer $f \in C([0, +\infty), \mathbb{R})$ fixado, se $g \in \mathbb{R}^{[0,+\infty)}$ satisfaz $f(t) = Z_t(f) = Z_t(g) = g(t)$, para todo $t \in S$, então $g \in C([0, +\infty), \mathbb{R})$. Mas isto é um absurdo, pois considerando qualquer $t_0 \in [0, +\infty) \setminus S$ e a função $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se} \quad t \neq t_0; \\ 1 + f(t_0), & \text{se} \quad t = t_0. \end{cases}$$

Temos que $Z_t(f) = Z_t(g)$, para todo $t \in S$, mas $g$ é descontínua em $t = t_0$. Portanto a função $g$ não pode pertencer à $C([0, +\infty), \mathbb{R})$ o que leva a uma contradição. ■

**Corolário 13.** Seja $T = [0, +\infty)$ e considere o espaço produto $(\mathbb{R}^{[0,+\infty)}, \mathscr{F})$, onde $\mathscr{F}$ é a $\sigma$-álgebra produto, isto é, a $\sigma$-álgebra gerada pelo processo de coordenadas $\{Z_t : t \in [0, +\infty)\}$. Considere a coleção

$$\mathcal{M} \equiv \{f \in \mathbb{R}^{[0,+\infty)} \to \mathbb{R} : \ f(t) \leqslant f(s) \text{ se } t \leqslant s \quad \text{e } f(t) \in \mathbb{N}, \ \forall t \geqslant 0\},$$

isto é, a coleção de todas as funções monótonas não-decrescentes, tomando valores em $\mathbb{N}$ e definidas sobre $[0, +\infty)$. Então $\mathcal{M} \notin \mathscr{F}$.

**Prova**. Como na prova do corolário anterior, vamos argumentar por contradição. Suponha que $\mathcal{M} \in \mathscr{F}$. Então, pelo item b) do Teorema 11, podemos afirmar que existe algum conjunto enumerável $S \subset [0, +\infty)$ tal que $\mathcal{M} \in \mathscr{F}_S \equiv \sigma(\{Z_t : t \in S\})$. Como na prova do corolário anterior, segue do item a) do Teorema 11 que o conjunto $\mathcal{M}$ possui a seguinte propriedade: se $f \in \mathcal{M}$ e $g \in \mathbb{R}^{[0,+\infty)}$ é tal que $Z_t(f) = Z_t(g)$, para todo $t \in S$, então $g \in \mathcal{M}$.

Mas isto é um absurdo pois, se $t_0 \in [0, +\infty) \setminus S$ a função $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se} \quad t \neq t_0; \\ 1 + 2 \inf\limits_{t \in (t_0, +\infty)} f(t), & \text{se} \quad t = t_0. \end{cases}$$

é tal que $Z_t(g) = Z_t(f)$, para todo $t \in S$, mas como $g$ não é uma função monótona não-decrescente então $g \notin \mathcal{M}$ o que é uma contradição. ■

## 8. A Sigma-Álgebra Produto e Sigma-Álgebra de Borel

Como mais uma aplicação do Teorema 11 vamos ver a seguir como se comparam as $\sigma$-álgebras produto e de Borel em espaços produtos da forma $\mathbb{R}^T$. O próximo teorema mostra que estas duas $\sigma$-álgebras coincidem se, e somente se, o conjunto de índice $T$ é enumerável.

**Teorema 14.** Sejam $T \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto de índices, $\mathbb{R}^T$ o produto cartesiano, $\tau(\mathbb{R}^T)$ a topologia produto e $\mathscr{F}$ a $\sigma$-álgebra produto, então

a) qualquer que seja $\text{Card}(T)$, temos $\mathscr{F} \subseteq \sigma(\tau(\mathbb{R}^T)) \equiv \mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$;

b) se $T$ é enumerável, então $\mathscr{F} = \sigma(\tau(\mathbb{R}^T)) \equiv \mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$;

c) se $T$ é não-enumerável, então $\mathscr{F} \subsetneq \sigma(\tau(\mathbb{R}^T)) \equiv \mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$.

**Prova**. Para cada $t \in T$ e $A \in \tau(\mathbb{R})$, temos que $U = \pi_t^{-1}(A) \in \tau(\mathbb{R}^T)$. Portanto, podemos concluir diretamente das definições que

$$\sigma\left(\left\{\pi_t^{-1}(A) : \begin{smallmatrix} t \in T \\ A \subseteq \mathbb{R} \text{ aberto} \end{smallmatrix}\right\}\right) \subseteq \sigma\left(U \in \mathbb{R}^T : U \text{ é aberto}\right) = \sigma(\tau(\mathbb{R}^T)) \equiv \mathscr{B}(\mathbb{R}^T).$$

Próximo passo é mostrar que

$$\mathscr{F} = \sigma\left(\left\{\pi_t^{-1}(H) : \begin{smallmatrix} t \in T \\ H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \end{smallmatrix}\right\}\right) = \sigma\left(\left\{\pi_t^{-1}(A) : \begin{smallmatrix} t \in T \\ A \subseteq \mathbb{R} \text{ aberto} \end{smallmatrix}\right\}\right). \tag{18}$$

Uma vez provada esta afirmação, segue da continência anterior que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$.

Para provar a igualdade acima, primeiro observamos que para $t \in T$ fixado e $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ fixados, temos que $\pi_t^{-1}(H) \in \sigma(\pi_t^{-1}(A) : A \subseteq \mathbb{R} \text{ aberto})$. Desta continência segue que

$$\bigcup_{H \in \mathscr{B}(\mathbb{R})} \pi_t^{-1}(H) \subset \sigma(\pi_t^{-1}(A) : A \subseteq \mathbb{R} \text{ aberto}).$$

Tomando a união sobre $t \in T$ em ambos lados da continência acima obtemos

$$\bigcup_{t\in T}\bigcup_{H\in\mathscr{B}(\mathbb{R})} \pi_t^{-1}(H) \;\subset\; \bigcup_{t\in T} \sigma(\pi_t^{-1}(A) : A \subseteq \mathbb{R} \text{ aberto})$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma\left(\bigcup_{t\in T}\bigcup_{H\in\mathscr{B}(\mathbb{R})} \pi_t^{-1}(H)\right) \subset \sigma\left(\bigcup_{t\in T} \sigma(\pi_t^{-1}(A) : A \subseteq \mathbb{R} \text{ aberto})\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathscr{F} = \sigma\left(\left\{\pi_t^{-1}(H) : \begin{smallmatrix} t\in T \\ H\in\mathscr{B}(\mathbb{R}) \end{smallmatrix}\right\}\right) \;\subseteq\; \sigma\left(\left\{\pi_t^{-1}(A) : \begin{smallmatrix} t\in T \\ A\subseteq\mathbb{R} \text{ aberto} \end{smallmatrix}\right\}\right).$$

Como a continência reversa é certamente válida, já que todo aberto é um boreliano temos que a igualdade (18) está demonstrada e isto encerra a prova do item a).

Prova do item b). Se $T$ é enumerável, então temos da Proposição 55 que a topologia produto $\tau(\mathbb{R}^T)$ admite uma base enumerável. Desta forma cada aberto de $\tau(\mathbb{R}^T)$ é união enumerável de cilindros básicos, e tais cilindros pertencem a $\mathscr{F}$. Portanto $\sigma(\tau(\mathbb{R}^T)) \subset \mathscr{F}$. Como o item anterior garante a continência reversa é sempre válida, então podemos concluir que $\mathscr{F} = \sigma(\tau(\mathbb{R}^T)) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$.

Prova do item c). Seja $T$ um conjunto de índice não-enumerável. Como para todo $t \in T$, temos que $\pi_t : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $\pi_t^{-1}(\{0\})$ é um fechado na topologia produto $\tau(\mathbb{R}^T)$. Como a interseção arbitrária de fechados é um fechado, podemos afirmar que o conjunto (unitário possuindo apenas a função identicamente nula)

$$E \equiv \{x \in \mathbb{R}^T : x_t = 0 \;\forall t \in T\} = \bigcap_{t\in T} \pi_t^{-1}(\{0\}).$$

é um fechado e consequentemente um elemento de $\sigma(\tau(\mathbb{R}^T)) \equiv \mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$.

Vamos usar o Teorema 11 para mostrar que $E \notin \mathscr{F}$, a $\sigma$-álgebra produto sobre $\mathbb{R}^T$. Suponha, por contradição, que $E \in \mathscr{F}$. Então segue do item b) do Teorema 11 que existe algum subconjunto enumerável $S \subset T$ tal que $E \in \mathscr{F}_S \equiv \sigma(\{Z_t : t \in S\})$. Por outro lado, se $E \in \mathscr{F}_S$ e $\omega \in E$, então segue do item a) do Teorema 11 que se $\eta \in \mathbb{R}^T$ é tal que $Z_t(\omega) = Z_t(\eta)$, para todo $t \in S$, então $\eta \in E$. Mas isto é um absurdo, já que se $S$ é um subconjunto enumerável de $T$, então existe pelo menos um ponto $t_0 \in T \setminus S$ e a função $\eta : T \to \mathbb{R}$ dada por

$$\eta(t) \equiv \begin{cases} 0, & \text{se } t \neq t_0; \\ 1, & \text{se } t = t_0, \end{cases}$$

satisfaz a condição $Z_t(\omega) = Z_t(\eta)$, para todo $t \in S$, mas $\eta \notin E$, pois $E$ é composto apenas pela função identicamente nula em $T$. Desta contradição concluímos que $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$, mas $E \notin \mathscr{F}$. Como já sabemos que para qualquer que seja o conjunto de índices $T$ temos $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$, concluímos dos argumentos acima, finalmente, que a continência entre estas $\sigma$-álgebras é estrita, no caso em que $T$ é não-enumerável. ■

## 9. Construindo Família de Medidas Consistentes

Seja $T \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto infinito de índices. Nesta seção vamos usar a estrutura de ordem da reta, para mostrar como podemos construir uma coleção específica de medidas de probabilidade sobre espaços euclidianos de dimensão finita, que nos auxiliarão na construção de uma família consistente de medidas de probabilidade e estas, por sua vez, serão usadas para construir o chamado Processo de Wiener ou Movimento Browniano.

A ideia é construir uma medida $\mu_{t_1,\ldots,t_k}$ para cada $k$-úpla $(t_1,\ldots,t_k)$ ordenada de índices de $T$ satisfazendo $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$. Além de definir uma medida para cada uma desta $k$-úplas ordenadas, estas medidas devem satisfazer a seguinte condição de consistência:

$$\begin{gathered}\mu_{t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_k}(H_1 \times \cdots \times H_{i-1} \times H_{i+1} \times \cdots \times H_k) \\ \| \\ \mu_{t_1,\ldots,t_k}(H_1 \times \cdots \times H_{i-1} \times \mathbb{R} \times H_{i+1} \times \cdots \times H_k)\end{gathered} \tag{19}$$

para quaisquer $H_j \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, com $j = 1,\ldots,k$ e $1 < i < k$. Para $i = 1$ e $i = k$ exigimos que sejam satisfeitas as seguintes igualdades, respectivamente:

$$\mu_{t_2,\ldots,t_k}(H_2 \times \cdots \times H_k) = \mu_{t_1,\ldots,t_k}(\mathbb{R} \times H_2 \times \cdots \times H_k); \tag{20}$$

$$\mu_{t_1,\ldots,t_{k-1}}(H_1 \times \cdots \times H_{k-1}) = \mu_{t_1,\ldots,t_k}(H_1 \times \cdots \times H_{k-1} \times \mathbb{R}), \tag{21}$$

para quaisquer $H_j \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, com $j = 1,\ldots,k$.

Finalizada a construção descrita acima, passamos à etapa de definir $\mu_{t_1,\ldots,t_k}$ para uma $k$-úpla $(t_1,\ldots,t_k)$ arbitrária, de elementos distintos de $T$. Para isto, dada uma $k$-úpla arbitrária de elementos distintos de $T$, considere $\pi$ como sendo a única permutação do conjunto de índices $\{1,\ldots,k\}$, que age ordenando as coordenadas desta $k$-úpla, ou seja, $t_{\pi(1)} < \ldots < t_{\pi(k)}$. Defina

$$\mu_{t_1,\ldots,t_k} \equiv \mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(k)}} \circ \varphi_\pi^{-1}, \tag{22}$$

onde $\varphi_\pi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ é a aplicação linear dada por $\varphi_\pi(x_1,\ldots,x_k) = (x_{\pi^{-1}(1)},\ldots,x_{\pi^{-1}(k)})$, definida anteriormente em (4).

Afirmamos que família $\{\mu_{t_1,\ldots,t_k}\}$, construída acima, é uma família consistente de medidas de probabilidade.

Para provar que a afirmação é verdadeira, temos que verificar a validade das condições de consistência (7) e (8). É claro que a condição (7) é satisfeita por construção já que a família é definida satisfazendo (22). A condição (8) também é automaticamente satisfeita, por construção, no caso em que $(t_1,\ldots,t_k)$ é uma $k$-úpla ordenada, porque a família de medidas já é construída satisfazendo a igualdade (21). Portanto, resta verificar a validade da condição (8) quando $(t_1,\ldots,t_k)$ é uma $k$-úpla arbitrária.

Sejam $(t_1,\ldots,t_k)$ é uma $k$-úpla arbitrária e $\lambda$ a única permutação do conjunto de índices $\{1,\ldots,k-1\}$ que induz uma ordenação da $(k-1)$-úpla $(t_1,\ldots,t_{k-1})$, ou seja,

$$t_{\lambda(1)} < \ldots < t_{\lambda(k-1)}.$$

Vamos dividir o restante da nossa análise em três casos. Suponha inicialmente que $t_k$ é o maior índice da $k$-úpla $(t_1,\ldots,t_k)$. Neste caso a permutação $\pi$ que induz a ordenação nesta

$k$-úpla é dada por $\pi(j) = \lambda(j)$, para $j = 1, \ldots, k-1$ e $\pi(k) = k$. Assim temos diretamente das condições (22) e (21) que

$$\begin{aligned}
\mu_{t_1,\ldots,t_{k-1}}(H_1 \times \cdots \times H_{k-1}) &= \mu_{t_{\lambda(1)},\ldots,t_{\lambda(k-1)}}(H_{\lambda(1)} \times \cdots \times H_{\lambda(k-1)}) \\
&= \mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(k-1)},t_{\pi(k)}}(H_{\pi(1)} \times \cdots \times H_{\pi(k-1)} \times \mathbb{R}) \\
&= \mu_{t_1,\ldots,t_{k-1},t_k}(H_1 \times \cdots \times H_{k-1} \times \mathbb{R})
\end{aligned}$$

e assim a condição (8) é satisfeita neste caso.

O segundo caso é aquele em que $t_k$ é o menor índice da $k$-úpla $(t_1, \ldots, t_k)$. Neste caso a ordenação desta $k$-úpla é induzida pela permutação $\pi$ dada por $\pi(1) = k$ e $\pi(j) = \lambda(j-1)$, para todo $j = 2, \ldots k$.

Analogamente, segue das condições (22) e (20) que

$$\begin{aligned}
\mu_{t_1,\ldots,t_{k-1}}(H_1 \times \cdots \times H_{k-1}) &= \mu_{t_{\lambda(1)},\ldots,t_{\lambda(k-1)}}(H_{\lambda(1)} \times \cdots \times H_{\lambda(k-1)}) \\
&= \mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(k-1)},t_{\pi(k)}}(\mathbb{R} \times H_{\pi(2)} \times \cdots \times H_{\pi(k)}) \\
&= \mu_{t_1,\ldots,t_{k-1},t_k}(H_1 \times \cdots \times H_{k-1} \times \mathbb{R})
\end{aligned}$$

o que novamente prova a validade da condição (8).

O terceiro caso é aquele em que $t_k$ é $i$-ésimo índice da $k$-úpla $(t_1, \ldots, t_k)$, com $1 < i < k$. Neste caso a permutação de $\{1, \ldots, k\}$ que induz a ordenação desta $k$-upla é dada em função de $\lambda$ da seguinte maneira:

$$\pi(j) = \begin{cases} \lambda(j), & \text{se } j < i; \\ k, & \text{se } j = i; \\ \lambda(j-1), & \text{se} i < j \leqslant k. \end{cases}$$

Agora, usando as condições (22) e (19) temos

$$\begin{gathered}
\mu_{t_1,\ldots,t_{k-1}}(H_1 \times \cdots \times H_{k-1}) \\
\| \\
\mu_{t_{\lambda(1)},\ldots,t_{\lambda(k-1)}}(H_{\lambda(1)} \times \cdots \times H_{\lambda(k-1)}) \\
\| \\
\mu_{t_{\lambda(1)},\ldots,t_{\lambda(i-1)},t_k,t_{\lambda(i+1)},\ldots,t_{\lambda(k-1)}}(H_{\lambda(1)} \times \cdots \times H_{\lambda(i-1)} \times \mathbb{R} \times H_{\lambda(i+1)} \times \cdots \times H_{\lambda(k-1)}) \\
\| \\
\mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(i-1)},t_{\pi(i)},t_{\pi(i+1)},\ldots,t_{\pi(k)}}(H_{\pi(1)} \times \cdots \times H_{\pi(i-1)} \times \mathbb{R} \times H_{\pi(i+1)} \times \cdots \times H_{\pi(k)}) \\
\| \\
\mu_{t_1,\ldots,t_{k-1},t_k}(H_1 \times \cdots \times H_{k-1} \times \mathbb{R}).
\end{gathered}$$

Esta igualdade encerra a verificação de que a condição (8) é satisfeita pela família $\{\mu_{t_1,\ldots,t_k}\}$.

Em resumo, se construímos uma família de medidas de probabilidade $\mu_{t_1,\ldots,t_k}$, apenas para $k$-úplas ordenadas de forma que as condições (19), (20) e (21) sejam satisfeitas e em seguida, estendemos esta família, por meio de (22), para uma família indexada por $k$-úplas arbitrárias (não necessariamente ordenada), então obtemos uma família consistente de medidas de probabilidade que satisfaz as hipóteses do Teorema de Consistência de Kolmogorov.

## 10. Distribuições Gaussianas em Espaços Euclidianos

Uma variável aleatória $X$ definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ possui distribuição normal com média $\mu \in \mathbb{R}$ e variância $\sigma^2 > 0$, se $X$ possui densidade dada por

$$f_X(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Podemos construir concretamente uma variável aleatória com distribuição normal no espaço de probabilidade $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mu)$, onde $\mu$ é a medida de probabilidade definida por

$$\mu(H) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_H \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx,$$

simplesmente tomando como variável aleatória a função $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $X(\omega) = \omega$, isto é, a função identidade. De fato,

$$\mathbb{P}(X \in H) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in H\}) = \mathbb{P}(H) = \mu(H) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_H \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Além do mais, para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado, podemos usar o Teorema de Fubini-Tonelli para construir explicitamente uma coleção com $k$ variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_k$, independentes e satisfazendo $X_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$. Para isto, consideramos espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ como sendo $(\mathbb{R}^k, \mathscr{B}(\mathbb{R}^k), \prod_{j=1}^k \mu_j)$, onde para cada $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$

$$\mathbb{P}(H) \equiv \left(\prod_{j=1}^k \mu_j\right)(H) \equiv \int \cdots \int_H \prod_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp\left(-\frac{(x_j-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}\right) dx_1 \cdots dx_k,$$

e $X_j(\omega_1, \ldots, \omega_j, \ldots, \omega_n) = \omega_j$, para cada $j = 1, \ldots, n$.

Vamos usar as variáveis aleatórias e o espaço de probabilidade apresentados acima, para dar o primeiro passo na direção de construir uma família consistente de medidas de probabilidade que serão usadas para definir o Movimento Browniano ou Processo de Wiener.

Para cada $j = 1, \ldots, k$ defina $S_j \equiv X_1 + \ldots + X_j$. Considere o vetor aleatório tomando valores no espaço euclidiano $k$-dimensional de coordenadas $(S_1, S_2, \ldots, S_k) \equiv \mathbf{S}$. Vamos mostrar que este vetor possui distribuição absolutamente contínua e vamos determinar explicitamente sua densidade. Como a construção que estamos interessados só necessita do caso de normais de média zero, daqui para frente vamos assumir que $\mu_j = 0$, para todo $j = 1, \ldots, k$.

Para ilustrar as ideias desta prova vamos considerar, primeiro o caso $k = 4$. Neste caso, temos que o vetor aleatório definido acima, em sua forma transposta, é dado por

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}.$$

Abusando um pouco da notação vamos escrever a igualdade acima como $\mathbf{S} = A\mathbf{X}$, omitindo o sinal de transposição para não carregar a notação.

Observe que como a matriz acima é uma matriz triangular inferior, sabemos que seu determinante é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal. Portanto, neste caso é imediato verificar que esta matriz é invertível e possui determinante igual à 1. Além do mais, sua inversa é dada pela matriz

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que $A^{-1}$ age, fixando a primeira coordenada e em seguida, subtraindo duas coordenadas consecutivas. Mais precisamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Usando a expressão obtida acima para inversa de $A$ e o Teorema da Mudança de Variáveis para integrais múltiplas obtemos, para cada $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^4)$, as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S \in H) &= \mathbb{P}(A\mathbf{X} \in H) \\
&= \mathbb{P}(\mathbf{X} \in A^{-1}H) \\
&= \int \cdots \int_{A^{-1}H} \prod_{j=1}^{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp\left(-\frac{x_j^2}{2\sigma_j^2}\right) dx_1 \cdots dx_4 \\
&\equiv \int \cdots \int_{A^{-1}H} f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_4)\, dx_1 \cdots dx_4 \\
&= \int \cdots \int_{H} f_{\mathbf{X}} \circ A^{-1}(x_1, \ldots, x_4) |\mathrm{Det}(A^{-1})|\, dx_1 \cdots dx_4 \\
&= \int \cdots \int_{H} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_4 - x_3)\, dx_1 \cdots dx_4 \\
&= \int \cdots \int_{H} \prod_{j=1}^{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp\left(-\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2\sigma_j^2}\right) dx_1 \cdots dx_4,
\end{aligned}$$

com a convenção, no primeiro termo do produtório acima, que $x_0 \equiv 0$.

Da igualdade acima conseguimos obter a expressão explícita para da função de densidade do vetor $\mathbf{S} \equiv (S_1, \ldots, S_4)$. Assim para qualquer retângulo mensurável $H_1 \times \cdots \times H_4$ temos

$$\begin{gathered}
\mathbb{P}\Big(S_1, \ldots, S_4) \in H_1 \times \cdots \times H_4\Big) \\
\| \\
\int_{H_1} \cdots \int_{H_4} \prod_{j=1}^{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp\left(-\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2\sigma_j^2}\right) dx_1 \cdots dx_4.
\end{gathered}$$

Desta igualdade concluímos imediatamente que a função de densidade do vetor aleatório $(S_1, \ldots, S_4)$ é dada por

$$f_{(S_1,S_2,S_3,S_4)}(x_1, \ldots, x_4) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2 - x_1) f_{X_3}(x_3 - x_2) f_{X_4}(x_4 - x_3). \tag{23}$$

É claro que a igualdade abaixo é sempre válida pois temos o mesmo evento tanto no lado direito quanto esquerdo, para todo $H_j \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}\Big(S_1, S_3, S_4) \in H_1 \times H_3 \times H_4\Big) = \mathbb{P}\Big(S_1, S_2, S_3, S_4) \in H_1 \times \mathbb{R} \times H_3 \times H_4\Big).$$

Além disto o fato das v.a.'s $X_i$'s serem normais vai implicar uma relação muito forte entre as funções de densidade dos vetores aleatórios $(S_1, S_3, S_4)$ e $(S_1, S_2, S_3, S_4)$. Esta relação será crucial, adiante, para provarmos a condição de consistência (19) para uma família de medidas de probabilidade que definiremos à partir das variáveis aleatórias $S_j$'s.

Já que o vetor $(S_1, S_2, S_3, S_4)$ possui uma função de densidade, podemos afirmar que o vetor $(S_1, S_3, S_4)$ também possui densidade e que podemos obtê-la via marginais, como segue

$$f_{(S_1,S_3,S_4)}(x_1, x_3, x_4) = \int_{\mathbb{R}} f_{(S_1,S_2,S_3,S_4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)\ dx_2. \tag{24}$$

Usando a identidade (23) podemos afirmar que o lado direito da igualdade acima é dado por

$$\begin{gathered} \int_{\mathbb{R}} f_{(S_1,S_2,S_3,S_4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)\ dx_2 \\ \| \\ f_{X_1}(x_1) f_{X_4}(x_4 - x_3) \int_{\mathbb{R}} f_{X_2}(x_2 - x_1) f_{X_3}(x_3 - x_2)\ dx_2. \end{gathered} \tag{25}$$

Portanto, para encontrar a fórmula explícita para a densidade $(S_1, S_3, S_4)$ só precisamos nos concentrar em calcular a integral que aparece no lado direito da igualdade acima. Para isto, vamos considerar a mudança de variáveis $t = x_2 - x_1$. Então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_{X_2}(x_2 - x_1) f_{X_3}(x_3 - x_2)\ dx_2 &= \int_{\mathbb{R}} f_{X_2}(t) f_{X_3}((x_3 - x_1) - t))dt \\ &= (f_{X_2} * f_{X_3})(x_3 - x_1), \end{aligned}$$

onde $(f_{X_2} * f_{X_3})$ é o produto de convolução entre as funções de densidade de $X_2$ e de $X_3$, respectivamente. Como estas v.a.'s são independentes e possuem distribuição $N(0, \sigma_2^2)$ e $N(0, \sigma_3^2)$ podemos afirmar pela fórmula da convolução para variáveis aleatórias independentes que $(f_{X_2} * f_{X_3}) = f_{X_2+X_3}$. Já que $X_2 + X_3 \sim N(0, \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$ temos das observações acima e da igualdade (25) uma fórmula explicita para a densidade de $(S_1, S_3, S_4)$ que é dada por

$$\begin{aligned} f_{(S_1,S_3,S_4)}(x_1, x_3, x_4) &= f_{X_1}(x_1) f_{X_4}(x_4 - x_3)(f_{X_2} * f_{X_3})(x_3 - x_1) \\ &= f_{X_1}(x_1) f_{X_4}(x_4 - x_3) f_{X_2+X_3}(x_3 - x_1) \\ &= f_{X_1}(x_1) f_{X_2+X_3}(x_3 - x_1) f_{X_4}(x_4 - x_3). \end{aligned}$$

Para cada quadrupla $t_1, t_2, t_3, t_4 \in [0, +\infty)$ ordenada, $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < +\infty$, defina

$$\mu_{t_1,\ldots,t_4}(H_1 \times \cdots \times H_4) \equiv \int_{H_1} \cdots \int_{H_4} \prod_{j=1}^{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(-\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})}\right) dx_1 \cdots dx_4,$$

adotando novamente a convenção que $t_0 = 0$ e $x_0 = 0$.

Como observado nos parágrafos anteriores, podemos olhar para a medida de probabilidade $\mu_{t_1,\ldots,t_4}$, como a distribuição de um vetor aleatório $(S_1, \ldots, S_4)$, onde $S_j = X_1 + \ldots + X_j$ e cada variável aleatória $X_j$ possui a seguinte distribuição, respectivamente:

- $X_1 \sim N(0, t_1)$;
- $X_2 \sim N(0, t_2 - t_1)$;
- $X_3 \sim N(0, t_3 - t_2)$;
- $X_4 \sim N(0, t_4 - t_3)$.

Desta forma, podemos deduzir das observações feitas anteriormente que valem as seguinte igualdades:

$$\begin{aligned}
\mu_{t_1,\ldots,t_4}(H_1 \times \mathbb{R} \times H_3 \times H_4) &= \mathbb{P}\Big((S_1, S_2, S_3, S_4) \in H_1 \times \mathbb{R} \times H_3 \times H_4\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big((S_1, S_3, S_4) \in H_1 \times H_3 \times H_4\Big) \\
&= \int_{H_1 \times H_3 \times H_4} f_{X_1}(x_1) f_{X_2+X_3}(x_2) f_{X_4}(x_4)\ dx_1\, dx_3\, dx_4.
\end{aligned}$$

Como $X_2$ e $X_3$ são normais independentes, então

$$X_2 + X_3 \sim N(0, (t_2 - t_1) + (t_3 - t_2)) = N(0, t_3 - t_1).$$

Portanto segue das igualdades acima que

$$\mu_{t_1,\ldots,t_4}(H_1 \times \mathbb{R} \times H_3 \times H_4) = \int_{H_1 \times H_3 \times H_4} f_{X_1}(x_1) f_{X_2+X_3}(x_3 - x_1) f_{X_4}(x_4 - x_3)\ dx_1\, dx_3\, dx_4.$$

Observe que a densidade que aparece no integrando acima possui a seguinte expressão

$$\frac{\exp\left(\frac{-(x_1-x_0)^2}{2t_1}\right)}{\sqrt{2\pi t_1}} \frac{\exp\left(\frac{-(x_3-x_1)^2}{2(t_3-t_1)}\right)}{\sqrt{2\pi(t_3 - t_1)}} \frac{\exp\left(\frac{-(x_4-x_3)^2}{2(t_4-t_3)}\right)}{\sqrt{2\pi(t_4 - t_3)}},$$

lembrando da convenção que $x_0 = 0$. Como esta é exatamente a densidade da medida $\mu_{t_1,t_3,t_4}$ segue da igualdade anterior que

$$\mu_{t_1,\ldots,t_4}(H_1 \times \mathbb{R} \times H_3 \times H_4) = \mu_{t_1,t_3,t_4}(H_1 \times H_3 \times H_4).$$

que é um caso particular da condição consistência (19).

Outro fato importante é que se estendemos a definição de $\mu_{t_1,\ldots,t_4}$ para uma quadrupla arbitrária (não necessariamente ordenada) de pontos distintos de $[0, +\infty)$ por meio (22) usando a permutação $\pi$ que ordena a quadrupla $(t_1, \ldots, t_4)$, ou seja

$$\mu_{t_1,\ldots,t_4}(H_1 \times \cdots \times H_4) \equiv \mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(4)}}(H_{\pi(1)} \times \cdots \times H_{\pi(4)})$$

damos início a construção de uma família consistente de medidas de probabilidade.

## 11. Movimento Browniano

Um Movimento Browniano ou um Processo de Wiener em uma dimensão é um processo estocástico $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$ definido sobre algum espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e satisfazendo as seguintes propriedades:

*i*) O processo inicia na origem, quase certamente, em $t = 0$. Mais precisamente

$$\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1; \tag{26}$$

*ii*) Os incrementos são independentes, isto é, para quaisquer $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ e quaisquer $H_j \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, com $j = 1, \ldots, k$ temos

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} \{W_{t_j} - W_{t_{j-1}} \in H_j\}\right) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}} \in H_j); \tag{27}$$

*iii*) para cada par $0 \leqslant s < t$ o incremento $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$, isto é, para todo $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ temos

$$\mathbb{P}(W_t - W_s \in H) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_H \exp\left(\frac{-x^2}{2(t-s)}\right) dx. \tag{28}$$

Mostrar a existência de um processo estocástico satisfazendo as condições *i*) − *iii*) é o objetivo central desta seção.

A ideia é mostrar que a família de medidas de probabilidade, definida para $k$-úplas ordenadas $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ e $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ por

$$\mu_{t_1,\ldots,t_k}(H) = \int_H \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(\frac{-(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})}\right) dx_1 \cdots dx_k, \tag{29}$$

satisfaz as condições de consistência (19), (20) e (21). Em seguida, estendemos esta família como em (22), obtendo finalmente uma família consistente de medidas de probabilidade $\{\mu_{t_1,\ldots,t_k}\}$. Uma convenção importante também a ser considerada é que devemos entender $\mu_{t_1}$, quando $t_1 = 0$ como sendo a medida delta de Dirac em zero, isto é, $\mu_0(\{0\}) = 1$. Isto é de certa forma natural porque esta medida de probabilidade corresponderia à distribuição de uma normal degenerada $N(0, 0)$.

Em seguida, vamos mostrar que o processo estocástico fornecido pelo Teorema da Existência de Kolmogorov (Teorema 9) satisfaz as condições (26), (27) e (28).

**Teorema 15.** Para cada $k \geqslant 1$ e cada $k$-úpla ordenada $\leqslant 0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ e para cada boreliano $H \in \mathscr{H} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ defina

$$\mu_{t_1,\ldots,t_k}(H) = \int_H \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(\frac{-(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})}\right) dx_1 \cdots dx_k, \tag{30}$$

com a convenção que $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ e $\mu_0 = \delta_{\{0\}}$. Além do mais, se $(t_1, \ldots, t_k)$ é $k$-úpla arbitrária de elementos distintos em $[0, +\infty)$ defina $\mu_{t_1,\ldots,t_k} \equiv \mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(k)}} \circ \varphi_\pi$, onde $\pi$ é a única permutação de $\{1, \ldots, k\}$ que induz a ordenação da lista $(t_1, \ldots, t_k)$. Então a coleção $\{\mu_{t_1,\ldots,t_k}\}$ forma uma família consistente de medidas de probabilidade.

**Prova**. Fixe $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$. Sejam $X_1, \ldots X_k$ variáveis aleatórias independentes com $X_j \sim N(0, t_j - t_{j-1})$ e $S_j \equiv X_1 + \ldots + X_j$. Como na Seção 10 temos

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ S_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ S_k \end{pmatrix}$$

Seja $A$ a transformação linear, agindo em $\mathbb{R}^k$, representada pela matriz quadrada que aparece no lado esquerdo da equivalência acima. Observe que segue do Teorema da Mudança de Variáveis as seguintes igualdades, para cada $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S \in H) = \mathbb{P}(A\mathbf{X} \in H) &= \mathbb{P}(\mathbf{X} \in A^{-1}H) \\
&= \int \cdots \int_{A^{-1}H} \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(\frac{-x_j^2}{2(t_j - t_{j-1})}\right) dx_1 \cdots dx_k \\
&\equiv \int \cdots \int_{A^{-1}H} f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_k)\, dx_1 \cdots dx_k \\
&= \int \cdots \int_{H} f_{\mathbf{X}} \circ A^{-1}(x_1, \ldots, x_k) |\mathrm{Det}(A^{-1})|\, dx_1 \cdots dx_k \\
&= \int \cdots \int_{H} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_k - x_{k-1})\, dx_1 \cdots dx_k \\
&= \int \cdots \int_{H} \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(\frac{-(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})}\right) dx_1 \cdots dx_k,
\end{aligned}$$

com a convenção, no primeiro termo do produtório acima, que $x_0 \equiv 0$.

Da igualdade acima concluímos que para cada inteiro $1 < i < k$ e todo $H_j \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ vale a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S \in H_1 \times \cdots \times H_{i-1} \times \mathbb{R} \times H_i \times \cdots \times H_k) \\
&\qquad = \mu_{t_1, \ldots, t_k}(H_1 \times \cdots \times H_{i-1} \times \mathbb{R} \times H_i \times \cdots \times H_k)
\end{aligned}$$

Além do mais a primeira expressão na igualdade acima satisfaz

$$\mathbb{P}(S \in H_1 \times \cdots \times H_{i-1} \times \mathbb{R} \times H_i \times \cdots \times H_k) = \mathbb{P}\left( \bigcap_{\substack{1 \leqslant j \leqslant k \\ j \neq i}} \{S_j \in H_j\} \right)$$

Para calcular a probabilidade que aparece no lado direito da igualdade acima, basta observar que o vetor $(S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k)$ tem densidade (marginal) dada por

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{k} \frac{\exp\left(\frac{-(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})}\right)}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} dx_i \\
&\qquad = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant k \\ j \notin \{i, i+1\}}} \frac{\exp\left(\frac{-(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})}\right)}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left(\frac{-(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right)}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \frac{\exp\left(\frac{-(x_{i+1} - x_i)^2}{2(t_{i+1} - t_i)}\right)}{\sqrt{2\pi(t_{i+1} - t_i)}} dx_i.
\end{aligned}$$

Para simplificar a expressão acima, vamos fazer uma mudança de variáveis na integral que aparece no lado direito para que possamos reconhecê-la como um produto de convolução. A ideia é usar a mudança de variáveis $t = x_i - x_{i-1}$ junto com a hipótese de $X_i$ e $X_{i+1}$ serem independentes e possuírem distribuição normal e o fato bem-conhecido que a soma de normais independentes é também uma normal cujos parâmetros são a soma dos parâmetros de cada parcela, isto é, $X_i + X_{i+1} \sim N(0, (t_i - t_{i-1}) + (t_{i+1} - t_i)) = N(0, t_{i+1} - t_{i-1})$. Logo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left(\frac{-(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right)}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \frac{\exp\left(\frac{-(x_{i+1} - x_i)^2}{2(t_{i+1} - t_i)}\right)}{\sqrt{2\pi(t_{i+1} - t_i)}} dx_i &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left(\frac{-t^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right)}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \frac{\exp\left(\frac{-(x_{i+1} - x_{i-1} - t)^2}{2(t_{i+1} - t_i)}\right)}{\sqrt{2\pi(t_{i+1} - t_i)}} dt \\
&= (f_{X_i} * f_{X_{i+1}})(x_{i+1} - x_{i-1}) \\
&= f_{X_i + X_{i+1}}(x_{i+1} - x_{i-1}) \\
&= \frac{\exp\left(\frac{-(x_{i+1} - x_{i-1})^2}{2(t_{i+1} - t_{i-1})}\right)}{\sqrt{2\pi(t_{i+1} - t_{i-1})}}.
\end{aligned}$$

Segue das igualdades estabelecidas acima que a densidade do vetor $(S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k)$ é dada por

$$\left[ \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant k \\ j \notin \{i, i+1\}}} \frac{\exp\left(\frac{-(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})}\right)}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \right] \frac{\exp\left(\frac{-(x_{i+1} - x_{i-1})^2}{2(t_{i+1} - t_{i-1})}\right)}{\sqrt{2\pi(t_{i+1} - t_{i-1})}}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\mu_{t_1, \ldots, t_k}(H_1 \times \cdots \times H_{i-1} \times \mathbb{R} \times H_i \times \cdots \times H_k) \\
&\qquad = \mathbb{P}(S \in H_1 \times \cdots \times H_{i-1} \times \mathbb{R} \times H_i \times \cdots \times H_k) \\
&\qquad = \mathbb{P}\left( \bigcap_{\substack{1 \leqslant j \leqslant k \\ j \neq i}} \{S_j \in H_j\} \right) \\
&\qquad = \mu_{t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_k}(H_1 \times \cdots \times H_{i-1} \times H_i \times \cdots \times H_k).
\end{aligned}$$

O que estabelece a validade da condição de consistência (19). A prova da validade das condições de consistência (20) e (21) são feitas de maneira completamente análogas, apenas adaptando a notação.

Para $k$-úplas não ordenadas $(t_1, \ldots, t_k)$ definimos $\mu_{t_1, \ldots, t_k} \equiv \mu_{t_{\pi(1)}, \ldots, t_{\pi(k)}} \circ \varphi_\pi$, onde $\pi$ é a única permutação que induz a ordenação da $k$-úpla $(t_1, \ldots, t_k)$. Pelos resultados apresentados na Seção 9 concluímos finalmente que a família $\{\mu_{t_1, \ldots, t_k}\}$ é uma família consistente de medidas de probabilidade. ■

**Teorema 16** (Existência do Movimento Browniano)**.** Seja $\{\mu_{t_1,\ldots,t_k}\}$ a família consistente de medidas de probabilidade definida no enunciado do Teorema 15. Então o processo estocástico $\{Z_t : t \in [0,+\infty)\}$ sobre $(\mathbb{R}^{[0,+\infty)}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, fornecido pelo Teorema 9 satisfaz as condições (26), (27) e (28).

**Prova**. Já que, por definição, $\mu_0 = \delta_{\{0\}}$ temos que

$$\mathbb{P}(Z_0 = 0) = \mathbb{P}(Z_0 \in \{0\}) = \mu_0(\{0\}) = 1,$$

mostrando que a condição (26) é satisfeita.

Dados $0 \leqslant s < t$, vamos determinar a distribuição da v.a. $Z_t - Z_s$. Para isto vamos usar o método do Jacobiano e em seguida, tomar uma marginal adequada.

Considere a mudança de variáveis $X \equiv Z_s$ e $Y \equiv Z_t - Z_s$. Já que esta é uma mudança de coordenadas linear, podemos representá-la matricialmente como segue

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_s \\ Z_t \end{pmatrix}, \qquad \text{com } A^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como já vimos na seção anterior, a inversa desta aplicação satisfaz

$$\begin{pmatrix} Z_s \\ Z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Portanto, temos para todo $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((X,Y) \in H) &= \mathbb{P}((Z_s, Z_t) \in AH) \\
&= \int_{AH} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(\frac{-x_1^2}{2s}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(\frac{-(x_2-x_1)^2}{2(t-s)}\right) dx_1 dx_2 \\
&\equiv \int_{AH} g(x_1, x_2 - x_1)\, dx_1 dx_2 \\
&= \int_H g \circ A(x_1, x_2 - x_1) \mathrm{Det}(A)\ dx_1 dx_2 \\
&= \int_H g(x_1, x_2)\ dx_1 dx_2 \\
&= \int_H \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(\frac{-x_1^2}{2s}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(\frac{-x_2^2}{2(t-s)}\right)\ dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

Tomando a marginal em $X$, podemos obter a distribuição de $Y \equiv Z_t - Z_s$. E neste caso temos para cada $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \in B) &= \mathbb{P}((X,Y) \in \mathbb{R} \times B) \\
&= \int_{\mathbb{R}\times B} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(\frac{-x_1^2}{2s}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(\frac{-x_2^2}{2(t-s)}\right)\ dx_1 dx_2 \\
&= \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(\frac{-x_2^2}{2(t-s)}\right)\ dx_2.
\end{aligned}$$

Mostrando que $Z_t - Z_s \sim N(0, t-s)$ e portanto a validade da condição (28).

Resta provar que a condição (27) é valida. Sejam $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ pontos em $[0, +\infty)$ e considere a vetor aleatório de coordenadas $(Z_{t_1} - Z_{t_0}, Z_{t_2} - Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}})$. Defina

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{t_1} \\ Z_{t_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ Z_{t_k} \end{pmatrix}$$

Note que $Y_j = Z_{t_j} - Z_{t_{j-1}}$, para todo $j = 1, \ldots, k$. Portanto, mostrar que as componentes do vetor aleatório $(Z_{t_1} - Z_{t_0}, Z_{t_2} - Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}})$ são independentes é equivalente a mostrar que as variáveis aleatórias $Y_j$'s são independentes. Para isto vamos determinar a densidade conjunta do vetor aleatório $(Y_1, \ldots, Y_k)$. Para facilitar a notação vamos denotar por $A^{-1}$ a transformação linear agindo em $\mathbb{R}^k$ representada pela matriz definida acima. Vamos denotar por $f$ a densidade da medida de probabilidade $\mu_{t_1,\ldots,t_k}$, ou seja,

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(\frac{-(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})}\right)$$

Logo, para qualquer $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((Y_1, \ldots, Y_k) \in H) &= \mathbb{P}(A^{-1}(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_k}) \in H) \\ &= \mathbb{P}((Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_k}) \in AH) \\ &= \int_{AH} f(x_1, \ldots, x_k)\, dx_1 \cdots dx_k. \\ &= \int_H f(x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \ldots + x_k) dx_1 \ldots dx_k \\ &= \int_H \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(\frac{-x_j^2}{2(t_j - t_{j-1})}\right) dx_1 \ldots dx_k. \end{aligned}$$

O que mostra que o as coordenadas do vetor aleatório $(Y_1, \ldots, Y_k)$ são independentes e consequentemente que as entradas do vetor aleatório $(Z_{t_1} - Z_{t_0}, Z_{t_2} - Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}})$ são independentes, estabelecendo a validade de (27). ■

## 12. Desigualdades Maximais

**Teorema 17** (Desigualdade Maximal de Kolmogorov)**.** Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ uma sequência de v.a.'s independentes satisfazendo $\mathbb{E}[X_n] = 0$ e $\mathrm{Var}(X_n) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como de costume para cada $k \geqslant 1$, denotamos por $S_k \equiv X_1 + \ldots + X_k$. Então para qualquer $\alpha > 0$ dado temos

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \alpha\right) \leqslant \frac{1}{\alpha^2} \mathrm{Var}(S_n), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Prova**. Fixe $\alpha > 0$ e para cada inteiro $k \in \mathbb{N}$, defina o evento $A_k \equiv A_k(\alpha) \in \mathscr{F}$ por

$$A_k \equiv \bigcap_{j=1}^{k-1} \{|S_j| < \alpha\} \cap \{|S_k| \geqslant \alpha\}.$$

Note que os eventos $A_k$'s são disjuntos, isto é, para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$ com $m \neq n$ temos $A_m \cap A_n = \varnothing$. Portanto segue da definição de esperança e das propriedades elementares da integral de Lebesgue que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n^2] &= \int_\Omega S_n^2 \, d\mathbb{P} \\
&\geqslant \sum_{k=1}^n \int_{A_k} S_n^2 \, d\mathbb{P} \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{A_k} \left[ S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k) + (S_n - S_k)^2 \right] d\mathbb{P} \\
&= \sum_{k=1}^n \left[ \int_{A_k} \left[ S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k) \right] d\mathbb{P} + \int_{A_k} (S_n - S_k)^2 \, d\mathbb{P} \right] \\
&\geqslant \sum_{k=1}^n \int_{A_k} \left[ S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k) \right] d\mathbb{P}. \qquad (31)
\end{aligned}$$

Por definição, podemos notar que $A_k$ e $S_k$ são mensuráveis segundo a sigma-álgebra $\sigma(X_1, \ldots, X_k)$. Por outro lado, $S_n - S_k \equiv X_{k+1} + X_{k+2} + \ldots + X_n$ é mensurável segundo a sigma-álgebra $\sigma(X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_n)$. Lembrando que $\mathbb{E}[X_k] = 0$, para todo $k \geqslant 1$, e consequentemente $\mathbb{E}[S_k] = 0$, para todo $k \geqslant 1$, e que os elementos da sequência $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ são independentes, segue do Lema do Agrupamento que

$$\begin{aligned}
\int_{A_k} [2S_k(S_n - S_k)] \, d\mathbb{P} &= 2 \int_\Omega \mathbb{1}_{A_k} \, S_k \, (S_n - S_k) \, d\mathbb{P} \\
&= 2\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k} \, S_k \, (S_n - S_k)] \\
&= 2\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k} \, S_k] \cdot \mathbb{E}[S_n - S_k] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Usando esta igualdade, no lado direito da desigualdade (31) podemos concluir que

$$\mathbb{E}[S_n^2] \geqslant \sum_{k=1}^n \int_{A_k} S_k^2 \, d\mathbb{P}.$$

Pela definição de $A_k$, podemos afirmar que a variável aleatória $S_k^2 \geq \alpha^2$, em $A_k$. Além do mais, o evento

$$\left\{ \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \alpha \right\} = \bigcup_{k=1}^n A_k.$$

Destas observações, lembrando que os $A_k$'s são disjuntos e da desigualdade acima temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n^2] \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} S_k^2 \, d\mathbb{P} &\geqslant \alpha^2 \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{A_k} \, d\mathbb{P} \\
&= \alpha^2 \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \\
&= \alpha^2 \mathbb{P}\left( \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \\
&= \alpha^2 \mathbb{P}\left( \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \alpha \right).
\end{aligned}$$

Já que $\mathbb{E}[S_n] = 0$, então temos que $\mathrm{Var}(S_n) = \mathbb{E}[S_n^2]$ e segue finalmente da desigualdade acima que

$$\mathbb{P}\left( \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \alpha \right) \leqslant \frac{1}{\alpha^2} \mathrm{Var}(S_n).$$

■

**Teorema 18** (Desigualdade Maximal de Etemadi)**.** Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes definidas em algum espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Então para cada $\alpha \geqslant 0$ a seguinte desigualdade é válida

$$\mathbb{P}\left( \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant 3\alpha \right) \leqslant 3 \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathbb{P}(|S_k| \geqslant \alpha).$$

**Prova**. Para cada $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $1 \leqslant k \leqslant n$, considere os seguintes eventos

$$B_k \equiv \bigcap_{j=1}^{k-1} \{|S_j| < 3\alpha\} \cap \{S_k \geqslant 3\alpha\}.$$

Segue diretamente da definição que $B_i \cap B_j = \varnothing$ se $i \neq j$, ou seja, os eventos $B_k$'s são disjuntos. Além do mais,

$$\begin{aligned}
\left\{ \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant 3\alpha \right\} &= \bigcup_{k=1}^{n} B_k \\
&= \left( \bigcup_{k=1}^{n} B_k \right) \cap \Big( \{|S_n| \geqslant \alpha\} \cup \{|S_n| < \alpha\} \Big) \\
&\subseteq \{|S_n| \geqslant \alpha\} \cup \left( \bigcup_{k=1}^{n} B_k \cap \{|S_n| < \alpha\} \right)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbb{P}\left( \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant 3\alpha \right) \leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant \alpha) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k \cap \{|S_n| < \alpha\})$$

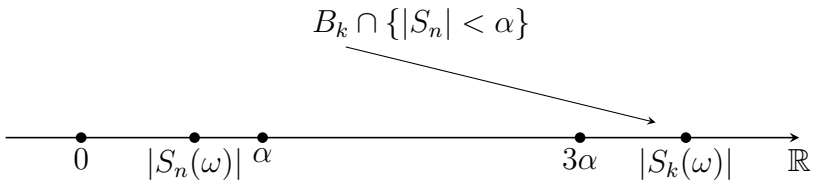



Figura 3: A ocorrência do evento $B_k \cap \{|S_n| < \alpha\}$ e a segunda desigualdade triangular implicam $2\alpha < |S_k| - |S_n| \leqslant |S_n - S_k|$

Note que o evento $B_k \cap \{|S_n| < \alpha\} \subseteq B_k \cap \{|S_n - S_k| > 2\alpha\}$. Além do mais, o evento $B_k \in \sigma(X_1, \ldots, X_k)$ e $\{|S_n - S_k| > 2\alpha\} \in \sigma(X_{k+1}, \ldots, X_n)$. Como estamos assumindo que as variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ são independentes segue que estes eventos são independentes. Portanto temos diretamente das observações acima que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant 3\alpha\right) &\leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant \alpha) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k \cap \{|S_n| < \alpha\}) \\
&\leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant \alpha) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k \cap \{|S_n - S_k| > 2\alpha\}) \\
&\leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant \alpha) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(|S_n - S_k| > 2\alpha) \\
&\leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant \alpha) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k) \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{P}(|S_n - S_k| > 2\alpha) \\
&\leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant \alpha) + \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{P}(|S_n - S_k| > 2\alpha) \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k) \\
&\leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant \alpha) + \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{P}(|S_n - S_k| > 2\alpha).
\end{aligned}$$

Já que $\{|S_n - S_k| > 2\alpha\} \subseteq \{|S_n| \geqslant \alpha\} \cup \{|S_k| \geqslant \alpha\}$ segue das desigualdades acima que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant 3\alpha\right) &\leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant \alpha) + \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{P}(|S_n - S_k| > 2\alpha) \\
&\leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant \alpha) + \max_{1\leqslant k\leqslant n} \Big(\mathbb{P}(|S_n| \geqslant \alpha) + \mathbb{P}(|S_k| \geqslant \alpha)\Big) \\
&\leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant \alpha) + \mathbb{P}(|S_n| \geqslant \alpha) + \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{P}(|S_k| \geqslant \alpha) \\
&\leqslant 3 \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{P}(|S_k| \geqslant \alpha). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Observação.** Note que se $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e de média zero, e se aplicamos a Desigualdade Maximal de Etemadi com $\alpha/3$ no lugar de $\alpha$ e em seguida, a desigualdade de Chebyshev e usamos a independência para cotar $\mathrm{Var}(S_k) \leqslant \mathrm{Var}(S_n)$, obtemos, a menos de um fator de 27, a Desigualdade Maximal de Kolmogorov. De fato,

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \alpha\right) \;\leqslant\; 3 \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{P}\left(|S_k| \geqslant \frac{\alpha}{3}\right) \;\leqslant\; 3 \max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{9}{\alpha^2}\mathrm{Var}(S_k) \;\leqslant\; \frac{27}{\alpha^2}\mathrm{Var}(S_n).$$

## 13. Modificações e Trajetórias Contínuas do Movimento Browniano

É natural esperar que se um processo estocástico $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$, definido sobre algum espaço de probabilidade, satisfazendo as condições (26), (27) e (28) pretende modelar uma das coordenadas do movimento de um partícula suspensa em algum fluído e que está sendo bombardeada por moléculas, então suas trajetórias deveriam ser pelo menos funções contínuas, como função do parâmetro $t$, ou pelo menos contínuas mas em algum sentido um pouco mais fraco. Na verdade, já seria bastante satisfatório, do ponto de vista da Teoria de Probabilidades, que as trajetórias fossem contínuas, como função de $t$, pelo menos, para quase toda realização do processo. Entretanto, não é possível concluir à partir de nenhuma das duas versões do Teorema da Extensão de Kolmogorov que estas propriedades desejadas necessariamente ocorra. Na verdade, a propriedade de continuidade das trajetórias, do ponto de vista da primeira versão do Teorema da Existência de Kolmogorov, parece ser uma propriedade extramente rígida. Vale lembrar que o espaço probabilidade onde mostramos a existência de um processo estocástico satisfazendo (26), (27) e (28), por meio do Teorema 16, é o espaço produto $(\mathbb{R}^{[0,+\infty)}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. No entanto vimos também no Corolário 12 que neste espaço o conjunto de todas as funções contínuas $C([0, +\infty), \mathbb{R})$ não é sequer um conjunto $\mathscr{F}$-mensurável. Para contornar esta (falsa) obstrução, vamos construir um novo processo à partir do processo dado pelo Teorema da Existência de Kolmogorov que possui a propriedade de ter, quase certamente, suas trajetórias contínuas. Além disto vamos ver que este novo processo preserva a importante propriedade que é ter suas distribuições finito-dimensionais idênticas à do processo original, fornecido pelo Teorema 16.

Sejam $D$ o conjunto dos números racionais diádicos não-negativos, isto é,

$$D \;=\; \left\{ \frac{k}{2^n} \;:\; k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

e $\{Z_t : t \in [0, +\infty)\}$ definido sobre $(\mathbb{R}^{[0,+\infty)}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ um Movimento Browniano fornecido pelo Teorema 16. Para cada $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ seja $I_{n,k}$ o intervalo da reta dado por

$$I_{n,k} \equiv \left[\tfrac{k}{2^n}, \tfrac{2+k}{2^n}\right]$$

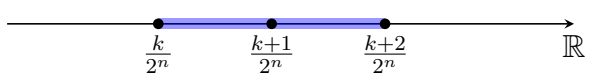



Figura 4: O intervalo $I_{n,k}$ contido na semi-reta $[0, +\infty)$

.

Para cada $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ defina as variáveis aleatórias

$$M_{n,k}(\omega) \equiv \sup_{r \in I_{n,k} \cap D} \left| Z_r(\omega) - Z_{\frac{k}{2^n}}(\omega) \right|$$

$$M_n(\omega) \equiv \max_{0 \leqslant k < n2^n} M_{n,k}(\omega).$$

Assuma que a série abaixo seja convergente, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left( M_n > \frac{1}{n} \right) < +\infty. \tag{32}$$

Então segue do Lema de Borel-Cantelli que o evento $B \equiv \{M_n > n^{-1}$, ocorrer infinitas vezes$\}$ tem probabilidade zero, ou seja

$$\mathbb{P}\left(M_n > \frac{1}{n}, \quad \text{ocorrer infinitas vezes}\right) = 0.$$

Desta forma, se $w \notin B$, então podemos afirmar que para cada $t \geqslant 0$ e $\varepsilon > 0$ dados, existe algum $n_0 \equiv n_0(t, \varepsilon, \omega) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ temos:

- $t < n$;
- $\dfrac{2}{n} < \varepsilon$;
- $M_n(\omega) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Tome $\delta \equiv 2^{-n}$ e sejam $r, s \in D \cap [0, t]$ um par de pontos satisfazendo $|r - s| < \delta$. Pela definição $I_{n,k}$, sabemos que existe algum inteiro não-negativo $k$, satisfazendo $0 \leqslant k \leqslant n2^n$ tal que $r, s \in I_{n,k-1} \cup I_{n,k}$.

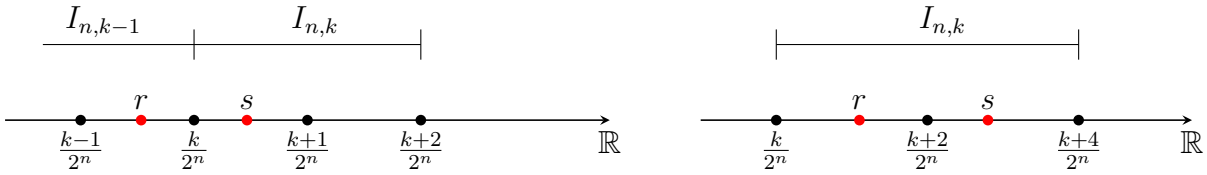



Figura 5: Para cada $n$ fixado, a condição $|r - s| < \delta$, implica que $r$ e $s$ pertencem à um mesmo $I_{n,k}$ ou à intervalos $I_{n,k}$'s consecutivos.

Neste caso, segue diretamente das definições de $M_{n,k}$ e $M_n$ que valem as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} |Z_r(\omega) - Z_s(\omega)| &\leqslant M_{n,k-1}(\omega) + M_{n,k}(\omega) \\ &\leqslant 2M_n(\omega) \leqslant \frac{2}{n} < \varepsilon, \qquad \forall r, s \in D \cap [0, t], \quad \text{tal que } |r - s| < \delta. \end{aligned}$$

Em resumo, as observações feitas acima, mostram que para cada $t \geqslant 0$ e $\omega \notin B$ fixados, que a função $D \cap [0, t] \ni r \longmapsto Z_r(\omega)$ é uniformemente contínua. É bem-conhecido que toda função uniformemente contínua definida em um subconjunto denso do intervalo $[0, t]$, admite uma extensão contínua à todo intervalo fechado $[0, t]$. Como $t \geqslant 0$ é arbitrário, podemos concluir que a aplicação $D \ni r \longmapsto Z_r(\omega)$ admite uma extensão contínua definida sobre o fecho de $D$ que é exatamente o intervalo $[0, +\infty)$. Ou seja, existe alguma função $[0, +\infty) \ni t \longmapsto \widetilde{Z}_t(\omega)$ contínua, que estende a aplicação $D \ni r \longmapsto Z_r(\omega)$. Além do mais, sabemos que

$$\widetilde{Z}_t(\omega) = \lim_{\substack{r \downarrow t \\ r \in D}} Z_r(\omega). \tag{33}$$

Se finalmente definimos o processo $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$ sobre $(\mathbb{R}^T, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ por

$$W_t(\omega) \equiv \begin{cases} \widetilde{Z}_t(\omega), & \text{se } \omega \notin B; \\ 0, & \text{se } \omega \in B, \end{cases} \tag{34}$$

então podemos concluir neste momento, a menos da prova da convergência em (32), que finalizamos a construção de um processo estocástico sobre $(\mathbb{R}^T, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ possuindo todas suas trajetórias contínuas! Mas como $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$ envolve uma modificação bastante elaborada do processo de coordenadas $\{Z_t : t \in [0, +\infty)\}$, definido no espaço produto $(\mathbb{R}^T, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, então precisamos ainda mostrar que as distribuições finito-dimensionais deste novo processo continuam satisfazendo as condições (26), (27) e (28). Feito isto aí sim poderemos afirmar que construímos um movimento Browniano ou Processo de Wiener possuindo trajetórias contínuas.

Vamos apresentar agora a prova de (32)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(M_n > \frac{1}{n}\right) < +\infty.$$

A ideia é usar a Desigualdade Maximal de Etemadi (Teorema 18). Já que os incrementos do processo $\{Z_t : t \in [0, +\infty)\}$ são independentes segue da Desigualdade Maximal de Etemadi, da Desigualdade de Markov e da identidade $\mathbb{E}[Z^4] = 3\sigma^4$, onde $Z \sim N(0, \sigma^2)$, que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{0 \leqslant i \leqslant 2^m} \left|Z_{t+\frac{\delta i}{2^m}} - Z_t\right| > \alpha\right) &= \mathbb{P}\left(\max_{0 \leqslant i \leqslant 2^m} \left|Z_{t+\frac{\delta i}{2^m}} - Z_t\right| \geqslant \alpha\right) \\
&\leqslant 3 \max_{0 \leqslant i \leqslant 2^m} \mathbb{P}\left(\left|Z_{t+\frac{\delta i}{2^m}} - Z_t\right| \geqslant \frac{\alpha}{3}\right) \\
&\leqslant 3 \max_{0 \leqslant i \leqslant 2^m} \frac{3^4}{\alpha^4} \mathbb{E}[(Z_{t+\frac{\delta i}{2^m}} - Z_t)^4] \\
&= \frac{3^5}{\alpha^4} \max_{0 \leqslant i \leqslant 2^m} 3 \cdot \left(\sqrt{\frac{\delta i}{2^m}}\right)^4 \\
&= \frac{K\delta^2}{\alpha^4}, \qquad \forall m \in \mathbb{N}. \qquad (35)
\end{aligned}$$

Importante observar que os números $K$, $\delta$ e $\alpha$ que aparecem na desigualdade acima, não dependem de $m$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, defina o evento

$$E_{m,t} \equiv \left\{\max_{0 \leqslant i \leqslant 2^m} \left|Z_{t+\frac{\delta i}{2^m}} - Z_t\right| > \alpha\right\}$$

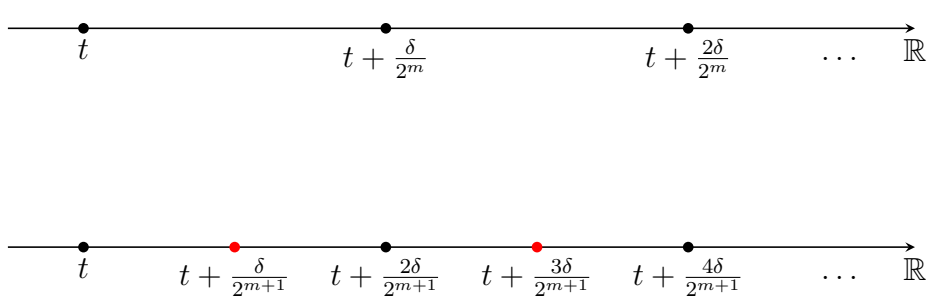



Figura 6: Observe que o valor absoluto das diferenças $\left|Z_{t+\frac{\delta i}{2^m}} - Z_t\right|$ que aparecem em $E_{m,t}$, também aparecem em $E_{m+1,t}$.

Por construção, temos que $E_{m,t} \subseteq E_{m+1,t}$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Desta forma a sequência $\{E_{m,t}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge e temos que

$$\lim_{m\to\infty} E_{m,t} = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{m,t} = \left\{ \sup_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ r\in D}} |Z_{t+r\delta} - Z_t| > \alpha \right\}$$

Usando a propriedade de continuidade da medida e a desigualdade (35) concluímos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left( \sup_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ r\in D}} |Z_{t+r\delta} - Z_t| > \alpha \right) &= \mathbb{P}\left( \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{m,t} \right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(E_{m,t}) \\
&= \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left( \max_{0\leqslant i\leqslant 2^m} \left| Z_{t+\frac{\delta i}{2^m}} - Z_t \right| > \alpha \right) \\
&\leqslant \frac{K\delta^2}{\alpha^4}. \qquad (36)
\end{aligned}$$

Das definições de $M_n$, $M_{n,k}$, $\delta = 2^{-n}$ e da desigualdade acima, concluímos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left( M_n > \frac{1}{n} \right) = \mathbb{P}\left( \max_{0\leqslant k<n2^n} M_{n,k} > \frac{1}{n} \right) &= \mathbb{P}\left( \max_{0\leqslant k<n2^n} \sup_{r\in I_{n,k}\cap D} \left| Z_r - Z_{\frac{k}{2^n}} \right| > \frac{1}{n} \right) \\
&= \mathbb{P}\left( \max_{0\leqslant k<n2^n} \sup_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2^m\\ m\in\mathbb{N}}} \left| Z_{\frac{k}{2^n}+\frac{i\delta}{2^m}} - Z_{\frac{k}{2^n}} \right| > \frac{1}{n} \right) \\
&= \mathbb{P}\left( \bigcup_{k=0}^{n2^n} \left\{ \sup_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2^m\\ m\in\mathbb{N}}} \left| Z_{\frac{k}{2^n}+\frac{i\delta}{2^m}} - Z_{\frac{k}{2^n}} \right| > \frac{1}{n} \right\} \right) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n2^n} \mathbb{P}\left( \sup_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2^m\\ m\in\mathbb{N}}} \left| Z_{\frac{k}{2^n}+\frac{i\delta}{2^m}} - Z_{\frac{k}{2^n}} \right| > \frac{1}{n} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n2^n} \mathbb{P}\left( \sup_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ r\in D}} \left| Z_{\frac{k}{2^n}+r\delta} - Z_{\frac{k}{2^n}} \right| > \frac{1}{n} \right) \\
&\leqslant (n2^n+1)\frac{K\delta^2}{(n^{-1})^4} \\
&\leqslant 2n2^n \frac{K(2^{-n})^2}{(n^{-1})^4} = \frac{2Kn^5}{2^n},
\end{aligned}$$

de onde segue imediatamente a validade de (32).

Próximo passo é mostrar que todas as distribuições finito-dimensionais do processo estocástico $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$ coincidem com as distribuições finito dimensionais do processo de coordenadas $\{Z_t : t \in [0, +\infty)\}$ sobre $(\mathbb{R}^{[0,+\infty)}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Para isto vamos usar os seguintes lemas, cujas as provas são apresentada abaixo por questão de completude.

**Lema 19.** Se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um sequência arbitrária de eventos em $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, então

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} E_n\right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) \leqslant \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right).$$

**Prova**. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $B_n \equiv \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$ e $C_n \equiv \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$. Então temos que

$$B_n \uparrow \liminf_{n\to\infty} E_n \qquad \text{e} \qquad C_n \downarrow \limsup_{n\to\infty} E_n.$$

Segue da propriedades de continuidade e monotonicidade da medida que

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) \leqslant \mathbb{P}(E_n) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} E_n\right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n)$$

Por outro lado, temos as seguintes desigualdades

$$\mathbb{P}(E_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) \leqslant \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right).$$

Assim, segue das propriedades elementares do liminf e do limsup que o lema está provado. ■

**Lema 20.** Seja $\{\mathbf{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de vetores aleatórios definidos em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e tomando valores em $\mathbb{R}^k$. Suponha que $\mathbf{X}_n \to \mathbf{X}$, quando $n \to \infty$, quase certamente. Seja $F_{\mathbf{X}_n} : \mathbb{R}^k \to [0, 1]$ a função de distribuição do vetor $\mathbf{X}_n$. Se existe alguma função contínua $G : \mathbb{R}^k \to [0, 1]$ tal que $F_{\mathbf{X}_n}(x) \to G(x)$, quando $n \to \infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^k$. Então $G = F_{\mathbf{X}}$, onde $F_{\mathbf{X}}$ é a função de distribuição do vetor $\mathbf{X}$.

**Prova**. Para facilitar a notação se $x, y$ são vetores em $\mathbb{R}^k$, vamos escrever $x \preccurlyeq y$ se $x_i \leqslant y_i$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Por hipótese, existe algum subconjunto $\mathscr{F}$-mensurável $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega$ tal que $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 1$ e para todo $\omega \in \widetilde{\Omega}$ temos $\mathbf{X}_n(\omega) \to \mathbf{X}(\omega)$. Logo, para cada vetor $x \in \mathbb{R}^k$ fixado temos que se

$$\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\mathbf{X}_n \preccurlyeq x\} \quad \Longrightarrow \quad \text{existe uma subsequência } \{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ tal que } \mathbf{X}_{n_k}(\omega) \preccurlyeq x.$$

Portanto

$$\omega \in \widetilde{\Omega} \bigcap \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\mathbf{X}_n \preccurlyeq x\} \right) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{X}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{X}_n(\omega) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{X}_{n_k}(\omega) \preccurlyeq x.$$

Da afirmação acima segue que

$$\widetilde{\Omega} \bigcap \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\mathbf{X}_n \preccurlyeq x\} \right) \subseteq \{\mathbf{X} \preccurlyeq x\}.$$

Já que $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 1$, então segue da expressão acima que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \{\mathbf{X}_n \preccurlyeq x\}\right) = \mathbb{P}\left( \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\mathbf{X}_n \preccurlyeq x\} \right) \leqslant \mathbb{P}(\mathbf{X} \preccurlyeq x).$$

Do Lema 19 e da desigualdade acima concluímos que

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathbf{X}_n \preccurlyeq x) \leqslant \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\{\mathbf{X}_n \preccurlyeq x\}\right) \leqslant \mathbb{P}(\mathbf{X} \preccurlyeq x).$$

Como por hipótese temos $F_{\mathbf{X}_n}(x) \to G(x)$, quando $n \to \infty$, segue da desigualdade acima que

$$G(x) = \limsup_{n\to\infty} F_{\mathbf{X}_n}(x) \leqslant F_{\mathbf{X}}(x). \tag{37}$$

Por outro lado, suponha que $\omega \in \{X \preccurlyeq x\} \cap \widetilde{\Omega}$. Sejam $\varepsilon > 0$ e $h = (\varepsilon, \ldots, \varepsilon)$ um vetor em $\mathbb{R}^k$. Como $\mathbf{X}_n(\omega) \to \mathbf{X}(\omega)$ e $\mathbf{X}(\omega) \preccurlyeq x$, sabemos das propriedades elementares de limites que existe algum $n_0 \equiv n_0(\omega, \varepsilon)$ tal que para todo $n \geqslant n_0$, temos $\mathbf{X}_n(\omega) \preccurlyeq x + h$. O que mostra que

$$\{X \preccurlyeq x\} \cap \widetilde{\Omega} \;\subseteq\; \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{\mathbf{X}_n \preccurlyeq x + h\}.$$

Usando novamente que $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 1$, a continência acima e o Lema 19 obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
F_{\mathbf{X}}(x) = \mathbb{P}(X \preccurlyeq x) &\leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{\mathbf{X}_n \preccurlyeq x + h\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty}\{\mathbf{X}_n \preccurlyeq x + h\}\right) \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathbf{X}_n \preccurlyeq x + h) \\
&= \liminf_{n\to\infty} F_{\mathbf{X}_n}(x + h) \\
&= G(x + h).
\end{aligned}$$

Como estamos assumindo que $G$ é contínua, podemos tomar o limite quando $\varepsilon \downarrow 0$, em ambos lados das desigualdades acima, concluindo que $F_{\mathbf{X}}(x) \leqslant G(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^k$. Segue desta desigualdade e de (37) que $F_{\mathbf{X}}(x) = G(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^k$. O que encerra a prova do lema. ■

⚠ Alertamos que para usar o lema acima é importante verificar que a função $G$ é contínua. O seguinte exemplo deixa isto claro. Sejam $X \equiv 0$ e $X_n = 1/n$ (v.a.'s determinística). Observe que $X_n \to X$, quase certamente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $F_n(x) = \mathbb{1}_{[(1/n),+\infty)}(x)$. Além do mais, $F_n(x) \to \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x) \equiv G(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Entretanto, $F_X(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$. Note que a função $G$, neste caso, não é sequer uma função de distribuição já que ela não é semi-contínua superiormente.

Abaixo enunciamos e provamos outro teorema fundamental na determinação das distribuições finito-dimensionais do Movimento Browniano que é o Teorema de Scheffe. Na sequência aplicando este teorema finalizamos a prova da existência de um movimento Browniano com trajetórias contínuas.

**Teorema 21** (Teorema de Scheffe)**.** Seja $(\Omega, \mathscr{F})$ um espaço mensurável $f : \Omega \to [0, +\infty]$ uma função $\mathscr{F}$-mensurável e para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : \Omega \to [0, +\infty]$ uma função $\mathscr{F}$-mensurável. Seja $\mu$ uma medida sobre $(\Omega, \mathscr{F})$ e considere as medidas $\nu$ e $\nu_n$ sobre $(\Omega, \mathscr{F})$ definidas por

$$\nu(E) \equiv \int_E f \, d\mu, \qquad \text{e} \qquad \nu_n(E) \equiv \int_E f_n \, d\mu, \qquad \forall E \in \mathscr{F},$$

respectivamente. Se

$$\nu_n(\Omega) = \nu(\Omega) < +\infty, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{38}$$

e se $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ em quase todo ponto, com respeito à $\mu$, então

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{E\in\mathscr{F}} |\nu(E) - \nu_n(E)| \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_E |f - f_n| \, d\mu = 0.$$

**Prova**. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $g_n \equiv f - f_n$. Seja $g_n^+$ a parte positiva de $g_n$. Segue da hipótese $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ em $\mu$-quase todo ponto que $g_n^+ \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, exceto num conjunto de medida $\mu$-nula. Além do mais, como $f$ e $f_n$ são funções não-negativas temos $f - f_n \leqslant f$, logo $(f - f_n)^+ \leqslant f^+ = f$ e portanto

$$0 \leqslant g_n^+ = (f - f_n)^+ \leqslant f, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que pela definição de $\nu$ e pela hipótese (38) temos que $f$ é $\mu$-integrável. Deste fato, das observações anteriores e do Teorema da Convergência Dominada segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n^+ \, d\mu = 0.$$

Observe que também segue diretamente da hipótese (38) que

$$\int_{\{g_n \geqslant 0\}} g_n \, d\mu + \int_{\{g_n < 0\}} g_n \, d\mu = \int_\Omega g_n \, d\mu = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{\{g_n \geqslant 0\}} g_n \, d\mu = -\int_{\{g_n < 0\}} g_n \, d\mu,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |g_n| \, d\mu &= \int_{\{g_n \geqslant 0\}} g_n \, d\mu - \int_{\{g_n < 0\}} g_n \, d\mu \\ &= 2 \int_{\{g_n \geqslant 0\}} g_n \, d\mu \\ &= 2 \int_\Omega g_n^+ \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Para finalizar observamos que segue das propriedades elementares da integral de Lebesgue que para qualquer $E \in \mathscr{F}$ temos

$$|\nu(E) - \nu_n(E)| = \left| \int_E f - f_n \, d\mu \right| \leqslant \int_E |f - f_n| \, d\mu \leqslant \int_E |g_n| \, d\mu \leqslant \int_\Omega |g_n| \, d\mu, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como a estimativa acima é uniforme em $E \in \mathscr{F}$ segue que

$$\sup_{E\in\mathscr{F}} |\nu(E) - \nu_n(E)| \leqslant \int_\Omega |g_n| \, d\mu, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Usando (39), a definição de $g_n$ e a desigualdade acima concluímos finalmente que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{E\in\mathscr{F}} |\nu(E) - \nu_n(E)| \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_E |f - f_n| \, d\mu = 0.$$

O que encerra a prova do teorema. ■

Nosso próximo passo é determinar as distribuições finito-dimensionais do processo estocástico $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$ definido por (33) e (34).

Seja $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ uma $k$-úpla de elementos de $[0, +\infty)$. Para cada $j = 1, \ldots k$ fixado seja $r_j(n)$ uma sequência em $D$ (racionais diádicos não-negativos) tal que $r_j(n) \downarrow t_j$, quando $n \to \infty$. Por (33) sabemos que o vetor aleatório $(Z_{r_1(n)}, \ldots, Z_{r_k(n)})$ converge quase certamente para o vetor aleatório $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k})$, quando $n \to \infty$.

Sejam $F_n$ a função de distribuição do vetor $(Z_{r_1(n)}, \ldots, Z_{r_k(n)})$ e $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ um vetor fixado. Então temos da construção do processo estocástico $\{Z_t : t \in [0, +\infty)\}$ que

$$F_n(y) = \int_{-\infty}^{y_k} \cdots \int_{-\infty}^{y_1} \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(r_j(n) - r_{j-1}(n))}} \exp\left(\frac{-(x_j - x_{j-1})^2}{2(r_j(n) - r_{j-1}(n))}\right) dx_1 \cdots dx_k,$$

Denote por $f_n : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f_n(x_1, \ldots, x_k) \equiv \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(r_j(n) - r_{j-1}(n))}} \exp\left(\frac{-(x_j - x_{j-1})^2}{2(r_j(n) - r_{j-1}(n))}\right)$$

Como $0 < t_1 < \ldots < t_k$ segue da continuidade das funções raíz-quadrada e exponencial que para todo $x \in \mathbb{R}^k$, temos $f_n(x) \to f(x)$, quando $n \to \infty$, onde

$$f(x_1, \ldots, x_k) \equiv \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(\frac{-(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})}\right).$$

Tomando a medida $\mu$ como sendo a Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^k$ e observando que as funções $f_n$ e $f$ são funções de densidade, com respeito a $\mu$, então concluímos que todas as hipóteses do Teorema de Scheffe (Teorema 21) são satisfeitas e logo podemos garantir que para qualquer $(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ fixado que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F_n(y_1, \ldots, y_k) &\equiv \int_{-\infty}^{y_k} \cdots \int_{-\infty}^{y_1} \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(\frac{-(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})}\right) dx_1 \cdots dx_k, \\ &\equiv G(y_1, \ldots, y_n).\end{aligned}$$

Como uma função definida em $\mathbb{R}^k$ é contínua, se e somente se, ela é contínua em cada coordenada, segue do Teorema de Fubini-Tonelli e do Teorema da Convergência Monótona, aplicado à cada coordenada separadamente, que $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Como $F_n$ é a função de distribuição do vetor aleatório $(Z_{r_1(n)}, \ldots, Z_{r_k(n)})$, $F_n$ converge para uma função contínua $G$ e $(Z_{r_1(n)}, \ldots, Z_{r_k(n)}) \to (W_{t_1}, \ldots, W_{t_k})$, então podemos aplicar o Lema 20 para garantir que $G$ é uma função de distribuição e mais $G$ é precisamente a função de distribuição do vetor aleatório $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k})$. Concluindo finalmente a prova de que o processo $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$ definido por (33) e (34) é um Movimento Browniano com trajetórias contínuas.

## 14. Mensurabilidade do Movimento Browniano

Nesta seção vamos mostrar a mensurabilidade do Movimento Browniano. Mais precisamente, vamos provar o seguinte teorema

**Teorema 22.** Se $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$ é um movimento Browniano contínuo como definido em (33) e (34), então $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$ é um processo estocástico mensurável sobre $(\mathbb{R}^{[0,+\infty)}), \mathscr{F})$, no sentido da Definição 4.

**Prova**. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\omega \in \mathbb{R}^{[0,+\infty)}$ defina a aplicação $W^{(n)} : [0, +\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$W^{(n)}(t, \omega) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)}(t) W_{\frac{k}{2^n}}(\omega).$$

Para verificar que a função acima está bem-definida, basta observar que para cada par $(t, \omega) \in [0, +\infty) \times \Omega$ fixado, a série que aparece acima é convergente pois, na verdade, esta série possui apenas uma parcela não-nula.

Vamos mostrar, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, que a função $W^{(n)}$ é uma função mensurável segundo a $\sigma$-álgebra produto $\mathscr{B}([0, +\infty)) \otimes \mathscr{F}$. De fato, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fixado, temos que a função $(t, \omega) \longmapsto \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)}(t)$ é claramente $\mathscr{B}([0, +\infty)) \otimes \mathscr{F}$-mensurável. Analogamente, verificamos que a função $(t, \omega) \longmapsto W_{\frac{k}{2^n}}(\omega)$ é $\mathscr{B}([0, +\infty)) \otimes \mathscr{F}$-mensurável. Portanto o produto destas duas funções é também mensurável. Como limite de somas parciais de funções mensuráveis é uma função mensurável podemos concluir que a função $(t, \omega) \longmapsto W^{(n)}(t, \omega)$ é $\mathscr{B}([0, +\infty)) \otimes \mathscr{F}$-mensurável.

Fixe um par $(t, \omega) \in [0, +\infty) \times \Omega$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ dado, existe um único $k(n, t) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{k(n,t)}{2^n} \leqslant t < \frac{k(n,t)+1}{2^n}.$$

Desta forma a única parcela não-nula de $W^{(n)}(t, \omega)$ é a correspondente ao índice $k = k(n, t)$ e portanto

$$W^{(n)}(t, \omega) = W_{\frac{k(n,t)}{2^n}}(\omega).$$

Note que segue da desigualdade acima que

$$\frac{k(n,t)}{2^n} \xrightarrow{n \to \infty} t.$$

Deste fato, da continuidade de $t \longmapsto W_t(\omega)$ e da igualdade acima concluímos que

$$\lim_{n \to \infty} W^{(n)}(t, \omega) = \lim_{n \to \infty} W_{\frac{k(n,t)}{2^n}}(\omega) = W_t(\omega).$$

Mas como limite pontual de sequências de funções mensuráveis é uma função mensurável e $(t, \omega) \longmapsto W^{(n)}(t, \omega)$ é $\mathscr{B}([0, +\infty)) \otimes \mathscr{F}$-mensurável concluímos finalmente que a aplicação

$$(t, \omega) \longmapsto W_t(\omega)$$

é $\mathscr{B}([0, +\infty)) \otimes \mathscr{F}$-mensurável. ■

## 15. Não Diferenciabilidade do Movimento Browniano

Nesta seção, apresentamos duas transformações de escala temporal que preservam integralmente a distribuição do processo de Wiener. A primeira pode ser interpretada como uma propriedade de auto-similaridade: ela afirma que a distribuição do Movimento Browniano $W_t$ permanece inalterada sob mudanças apropriadas das escalas de espaço e tempo. Essa invariância revela uma relação profunda entre as trajetórias em diferentes escalas.

A segunda transformação conecta, de maneira elegante, o comportamento do Movimento Browniano nas vizinhanças da origem e do infinito. Ela pode ser vista como uma ponte entre algumas propriedades locais e alguns fenômenos globais deste processo estocástico.

Em seguida, mostramos como essas duas ideias: auto-similaridade e conexão entre os comportamentos assintóticos na origem e no infinito, podem ser aplicadas ao estudo da não diferenciabilidade das trajetórias amostrais. Mais especificamente veremos como esta técnica nos permitem, em particular, comparar os valores dos quocientes incrementais na origem com o comportamento assintótico, no infinito.

**Teorema 23** (Auto-Similaridade)**.** Sejam $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$ um Movimento Browniano contínuo e $c > 0$ uma constante fixada. Então o processo estocástico $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$ definido por

$$X_t \equiv \frac{1}{c} W_{c^2 t} \tag{40}$$

é também um Movimento Browniano contínuo.

**Prova**. Para mostrar que o processo estocástico $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$ é um Movimento Browniano é necessário mostrar que este processo estocástico satisfaz (26), (27), (28) e que suas trajetórias amostrais são contínuas.

Primeiro, observamos que

$$\mathbb{P}(X_0 = 0) \;=\; \mathbb{P}\left(\frac{1}{c} W_0 = 0\right) \;=\; \mathbb{P}\left(W_0 = 0\right) = 1.$$

Observe que se $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ é uma $k$-úpla ordenada então $0 \leqslant c^2 t_1 < c^2 t_2 < \ldots < c^2 t_k$ e assim temos que o vetor aleatório

$$(X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) = \frac{1}{c}\left(W_{c^2 t_2} - W_{c^2 t_1}, \ldots, W_{c^2 t_k} - W_{c^2 t_{k-1}}\right)$$

possui coordenadas independentes.

Dados $s, t$ reais não-negativos com $s < t$, temos imediatamente da definição que $X_t - X_s$ possui distribuição Gaussiana com média zero e que sua variância é dada por

$$\mathrm{Var}(X_t - X_s) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{c}(W_{c^2 t} - W_{c^2 s})\right) = \frac{1}{c^2} \cdot (c^2(t - s)) = t - s.$$

Ou seja $X_t - X_s \sim N(0, t - s)$.

Como para cada $\omega \in \mathbb{R}^{[0,+\infty)}$ fixado, a aplicação $t \longmapsto X_t(\omega) = \frac{1}{c} W_{c^2 t}(\omega)$ pode ser vista como uma composição de funções contínuas, segue que $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$ possui trajetórias contínuas, encerrando a prova de que este processo estocástico é um Movimento Browniano. ■

Como a mudança introduzida em (40), nas escalas de espaço e tempo, revela a natureza auto-similar do Movimento Browniano é natural suspeitar que embora suas trajetórias sejam contínuas que elas devem ser altamente irregulares. Por exemplo, se deixamos o Movimento Browniano evoluir por um tempo $c$ suficientemente grande é natural esperar que com probabilidade muito alta, a inclinação de alguma reta secante ao gráfico de $W_t$, determinada por algum par de pontos $(s, W_s)$ e $(t, W_t)$, com $s$ e $t$ muito próximos seja maior ou igual que alguma constante arbitrária fixada. Mas se isto ocorre, então pela estacionariedade dos incrementos e pela invariância por escala seria plausível esperar que os quocientes incrementais próximos à origem também possa assumir valores arbitrariamente grande com alta probabilidade. Na sequência vamos mostrar como formalizar estas ideias e provar que as trajetórias do Movimento Browniano não são diferenciáveis em lugar algum quase certamente.

**Teorema 24.** Se $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$ um Movimento Browniano contínuo, então o processo estocástico $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$ definido por

$$X_t \equiv \begin{cases} t\, W_{\frac{1}{t}}, & \text{se } t > 0; \\ 0, & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

é um Movimento Browniano contínuo.

**Prova**. Como na proposição anterior precisamos provar que o processo $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$ satisfaz (26), (27), (28) e que suas trajetórias amostrais são contínuas.

Segue imediatamente da definição que $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$. Se $0 < t_1 < \ldots < t_k$, então temos que $t_k^{-1} < \ldots < t_1^{-1}$. Logo

$$(X_{t_2} - X_{t_1}, \ \ldots \ , \ X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) = \left( t_2 W_{\frac{1}{t_2}} - t_1 W_{\frac{1}{t_1}}, \ \ldots \ , \ t_k W_{\frac{1}{t_k}} - t_{k-1} W_{\frac{1}{t_{k-1}}} \right)$$

Para verificar a independência dos incrementos, o primeiro passo será reescrever cada coordenada do vetor acima como soma de duas normais independentes. Para facilitar a notação defina $s_j \equiv t_j^{-1}$ para cada $j = 1, \ldots, k$ e para cada $j = 2, \ldots, k$ defina

$$\begin{aligned} Y_j &\equiv (t_j - t_{j-1}) W_{\frac{1}{t_j}} + t_{j-1} W_{\frac{1}{t_j}} - t_{j-1} W_{\frac{1}{t_{j-1}}} \\ &= (t_j - t_{j-1}) W_{\frac{1}{t_j}} + t_{j-1} \left( W_{\frac{1}{t_j}} - W_{\frac{1}{t_{j-1}}} \right) \\ &= (t_j - t_{j-1}) W_{s_j} + t_{j-1} \left( W_{s_j} - W_{s_{j-1}} \right) \\ &= (t_j - t_{j-1})(W_{s_j} - W_0) - t_{j-1} \left( W_{s_{j-1}} - W_{s_j} \right). \end{aligned}$$

Como $0 < s_j < s_{j-1}$ temos que $Y_j$ é soma de normais independentes. Pela linearidade da esperança e pelas propriedades de $W_j$ temos imediatamente $Y_j$ tem média zero e

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y_j) &= (t_j - t_{j-1})^2 \mathrm{Var}(W_{s_j} - W_0) + t_{j-1}^2 \mathrm{Var}\left( W_{s_{j-1}} - W_{s_j} \right) \\ &= (t_j - t_{j-1})^2 s_j + t_{j-1}^2 (s_{j-1} - s_j) \\ &= t_j^2 s_j - 2 t_j t_{j-1} s_j + t_{j-1}^2 s_j + t_{j-1}^2 s_{j-1} - t_{j-1}^2 s_j \\ &= t_j - 2 t_{j-1} + t_{j-1} \\ &= t_j - t_{j-1}. \end{aligned}$$

Observe que a igualdade acima já estabelece a validade da propriedade (27). Portanto para finalizar a prova de que $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$ é um Movimento Browniano só resta finalizar a prova de que as componentes do vetor $(Y_2, \ldots, Y_k)$ são independentes. Como este é um vetor aleatório de coordenadas Gaussianas a independência de suas coordenadas é equivalente à mostrar que a matriz de covariância deste vetor é diagonal, isto é, $\mathrm{Cov}(Y_m, Y_n) = 0$ se $m \neq n$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $2 \leqslant m < n \leqslant k$ e neste caso temos:

$$\mathrm{Cov}(Y_m, Y_n) = \mathbb{E}[Y_m Y_n] - \mathbb{E}[Y_m]\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[Y_m Y_n]$$

$$\|$$

$$\mathbb{E}\left[\left[(t_m - t_{m-1})W_{s_m} - t_{m-1}\left(W_{s_{m-1}} - W_{s_m}\right)\right]\left[(t_n - t_{n-1})W_{s_n} - t_{n-1}\left(W_{s_{n-1}} - W_{s_n}\right)\right]\right]$$

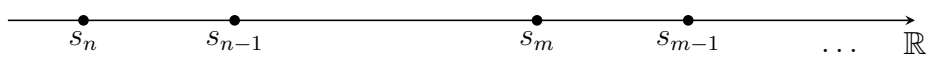
Pela linearidade da esperança a expressão acima pode ser decomposta como soma das seguintes quatro parcelas

*i)* $\mathbb{E}\left[(t_m - t_{m-1})W_{s_m} \times (t_n - t_{n-1})W_{s_n}\right]$

*ii)* $\mathbb{E}\left[(t_m - t_{m-1})W_{s_m} \times (-t_{n-1})\left(W_{s_{n-1}} - W_{s_n}\right)\right]$

*iii)* $\mathbb{E}\left[(-t_{m-1})\left(W_{s_{m-1}} - W_{s_m}\right) \times (t_n - t_{n-1})W_{s_n}\right]$

*iv)* $\mathbb{E}\left[(-t_{m-1})\left(W_{s_{m-1}} - W_{s_m}\right) \times (-t_{n-1})\left(W_{s_{n-1}} - W_{s_n}\right)\right]$




Vamos simplificar cada uma das quatro expressões que aparecem acima. Para a parcela correspondente ao item *i)* temos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(t_m - t_{m-1})W_{s_m} \times (t_n - t_{n-1})W_{s_n}\right] &= (t_m - t_{m-1})(t_n - t_{n-1})\mathbb{E}[W_{s_m}W_{s_n}] \\ &= (t_m - t_{m-1})(t_n - t_{n-1})\min\{s_m,\, s_n\} \\ &= (t_m - t_{m-1})(t_n - t_{n-1})s_n.\end{aligned}$$

Para a parcela do item *ii)* temos

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[(t_m - t_{m-1})W_{s_m} \times (-t_{n-1})\left(W_{s_{n-1}} - W_{s_n}\right)\right] \\ &\qquad = (t_m - t_{m-1})(-t_{n-1})\mathbb{E}[W_{s_m}\left(W_{s_{n-1}} - W_{s_n}\right)] \\ &\qquad = (t_m - t_{m-1})(-t_{n-1})\Big(\min\{s_m, s_{n-1}\} - \min\{s_m, s_n\}\Big) \\ &\qquad = (t_m - t_{m-1})(-t_{n-1})(s_{n-1} - s_n).\end{aligned}$$

A parcela correspondente ao item *iii)* se anula pois, os incrementos $W_{s_{m-1}} - W_{s_m}$ e $W_{s_n} = W_{s_n} - W_0$ são independentes e de média zero, assim

$$\mathbb{E}\left[(-t_{m-1})\left(W_{s_{m-1}} - W_{s_m}\right) \times (t_n - t_{n-1})W_{s_n}\right] = 0.$$

Analogamente, podemos verificar que a parcela correspondente ao item *iv*) se anula já que os incrementos $W_{s_{m-1}} - W_{s_m}$ e $W_{s_{n-1}} - W_{s_n}$ são independentes e de média zero, logo

$$\mathbb{E}\left[(-t_{m-1})\left(W_{s_{m-1}} - W_{s_m}\right) \times (-t_{n-1})\left(W_{s_{n-1}} - W_{s_n}\right)\right] = 0.$$

Somando todas as quatro identidades obtidas acima concluímos finalmente que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Y_m, Y_n) &= (t_m - t_{m-1})(t_n - t_{n-1})s_n + (t_m - t_{m-1})(-t_{n-1})(s_{n-1} - s_n) \\
&= (t_m - t_{m-1})t_n s_n - (t_m - t_{m-1})t_{n-1}s_n + (t_m - t_{m-1})(-t_{n-1})(s_{n-1} - s_n) \\
&= (t_m - t_{m-1}) - (t_m - t_{m-1})t_{n-1}s_n + (t_m - t_{m-1})(-t_{n-1})(s_{n-1} - s_n) \\
&= (t_m - t_{m-1}) - (t_m - t_{m-1})t_{n-1}s_n - (t_m - t_{m-1})t_{n-1}s_{n-1} + (t_m - t_{m-1})t_{n-1}s_n \\
&= (t_m - t_{m-1}) - (t_m - t_{m-1})t_{n-1}s_{n-1} \\
&= (t_m - t_{m-1}) - (t_m - t_{m-1}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esta última identidade, pelos comentários feitos acima, encerra a prova da propriedade (28).

Próximo passo é mostrar a continuidade das trajetórias. É claro que para cada $\omega \in \Omega$ a função $t \longmapsto X_t(\omega)$ é claramente contínua para em qualquer ponto $t > 0$, já que esta função é uma composição de duas funções contínuas. Para mostrar continuidade em $t = 0$ vamos precisar da desigualdade (36) que afirma que para todo $\delta > 0$, $\alpha > 0$ e $t \in [0, +\infty)$ fixado existe uma constante $K > 0$ (universal, independente de todos os parâmtetros) tal que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{\substack{0 \leqslant r \leqslant 1 \\ r \in D}} |Z_{t+r\delta} - Z_t| > \alpha\right) \leqslant \frac{K\delta^2}{\alpha^4}.$$

Em particular, tomando $t = n$, $\alpha = \dfrac{n\varepsilon}{2}$ e $\delta = 1$ obtemos

$$\mathbb{P}\left(\sup_{\substack{0 \leqslant r \leqslant 1 \\ r \in D}} |Z_{n+r} - Z_n| > \frac{\varepsilon n}{2}\right) \leqslant \frac{16K}{(\varepsilon n)^4}.$$

Usando a definição, a propriedade de continuidade de $W_t$ e a densidade de $D$, podemos tomar o supremo que aparece na expressão acima sobre todos pontos do intervalo $[0, 1]$ e portanto temos

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leqslant r \leqslant 1} |W_{n+r} - W_n| > \frac{\varepsilon n}{2}\right) \leqslant \frac{16K}{(\varepsilon n)^4}. \tag{41}$$

Já que $X_t = tW_{\frac{1}{t}}$, para $t > 0$, mostrar que $X_t \to 0$, quando $t \downarrow 0$ é equivalente a mostrar que

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{W_u}{u} = 0.$$

Primeiro vamos mostrar a validade da igualdade acima para o limite tomado ao longo de uma sequência particular $u_n = n$. Neste caso,

$$\frac{W_n}{n} = \frac{1}{n}\Big[(W_1 - W_0) + (W_2 - W_1) + \ldots (W_n - W_{n-1})\Big]$$

Como $W_j - W_{j-1} \sim N(0,1)$, e este incrementos são independentes e identicamente distribuídos, segue do Teorema da Lei Forte dos Grandes Números que $n^{-1}W_n \to 0$, quando $n \to \infty$, quase certamente.

Para apresentar um argumento válido para qualquer sequência $u_n \to \infty$ vamos precisar de uma desigualdade obtida na Seção 13.

Da desigualdade (41) e do Lema de Borel-Cantelli segue

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant r\leqslant 1} |W_{n+r} - W_n| > \frac{\varepsilon n}{2}, \quad \text{infinitas vezes}\right) \;=\; 0.$$

Portanto segue das duas últimas igualdades que existe algum subconjunto mensurável $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega$ tal que $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 1$ e para cada $\omega \in \widetilde{\Omega}$, existe algum $n_0 \equiv n_0(\varepsilon, \omega) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|W_{n+r}(\omega) - W_n(\omega)| \leqslant \frac{\varepsilon n}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{|W_n(\omega)|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall n \geqslant n_0.$$

Dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0$ como definido acima. É claro que para cada $u \geqslant n_0$, existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant n_0$ e $u \in [n, n+1]$. Logo segue das desigualdades acima que

$$\begin{aligned}
\frac{|W_u(\omega)|}{u} \leqslant \sup_{u\in[n,n+1]} \frac{|W_u(\omega)|}{u} &= \sup_{u\in[n,n+1]} \frac{|W_u(\omega) - W_n(\omega) + W_n(\omega)|}{u} \\
&\leqslant \sup_{u\in[n,n+1]} \frac{|W_u(\omega) - W_n(\omega)|}{u} + \frac{|W_n(\omega)|}{u} \\
&\leqslant \sup_{u\in[n,n+1]} \frac{|W_u(\omega) - W_n(\omega)|}{n} + \frac{|W_n(\omega)|}{n} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Mostrando que

$$\lim_{u\to\infty} \frac{W_u(\omega)}{u} = 0, \qquad \forall \omega \in \widetilde{\Omega}.$$

Como observado anteriormente isto implica que $X_t(\omega) \to 0$, quando $t \downarrow 0$. Mostrando a continuidade no zero, quase certamente. É claro que podemos modificar o processo $X_t$, definindo $X_t(\omega) \equiv 0$, para todo $\omega \notin \widetilde{\Omega}$ e assim poder afirmar que a conclusão da continuidade da trajetórias, na origem, é válida para todo $\omega \in \Omega$. Vale observar que esta modificação não altera nenhum das propriedades distribucionais do processo estocástico $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$ estabelecidas anteriormente. E assim finalizamos a prova de que $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$ é um Movimento Browniano continuo. ■

Como aplicação do Teorema 24 vamos mostrar que as trajetórias do Movimento Browniano não podem ser diferenciáveis na origem. A ideia é que a invariância pela mudança de escala de tempo obtida no Teorema 24 relaciona os quocientes incrementais na origem com o comportamento do movimento Browniano no infinito, já que

$$\frac{X_t - X_0}{t} = \frac{X_t}{t} = W_{\frac{1}{t}}, \qquad \forall t > 0.$$

Portanto

$$\exists \lim_{t \downarrow 0} \frac{X_t - X_0}{t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \lim_{t \downarrow 0} W_{\frac{1}{t}}.$$

Além do mais, se o limite à direita existe então a seguinte igualdade deve ser satisfeita.

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} W_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} W_n.$$

Desta forma para mostrar que o Movimento Browniano não é diferenciável na origem, quase certamente, é suficiente mostrar que o ínfimo e o supremo que aparecem acima não coincidem, quase certamente. Na verdade, algo mais dramático ocorre. Além deles diferirem, vamos provar que

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} W_n = -\infty \qquad \text{e} \qquad \sup_{n \in \mathbb{N}} W_n = +\infty$$

quase certamente.

De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $W_n = (W_1 - W_0) + (W_2 - W_1) + \ldots + (W_n - W_{n-1})$. Para $j = 1, \ldots, n$ defina $X_j \equiv W_j - W_{j-1}$. Como as variáveis aleatórias $X_j$'s correspondem a incrementos em intervalos consecutivos do Movimento Browniano, então estas variáveis aleatórias são independentes e além do mais cada uma delas possui distribuição normal padrão já que $X_j \equiv W_j - W_{j-1} \sim N(0,1)$.

Observe também que vale a seguinte igualdade

$$\left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} W_n < +\infty \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \left\{ \max_{0 \leqslant i \leqslant m} W_i \leqslant k \right\}$$

Além do mais, afirmamos que para cada $m \in \mathbb{N}$, fixado valem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} W_n < +\infty \right\} &= \left\{ \sup_{n \in [m, +\infty) \cap \mathbb{N}} (W_n - W_m) < +\infty \right\} \\ &= \left\{ \sup_{n \in [m, +\infty) \cap \mathbb{N}} \sum_{j=m+1}^{n} X_j \right\} \in \sigma(X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots). \end{aligned}$$

A segunda igualdade e a pertinência à $\sigma$-álgebra $\sigma(X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots)$ são de verificação imediata à partir das definições. Assim resta mostrar a validade da primeira igualdade.

Suponha que

$$\omega \in \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} W_n < +\infty \right\}.$$

Então para qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$ fixado, temos $W_m(\omega) < +\infty$. Além do mais, segue das propriedades do supremo que

$$\begin{aligned}\sup_{n\in[m,+\infty)\cap\mathbb{N}} W_n(\omega) - W_m(\omega) &= -W_m(\omega) + \sup_{n\in[m,+\infty)\cap\mathbb{N}} W_n(\omega) \\ &\leqslant -W_m(\omega) + \sup_{n\in\mathbb{N}} W_n(\omega) \\ &< +\infty.\end{aligned}$$

O que mostra que se

$$\omega \in \left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} W_n < +\infty\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega \in \left\{\sup_{n\in[m,+\infty)\cap\mathbb{N}} (W_n - W_m) < +\infty\right\}.$$

Reciprocamente, suponha que

$$\omega \in \left\{\sup_{n\in[m,+\infty)\cap\mathbb{N}} (W_n - W_m) < +\infty\right\}$$

Então

$$\sup_{n\in[m,+\infty)\cap\mathbb{N}} (W_n(\omega) - W_m(\omega)) < +\infty$$

Observando que para $m = n$ a diferença que aparece acima é exatamente zero e usando novamente as propriedades elementares do supremo podemos afirmar que

$$0 \leqslant -W_m(\omega) + \sup_{n\in[m,+\infty)\cap\mathbb{N}} W_n(\omega) < +\infty$$

Como o processo coordenado toma apenas valores reais então $W_0(\omega), W_1(\omega), \ldots, W_{m-1}(\omega)$ são finitos. Logo segue da desigualdade acima que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} W_n(\omega) < +\infty.$$

O que mostra que se

$$\omega \in \left\{\sup_{n\in[m,+\infty)\cap\mathbb{N}} (W_n - W_m) < +\infty\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega \in \left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} W_n < +\infty\right\}.$$

Estabelecendo finalmente a igualdade que queríamos provar.

Em resumo, mostramos que para qualquer $m \in \mathbb{N}$ fixado que

$$\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} W_n < +\infty\right\} \in \sigma(X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots) \implies \left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} W_n < +\infty\right\} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \sigma(X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots).$$

Portanto o evento

$$\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} W_n < +\infty\right\} \in \mathscr{T}, \qquad \text{onde } \mathscr{T} \equiv \bigcap_{m=1}^{\infty} \sigma(X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots)$$

e $\mathscr{T}$ é a chamada $\sigma$-álgebra caudal. Já que as variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são independentes segue da Lei 0-1 de Kolmogorov que o evento acima só pode ter probabilidade zero ou um.

É claro que $-X_1, -X_2, \ldots$ possuem as mesmas distribuições conjuntas que $X_1, X_2, \ldots$ e usando as relações elementares entre menos o ínfimo e o supremo e raciocinando analogamente ao exposto acima, concluímos que o evento abaixo é um evento caudal, isto é, pertence à $\sigma$-álgebra $\mathscr{T}$ e portanto também só pode ter probabilidade zero ou um

$$\left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} W_n > -\infty\right\} \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\left\{\max_{0\leqslant i\leqslant m}(-W_i) \leqslant k\right\}.$$

Suponha, por contradição, que ambos eventos tenham probabilidade um, isto é,

$$\mathbb{P}\left(\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} W_n < +\infty\right\}\right) \;=\; 1 \;=\; \mathbb{P}\left(\left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} W_n > -\infty\right\}\right).$$

Então temos que a interseção deste eventos também tem probabilidade um. Portanto,

$$\mathbb{P}\left(\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} |W_n| < +\infty\right\}\right) \;=\; 1.$$

Da igualdade acima e da propriedade de continuidade da probabilidade, podemos afirmar que existe algum $x \in [0, +\infty)$ tal que

$$0 < \mathbb{P}\left(\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} |W_n| < x\right\}\right).$$

Como para cada $m \in \mathbb{N}$, temos que

$$\mathbb{P}\left(\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} |W_n| < x\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\{|W_j| < x\}\right) \leqslant \mathbb{P}(|W_m| < x) = \mathbb{P}\left(|W_1| < \frac{x}{\sqrt{m}}\right).$$

Usando novamente a propriedade de continuidade da probabilidade concluímos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} |W_n| < x\right\}\right) &= \lim_{m\to\infty}\mathbb{P}\left(\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} |W_n| < x\right\}\right)\\ &\leqslant \lim_{m\to\infty}\mathbb{P}\left(|W_1| < \frac{x}{\sqrt{m}}\right) = \mathbb{P}\left(|W_1| = 0\right) = 0.\end{aligned}$$

O que é um contradição. Desta contradição e da possibilidade da probabilidade acima pode assumir apenas os valores zero ou um segue que

$$\mathbb{P}\left(\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} W_n < +\infty\right\}\right) \;=\; 0 \;=\; \mathbb{P}\left(\left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} W_n > -\infty\right\}\right).$$

Mostrando que finalmente que temos quase certamente

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} W_n = -\infty \qquad \text{e} \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} W_n = +\infty \tag{42}$$

e consequentemente

$$\nexists \lim_{t\downarrow 0} W_{\frac{1}{t}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nexists \lim_{t\downarrow 0}\frac{X_t - X_0}{t}.$$

Finalizando a prova de que o Movimento Browniano não é diferenciável na origem quase certamente.

**Teorema 25.** Para $\omega \notin N$, onde $N \subset \Omega$ com $\mathbb{P}(N) = 0$ a aplicação $t \longmapsto W_t(\omega)$ **não** é diferenciável em nenhum ponto de $[0, +\infty)$

**Prova**. Vamos apresentar um argumento direto, no sentido que ele é independente das propriedades de invariância estabelecidas nos Teorema 23 e Teorema 24.

Para $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ defina

$$X_{n,k} \equiv \max\left\{\left|W_{\frac{k+1}{2^n}} - W_{\frac{k}{2^n}}\right|, \left|W_{\frac{k+2}{2^n}} - W_{\frac{k+1}{2^n}}\right|, \left|W_{\frac{k+3}{2^n}} - W_{\frac{k+2}{2^n}}\right|\right\}. \tag{43}$$

Observe que segue da independência e do fato de que cada um dos incrementos que aparecem acima ter a mesma distribuição e igual a distribuição de $2^{-\frac{n}{2}}W_1$ que temos a seguinte igualdade

$$\mathbb{P}(X_{n,k} \leqslant \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=k}^{k+2}\left|W_{\frac{j+1}{2^n}} - W_{\frac{j}{2^n}}\right| \leqslant \varepsilon\right) = \left[\mathbb{P}\left(\left|2^{-\frac{n}{2}}W_1\right| \leqslant \varepsilon\right)\right]^3 = \left[\mathbb{P}\left(|W_1| \leqslant 2^{\frac{n}{2}}\varepsilon\right)\right]^3$$

Para estimar o lado direito da igualdade acima basta observar que a densidade de uma variável aleatória normal padrão é uniformemente limitada por um o que fornece a seguinte estimativa

$$\mathbb{P}\left(|W_1| \leqslant 2^{\frac{n}{2}}\varepsilon\right) = \int_{-2^{\frac{n}{2}}\varepsilon}^{2^{\frac{n}{2}}\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \leqslant 2 \times 2^{\frac{n}{2}}\varepsilon.$$

O que implica, junto com a igualdade acima que

$$\mathbb{P}(X_{n,k} \leqslant \varepsilon) \leqslant 8 \times 2^{\frac{3n}{2}}\varepsilon^3.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina a variável aleatória

$$Y_n \equiv \min_{0 \leqslant k \leqslant n2^n} X_{n,k}$$

Usando a sub-$\sigma$-aditividade de $\mathbb{P}$ e as desigualdades obtidas acima, ficamos com

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n \leqslant \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n2^n}\{X_{n,k} \leqslant \varepsilon\}\right) &\leqslant \sum_{k=0}^{n2^n} \mathbb{P}\left(X_{n,k} \leqslant \varepsilon\right) \\
&\leqslant (n2^n + 1)\left[\mathbb{P}\left(|W_1| \leqslant 2^{\frac{n}{2}}\varepsilon\right)\right]^3 \\
&\leqslant (n2^n + 1)8 \times 2^{\frac{3n}{2}}\varepsilon^3.
\end{aligned} \tag{44}$$

Para provar o teorema vamos considerar as derivadas laterais à direita, superior e inferior, de uma trajetória amostral arbitrária $t \longmapsto W_t(\omega)$ que são definidas, respectivamente, pelas seguintes expressões

$$D_+^{\sup} W_t(\omega) \equiv \limsup_{h \downarrow 0} \frac{W_{t+h}(\omega) - W_t(\omega)}{h} \qquad \text{e} \qquad D_+^{\inf} W_t(\omega) \equiv \liminf_{h \downarrow 0} \frac{W_{t+h}(\omega) - W_t(\omega)}{h}.$$

Próximo passo é considerar um subconjunto $E \subseteq \Omega$, não necessariamente $\mathscr{F}$-mensurável, onde uma trajetória poderia possivelmente possuir derivada em algum ponto $t_0 \in [0, +\infty)$. Este conjunto é definido da seguinte maneira:

$$E \equiv \left\{\omega \in \Omega \,:\, \exists t_0 \in [0, +\infty) \text{ para o qual } \quad |D_+^{\sup} W_{t_0}(\omega)| < +\infty \quad |D_+^{\inf} W_{t_0}(\omega)| < +\infty\right\}.$$

A ideia é mostrar que $E$ é um subconjunto de algum subconjunto $\mathscr{F}$-mensurável que tem probabilidade nula.

Suponha que $\omega \in E$. Então existe algum $t_0 \in [0, +\infty)$ e alguma constante real $K \equiv K(t_0, \omega) \in (0, +\infty)$ tal que

$$-K < D_+^{\inf} W_{t_0}(\omega) \leqslant D_+^{\sup} W_{t_0}(\omega) < K.$$

Note que segue das desigualdades acima e das definições de lim inf e lim sup que existe algum $\delta \equiv \delta(t_0, \omega, K) > 0$ tal que

$$|W_s(\omega) - W_{t_0}(\omega)| \leqslant K|s - t_0|, \qquad t_0 \leqslant s \leqslant t_0 + \delta. \tag{45}$$

Seja $n_0 \equiv n_0(K, t_0, \delta, \omega) \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geqslant n_0$ temos:

$$\frac{4}{2^n} < \delta, \qquad 8K < n \qquad \text{e} \qquad t_0 < n. \tag{46}$$

Fixado $n \geqslant n_0$, seja $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{k-1}{2^n} \leqslant t_0 < \frac{k}{2^n}. \tag{47}$$

Então segue das desigualdades acima que para $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ temos

$$\frac{k+j}{2^n} - t_0 \leqslant \frac{k+j}{2^n} - \frac{k-1}{2^n} = \frac{j-1}{2^n} < \frac{4}{2^n} \qquad \text{e} \qquad t_0 - \frac{k+j}{2^n} < \frac{k}{2^n} - \frac{k+j}{2^n} = \frac{-j}{2^n} < \frac{4}{2^n}.$$

Combinando as duas desigualdades acima, podemos afirmar que para $j = 0, \ldots, 3$ temos

$$\left| \frac{k+j}{2^n} - t_0 \right| < \frac{4}{2^n} < \delta. \tag{48}$$

Tomando $n \geqslant n_0$, escolhendo $k \in \mathbb{N}$ de forma que (47) seja satisfeita, em seguida, usando a primeira desigualdade em (48), a desigualdade (45) e finalmente a desigualdade $8K < n$ que aparece em (46) podemos verificar que

$$\begin{aligned}
X_{n,k}(\omega) &\equiv \max\left\{ \left| W_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) - W_{\frac{k}{2^n}}(\omega) \right|, \left| W_{\frac{k+2}{2^n}}(\omega) - W_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) \right|, \left| W_{\frac{k+3}{2^n}}(\omega) - W_{\frac{k+2}{2^n}}(\omega) \right| \right\} \\
&= \max_{1 \leqslant j \leqslant 3} \left| W_{\frac{k+j}{2^n}}(\omega) - W_{\frac{k+j-1}{2^n}}(\omega) \right| \\
&\leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant 3} \left| W_{\frac{k+j}{2^n}}(\omega) - W_{t_0}(\omega) \right| + \max_{1 \leqslant j \leqslant 3} \left| W_{t_0}(\omega) - W_{\frac{k+j-1}{2^n}}(\omega) \right| \\
&< 2K \frac{4}{2^n} \\
&< \frac{n}{2^n}.
\end{aligned}$$

Observe também que segue da escolha de $n$ em (46) e de $k$ em (47) que temos a seguinte desigualdade $k-1 \leqslant t_0 2^n < n2^n$. Logo segue da definição de $Y_n$ e da desigualdade obtida acima para $X_{n,k}(\omega)$ que

$$Y_n(\omega) \equiv \min_{0 \leqslant k \leqslant n2^n} X_{n,k}(\omega) \leqslant \frac{n}{2^n}.$$

Esta desigualdade mostra, em particular, que se $\omega \in E$, então existe algum inteiro positivo $n_0 \equiv n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geqslant n_0$ então $\omega \in \{Y_n \leqslant n2^{-n}\} \equiv A_n$. Observe que $A_n$ é um elemento da $\sigma$-álgebra $\mathscr{F}$. Como a observação acima vale para todo $\omega \in E$, então temos que

$$\omega \in E \qquad \Longrightarrow \qquad \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n \equiv \liminf_{n\to\infty} A_n \equiv N \qquad \Longrightarrow \qquad E \subseteq N.$$

Usando a desigualdade (44) com $\varepsilon = n2^{-n}$ obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(Y_n \leqslant n2^{-n}) &\leqslant (n2^n+1)8 \times 2^{\frac{3n}{2}} \frac{n^3}{2^{3n}} \\
&= \frac{(n2^n+1)8}{2^n} \times \frac{2^{\frac{3n}{2}} n^3}{2^{2n}} \\
&\leqslant \frac{(2n2^n)8}{2^n} \times \frac{2^{\frac{3n}{2}} n^3}{2^{2n}} \\
&= 16n \times \frac{2^{\frac{3n}{2}} n^3}{2^{2n}} \\
&= 16 \frac{n^4}{2^{\frac{n}{2}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Aplicando agora o Lema 19 e usando a desigualdade acima concluímos finalmente que

$$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}\left( \liminf_{n\to\infty} A_n \right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0.$$

Assim se um ponto $\omega \notin N$, então $\omega \notin E$. Observando que segue diretamente da definição de $E$ que

$$E^c = \left\{ \omega \in \Omega \,:\, \forall t_0 \in [0,+\infty) \text{ temos } \quad |D_+^{\sup} W_{t_0}(\omega)| = +\infty \quad \text{ou} \quad |D_+^{\inf} W_{t_0}(\omega)| = +\infty \right\}.$$

Então concluímos que se $\omega \notin N$, então as derivadas superior e inferior à direita da trajetória $t \longmapsto W_t(\omega)$, não existem em nenhum ponto $t \in [0,+\infty)$. O que encerra a prova de que fora de um conjunto de medida zero, as trajetórias do Movimento Browniano não são diferenciáveis em nenhum ponto. ■

## 16. Completamento do Espaço Produto

Na seção anterior prova um resultado bem peculiar, do ponto de vista da Teoria da Probabilidade. Mostramos que subconjunto $E \subset \Omega$, onde o Movimento Browniano não é diferenciável em ponto algum de $[0, +\infty)$ está contido em um outro subconjunto de $N \subset \Omega$ este, por sua vez, mensurável e de probabilidade nula. Como não é possível garantir que $E \in \mathscr{F}$ a rigor, não faz sentido atribuir probabilidade a este conjunto.

Uma maneira de evitar discussões como estas para outros tipos de eventos envolvendo o movimento Browniano é trabalhar no completamento, no sentido de Medida, do espaço produto $(\mathbb{R}^{[0,+\infty)}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. A construção do completamento é clássica e feita em praticamente todos os livros sobre Medida e Integração, o leitor pode, por exemplo, ver a referência [2]. A ideia é considerar uma nova $\sigma$-álgebra que denotamos por $\overline{\mathscr{F}}$ que contém $\mathscr{F}$ e também a coleção de todos os subconjuntos de cada conjunto de medida nula de $\mathscr{F}$. Em seguida, mostrar que $\mathbb{P}$ se estende naturalmente à uma medida de probabilidade, digamos $\overline{\mathbb{P}}$, definida sobre esta nova $\sigma$-álgebra $\overline{\mathscr{F}}$. Esta extensão é feita de modo que os subconjuntos dos conjuntos de medida $\mathbb{P}$-nula possuam medida nula e também de forma que os conjuntos de medida positiva não tenha suas medidas alteradas. Este procedimento é conhecido como completamento. Por causa da última observação não há perda de generalidade de assumir daqui para frente que quando nos referimos ao espaço onde o Movimento Browniano está definido $(\mathbb{R}^{[0,+\infty)}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ $\mathscr{F}$ não é mais a $\sigma$-álgebra produto e sim seu completamento com respeito à $\mathbb{P}$. Observação análoga vale para a medida $\mathbb{P}$ ela é substituída pela extensão mencionada acima.

## 17. Propriedade Forte de Markov

Seja $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$ um Movimento Browniano contínuo e fixe $t_0 \in [0, +\infty)$ e defina

$$X_t \equiv W_{t_0+t} - W_{t_0}, \qquad \forall t \in [0, +\infty). \tag{49}$$

Podemos verificar imediatamente que $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$ satisfaz as propriedades (26), (27) e (28) e também possui trajetórias contínuas e portanto é um Movimento Browniano contínuo.

Para cada $t \in [0, +\infty)$ fixado defina

$$\mathscr{F}_t \equiv \sigma(W_s : s \leqslant t).$$

Vamos mostrar que a família de variáveis aleatórias $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$ é independente de $\mathscr{F}_{t_0}$. Para isto sejam $0 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_j \leqslant t_0$ e $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < s_k$. Defina $u_i = t_0 + t_i$. Usando que os incrementos de $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$ são independentes temos que as coordenadas do vetor aleatório abaixo

$$(X_{t_1},\, X_{t_2} - X_{t_1},\, \ldots,\, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) = (W_{u_1} - W_{t_0},\, W_{u_2} - W_{u_1},\, \ldots,\, W_{u_k} - W_{u_{k-1}})$$

são independentes das coordenadas do vetor aleatório

$$(W_{s_1}, W_{s_2} - W_{s_1}, \ldots, W_{s_j} - W_{s_{j-1}}).$$

Portanto segue do Lema do Agrupamento que o vetor $(X_{t_1},\, X_{t_2} - X_{t_1},\, \ldots,\, X_{t_k} - X_{t_{k-1}})$ é independentes da $\sigma$-álgebra $\mathscr{F}_{t_0}$.

Como simples consequência do fato estabelecido acima, temos para todo $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ e $A \in \mathscr{F}_{t_0}$ que valem as seguintes igualdades.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\{(X_{t_1}, \dots X_{t_k}) \in H\} \cap A\Big) &= \mathbb{P}\Big(\{(X_{t_1}, \dots X_{t_k}) \in H\}\Big)\mathbb{P}(A) \\ &= \mathbb{P}\Big(\{(W_{t_1}, \dots W_{t_k}) \in H\}\Big)\mathbb{P}(A). \qquad (50)\end{aligned}$$

O que queremos fazer nesta seção é estender este fatos para o caso em que substituímos $t_0$ por um **tempo de parada** $\tau$, isto é, uma variável aleatória $\tau : \Omega \to [0, +\infty]$ para a qual

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t, \qquad \forall t \in [0, +\infty).$$

Vamos assumir que $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$. Observe que segue da igualdade

$$\{\tau = t\} = \{\tau \leqslant t\} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{\tau \leqslant t - \frac{1}{n}\right\}$$

que o evento

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) = t\} \in \mathscr{F}_t, \qquad \forall t \in [0, +\infty). \qquad (51)$$

Observe que os enventos em $\mathscr{F}_{t_0}$ são aqueles que contem apenas informações do "passado" do Movimento Browniano até o instante $t_0$. Para o desenvolvimento da teoria vamos precisar da ideia análoga mas com $\tau$ no lugar de $t_0$. Para isto vamos primeiro considerar a coleção $\mathscr{F}_\tau$ definida como segue

$$\mathscr{F}_\tau \equiv \{M \in \mathscr{F} : \ M \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t, \quad \forall t \in [0, +\infty).\}$$

**Proposição 26.** Seja $\tau : \Omega \to \mathbb{R}$ um tempo de parada, com respeito à $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$. Então a coleção $\mathscr{F}_\tau$ definida acima é uma sub-$\sigma$-álgebra de $\mathscr{F}$ e além do mais $\tau : \Omega \to [0, +\infty]$ é $\mathscr{F}_\tau$-mensurável.

**Prova**. É claro que $\varnothing$ e $\Omega$ pertencem à $\mathscr{F}_\tau$. Suponha que $M \in \mathscr{F}_\tau$, então para cada $t \in [0, +\infty)$ temos que $M \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t$. Como $\mathscr{F}_t$ é uma sub-$\sigma$-álgebra podemos afirmar que $M^c \cup \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant t\}^c \in \mathscr{F}_t$. Como $\tau$ é tempo de parada é claro que $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t$. Logo a interseção deste dois últimos conjuntos também é um elemento de $\mathscr{F}_t$ e portanto

$$\begin{gathered}\Big(M^c \cup \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant t\}^c\Big) \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t \\ \Downarrow \\ M^c \cup \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t.\end{gathered}$$

Como o argumento acima é independente de $t$ segue que $\mathscr{F}_\tau$ é fechada por complementação.

Seja $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathscr{F}_\tau$. Então para cada $t \in [0, +\infty)$ temos das propriedades elementares das operações de conjuntos que

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n\right) \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Big(M_n \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant t\}\Big) \in \mathscr{F}_t.$$

o que mostra que a coleção $\mathscr{F}_\tau$ é também fechada por uniões enumeráveis e finaliza a prova de que esta coleção é uma $\sigma$-álgebra.

Para provar que $\tau : \Omega \to [0, +\infty]$ é $\mathscr{F}_\tau$-mensurável, basta mostrar que para todo $t \in \mathbb{R}$ temos que $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathscr{F}_\tau$ e que $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) = \infty\} \in \mathscr{F}_\tau$. A primeira afirmação segue de tomar $M = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant t\}$ e de $\tau$ ser tempo de parada. Para a segunda afirmação observe que

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) = \infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) > n\}$$

Logo para cada $t \in [0, +\infty)$ temos que

$$\begin{aligned}
&\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) = \infty\} \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant t\} \\
&\qquad = \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) > n\} \right) \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant t\} \\
&\qquad = \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant n\}^c \right) \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant t\} \\
&\qquad = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Big( \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant n\}^c \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant t\} \Big) \in \mathscr{F}_t.
\end{aligned}$$

■

Já que para todo $t \in [0, +\infty)$ temos que $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) = t\} \in \mathscr{F}_t$, podemos afirmar que se $M \in \mathscr{F}_\tau$, então $M \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) = t\} = M \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant t\} \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) = t\} \in \mathscr{F}_t$ Mostrando que para todo $t \in [0, +\infty)$,

$$M \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) = t\} \in \mathscr{F}_t \qquad \forall M \in \mathscr{F}_\tau. \tag{52}$$

**Exemplo.** Seja $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$ um Movimento Browniano com trajetórias contínuas e $\mathscr{F}_t \equiv \sigma(W_s : s \leqslant t)$. Defina

$$\tau(\omega) \equiv \inf\{s \in [0, +\infty) : W_s(\omega) = 1\}.$$

Então $\tau$ é um tempo de parada.

**Prova**. Fixe $t > 0$ e defina $Q_t \equiv \mathbb{Q} \cap [0, t]$. Considere a variável aleatória

$$M_t(\omega) \equiv \sup_{r \in Q_t} W_r(\omega).$$

Como cada $W_r$ com $r \leqslant t$ é uma variável aleatória $\mathscr{F}_t$-mensurável e $Q_t$ é enumerável, concluímos que $M_t$ é uma variável aleatória $\mathscr{F}_t$-mensurável.

Para cada $\omega \in \Omega$ fixado segue da continuidade das trajetórias, que o supremo de $W_s(\omega)$ com $s$ no compacto $[0, t]$ é atingido e coincide com o supremo sobre os racionais:

$$\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} W_s(\omega) \;=\; \sup_{r \in Q_t} W_r(\omega) \;=\; M_t(\omega).$$

Para mostrar que $\tau$ é um tempo de parada, vamos provar que valem as igualdades que aparecem abaixo. Na verdade, só precisamos mostrar a validade da primeira, já que a segunda igualdade segue imediatamente da observação feita logo acima.

$$\{\tau \leqslant t\} \;=\; \left\{ \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} W_s \geqslant 1 \right\} \;=\; \{M_t \geqslant 1\}.$$

A prova da primeira igualdade pode ser feita da seguinte maneira. Se $\omega \in \{\tau \leqslant t\}$, então existe algum $s \leqslant t$ tal que $W_s(\omega) = 1$, e evidentemente vale a seguinte desigualdade $\sup\{W_s(\omega) : s \in [0,t]\} \geqslant 1$. O que mostra que

$$\{\tau \leqslant t\} \subseteq \left\{ \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} W_s \geqslant 1 \right\}.$$

Reciprocamente, suponha que $\omega \in \Omega$ é tal que $\sup\{W_s(\omega) : 0 \leqslant s \leqslant t\} \geqslant 1$. Seja $m \equiv \max\{W_s(\omega) : 0 \leqslant s \leqslant t\}$, que existe por continuidade. Se $m = 1$, então existe algum $s_0 \leqslant t$ com $W_{s_0}(\omega) = 1$ e então $\omega \in \{\tau \leqslant t\}$. Se $m > 1$, segue da continuidade da trajetória $s \longmapsto W_s(\omega)$ e do Teorema do Valor Intermediário, que existe algum $s_0 \leqslant t$ tal que $W_{s_0}(\omega) = 1$ e também neste caso temos que $\omega \in \{\tau \leqslant t\}$. Mostrando que

$$\left\{ \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} W_s \geqslant 1 \right\} \subseteq \{\tau \leqslant t\},$$

o que estabelece a validade da igualdade desejada.

Como $M_t$ é $\mathscr{F}_t$-mensurável, o evento $\{M_t \geqslant 1\}$ pertence a $\mathscr{F}_t$, e portanto $\{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t$, para todo $t \geq 0$. Deste fatos decorre que $\tau$ é tempo de parada. Em particular, $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ é $\mathscr{F}$-mensurável. ■

**Exemplo.** Se $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$ é um Movimento Browniano contínuo e $\tau : \Omega \to [0, +\infty)$ é um tempo de parada com respeito à este Movimento Browniano, então o evento

$$\left\{ \inf_{0 \leqslant s \leqslant \tau} W_s > \; -1 \right\} \in \mathscr{F}_\tau.$$

Primeiro, observamos que segue da continuidade das trajetórias $t \longmapsto W_t(\omega)$ que

$$\left\{ \inf_{0 \leqslant s \leqslant a} W_s > \; -1 \right\} = \left\{ \inf_{\substack{0 \leqslant s \leqslant a \\ s \in D}} W_s > \; -1 \right\} \in \mathscr{F}, \qquad \forall a > 0. \tag{53}$$

onde $D$ é o conjunto dos racionais diádicos não-negativos.

Próximo passo é mostrar usando, novamente, a continuidade das trajetórias que vale a seguinte igualdade

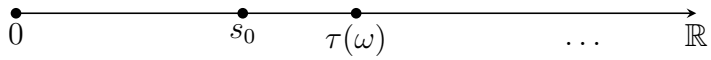
$$\left\{ \inf_{0 \leqslant s \leqslant \tau} W_s > \; -1 \right\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_+} \left( \left\{ \inf_{0 \leqslant s \leqslant r} W_s > \; -1 \right\} \cap \{\tau \leqslant r\} \right).$$

De fato, suponha que

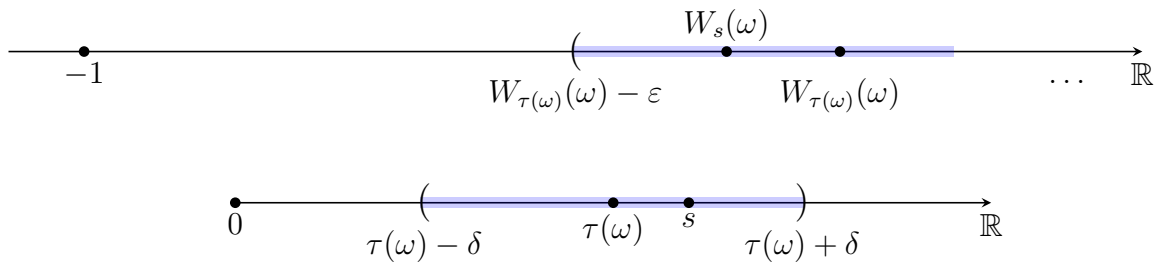
$$\omega \in \left\{ \inf_{0 \leqslant s \leqslant \tau} W_s > \; -1 \right\}.$$

Como $\tau$ é um tempo de parada satisfazendo $\tau(\omega) < +\infty$, segue da continuidade das trajetórias do Movimento Browniano que existe algum $s_0 \equiv s_0(\omega) \in [0, \tau(\omega)]$ tal que

$$-1 < \inf_{0 \leqslant s \leqslant \tau(\omega)} W_s(\omega) = W_{s_0}(\omega).$$




Já que $-1 < W_{s_0}(\omega) \leqslant W_{\tau(\omega)}(\omega)$, segue da continuidade das trajetórias que se tomamos $\varepsilon \equiv |W_{\tau(\omega)}(\omega) - (-1)|/3$, então existe algum $\delta > 0$, tal que para todo número $s$ não-negativo satisfazendo $|s - \tau(\omega)| < \delta$, então temos $|W_{\tau(\omega)}(\omega) - W_s(\omega)| < \varepsilon$.




Logo, para qualquer $r_0 \in \mathbb{Q}_+$ satisfazendo $\tau(\omega) < r_0 < \tau(\omega) + \delta$ temos que

$$-1 < \min\{W_{\tau(\omega)}(\omega) - \varepsilon\,,\, W_{s_0}(\omega)\} \leqslant \inf_{0 \leqslant s \leqslant r_0} W_s(\omega).$$

Portanto

$$\omega \in \left\{\inf_{0 \leqslant s \leqslant r_0} W_s > \ -1\right\} \cap \{\tau \leqslant r_0\},$$

mostrando que

$$\left\{\inf_{0 \leqslant s \leqslant \tau} W_s > \ -1\right\} \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_+} \left(\left\{\inf_{0 \leqslant s \leqslant r} W_s > \ -1\right\} \cap \{\tau \leqslant r\}\right).$$

Reciprocamente, suponha que

$$\omega \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_+} \left(\left\{\inf_{0 \leqslant s \leqslant r} W_s > \ -1\right\} \cap \{\tau \leqslant r\}\right).$$

Então existe algum $r_0 \in \mathbb{Q}_+$ tal que $\tau(\omega) \leqslant r_0$ e

$$-1 < \inf_{0 \leqslant s \leqslant r_0} W_s(\omega).$$

Já que $[0, \tau(\omega)] \subseteq [0, r_0]$ segue da definição de ínfimo que

$$-1 < \inf_{0 \leqslant s \leqslant r_0} W_s(\omega) \leqslant \inf_{0 \leqslant s \leqslant \tau(\omega)} W_s(\omega).$$

Mostrando que

$$\omega \in \left\{\inf_{0 \leqslant s \leqslant \tau} W_s > \ -1\right\}$$

o que prova que

$$\bigcup_{r\in\mathbb{Q}_+}\left(\left\{\inf_{0\leqslant s\leqslant r} W_s > -1\right\}\cap\{\tau\leqslant r\}\right)\subseteq\left\{\inf_{0\leqslant s\leqslant \tau} W_s > -1\right\}$$

encerrando a prova da igualdade

$$\left\{\inf_{0\leqslant s\leqslant \tau} W_s > -1\right\}=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}_+}\left(\left\{\inf_{0\leqslant s\leqslant r} W_s > -1\right\}\cap\{\tau\leqslant r\}\right).$$

Usando a igualdade acima e (53) temos para todo $t\in[0,+\infty)$ que

$$\begin{aligned}
&\left\{\inf_{0\leqslant s\leqslant \tau} W_s > -1\right\}\cap\{\tau\leqslant t\}\\
&=\left\{\inf_{0\leqslant s\leqslant \tau} W_s > -1\right\}\cap\{\tau< t\}\ \cup\ \left\{\inf_{0\leqslant s\leqslant \tau} W_s > -1\right\}\cap\{\tau= t\}\\
&=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}_+}\left(\left\{\inf_{0\leqslant s\leqslant r} W_s > -1\right\}\cap\{\tau\leqslant r\}\right)\cap\ \{\tau< t\}\ \cup\ \left\{\inf_{0\leqslant s\leqslant t} W_s > -1\right\}\cap\{\tau= t\}\\
&=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}_+\cap[0,t)}\left(\left\{\inf_{0\leqslant s\leqslant r} W_s > -1\right\}\cap\{\tau\leqslant r\}\right)\ \cup\ \left\{\inf_{0\leqslant s\leqslant t} W_s > -1\right\}\cap\{\tau= t\}\\
&=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}_+\cap[0,t)}\left(\left\{\inf_{\substack{0\leqslant s\leqslant r\\ s\in D}} W_s > -1\right\}\cap\{\tau\leqslant r\}\right)\ \cup\ \left\{\inf_{\substack{0\leqslant s\leqslant t\\ s\in D}} W_s > -1\right\}\cap\{\tau= t\}
\end{aligned}$$

Observe que para todo $r<t$ temos

$$\left\{\inf_{\substack{0\leqslant s\leqslant r\\ s\in D}} W_s > -1\right\}\in\sigma(W_u : u\leqslant r)\equiv\mathscr{F}_r\subseteq\mathscr{F}_t\qquad\text{e}\qquad\{\tau\leqslant r\}\in\mathscr{F}_r\subseteq\mathscr{F}_t.$$

Portanto a primeira união que aparece na última igualdade acima pertence à $\sigma$-álgebra $\mathscr{F}_t$.

Para finalizar resta apenas argumentar que

$$\left\{\inf_{\substack{0\leqslant s\leqslant t\\ s\in D}} W_s > -1\right\}\cap\{\tau= t\}\in\mathscr{F}_t.$$

O primeiro evento pertence a esta $\sigma$-álgebra pois, $D$ é enumerável e $s\leqslant t$. O segundo foi provado em (51).

De todas estas observações concluímos finalmente que

$$\left\{\inf_{0\leqslant s\leqslant \tau} W_s > -1\right\}\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t,\qquad\forall t\in[0,+\infty)$$

e portanto

$$\left\{\inf_{0\leqslant s\leqslant \tau} W_s > -1\right\}\in\mathscr{F}_\tau.$$

**Teorema 27** (Propriedade de Markov Forte - Movimento Browniano)**.** Seja $\tau : \Omega \to [0, +\infty]$ um tempo de parada, com respeito à $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$ e defina

$$W_t^*(\omega) \equiv W_{\tau(\omega)+t} - W_{\tau(\omega)}(\omega) \tag{54}$$

Então $\{W_t^* : t \in [0, +\infty)\}$ é um Movimento Browniano contínuo e além do mais ele é independente de $\mathscr{F}_\tau$, isto é, $\sigma\Big(W_t^* : t \in [0, +\infty)\Big)$ é independente de $\mathscr{F}_\tau$. Mais precisamente, para todos $0 \leqslant t_1 < t_2 \ldots < t_k$ e $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ e $M \in \mathscr{F}_\tau$ temos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\{(W_{t_1}^*, \ldots, W_{t_k}^*) \in H\} \cap M\Big) &= \mathbb{P}\Big((W_{t_1}^*, \ldots, W_{t_k}^*) \in H\Big)\mathbb{P}(M) \\ &= \mathbb{P}\Big((W_{t_1}, \ldots, W_{t_k}) \in H\Big)\mathbb{P}(M) \end{aligned} \tag{55}$$

**Prova**. Vamos assumir inicialmente que $\tau(\Omega) \subset [0, +\infty)$ é um conjunto enumerável e seja $\{s_n : n \geqslant 1\}$ uma enumeração de $\tau(\Omega)$. Note que para cada $t \in [0, +\infty)$ e $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ fixados temos

$$\{w \in \Omega : W_t^* \in H\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{w \in \Omega : W_{s_n+t} - W_{s_n} \in H\} \cap \{\tau = s_n\} \in \mathscr{F},$$

e portanto $W_t^*$ é uma variável aleatória.

Dados $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$, $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ e $M \in \mathscr{F}_\tau$ temos:

$$\mathbb{P}\Big(\{(W_{t_1}^*, \ldots, W_{t_k}^*) \in H\} \cap M\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\Big(\{(W_{t_1}^*, \ldots, W_{t_k}^*) \in H\} \cap M \cap \{\tau = s_n\}\Big)$$

Já que $M \in \mathscr{F}_\tau$ segue de (51) que $M \cap \{\tau = s_n\} \in \mathscr{F}_{s_n}$. Além do mais, sob a condição $\tau = s_n$, temos que $W_t^* = W_{s_n+t} - W_t$ coincide com o processo estocástico $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$ definido em (49) com $t_0 = s_n$. Logo segue da igualdade anterior e de (50) que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\{(W_{t_1}^*, \ldots, W_{t_k}^*) \in H\} \cap M\Big) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\Big(\{(W_{t_1}^*, \ldots, W_{t_k}^*) \in H\} \cap M \cap \{\tau = s_n\}\Big) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\Big(\{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) \in H\} \cap M \cap \{\tau = s_n\}\Big) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\Big(\{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) \in H\}\Big)\mathbb{P}\Big(M \cap \{\tau = s_n\}\Big) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\Big(\{(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k}) \in H\}\Big)\mathbb{P}\Big(M \cap \{\tau = s_n\}\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\{(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k}) \in H\}\Big)\mathbb{P}(M). \end{aligned} \tag{56}$$

O que estabelece (55) para o caso em que $\tau$ assume uma quantidade enumerável de valores.

Para o caso em que $\tau$ é um tempo de parada geral, vamos argumentar por aproximação. Considere a sequência $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, onde $\tau_n : \Omega \to [0, +\infty)$ é dado por

$$\tau_n(\omega) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]}(\tau(\omega)).$$

Observamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\tau_n(\omega) = 0$ se $\tau(\omega) = 0$ e também que a série acima é, na verdade, uma soma com uma única uma parcela para cada $\omega \in \Omega$, sendo assim obviamente convergente.

Note que para cada $t \in [0, +\infty)$ fixado, existe algum $k \in \mathbb{N}$ tal que $k2^{-n} \leqslant t < (k+1)2^n$. Daí segue da definição de $\tau_n$ que

$$\{\tau_n \leqslant t\} = \left\{\tau \leqslant \frac{k}{2^n}\right\} \in \mathscr{F}_{\frac{k}{2^n}} \subseteq \mathscr{F}_t.$$

Desta observação segue que cada $\tau_n$ é um tempo de parada. Suponha que $M \in \mathscr{F}_\tau$ e que $k2^{-n} \leqslant t < (k+1)2^{-n}$. Então temos que

$$M \cap \{t_n \leqslant t\} = M \cap \left\{t \leqslant \frac{k}{2^n}\right\} \in \mathscr{F}_{\frac{k}{2^n}} \subseteq \mathscr{F}_t$$

Mostrando que $\mathscr{F}_\tau \subseteq \mathscr{F}_{\tau_n}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina o processo estocástico $\{W_t^{(n)} : t \in [0, +\infty)\}$ de forma que

$$W_t^{(n)}(\omega) \equiv W_{\tau_n(\omega)+t}(\omega) - W_{\tau_n(\omega)}(\omega).$$

Como observado acima, se $M \in \mathscr{F}_\tau$, então $M \in \mathscr{F}_{\tau_n}$. Já que $\tau_n$ é um tempo de parada que assume apenas uma quantidade enumerável de valores podemos usar a igualdade (56) com $W_t^* = W_t^{(n)}$ para concluir que

$$\mathbb{P}\Big(\{(W_{t_1}^{(n)}, \ldots, W_{t_k}^{(n)}) \in H\} \cap M\Big) = \mathbb{P}\Big(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k}) \in H\Big)\, \mathbb{P}(M). \tag{57}$$

Por construção $\tau_n(\omega) \to \tau(\omega)$ para cada $\omega$. Usando também a continuidade das trajetórias do Movimento Browniano, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} W_t^{(n)}(\omega) = \lim_{n\to\infty} W_{\tau_n(\omega)+t}(\omega) - W_{\tau_n(\omega)}(\omega) = W_{\tau(\omega)+t}(\omega) - W_{\tau(\omega)}(\omega) \equiv W_t^*(\omega).$$

Para finalizar a prova de (55) basta considerar $M \in \mathscr{F}_\tau$ tal que $\mathbb{P}(M) > 0$. Caso contrário, isto é, se a probabilidade de $M$ é nula, então ambos lados de (55) são zero e portanto a igualdade é satisfeita.

Fixe $M \in \mathscr{F}_\tau$ satisfazendo $\mathbb{P}(M) > 0$ e $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$. Seja $F_n^M : \mathbb{R}^k \to [0, 1]$ a distribuição condicional do vetor $(W_{t_1}^{(n)}, \ldots, W_{t_k}^{(n)})$ dado $H$, isto é,

$$F_n^M(x_1, \ldots, x_k) \equiv \mathbb{P}\Big((W_{t_1}^{(n)}, \ldots, W_{t_k}^{(n)}) \preccurlyeq (x_1, \ldots, x_k) \,\Big|\, M\Big)$$

É claro que para cada $t \in [0, +\infty)$ fixado a sequência de vetores aleatórios $(W_{t_1}^{(n)}, \ldots, W_{t_k}^{(n)})$ converge, quase certamente com respeito à medida condicional $\mathbb{P}(\cdot|H)$, para o vetor aleatório

$(W^*_{t_1}, \ldots, W^*_{t_k})$. Aplicando a identidade (57) para $H \equiv (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_k]$ temos

$$\begin{aligned}
F_n^M(x_1, \ldots, x_k) &= \frac{\mathbb{P}\Big(\{(W^{(n)}_{t_1}, \ldots, W^{(n)}_{t_k}) \preccurlyeq (x_1, \ldots, x_k)\} \cap M\Big)}{\mathbb{P}(M)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\Big(\{W^{(n)}_{t_1}, \ldots, W^{(n)}_{t_k}) \in H\} \cap M\Big)}{\mathbb{P}(M)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\Big(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k}) \in H\Big)\, \mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(M)} \\
&= \mathbb{P}\Big(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k}) \in H\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big((W_{t_1}, \ldots, W_{t_k}) \preccurlyeq (x_1, \ldots, x_k)\Big) \\
&= F(x_1, \ldots, x_k).
\end{aligned}$$

É claro pela igualdade acima que $F_n \to F$, quando $n \to \infty$ (na verdade, $F_n = F$, $\forall n \in \mathbb{N}$). Como visto anteriormente a função $F$ é contínua. Portanto segue do Lema 20 que $F$ é a distribuição do vetor limite $(W^*_{t_1}, \ldots, W^*_{t_k})$, com respeito a medida de probabilidade $\mathbb{P}(\cdot|M)$. Desta informação e da última igualdade acima segue que

$$\mathbb{P}\Big(\{(W^*_{t_1}, \ldots, W^*_{t_k}) \preccurlyeq (x_1, \ldots, x_k)\} \,\Big|\, M\Big) = \mathbb{P}\Big((W_{t_1}, \ldots, W_{t_k}) \preccurlyeq (x_1, \ldots, x_k)\Big)$$

Da igualdade acima e do Teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin segue que para todo boreliano $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ temos

$$\mathbb{P}\Big(\{(W^*_{t_1}, \ldots, W^*_{t_k}) \in H\} \,\Big|\, M\Big) = \mathbb{P}\Big((W_{t_1}, \ldots, W_{t_k}) \in H\Big)$$

o que pela definição de probabilidade condicional implica na validade de (55). Para finalizar a prova de que $\{W^*_t : t \in [0, +\infty)\}$ é um Movimento Browniano, basta tomar $M = \Omega$ em (55) e concluir que as distribuições finito-dimensionais de $\{W^*_t : t \in [0, +\infty)\}$ e $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$ coincidem. ■

## 18. Aplicação - Propriedades Topológicas do Conjunto de Zeros

Antes de prosseguir vamos lembrar algumas definições topológicas que serão usadas ao longo desta seção.

**Definição 28** (Conjunto Perfeito)**.** Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é chamado de perfeito, se $A$ é fechado e para todo $x \in A$ e $\varepsilon > 0$ dado, existe algum $y \in A \setminus \{x\}$ tal que $|x - y| < \varepsilon$.

Podemos também caracterizar os subconjuntos perfeitos da reta, usando sequências. Mais precisamente, $A$ é um subconjunto perfeito de $\mathbb{R}$, se e somente se, $A = \overline{A}$ e para cada $x \in A$, existe alguma sequência de elementos distintos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, contida em $A \setminus \{x\}$, tal que $x_n \to x$, quando $n \to \infty$.

**Definição 29** (Conjunto Denso em Nenhum Lugar)**.** Dizemos que um subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ é denso em nenhum lugar se para cada intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ existe algum intervalo aberto $J \subset I$ tal que $J \cap E = \varnothing$.

**Teorema 30** (Zeros do Movimento Browniano)**.** Seja $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$ um Movimento Browniano contínuo definido sobre $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Para cada $\omega \in \Omega$ defina $Z(\omega) \equiv \{t \in [0, +\infty) : W_t(\omega) = 0\}$, isto é, o conjunto de zeros da trajetória $t \longmapsto W_t(\omega)$. Então, quase certamente, temos que $Z(\omega)$ é

*i*) perfeito (em particular, não-enumerável);

*ii*) ilimitado;

*iii*) possui medida de Lebesgue zero;

*iv*) denso em nenhum lugar.

**Prova**. Vamos começar pela prova do item *iii*). Pelo Teorema 22 $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$ é um processo estocástico mensurável, logo

$$\{(t, w) \in [0, +\infty) \times \Omega : W_t(\omega) = 0\} \in \mathscr{B}([0, +\infty) \times \mathscr{F}.$$

Da continuidade das trajetórias, segue que $Z(\omega)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ e portanto Borel mensurável e sua medida de Lebesgue $\lambda(Z(\omega))$ está bem definida para todo $\omega \in \Omega$. Destas observações, do Teorema de Tonelli e do fato de que para cada $t$ fixado $W_t \sim N(0, t)$ temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \lambda(Z(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) &= \int_\Omega \left[\int_0^\infty \mathbb{1}_{Z(\omega)}(t)\, d\lambda(t)\right] d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_0^\infty \left[\int_\Omega \mathbb{1}_{Z(\omega)}(t)\, d\mathbb{P}(\omega)\right] d\lambda(t) \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : W_t(\omega) = 0\})\, dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $\lambda(Z(\omega)) \geqslant 0$, segue da igualdade acima que $\lambda(Z(\omega)) = 0$ quase certamente.

Prova do item *iv*). Pelo Teorema 25 sabemos que existe um conjunto $\widetilde{\Omega}$ com $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega})$ tal que para todo $\omega \in \widetilde{\Omega}$ a trajetória $t \longmapsto W_t(\omega)$ não possui derivada em qualquer que seja $t \in [0, +\infty)$. Fixe $\omega \in \widetilde{\Omega}$. Dado um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ arbitrário, deve existir pelo menos um ponto $t_0 \in I$ tal que $|W_{t_0}(\omega)| > 0$, caso contrário, esta trajetória seria identicamente nula em $I$ e consequentemente diferenciável. Já que $|W_{t_0}(\omega)| > 0$, segue da continuidade das trajetórias que existe algum $\delta > 0$ tal que para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, temos $|W_t(\omega)| > 0$, mostrando que $J \equiv (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ não intercepta $Z(\omega)$, o que mostra que $Z(\omega)$ é denso em nenhum lugar.

Prova do item *ii*). Para verificar que $Z(\omega)$ não é limitado, quase certamente, vamos usar as seguintes igualdades estabelecidas em (42)

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} W_n(\omega) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \sup_{n \in \mathbb{N}} W_n(\omega) = +\infty, \qquad \forall \omega \in \widetilde{\Omega}, \text{ onde } \mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 1.$$

Seja $\omega \in \widetilde{\Omega}$ e suponha, por absurdo, que $Z(\omega)$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$. Então existe alguma constante $K \equiv K(\omega) > 0$ tal que $Z(\omega) \subset [0, K]$. Pela continuidade das trajetórias

podemos afirmar que existe alguma constante $M \equiv M(\omega) > 0$ tal que $\sup_{t\in[0,K]} |W_t(\omega)| < M$. Das igualdades acima, sabemos que existem números naturais $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, satisfazendo:

$$K < n_0 < n_1, \qquad W_{n_0}(\omega) < -M \quad \text{e} \quad W_{n_1}(\omega) > M.$$

Por outro lado, segue do Teorema do Valor Intermediário existe algum $t_0$ pertencente ao intervalo aberto $(n_0, n_1)$ tal que $W_{t_0}(\omega) = 0$. Mas isto é um absurdo, pois $K < t_0 \in Z(\omega) \subseteq [0, K]$.

Prova do item *i*). Vamos mostrar inicialmente que, existe $\widetilde{\Omega}$ com $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 1$ tal que se $\omega \in \widetilde{\Omega}$, então para $t = 0$ (que é sempre um ponto $Z(\omega)$) existe alguma sequência $t_n \in (0, +\infty)$ tal que $t_n \to 0$, quando $n \to \infty$, e $t_n \in Z(\omega)$.

Pelo Teorema 24 sabemos que o processo estocástico $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$ definido por

$$X_t \equiv \begin{cases} t\, W_{\frac{1}{t}}, & \text{se } t > 0; \\ 0, & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

é um Movimento Browniano contínuo. Usando o mesmo argumento empregado na prova do item *ii*) sabemos que existe um conjunto de probabilidade total $\widetilde{\Omega}$ tal que para todo $\omega \in \widetilde{\Omega}$ valem as seguintes igualdades

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega) = +\infty.$$

Como argumentamos na prova do item anterior, podemos afirmar que existem três sequências estritamente crescentes $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tais $n_k \leqslant z_k \leqslant m_k$, tais que $X_{n_k}(\omega) < 0$, $X_{m_k}(\omega) > 0$, $X_{z_k}(\omega) = 0$. Logo

$$W_{\frac{1}{z_k}}(\omega) = \frac{1}{z_n} X_{z_n}(\omega) = 0. \tag{58}$$

Definindo $t_n \equiv z_n^{-1}$ provamos a existência da sequência desejada.

Para estender o fato provado acima para qualquer ponto em $Z(\omega)$ vamos precisar de argumentos baseados na Propriedade de Markov Forte e em tempos de parada.

Note que para qualquer $r \geqslant 0$ fixado a aplicação

$$\omega \longmapsto \tau_r(\omega) \equiv \inf\{t \in [r, +\infty) : W_t(\omega) = 0\}$$

define um tempo de parada tomando valores em $[0, +\infty)$, quase certamente. De fato, primeiro observamos que o conjunto no qual tomamos o ínfimo acima é quase certamente não-vazio pelo item *ii*) o que assegura que $\tau_r(\omega) < +\infty$, quase certamente. Além do mais, segue da continuidade das trajetórias que

$$\begin{aligned} \{w \in \Omega : \tau_r(\omega) \leqslant t\} &= \left\{\omega \in \Omega : \inf_{r\leqslant s\leqslant t} |W_s(\omega)| = 0\right\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : \inf_{\substack{r\leqslant s\leqslant t \\ s\in D}} |W_s(\omega)| = 0\right\} \in \mathscr{F}_t. \end{aligned}$$

Mostrando que $\tau_r$ é de fato um tempo de parada, com respeito à $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$. Usando a Propriedade de Markov Forte do Movimento Browniano (Teorema 27) podemos afirmar que o processo estocástico $\{W^* : t \in [0, +\infty)\}$ definido por

$$W_t^* \equiv W_{\tau_r + t} - W_{\tau_r}$$

é um Movimento Browniano contínuo. Embora seja omitido da notação, a rigor, o processo estocástico $\{W_t^*, t \in [0, +\infty)\}$ depende da escolha de $r$. Como este processo também é um Movimento Browniano contínuo sabemos que existe algum subconjunto mensurável $\widetilde{\Omega}_r$ com $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}_r) = 1$ tal que para todo $\omega \in \widetilde{\Omega}_r$

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} W_n^*(\omega) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \sup_{n \in \mathbb{N}} W_n^*(\omega) = +\infty.$$

Argumentando como em (58), podemos afirmar que existe alguma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais positivos e distintos, tal que $t_n \to 0$, quando $n \to \infty$ e $W_{t_n}^*(\omega) = 0$. Pela propriedade de continuidade das trajetórias e pela definição de $\tau_r$ temos que $W_{\tau_r(\omega)}(\omega) = 0$, para todo $\omega \in \widetilde{\Omega}_r \cap \{\tau < +\infty\}$. Assim, para cada $\omega \in \widetilde{\Omega}_r \cap \{\tau_r < +\infty\}$ temos

$$W_{\tau_r(\omega) + t_n}(\omega) = W_{\tau_r(\omega) + t_n}(\omega) - W_{\tau_r(\omega)}(\omega) = W_{t_n}^*(\omega) = 0.$$

O que mostra que o ponto $\tau_r(\omega) \in Z(\omega)$ é o limite de uma sequência de elementos distintos em $Z(\omega)$. Como a interseção enumerável de eventos de probabilidade 1 tem probabilidade 1, temos que

$$\mathbb{P}\left( \bigcap_{r \in \mathbb{Q}_+} \widetilde{\Omega}_r \cap \{\tau_r < +\infty\} \right) = 1.$$

Seja $\omega$ um elemento genérico do conjunto que aparece na igualdade acima e $t_0 \in Z(\omega) \setminus \{0\}$. Se existe alguma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos distintos em $Z(\omega)$ tal que $t_n < t_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t_n \to t_0$, então ná há nada a fazer. Caso contrário, podemos afirmar que existe algum $r \in \mathbb{Q}_+$ tal que $r < t_0$ e $W_t(\omega) \neq 0$, para todo $t \in [r, t_0)$. Portanto $t_0$ é o primeiro zero à direita de $r$ ou seja $t_0 = \tau_r(\omega)$. Como visto acima $\tau_r(\omega)$ é o limite de uma sequência de pontos distintos em $Z(\omega)$. Já que $t_0$ é um ponto arbitrário em $Z(\omega)$ e isto vale para todo $\omega$ um conjunto de probabilidade total, a prova de que $Z(\omega)$ é perfeito, quase certamente, está encerrada. ■

## 19. A Regularidade Hölder Local do Movimento Browniano

O objetivo desta seção é mostrar que as trajetórias do Movimento Browniano são localmente $\alpha$-Hölder contínuas para qualquer $\alpha < \frac{1}{2}$. Para isto vamos provar o famoso Teorema da Continuidade de Kolmogorov cujo enunciado é apresentado abaixo. Esta seção é baseada nas exposições deste teorema encontradas nas referências [6, 7]. Antes porém vamos recordar a definição de funções localmente Hölder contínuas.

**Definição 31** (Funções Localmente $\alpha$-Hölder Contínuas)**.** Sejam $T \subseteq \mathbb{R}$ e $f : T \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $f$ é uma função localmente $\alpha$-Hölder contínua, se para cada $L > 0$ temos:

$$\sup_{\substack{t,s \in T;\ t \neq s \\ |t|,|s| \leqslant L}} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha} \equiv K_L < +\infty.$$

**Definição 32** (Processos Equivalentes ou versões)**.** Sejam $\{X_t : t \in T\}$ e $\{Y_t : t \in T\}$ processos estocásticos definidos sobre $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$, respectivamente. Dizemos que estes processos estocásticos são equivalentes, se para todo $k \in \mathbb{N}$ e qualquer $k$-úpla $t_1, \ldots, t_k \in T$ e quaisquer $B_j \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ temos

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_k} \in B_k) = \widetilde{\mathbb{P}}(Y_{t_1} \in B_1, \ldots, Y_{t_k} \in B_k)$$

Neste caso dizemos que $\{Y_t : t \in T\}$ é uma **versão** de $\{X_t : t \in T\}$ e vice-versa.

Observe que a definição de equivalência de processos estocásticos é feita basicamente com base nas suas distribuições finito-dimensionais. Assim, se $\mathscr{M}_X$ denota a família de todas as distribuições finito-dimensionais de $\{X_t : t \in T\}$ então temos

$$\{X_t : t \in T\} \sim \{Y_t : t \in T\} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{M}_X = \mathscr{M}_Y.$$

A definição de equivalência, vista acima, foca exclusivamente na igualdade das distribuições finito-dimensionais. No entanto, se ambos os processos estiverem definidos sobre o mesmo espaço de probabilidade, é possível impor condições mais restritivas e úteis. Estas condições, as de modificação e indistinguibilidade, servem para comparar processos de forma mais direta e fina. Tais noções são de grande utilidade para associar novas propriedades de interesse a um processo estocástico, permitindo, por exemplo, substituir um processo por uma versão com trajetórias mais "bem-comportadas" (como contínuas ou localmente $\alpha$-Hölder contínuas) sem alterar sua lei.

**Definição 33** (Modificações e Processos Estocásticos Indistinguíveis)**.** Dados dois processos estocásticos $\{X_t : t \in T\}$ e $\{Y_t : t \in T\}$ definidos sobre o mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ dizemos que $\{Y_t : t \in T\}$ é uma **modificação** de $\{X_t : t \in T\}$ e vice-versa, se

$$\mathbb{P}(\{X_t = Y_t\}) \, = \, 1, \qquad \forall t \in T;$$

Vamos dizer que $\{X_t : t \in T\}$ e $\{Y_t : t \in T\}$ são processos estocásticos **indistinguíveis** se existe algum subconjunto $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega$ com $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 1$ e tal que para todo $\omega \in \widetilde{\Omega}$ temos

$$X_t(\omega) = Y_t(\omega), \qquad t \in T.$$

Observamos que dois processos estocásticos $\{X_t : t \in T\}$ e $\{Y_t : t \in T\}$, definidos sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, são indistinguíveis, se e somente se, existe algum conjunto $\mathscr{F}$-mensurável $\widetilde{\Omega}$ satisfazendo $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 1$ e

$$\widetilde{\Omega} \subseteq \bigcap_{t \in T} \{X_t = Y_t\}.$$

Entretanto, quando $T$ é não enumerável, pode ser bastante trabalhoso determinar se a interseção que aparece acima é um evento em $\mathscr{F}$, mesmo assumindo que $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ seja completo no sentido de espaço de medida.

**Teorema 34** (Teorema da Continuidade de Chentsov-Kolmogorov)**.** Seja $\{X_t : t \in [0,1)\}$ um processo estocástico. Suponha que existem constantes $\gamma, C, \varepsilon > 0$ tais que

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^\gamma\right] \leqslant C|t-s|^{1+\varepsilon}, \qquad \forall s,t \in [0,1). \tag{59}$$

Então existe uma modificação $\{Y_t : t \in [0,1)\}$ do processo estocástico $\{X_t : t \in [0,1)\}$ tal que

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{\substack{s\neq t\\ s,t\in[0,1)}} \frac{|Y_t - Y_s|}{|t-s|^\alpha}\right)^\gamma\right] < +\infty, \qquad \forall \alpha \in \left[0, \frac{\varepsilon}{\gamma}\right).$$

**Prova**. Seja $D$ o conjunto dos números racionais diádicos não-negativos (definido no início da Seção 13) e defina para cada $m \in \mathbb{N}$ o seguinte conjunto

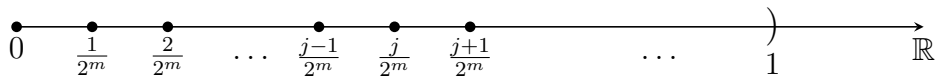
$$D_m \equiv \left\{\frac{k}{2^m} \in [0,1) : 0 \leqslant k < 2^m\right\}$$

Observe que

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} D_m \;=\; D \cap [0,1).$$

Vamos denotar por $\Delta_m$ o conjunto de pares consecutivos de pontos de $D_m$, mais precisamente,

$$\Delta_m \equiv \left\{\{s,t\} \subset D_m : |s-t| = \frac{1}{2^m}\right\}$$




Observe que podemos "parametrizar" o conjunto $\Delta_m$ nos referindo a cada par pelo seu menor elemento. Desta forma é imediato verificar $\mathrm{Card}(\Delta_m) = 2^m - 1$.

Para cada $t \in D \cap [0,1)$ fixado, considere a seguinte sequência de números racionais diádicos não-negativos $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ definida por $t_j \equiv \max\{d \in D_j : d \leqslant t\}$. Já que $D_j \subset D_{j+1}$, então a sequência $t_j$ é monótona não-decrescente. Além do mais, para cada $t \in D \cap [0,1)$ fixado existe algum $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_j = t$, para todo $j \geqslant j_0$.

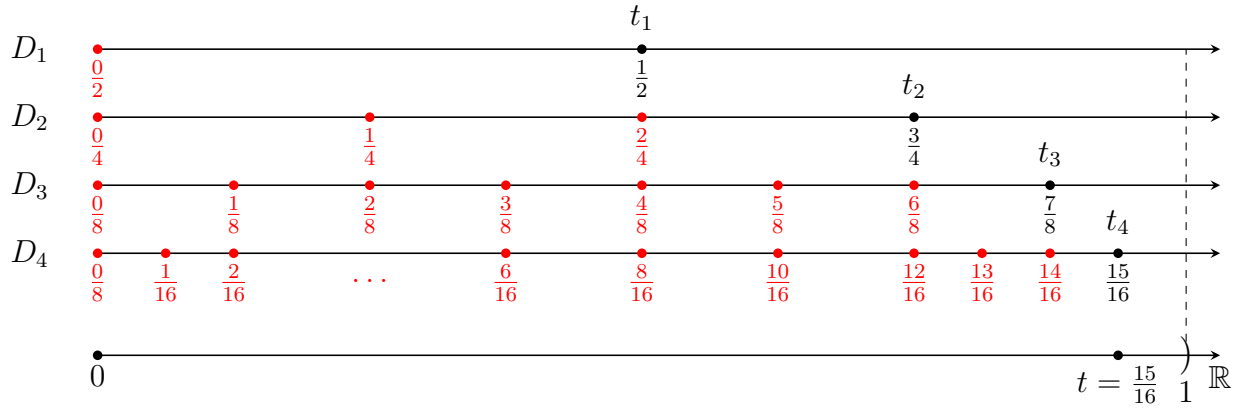



Figura 7: No caso $t = 15/16$, temos $t_1 = 1/2$, $t_2 = 3/4$, $t_3 = 7/8$, $t_4 = 15/16$, $t_5 = 15/16$, .... Neste caso $j_0 = 4$.

Observamos que se $s, t \in D \cap [0,1)$ satisfazem $|s-t| \leqslant 2^{-m}$, então as sequências $\{s_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ construídas como acima satisfazem $s_m = t_m$ ou $(s_m, t_m) \in \Delta_m$.

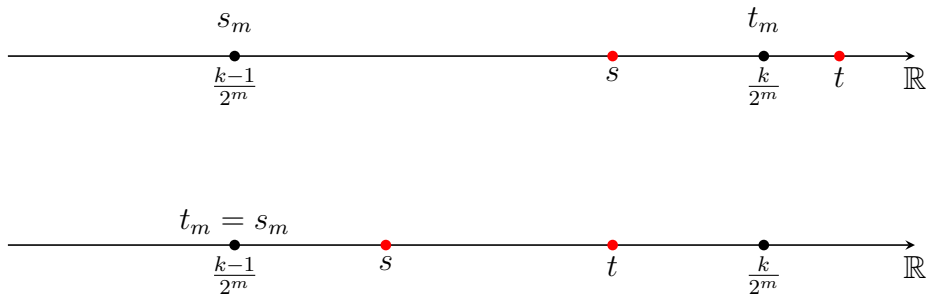



Figura 8: No primeiro exemplo temos um caso em que $|s-t| \leqslant 2^{-m}$ e $(s_m, t_m) \in \Delta_m$. No segundo exemplo também temos $|s-t| \leqslant 2^{-m}$ porém $t_m = s_m$.

Sejam $s, t \in D \cap [0,1)$ tais que $|s-t| \leqslant 2^{-m}$. Então temos pelas observações acima que $s_m \leqslant s_{m+1} \leqslant \ldots \leqslant s$ e analogamente $t_m \leqslant t_{m+1} \leqslant \ldots \leqslant t$. Note que

- $|s_m - s_{m+1}| \leqslant 2^{-(m+1)}$;
- $|s_{m+1} - s_{m+2}| \leqslant 2^{-(m+2)}$;

$\vdots$

- $|s_{m+k} - s_{m+k+1}| \leqslant 2^{-(m+k+1)}$;

- $|t_m - t_{m+1}| \leqslant 2^{-(m+1)}$;
- $|t_{m+1} - t_{m+2}| \leqslant 2^{-(m+2)}$;

$\vdots$

- $|t_{m+k} - t_{m+k+1}| \leqslant 2^{-(m+k+1)}$;

Além do mais segue da construção da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que existe algum índice $k(s) \in \mathbb{N}$, tal que $s_{m+k(s)} = s$. Desta forma temos que a soma telescópica (que possui apenas um número finito de parcelas, visto que $s_{m+k(s)} = s_{m+k(s)+j}$, para todo $j \in \mathbb{N}$) que aparece abaixo satisfaz a seguinte identidade

$$\begin{aligned} X_s &= X_{s_m} + (X_{s_{m+1}} - X_{s_m}) + \ldots + (X_{s_{m+k(s)-1}} - X_{s_{m+k(s)-2}}) + (X_{s_{m+k(s)}} - X_{s_{m+k(s)-1}}) \\ &= X_{s_m} + \sum_{i=m}^{\infty} (X_{s_{i+1}} - X_{s_i}). \end{aligned}$$

Observamos também que, por construção, o par de pontos $s_m, s_{m+1}$ ou são iguais ou forma um par de pontos consecutivos em $D_{m+1}$, isto é, $s_m = s_{m+1}$ ou $(s_m, s_{m+1}) \in \Delta_{m+1}$. De modo mais geral, para todo $j \in \mathbb{N}$, temos que $s_{m+j}, s_{m+j+1}$ ou são iguais ou $(s_{m+j}, s_{m+j+1}) \in \Delta_{m+j+1}$. É claro que observações completamente análogas são válidas para $t$ e para a sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Portanto para qualquer par $s, t \in D \cap [0,1)$ satisfazendo $|t-s| \leqslant 2^{-m}$ temos

$$\begin{aligned} X_s - X_t &= X_{s_m} + \sum_{i=m}^{\infty} (X_{s_{i+1}} - X_{s_i}) - \left( X_{t_m} + \sum_{i=m}^{\infty} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \right) \\ &= X_{s_m} - X_{t_m} + \sum_{i=m}^{\infty} (X_{s_{i+1}} - X_{s_i}) + \sum_{i=m}^{\infty} (X_{t_i} - X_{t_{i+1}}). \end{aligned} \tag{60}$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, defina a variável aleatória

$$K_i \equiv \sup_{(s,t)\in\Delta_i} |X_s - X_t|.$$

Pelas observações acima e definição de $K_i$, concluímos que as parcelas que aparecem em (60) podem ser majoradas como segue

$$X_{s_m} - X_{t_m} \leqslant |X_{s_m} - X_{t_m}| \leqslant K_m;$$

$$X_{s_{i+1}} - X_{s_i} \leqslant |X_{s_{i+1}} - X_{s_i}| \leqslant K_{i+1};$$

$$X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \leqslant |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| \leqslant K_{i+1}.$$

Portanto temos a seguinte cota superior para (60)

$$\begin{aligned} |X_s - X_t| &\leqslant |X_{s_m} - X_{t_m}| + \sum_{i=m}^{\infty} |X_{s_{i+1}} - X_{s_i}| + \sum_{i=m}^{\infty} |X_{t_i} - X_{t_{i+1}}| \\ &\leqslant K_m + \sum_{i=m}^{\infty} K_{i+1} + \sum_{i=m}^{\infty} K_{i+1} \\ &\leqslant 2\sum_{i=m}^{\infty} K_i, \qquad \forall |t-s| \leqslant \frac{1}{2^m}. \end{aligned} \tag{61}$$

Considere a variável aleatória

$$M_\alpha \equiv \sup_{\substack{s\neq t \\ s,t\in D\cap[0,1)}} \frac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\alpha}.$$

Observe que usando a desigualdade estabelecida em (61) obtemos a seguinte estimativa para a variável aleatória $M_\alpha$ em termos das variáveis aleatórias $K_i$'s definidas acima

$$\begin{aligned} M_\alpha \equiv \sup_{\substack{s\neq t \\ s,t\in D\cap[0,1)}} \frac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\alpha} &\leqslant \sup_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \sup_{\substack{s\neq t \\ s,t\in D\cap[0,1) \\ |t-s|\leqslant \frac{1}{2^m}}} \frac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\alpha} \\ &\leqslant \sup_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}} 2^{m\alpha} \sup_{\substack{s\neq t \\ s,t\in D\cap[0,1) \\ |t-s|\leqslant \frac{1}{2^m}}} |X_t - X_s| \\ &\leqslant 2 \sup_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}} 2^{m\alpha} \sum_{i=m}^{\infty} K_i \\ &= 2 \sup_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \sum_{i=m}^{\infty} 2^{m\alpha} K_i \\ &\leqslant 2 \sup_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \sum_{i=m}^{\infty} 2^{i\alpha} K_i \\ &= 2\sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\alpha} K_i. \end{aligned} \tag{62}$$

Próximo passo é mostrar que

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{\substack{s\neq t\\ s,t\in[0,1)\cap D}}\frac{|X_t-X_s|}{|t-s|^{\alpha}}\right)^{\gamma}\right]=\mathbb{E}[M_\alpha^\gamma]<+\infty,\qquad \text{se}\ \ 0<\alpha<\frac{\varepsilon}{\gamma}. \tag{63}$$

Para isto vamos considerar separadamente os casos em que

*i)* $0<\gamma<1$;

*ii)* $\gamma\geqslant 1$.

Vamos considerar inicialmente o caso *ii)*. Neste caso, onde $\gamma\geqslant 1$ sabemos que a aplicação

$$L^\gamma(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})\ni X\longmapsto \|X\|_\gamma\equiv\mathbb{E}[|X|^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}}$$

define uma norma em $L^\gamma(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$.

Usando hipótese (59) podemos concluir que a v.a. $K_i\in L^\gamma(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$, para todo $i\in\mathbb{N}$. De fato,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|K_i|^\gamma]=\mathbb{E}\left[\left|\sup_{s,t\in\Delta_i}|X_t-X_s|\right|^\gamma\right]=\mathbb{E}\left[\sup_{s,t\in\Delta_i}|X_t-X_s|^\gamma\right]&\leqslant\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{2^i-1}\left|X_{\frac{k+1}{2^i}}-X_{\frac{k}{2^i}}\right|^\gamma\right]\\&=\sum_{k=0}^{2^i-1}\mathbb{E}\left[\left|X_{\frac{k+1}{2^i}}-X_{\frac{k}{2^i}}\right|^\gamma\right]\\&\leqslant 2^i\,C\left|\frac{1}{2^i}\right|^{1+\varepsilon}\\&\equiv\frac{C}{2^{i\varepsilon}}.\end{aligned} \tag{64}$$

Desta forma podemos aplicar a desigualdade triangular válida para funções $L^\gamma(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ para concluir que

$$\left\|\sum_{i=0}^n K_i\right\|_\gamma\leqslant\sum_{i=0}^n\|K_i\|_\gamma.$$

Além do mais, temos da desigualdade (64) que

$$\sum_{i=0}^\infty 2^{i\alpha}\|K_i\|_\gamma\leqslant\sum_{i=0}^\infty 2^{i\alpha}\left(\frac{C}{2^{i\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=\sum_{i=0}^\infty 2^{i\alpha}\frac{C^{\frac{1}{\gamma}}}{2^{i\frac{\varepsilon}{\gamma}}}=C^{\frac{1}{\gamma}}\sum_{i=0}^\infty 2^{i\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)}<+\infty,\qquad\text{se}\ \ 0<\alpha<\frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

Portanto, sob a condição acima, como a v.a. $K_i\geqslant 0$, para todo $i\in\mathbb{N}$, temos do Teorema da Convergência Monótona e da Desigualdade de Minkowski que a v.a. $2\sum_{i=0}^\infty 2^{i\alpha}K_i\in L^\gamma(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$. Pela desigualdade (62) temos

$$0\leqslant M_\alpha\leqslant 2\sum_{i=0}^\infty 2^{i\alpha}K_i$$

logo $M_\alpha \in L^\gamma(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e portanto sob as condições: $\gamma \geqslant 1$ e $0 < \alpha < \dfrac{\varepsilon}{\gamma}$

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{\substack{s\neq t\\ s,t\in[0,1)\cap D}} \frac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\alpha}\right)^\gamma\right] = \mathbb{E}[M_\alpha^\gamma] = \mathbb{E}[|M_\alpha|^\gamma] = \|M_\alpha\|_\gamma^\gamma < +\infty.$$

Vamos considerar agora o caso $i)$. Neste caso $0 < \gamma < 1$, e vamos usar a seguinte desigualdade elementar $(x_1 + \ldots + x_n)^\gamma \leqslant x_1^\gamma + \ldots + x_n^\gamma$, válida para todo $x_j \in [0, +\infty)$.

Primeiro observamos que a desigualdade

$$0 \leqslant M_\alpha \leqslant 2\sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\alpha} K_i$$

o que implica

$$\begin{aligned}
M_\alpha^\gamma \leqslant \left(2\sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\alpha} K_i\right)^\gamma &= 2^\gamma \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} 2^{i\alpha} K_i\right)^\gamma \\
&= 2^\gamma \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} 2^{i\alpha} K_i\right)^\gamma \\
&\leqslant 2^\gamma \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} 2^{i\gamma\alpha} K_i^\gamma \\
&\leqslant 2^\gamma \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\gamma\alpha} K_i^\gamma.
\end{aligned}$$

Tomando a esperança em ambos lados da desigualdade acima, em seguida, usando a desigualdade (64) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sup_{\substack{s\neq t\\ s,t\in[0,1)\cap D}} \frac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\alpha}\right)^\gamma\right] &= \mathbb{E}[M_\alpha^\gamma] \\
&\leqslant 2^\gamma \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\gamma\alpha} \mathbb{E}[K_i^\gamma] \\
&\leqslant 2^\gamma \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\alpha\gamma} \frac{C}{2^{i\varepsilon}} \\
&= 2^\gamma C \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i(\alpha\gamma - \varepsilon)} \\
&= 2^\gamma C \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\gamma\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{\gamma}\right)} < +\infty, \qquad \text{se } 0 < \alpha < \frac{\varepsilon}{\gamma}
\end{aligned}$$

o que finalmente encerra a prova da desigualdade (63).

Desta forma podemos afirmar que sob a condição $0 < \alpha < \dfrac{\varepsilon}{\gamma}$ temos

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{\substack{s\neq t\\ s,t\in[0,1)\cap D}} \frac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\alpha}\right)^\gamma\right] < +\infty.$$

Mas é claro que se a esperança de uma v.a. aleatória $X$ é finita, então $X$ é finita, quase certamente. Desta observação e da desigualdade acima podemos afirmar que existem $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega$, subconjunto $\mathscr{F}$-mensurável e para cada $\omega \in \widetilde{\Omega}$ uma constante positiva $K(\omega) < +\infty$ tais que $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 1$ e para todo $\omega \in \widetilde{\Omega}$ temos

$$\left(\sup_{\substack{s\neq t\\ s,t\in[0,1)\cap D}} \frac{|X_t(\omega) - X_s(\omega)|}{|t-s|^\alpha}\right)^\gamma = K(\omega) \quad \Longrightarrow \quad \sup_{\substack{s\neq t\\ s,t\in[0,1)\cap D}} \frac{|X_t(\omega) - X_s(\omega)|}{|t-s|^\alpha} \leqslant K(\omega)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Da última desigualdade acima concluímos que para quaisquer $s, t \in [0,1) \cap D$, com $s \neq t$ temos

$$\frac{|X_t(\omega) - X_s(\omega)|}{|t-s|^\alpha} \leqslant \sup_{\substack{s\neq t\\ s,t\in[0,1)\cap D}} \frac{|X_t(\omega) - X_s(\omega)|}{|t-s|^\alpha} \leqslant K(\omega)^{\frac{1}{\gamma}}$$

o que implica que para quaisquer $s, t \in [0,1) \cap D$ temos:

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leqslant K(\omega)^{\frac{1}{\gamma}} |t-s|^\alpha.$$

Note que na última desigualdade acima não é necessário mais excluir os pontos em $t = s$. Segue diretamente da desigualdade acima que a aplicação $D \cap [0,1) \ni t \longmapsto X_t(\omega)$ é uniformemente contínua. Já que $D \cap [0,1)$ é denso em $[0,1)$ a aplicação $t \longmapsto X_t(\omega)$ admite uma extensão contínua que vamos denotar por $\widetilde{Y}_t(\omega)$. Além do mais, sabemos pela propriedade de Cauchy que esta extensão pode ser obtida da seguinte forma

$$\widetilde{Y}_t(\omega) = \lim_{\substack{r\downarrow t\\ r\in[0,1)\cap D}} X_r(\omega), \qquad \forall t \in [0,1).$$

Agora vamos considerar o seguinte processo estocástico $\{Y_t : t \in [0,1)\}$ definido sobre $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} \widetilde{Y}_t(\omega), & \text{se } \omega \in \widetilde{\Omega}; \\ 0, & \text{se } \omega \notin \widetilde{\Omega}. \end{cases}$$

Por definição, $\{Y_t : t \in [0,1)\}$ é uma modificação de $\{X_t : t \in [0,1)\}$. Além do mais, para quaisquer $s, t \in [0,1)$ com $s \neq t$ fixado, temos para todo $\omega \in \widetilde{\Omega}$ que existem sequências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contidas em $[0,1) \cap D$ tais que $t_n \downarrow t$ e $s_n \downarrow s$, $s_n \neq t_n$ e

$$\frac{|Y_t(\omega) - Y_s(\omega)|}{|t-s|^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{|X_{t_n}(\omega) - X_{s_n}(\omega)|}{|t_n - s_n|^\alpha} \leqslant \sup_{\substack{s\neq t\\ s,t\in[0,1)\cap D}} \frac{|X_t(\omega) - X_s(\omega)|}{|t-s|^\alpha}.$$

Observando que a desigualdade acima é válida quase certamente, elevando ambos lados à potência $\gamma$ e tomando a esperança encerramos a prova do teorema. ■

**Corolário 35.** Se $\{W_t : t \in [0,+\infty)\}$ é um Movimento Browniano contínuo sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, então para cada $L > 0$ e $\delta > 0$, existe um conjunto $\Omega_0$ com $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ tal que, para todo $\omega \in \Omega_0$, existe $K(L,\omega,\delta) < +\infty$, tal que

$$|W_s(\omega) - W_t(\omega)| \leqslant K(L,\omega,\delta)|s-t|^{\frac{1}{2}-\delta}, \qquad \text{se } 0 \leqslant s,t < L.$$

Alternativamente, as trajetórias do Movimento Browniano são funções localmente $\alpha$-Hölder contínuas de ordem $\alpha$ para cada $\alpha < \frac{1}{2}$.

**Prova**. Como $\{W_t : t \in [0,+\infty)\}$ é um Movimento Browniano contínuo, podemos aplicar diretamente o Teorema 23 para garantir que para cada $L > 0$ fixado, que o processo estocástico $\{X_t : t \in [0,+\infty)\}$ definido por

$$X_t \equiv \frac{1}{\sqrt{L}} W_{Lt} \tag{65}$$

é um Movimento Browniano. Vamos considerar apenas a restrição $\{X_t : t \in [0,1)\}$ do processo estocástico $\{X_t : t \in [0,+\infty)\}$. Neste caso para cada par $s,t \in [0,1)$, com $s < t$, temos a seguinte igualdade em distribuição $X_t - X_s = \sqrt{t-s}Z$, onde $Z \sim N(0,1)$. Logo para todo $p \in \mathbb{N}$, temos a seguinte igualdade em distribuição $|X_t - X_s|^{2p} = (X_t - X_s)^{2p} = (t-s)^p Z^{2p}$. Portanto

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^{2p}] = (t-s)^p \mathbb{E}[Z^{2p}] = (t-s)^p \frac{(2p)!}{2^p p!} = |t-s|^{1+(p-1)} \frac{(2p)!}{2^p p!}.$$

Tomando $\gamma \equiv 2p$, $C \equiv (2p)!/(2^p p!)$ e $\varepsilon \equiv p-1$ segue da igualdade acima que

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^\gamma] \leqslant C|t-s|^{1+\varepsilon}.$$

Logo, podemos aplicar o Teorema 34 e concluir que

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{\substack{s\neq t\\ s,t\in[0,1)}} \frac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\alpha}\right)^\gamma\right] < +\infty, \qquad \forall \alpha \in \left[0, \frac{\varepsilon}{\gamma}\right),$$

com $\gamma = 2p$ e $\varepsilon = p-1$. Assim temos, para quase todo $\omega \in \Omega$, que existe uma constante positiva $K(\omega,p,\alpha) < +\infty$ tal que

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leqslant K(\omega,p,\alpha)^{\frac{1}{2p}}\ |t-s|^\alpha, \qquad \forall \alpha \in \left[0, \frac{p-1}{2p}\right) = \left[0\,,\, \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}\right). \tag{66}$$

Fixado $\delta > 0$, sabemos que existe algum $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{2} - \delta < \frac{1}{2} - \frac{1}{2p_0}.$$

Tomando na desigualdade (66) $p = p_0$ e $\alpha = 1/2 - \delta$ concluímos que existe alguma constante $K(\omega,p_0,\delta)$ tal que

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leqslant K(\omega,p_0,\delta)\ |t-s|^{\frac{1}{2}-\delta}$$

Note que, na verdade, a constante que aparece acima depende apenas de $\omega$ e $\delta$, já que $p_0$ depende apenas de $\delta$. Logo podemos chamá-la apenas de $K(\omega, \delta)$. A partir da desigualdade válida para o processo $\{X_t\}$,

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leqslant K(\omega, \delta)|t - s|^{\frac{1}{2}-\delta},$$

e da relação em (65), temos

$$\left|\frac{1}{\sqrt{L}}W_{Lt}(\omega) - \frac{1}{\sqrt{L}}W_{Ls}(\omega)\right| \leqslant K(\omega, \delta)|t - s|^{\frac{1}{2}-\delta}.$$

Multiplicando ambos os lados por $\sqrt{L}$, obtemos

$$|W_{Lt}(\omega) - W_{Ls}(\omega)| \leqslant \sqrt{L} \times K(\omega, \delta)|t - s|^{\frac{1}{2}-\delta}.$$

Agora, considere a mudança de variáveis $u = Lt$ e $v = Ls$. Invertendo esta relação temos $t = u/L$ e $s = v/L$. Como $s, t \in [0, 1)$, as novas variáveis $u$ e $v$ pertencem ao intervalo $[0, L)$.

Substituindo na desigualdade acima, temos:

$$\begin{aligned}
|W_u(\omega) - W_v(\omega)| &\leqslant \sqrt{L} \times K(\omega, \delta)\left|\frac{u}{L} - \frac{v}{L}\right|^{\frac{1}{2}-\delta} \\
&= \sqrt{L} \times K(\omega, \delta)\frac{1}{L^{\frac{1}{2}-\delta}}|u - v|^{\frac{1}{2}-\delta} \\
&= L^{\frac{1}{2}}L^{-\left(\frac{1}{2}-\delta\right)}K(\omega, \delta)|u - v|^{\frac{1}{2}-\delta} \\
&= L^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\delta}K(\omega, \delta)|u - v|^{\frac{1}{2}-\delta} \\
&= L^{\delta}K(\omega, \delta)|u - v|^{\frac{1}{2}-\delta}.
\end{aligned}$$

Finalmente, definindo a constante $K(L, \omega, \delta) \equiv L^{\delta}K(\omega, \delta)$, concluímos que para quaisquer $0 \leqslant u, v < L$,

$$|W_u(\omega) - W_v(\omega)| \leqslant K(L, \omega, \delta)\ |u - v|^{\frac{1}{2}-\delta},$$

o que encerra a prova do corolário. ■

# Apêndice

## A. O Teorema da Extensão de Carathéodory

Em determinadas situações, quando estamos trabalhando com uma medida $\mu$ sobre $\Omega$ podemos nos livrar de várias dificuldades técnicas se esta medida esta definida em todo $\mathscr{P}(\Omega)$. Acontece que na maioria das situações mais interessantes, isto nem sempre ocorre. Entretanto é possível definir um outro objeto matemático, chamado *medida exterior*, que está sempre definido na $\sigma$-álgebra das partes. Uma medida exterior tem a vantagem de estar sempre definida no conjunto das partes, mas por outro lado, em geral, ela não é uma função $\sigma$-aditiva. Mas como veremos a abaixo as medidas exteriores são objetos muito úteis na construção de medidas sobre um determinado conjunto $\Omega$.

**Definição 36** (Medida Exterior)**.** Uma função $\mu^* : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ é chamada de medida exterior sobre $\Omega$ se satisfaz:

1) $\mu^*(\varnothing) = 0$;

2) se $A \subset B$ então $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

3) $\mu^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$, para toda sequência $A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

A proposição seguinte é uma poderosa máquina de construir medidas exteriores. Como o leitor pode ver as hipóteses são muito fracas. Ela nos diz que escolhida uma coleção arbitrária $\mathcal{A}$ de subconjuntos de um espaço $\Omega$ (note que não exigimos nenhuma estrutura nesta coleção nem de álgebra, $\sigma$-álgebra e etc.) e qualquer função $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ tal que $\mu(\varnothing) = 0$, podemos construir a partir da coleção $\mathcal{A}$ e da função $\mu$ uma medida exterior, que será chamada de $\mu^*$, definida em toda a $\sigma$-álgebra das partes de $\Omega$. O leitor deve examinar com cuidado a definição de $\mu^*$, dada abaixo, para se convencer que nem sempre $\mu^*$ é uma extensão de $\mu$.

**Proposição 37.** Seja $\mathcal{A}$ uma coleção arbitrária de subconjuntos de $\Omega$ satisfazendo apenas que $\varnothing, \Omega \in \mathcal{A}$. Seja $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, uma função arbitrária, tal que $\mu(\varnothing) = 0$. Para todo $A \subset \Omega$, defina

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_n \mu(F_n) : F_n \in \mathcal{A} \ \forall n \text{ e } \ A \subset \cup_n F_n \right\}. \tag{67}$$

Então $\mu^*$ é uma medida exterior em $\Omega$.

**Prova**. Já que $\varnothing \subset \varnothing \in \mathcal{A}$, temos que $\mu^*(\varnothing) = 0$. Se $A \subset B$, então qualquer coleção enumerável $F_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ que é uma cobertura de $B$ (isto é, $B \subset \cup_n F_n$) é também uma cobertura de $A$. Logo segue da definição de ínfimo que $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Resta agora verificar que $\mu^*$ satisfaz a propriedade 3) de medida exterior. Seja $A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ uma coleção enumerável de subconjuntos de $\Omega$ e $A = \cup_n A_n$. Se para algum índice $n$ temos $\mu^*(A_n) = \infty$, então segue da monotonicidade de $\mu$ que $\mu^*(A) = \infty$, e portanto 3) é válida neste caso. Vamos assumir então que $\mu^*(A_n) < \infty$ para todo $n$. Fixe $\varepsilon > 0$ arbitrário. Para cada $n$ existe uma sequência $F_{n,k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ em $\mathcal{A}$ tal que $A_n \subset \cup_k F_{n,k}$ e

$$\sum_k \mu(F_{n,k}) - \mu^*(A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}, \qquad \text{para todo } n. \tag{68}$$

Certamente temos que

$$A \subset \bigcup_n \bigcup_k F_{n,k}.$$

Usando a monotonicidade, em seguida, a definição de $\mu^*$ e por último a desigualdade (68) temos que

$$\mu^*(A) \leq \mu^* \left( \bigcup_n \bigcup_k F_{n,k} \right) \leq \sum_n \sum_k \mu(F_{n,k}) \leq \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

■

**Definição 38** (Medida $\sigma$-finita)**.** Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de subconjuntos de $\Omega$ e $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ uma medida. Se existe uma sequência $A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tal que $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$, então dizemos que $\mu$ é uma medida $\sigma$-finita.

Precisamos de mais duas definições para podermos apresentar de forma precisa o enunciado do Teorema da Extensão de Carathéodory. Seja $\mu$ uma medida em uma $\sigma$-álgebra $\mathcal{F}$. A $\sigma$-álgebra $\mathcal{F}$ é dita $\mu$-**completa** se para todo $N \in \mathcal{F}$ e para todo $A \subset N$, com $\mu(N) = 0$ temos $A \in \mathcal{F}$. Em outras palavras, $\mathcal{F}$ é $\mu$-completa se os subconjuntos dos conjuntos de medida $\mu$ zero pertecem a $\sigma$-álgebra $\mathcal{F}$. Neste caso dizemos também que $\mu$ é completa. Dada qualquer medida $\mu$ definida sobre uma $\sigma$-álgebra $\mathcal{F}$ é fácil verificar que a coleção

$$\overline{\mathcal{F}} = \{C = A \cup B : A \in \mathcal{F}, B \subset N \text{ para algum } N \in \mathcal{F} \text{ com } \mu(N) = 0\}$$

é uma $\sigma$-álgebra $\overline{\mu}$ completa, onde $\overline{\mu}(A \cup B) := \mu(A)$. Observe que $\overline{\mu}$ está bem definida e que $\overline{\mu}$ é uma medida definida em $\overline{\mathcal{F}}$ que estende $\mu$. Esta extensão de $\mu$ é chamada de *completamento* de $\mu$.

**Definição 39** (Conjuntos $\mu^*$-mensuráveis)**.** Dada uma medida exterior $\mu^*$ definida sobre as partes de um conjunto $\Omega$, dizemos que $A \subset \Omega$ é $\mu^*$-mensurável se a condição abaixo é satisfeita:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \qquad \text{para todo } \ E \subset \Omega. \tag{69}$$

Esta condição é conhecida como *Condição de Carathéodory* .

**Teorema 40** (Teorema da Extensão de Carathéodory)**.** Seja $\mu^* : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ uma medida exterior sobre $\Omega$.

1) A coleção $\mathcal{M}$ de todos os conjuntos $\mu^*$-mensuráveis é uma $\sigma$-álgebra e a restrição de $\mu^*$ a $\mathcal{M}$ é uma medida completa.

2) Se $\mu^*$ é definida por (67), com $\mathcal{A}$ sendo uma álgebra e $\mu$ uma medida em $\mathcal{A}$. Então $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$ e $\mu^* = \mu$ em $\mathcal{A}$.

3) Se $\mu$ é uma medida $\sigma$-finita em uma álgebra $\mathcal{A}$ então ela se estende **unicamente** a uma medida definida em $\sigma(\mathcal{A})$. Esta extensão é dada por $\mu^*$, definida em (67), restrita a $\sigma(\mathcal{A})$.

**Prova**. Prova do item 1). Mostraremos primeiro que $\mathcal{M}$ é uma álgebra. Em primeiro lugar observamos que $A = \varnothing$ satisfaz a condição de Carathéodory. Também é imediato verificar que se $A$ satisfaz a condição de Carathéodory, então $A^c$ também satisfaz esta condição. Pela subaditividade da medida exterior ( propriedade 3 da Definição 36), temos que a condição de Carathéodory é satisfeita sempre que

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E), \qquad \text{para todo } E \in \Omega. \tag{70}$$

Vamos mostrar que $\mathcal{M}$ é fechado com respeito a interseções finitas. Para quaisquer $A, B \in \mathcal{M}$, temos

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \\
&= \mu^*(E \cap B \cap A) + \mu^*(E \cap B \cap A^c) + \mu^*(E \cap B^c \cap A) + \mu^*(E \cap B^c \cap A^c) \\
&\geq \mu^*(E \cap (B \cap A)) + \mu^*(E \cap (B \cap A)^c),
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade, usamos que $(B \cap A)^c = B^c \cup A^c = (B^c \cap A) \cup (B^c \cap A^c) \cup (B \cap A^c)$ e a subaditividade de $\mu^*$. Isto mostra que a desigualdade (70) é satisfeita para $A \cap B$, logo $A \cap B \in \mathcal{M}$. Já que $\mathcal{M}$ é fechada para interseções, podemos concluir que $\mathcal{M}$ é fechada para uniões finitas. E portanto concluímos a prova que $\mathcal{M}$ é uma álgebra.

Próximo passo é provar que $\mathcal{M}$ é uma $\sigma$-álgebra e que $\mu^*$ é $\sigma$-aditiva sobre $\mathcal{M}$. Seja $B_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ uma sequência em $\mathcal{M}$ de conjuntos dois a dois disjuntos. Defina $C_m = \cup_{n=1}^m B_n$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Vamos mostrar por indução em $m$ que

$$\mu^*(E \cap C_m) = \sum_{n=1}^{m} \mu^*(E \cap B_n), \qquad \text{para todo } E \subset \Omega. \tag{71}$$

Já que $C_1 = B_1$ a fórmula acima é verdadeira para $m = 1$. Suponha então que (71) seja satisfeita para um dado $m$. Como $B_{m+1} \in \mathcal{M}$, para todo o $E \subset \Omega$, temos que

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap C_{m+1}) &= \mu^*((E \cap C_{m+1}) \cap B_{m+1}) + \mu^*((E \cap C_{m+1}) \cap B_{m+1}^c) \\
&= \mu^*(E \cap B_{m+1}) + \mu^*(E \cap C_m) \\
&= \mu^*(E \cap B_{m+1}) + \sum_{n=1}^{m} \mu^*(E \cap B_n),
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a hipótese de indução. A igualdade acima mostra que (71) é satisfeita para $m + 1$ no lugar de $m$ e assim a indução está completa.

Seja $A = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ e $E \subset \Omega$, temos que

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap C_m) + \mu^*(E \cap C_m^c) \qquad (\text{pois } C_m \in \mathcal{M}) \\
&= \sum_{n=1}^{m} \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap C_m^c) \\
&\geq \sum_{n=1}^{m} \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap A^c),
\end{aligned}$$

pois $A^c \subset C_m^c$. Tomando $m \to \infty$, ficamos com a seguinte desigualdade

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap A^c) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \tag{72}$$

onde na última desigualdade usamos a propriedade subaditiva da medida exterior. Isso mostra que $A \equiv \cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}$, isto é, $\mathcal{M}$ é fechado para uniões disjuntas contáveis. Se $A_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$ é uma sequência em $\mathcal{M}$, podemos expressar $A \equiv \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ como $A = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$, onde $B_1 = A_1$ e $B_n = A_1^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \cap A_n$ para $n \geq 2$. Note que a sequência $B_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ definida desta forma é uma sequência de conjuntos dois a dois disjuntos e cada $B_n \in \mathcal{M}$. Então $A \in \mathcal{M}$, provando que $\mathcal{M}$ é fechada para uniões enumeráveis arbitrárias.

Para provar a $\sigma$-aditividade de $\mu^*$ em $\mathcal{M}$, considere $B_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ uma sequência de conjuntos dois a dois disjuntos em $\mathcal{M}$. Tomando $E = A \equiv \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ na primeira desigualdade em (72) obtemos a seguinte estimativa: $\mu^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\left(B_n\right)$. Usando a propriedade subaditiva de uma medida exterior concluímos que

$$\mu^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\left(B_n\right).$$

Assim, concluímos a prova de que $\mu^*$ é uma medida na $\sigma$-álgebra $\mathcal{M}$.

Vamos provar agora a última parte do item 1), isto é, mostrar que a medida que acabamos de obter é completa. Sejam $N \in \mathcal{M}$ tal que $\mu^*(N) = 0$ e $A \subset N$. Pela monotonicidade de $\mu^*$ temos que $\mu^*(E \cap A) \leq \mu^*(A) \leq \mu^*(N) = 0$ e $\mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E)$. Mas estas duas desigualdades implicam que (70) é satisfeita, provando que $A \in \mathcal{M}$. O que é suficiente para concluir que a $\sigma$-álgebra $\mathcal{M}$ é $\mu^*$-completa.

Prova do item 2). Considere agora o caso em que $\mathcal{A}$ é uma álgebra, $\mu$ é uma medidade em $\mathcal{A}$, e $\mu^*$ é a medida exterior definida em (67). Para provar que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, seja $A \in \mathcal{A}$. Fixe $E \subset \Omega$ e $\epsilon > 0$ arbitrariamente. Invocando a definição de medida exterior (67), podemos afirmar que existe $A_n \in \mathcal{A}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ tal que $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \epsilon \leq \mu^*(E). \tag{73}$$

Além disso, segue da subaditividade da medida exterior e em seguida, da definição dada em (67) as seguintes desigualdades:

$$\mu^*(E \cap A) \leq \mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n)$$

e

$$\mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*\left(A^c \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A^c \cap A_n).$$

Somando as duas desigualdades em ambos os lados e usando a estimativa (73) obtemos

$$\begin{aligned}\mu^*(E\cap A)+\mu*(E\cap A^c) \leq & \sum_{n=1}^{\infty}[\mu(A\cap A_n)+\mu(A^c\cap A_n)]\\ = & \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\\ \leq & \mu^*(E)+\varepsilon.\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário a condição (70) é satisfeita, provando que $A \in \mathcal{M}$. Para provar que $\mu = \mu^*$ em $\mathcal{A}$, seja $A \in \mathcal{A}$. Pela definição (67), $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ (tomando $A_1 = A$ e $A_n = \varnothing$, para $n \geq 2$ por exemplo). Por outro lado, $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ para toda a sequência $A_n \in \mathcal{A}$ $(n \geq 1)$ tal que $A \subset \cup_{n=1}^{\infty}A_n$, então temos que $\mu^*(A) \geq \mu(A)$ (por subaditividade de $\mu$ em $\mathcal{A}$). Mostrando que $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Prova do item 3). Suponha que $\mu$ seja $\sigma$-finita na álgebra $\mathcal{A}$ e seja $\mu^*$ sua extensão a $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$, dada pelo item 2) deste teorema. Já que $\mu$ é $\sigma$-finita, podemos encontrar uma sequência $A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ de conjuntos dois a dois disjuntos tal que $A_n \in \mathcal{A}$, $\mu(A_n) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty}A_n$. Seja $\nu$ uma extensão da medida $\mu$, definida em $\sigma(\mathcal{A})$. Fixado $n \in \mathbb{N}$, vamos mostrar primeiro que $\mu^* = \nu$, em todos os conjuntos da coleção $A_n \cap \sigma(\mathcal{A}) \equiv \{A_n \cap A : A \in \sigma(\mathcal{A})\}$. Para provar este fato vamos mostrar que a coleção $\mathcal{C} = \{A \in \sigma(\mathcal{A}) : \nu(A_n \cap A) = \mu^*(A_n \cap A)\}$ é um $\lambda$-sistema contendo $\mathcal{A}$ (que é um $\pi$-sistema). De fato, se $A \in \mathcal{C}$ então temos que:

$$\nu(A_n) = \nu((A_n \cap A^c) \cup (A_n \cap A)) = \nu(A_n \cap A^c) + \nu(A_n \cap A)$$

e

$$\mu^*(A_n) = \mu^*((A_n \cap A^c) \cup (A_n \cap A)) = \mu^*(A_n \cap A^c) + \mu^*(A_n \cap A).$$

Observando que o lado esquerdo de ambas igualdades acima são iguais ($\nu$ e $\mu^*$ são extensões de $\mu$ em $\mathcal{A}$) e que as segundas parcelas do lado direito também são iguais já que $A \in \mathcal{C}$, concluímos que $\mu^*((A_n \cap A^c) = \nu(A_n \cap A^c)$ e portanto $A^c \in \mathcal{C}$. Como o $\varnothing \in \mathcal{C}$ segue do fato que acabamos de provar que $\Omega \in \mathcal{C}$. Seja $B_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ uma sequência de conjuntos em $\mathcal{C}$ dois a dois disjuntos. Segue da $\sigma$-aditividade de $\mu^*$ e $\nu$ que

$$\begin{aligned}\nu\left(A_n \cap \left(\cup_{m=1}^{\infty} B_m\right)\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\nu\left(A_n \cap B_m\right) = & \sum_{m=1}^{\infty}\mu^*\left(A_n \cap B_m\right)\\ & = \mu^*\left(A_n \cap \left(\cup_{m=1}^{\infty} B_m\right)\right).\end{aligned}$$

O que encerra a prova de que $\mathcal{C}$ é um $\lambda$-sistema. Como $\mathcal{C}$ é um $\lambda$-sistema que contém o $\pi$-sistema $\mathcal{A}$ segue do Teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin que $\sigma(A) \subset \mathcal{C}$.

Para finalizar a prova, basta notar que dado $A \in \sigma(\mathcal{A})$, podemos escrever $A = \cup_{n=1}^{\infty}(A \cap A_n)$. Agora, usando a continuidade das medidas $\nu$ e $\mu^*$, temos que

$$\begin{aligned}\nu(A) = \nu\left(\cup_{n=1}^{\infty}(A \cap A_n)\right) = \lim_{n\to\infty}\nu(A \cap A_n) = & \lim_{n\to\infty}\mu^*(A \cap A_n)\\ = & \mu^*(\cup_{n=1}^{\infty}(A \cap A_n))\\ = & \mu^*(A).\end{aligned}$$

■

## B. Teorema de Fubini para Funções Complexas

Seja $(X, d)$ um espaço métrico. A $\sigma$-álgebra gerada pela família dos conjuntos abertos, induzidos pela métrica $d$, em $X$ é chamada de $\sigma$-álgebra de Borel de $X$ e será denotada por $\mathscr{B}_X$. Um subconjunto de $X$ mensurável segundo $\mathscr{B}_X$ é também chamado de boreliano de $X$. Note que todos conjuntos abertos, fechados, interseções enumeráveis de abertos, uniões enumeráveis de fechados e assim por diante são todos borelianos de $X$.

Neste texto vamos considerar sempre o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ como um espaço métrico munido de sua métrica usual $d(z, w) \equiv |z - w|$. O espaço mensurável $(\mathbb{C}, \mathscr{B}_{\mathbb{C}})$ será portanto aquele onde a $\sigma$-álgebra de Borel de $\mathbb{C}$ é definida por esta métrica. Analogamente, quando considerarmos um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ como espaço métrico estaremos considerando que este conjunto está munido da distância $d(x, y) = |x - y|$.

Seja $(X, \mathscr{M})$ um espaço mensurável e $f : X \to \mathbb{C}$ uma função complexa. Vamos dizer que $f$ é $\mathscr{M}$-mensurável se para cada $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{C}}$ temos que $f^{-1}(B) \in \mathscr{M}$. Em outras palavras, uma função complexa é mensurável se a imagem inversa de qualquer boreliano de $\mathbb{C}$ é um subconjunto $\mathscr{M}$-mensurável em $X$.

O espaço produto de dois espaços mensuráveis $(X, \mathscr{M})$ e $(Y, \mathscr{N})$ será definido como sendo o espaço mensurável $(X \times Y, \mathscr{M} \otimes \mathscr{N})$, onde a $\sigma$-álgebra $\mathscr{M} \otimes \mathscr{N}$ é àquela gerada pelos conjuntos da forma $E \times Y$ onde $E \in \mathscr{M}$ e $X \times F$, onde $F \in \mathscr{N}$.

De maneira mais geral, se $(X_1, \mathscr{M}_1), \ldots, (X_n, \mathscr{M}_n)$ é uma coleção de $n$ espaços mensuráveis, definimos o espaço produto $(X_1 \times \ldots \times X_n, \mathscr{M}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{M}_n)$, onde a $\sigma$-álgebra $\mathscr{M}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{M}_n$ é gerada por todos os conjuntos da forma $X_1 \times \ldots \times X_{k-1} \times E \times X_{k+1} \times \ldots \times X_n$, com $E \in \mathscr{M}_k$ e $k \in \{1, \ldots, n\}$; com a convenção de que quando $k = 1$ a notação acima significa $E \times X_2 \times \ldots \times X_n$ e no caso $k = n$ deve ser lida como $X_1 \times \ldots \times X_{n-1} \times E$.

Sejam $(X, \mathscr{M}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{N}, \nu)$ espaços de medida. Para cada $E \subset X \times Y$, $x \in X$ e $y \in Y$ definimos as seções $E_x$ e $E^y$ de $E$, por

$$E_x \equiv \{y \in Y : (x, y) \in E\} \qquad \text{e} \qquad E^y \equiv \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

Analogamente, definimos as seções de uma função complexa definida em um produto cartesiano como segue. Se $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ é uma função suas seções $f_x$ e $f^y$ são funções definidas nos espaços $Y$ e $X$, respectivamente com $f_x : Y \to \mathbb{C}$ e $f^y : X \to \mathbb{C}$ dadas por

$$f_x(y) \equiv f(x, y) \qquad \text{e} \qquad f^y(x) \equiv f(x, y).$$

Observamos que para qualquer $E \subset X \times Y$ sempre temos

$$(\mathbb{1}_E)_x = \mathbb{1}_{E_x} \qquad \text{e} \qquad (\mathbb{1}_E)^y = \mathbb{1}_{E^y}.$$

**Proposição 41.** Sejam $(X, \mathscr{M})$ e $(Y, \mathscr{N})$ espaços mensuráveis e $\mathscr{M} \otimes \mathscr{N}$ a $\sigma$-álgebra produto em $X \times Y$.

i) Se $E \in \mathscr{M} \otimes \mathscr{N}$, então:

   a) $E_x \in \mathscr{N}$, para todo $x \in X$;

   b) $E^y \in \mathscr{M}$, para todo $y \in Y$.

ii) Se $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ é uma função complexa $\mathscr{M} \otimes \mathscr{N}$- mensurável então:

   a) $f_x : Y \to \mathbb{C}$ é $\mathscr{N}$-mensurável para todo $x \in X$;

b) $f^y : X \to \mathbb{C}$ é $\mathscr{M}$-mensurável para todo $y \in Y$.

É importante observar que as recíprocas de ambos itens i) e ii) da proposição acima podem ser falsas. Isto é, podemos construir um conjunto $E \subset X \times Y$ possuindo todas as seções mensuráveis, com respeito as $\sigma$-álgebras $\mathscr{M}$ e $\mathscr{N}$, respectivamente, mas tal que $E$ não é mensurável segundo a $\sigma$-álgebra produto $\mathscr{M} \otimes \mathscr{N}$.

Para apresentar este exemplo vamos precisar do seguinte resultado que pode ser encontrado na referência [2] (Proposition 1.5 - página 23).

**Proposição 42.** Sejam $(X_1, d_1), \ldots (X_n, d_n)$ espaços métricos arbitrários e $X \equiv X_1 \times \ldots \times X_n$ o espaço produto munido da métrica $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + \ldots + d_n(x_n, y_n)$. Então a $\sigma$-álgebra produto $\mathscr{B}_{X_1} \otimes \ldots \otimes \mathscr{B}_{X_n} \subset \mathscr{B}_{X_1 \times \ldots \times X_n}$. Se supomos adicionalmente que $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ são todos espaços separáveis, então podemos concluir que vale a igualdade, isto é,

$$\mathscr{B}_{X_1} \otimes \ldots \otimes \mathscr{B}_{X_n} = \mathscr{B}_{X_1 \times \ldots \times X_n}.$$

**Exemplo 43.** Sejam $X \equiv [0, 1)$ munido de sua distância usual $d(x, y) = |x - y|$ e $\mathscr{M} \equiv \mathscr{B}_{[0,1)}$ a $\sigma$-álgebra de Borel de $X$, gerada pelos abertos induzidos pela métrica $d$. Considere o espaço produto $X \times X$ munido da $\sigma$-álgebra produto $\mathscr{M} \otimes \mathscr{M}$.

Já que $X$ munido da métrica $d$ é um espaço métrico separável, segue da Proposição 42 que $\mathscr{M} \otimes \mathscr{M} = \mathscr{B}_{[0,1)} \otimes \mathscr{B}_{[0,1)} = \mathscr{B}_{[0,1) \times [0,1)}$, onde consideramos o espaço produto $[0, 1) \times [0, 1)$ munido da métrica $\rho\Big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\Big) = d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$.

Denote por $\mathbb{V}$ o conjunto de Vitali que está contido em $X$ e considere o conjunto $E \subset X \times X$ definido por

$$E \equiv \{(v, v) \in X \times X : v \in \mathbb{V}\}.$$

Observe que o conjunto $E$ é subconjunto próprio da diagonal do retângulo $X \times X$.

Afirmamos que para cada $x \in X$ a seção $E_x$ é um conjunto unitário ou vazio. De fato, para qualquer $x \in X$ fixado, temos

$$E_x = \{y \in X : (x, y) \in E\} = \begin{cases} \{x\}, & \text{se } x \in \mathbb{V}; \\ \varnothing, & \text{se } x \notin \mathbb{V}. \end{cases}$$

Portanto para cada $x \in X$ temos que $E_x$ é mensurável segundo $\mathscr{M}$ já que todo subconjunto unitário pertence a esta $\sigma$-álgebra, bem como o conjunto vazio. Analogamente, temos para todo $y \in X$ que

$$E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\} = \begin{cases} \{y\}, & \text{se } y \in \mathbb{V}; \\ \varnothing, & \text{se } y \notin \mathbb{V}. \end{cases}$$

O que mostra que $E_x$ é $\mathscr{M}$-mensurável para todo $x \in X$ e que $E^y$ é $\mathscr{M}$-mensurável para todo $y \in X$.

Vamos mostrar agora que $E$ não é $\mathscr{M} \otimes \mathscr{M}$-mensurável. Para isto considere a função $f : X \to X \times X$ dada por

$$f(x) = (x, x).$$

Note que $f$ é uma função contínua com respeito as métricas $d$ e $\rho$, definidas acima. Da continuidade de $f$ segue que a imagem inversa de qualquer boreliano em $X \times X$ é um boreliano de $X$. Como já mencionamos a $\sigma$-álgebra de Borel de $X \times X$, isto é, $\mathscr{B}_{[0,1) \times [0,1)} = \mathscr{B}_{[0,1)} \otimes \mathscr{B}_{[0,1)} = \mathscr{M} \otimes \mathscr{M}$. Desta forma, se assumimos que $E \in \mathscr{M} \otimes \mathscr{M}$ então sua imagem

inversa por $f$ deve ser necessariamente um boreliano de $X$. Portanto somos levados a concluir que

$$\mathbb{V} = \{x \in X : (x,x) \in E\} = \{x \in X : f(x) \in E\} = f^{-1}(E) \in \mathscr{M}$$

o que é um absurdo.

Na Teoria da Medida é conveniente considerar funções tomando valores infinitos e, em particular, no conjunto $[0,+\infty]$. Assim é comum que este conjunto seja tratado como um espaço métrico, onde a métrica é definida por $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$, com a convenção de que $\arctan(+\infty) \equiv \pi/2$. Logo $\mathscr{B}_{[0,+\infty]}$ denotará a $\sigma$-álgebra de Borel de $[0,+\infty]$ munido desta métrica.

Seja $(X,\mathscr{M})$ um espaço de medida e $f : X \to [0,+\infty]$ função. Vamos dizer que $f$ é uma função $\mathscr{M}$-mensurável se para todo $B \in \mathscr{B}_{[0,+\infty]}$ temos que $f^{-1}(B) \in \mathscr{M}$.

**Teorema 44** (Tonelli)**.** Sejam $(X,\mathscr{M},\mu)$ e $(Y,\mathscr{N},\nu)$ espaços arbitrários de medida $\sigma$-finitos. Se $f : X \times Y \to [0,+\infty]$ é uma função $\mathscr{M} \otimes \mathscr{N}$-mensurável, então:

i) $g : X \to [0,+\infty]$, dada por $g(x) = \displaystyle\int_Y f_x \, d\nu = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ é $\mathscr{M}$-mensurável;

ii) $h : Y \to [0,+\infty]$, dada por $h(y) = \displaystyle\int_X f^y \, d\mu = \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ é $\mathscr{N}$-mensurável;

iii) $\displaystyle\int_X \left[\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\right] d\mu(x) = \int_{X\times Y} f \, d(\mu\times\nu) = \int_Y \left[\int_X f(x,y)\, d\mu(x)\right] d\nu(y).$

**Teorema 45** (Fubini - Funções Complexas)**.** Sejam $(X,\mathscr{M},\mu)$ e $(Y,\mathscr{N},\nu)$ espaços arbitrários de medida $\sigma$-finitos. Se $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ é uma função complexa $\mathscr{M} \otimes \mathscr{N}$-mensurável tal que

$$\int_{X\times Y} |f| \, d(\mu\times\nu) < +\infty.$$

Então temos:

i) existe $E \in \mathscr{M}$ tal que: $\mu(E) = 0$ e para todo $x \in X \setminus E$, temos $\int_Y |f_x| \, d\nu < +\infty$. Além do mais, existe uma função complexa $\mathscr{M}$-mensurável $g : X \to \mathbb{C}$, satisfazendo $g(x) = \displaystyle\int_Y f_x \, d\nu = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$, para todo $x \in X \setminus E$ e $g|_E \equiv 0$;

ii) existe $F \in \mathscr{N}$ tal que: $\nu(F) = 0$ e para todo $y \in Y \setminus F$, temos $\int_X |f^y| \, d\mu < +\infty$. Além do mais, existe uma função complexa $\mathscr{N}$-mensurável $h : Y \to \mathbb{C}$, satisfazendo $h(y) = \displaystyle\int_X f^y \, d\mu = \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$, para todo $y \in Y \setminus F$ e $h|_F \equiv 0$;

iii) $\displaystyle\int_{X\setminus E} \left[\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\right] d\mu(x) = \int_{X\times Y} f \, d(\mu\times\nu) = \int_{Y\setminus F} \left[\int_X f(x,y)\, d\mu(x)\right] d\nu(y).$

Observamos que é comum abusar da notação e escrever a conclusão do item iii) do Teorema de Fubini da mesma forma que escrevemos a conclusão do item iii) do Teorema de Tonelli, pois se alteramos uma função em um conjunto de medida nula não mudamos o valor de sua integral.

Decidimos escrever o enunciado desta forma mais rigorosa para enfatizar que em alguns casos poderíamos, por exemplo, ter para algum ponto $x \in E$ que escrever a integral

$$\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$$

não fizesse sentido, isto é, a integral de Lebesgue acima poderia não existir.

Para evitar escrever as integrais sobre os conjuntos $X \setminus E$ e $Y \setminus F$ poderíamos ter optado no item iii) por usar as funções $g$ e $h$ dos itens i) e ii), respectivamente. Neste caso, seria completamente lícito escrever

$$\int_X g(x)d\mu(x) = \int_{X\times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_Y h(y)d\nu(y).$$

Porém, o enunciado desta maneira tem a desvantagem de não enfatizar a principal conclusão do Teorema de Fubini que é o fato da integral sobre o espaço produto poder ser calculada via as integrais iteradas na ordem que for mais conveniente.

## C. Topologia Geral

**Definição 46** (Espaço topológico)**.** Seja $X$ um conjunto arbitrário. Uma *topologia* em $X$ é uma família $\tau \subseteq \mathscr{P}(X)$ (coleção das partes de $X$) satisfazendo

1. $\varnothing \in \tau \quad \text{e} \quad X \in \tau$;
2. se $I$ é um conjunto de índices arbitrário e $U_i \in \tau$, para todo $i \in I$, então
$$\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau;$$
3. para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer que sejam $U_1, \ldots, U_n \in \tau$, temos
$$\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \tau.$$

O par ordenado $(X, \tau)$ chama-se um *espaço topológico*; os elementos de $\tau$ são chamados de *abertos* de $X$. Os complementares dos abertos são chamados *fechados*.

**Definição 47** (Base de uma topologia)**.** Seja $X$ um conjunto. Uma família $\mathcal{B} \subset \mathscr{P}(X)$ chama-se uma *base* (para uma topologia em $X$) se:

1. $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$;
2. para quaisquer $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

A *topologia gerada* por $\mathcal{B}$ é a coleção

$$\tau(\mathcal{B}) = \Big\{ U \subset X : \ \forall x \in U \ \exists B \in \mathcal{B} \text{ com } x \in B \subset U \Big\},$$

Assim um elemento $U \in \tau(\mathcal{B})$ se, e somente se, $U$ é união (possivelmente vazia) de elementos da coleção $\mathcal{B}$.

**Definição 48** (Sub-Base de um Topologia)**.** Se $(X, \tau)$ é um espaço topológico, uma sub-base para para a topologia $\tau$ é uma coleção $\mathscr{C} \subseteq \tau$ tal que a coleção de todas as interseções finitas de elementos de $\mathscr{C}$ forma uma base para $\tau$.

**Proposição 49.** Se $X$ é um conjunto não vazio e $\{\tau_\lambda : \lambda \in \Gamma\}$ uma família de topologias sobre $X$, onde $\Gamma$ é um conjunto de índices arbitrários. Então a coleção

$$\tau \equiv \bigcap_{\lambda \in \Gamma} \tau_\lambda$$

é uma topologia em $X$.

⚠ Note que a interseção acima refere-se a interseção das topologias e não dos conjuntos que são elementos destas topologias.

**Definição 50** (Topologia Gerada por uma Coleção)**.** Sejam $X$ um conjunto não vazio e $\mathscr{C}$ uma coleção arbitrária de subconjuntos de $X$. A topologia gerada por $\mathscr{C}$ é a interseção de todas as topologias que contem $\mathscr{C}$.

**Definição 51** (Topologia produto)**.** Seja $T$ um conjunto de índices arbitrário e $\{(X_t, \tau_t) : t \in T\}$ uma família arbitrária de espaços topológicos. Seja

$$X \equiv \prod_{t \in T} X_t$$

o produto cartesiano, como definido no início da Seção 1, munido das projeções canônicas $\pi_t : X \to X_t$, dadas por $\pi_t(x) = x_t$. A *topologia produto* em $X$, denotada por $\tau$, é a menor topologia em $X$ que torna todas as projeções $\pi_t : X \to X_t$ funções contínuas.

**Proposição 52** (Sub-base de Tychonoff)**.** Seja $T$ um conjunto de índices arbitrário e considere o espaço produto $\mathbb{R}^T$ munido da topologia produto $\tau(\mathbb{R}^T)$. Então a família

$$\mathcal{S} \equiv \left\{ \pi_t^{-1}((a,b)) \subset \mathbb{R}^T \ : \ t \in T, \ (a,b) \subset \mathbb{R} \right\}$$

é uma sub-base de $\tau(\mathbb{R}^T)$, ou seja, a topologia $\tau(\mathbb{R}^T)$ é a topologia gerada por $\mathcal{S}$.

**Prova**. Temos que mostrar que para cada $t \in T$ fixado, a a projeção $\pi_t : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$ é contínua, com respeito a topologia gerada por $\mathcal{S}$. Para isto seja $U \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Pelo Teorema de Lindelöf sabemos que $U$ pode ser escrito como uma união enumerável de intervalos abertos, ou seja, existe uma coleção enumerável de intervalos abertos $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ tais que $U = \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Pelas propriedades elementares da pré-imagem temos que

$$\pi_t^{-1}(U) = \pi_t^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \pi_t^{-1}(I_n)$$

e portanto $\pi_t^{-1}(U)$ pertence a topologia gerada por $\mathcal{S}$. Como $U$ é um aberto arbitrário de $\mathbb{R}$ temos que $\pi_t$ é contínua com respeito à topologia gerada por $\mathcal{S}$. É claro que o argumento também é independente da escolha de $t$, logo todas as projeções da família $\{\pi_t : t \in T\}$ são funções contínuas com respeito a topologia gerada por $\mathcal{S}$ e consequentemente, a topologia gerada por $\mathcal{S}$ contém a topologia produto $\tau$ (pois esta, por definição, é a menor topologia para o qual todas as projeções $\{\pi_t : t \in T\}$ são mensuráveis). Por outro lado, todo elemento de $\mathcal{S}$ é um elemento de $\tau$, da topologia produto. Logo a topologia gerada por $\mathcal{S}$ está contida em $\tau$. O que finalmente mostra que a topologia gerada por $\mathcal{S}$ coincide com a topologia produto. ■

**Corolário 53** (Base de cilindros finito-dimensionais)**.** Seja $T$ um conjunto de índice e $(\mathbb{R}^T, \tau(\mathbb{R}^T))$ o espaço produto. Então a família

$$\mathcal{B} \;=\; \Big\{ \bigcap_{t\in F} \pi_i^{-1}(U_t) \;:\; F \subset T \text{ finito},\; U_t \in \tau(\mathbb{R}) \Big\}$$

é uma base de $\tau(\mathbb{R}^T)$. Em outras palavras, um elemento da base da topologia é um *cilindro* da forma

$$\prod_{t\in T} U_t \quad \text{com} \quad U_t \in \tau(\mathbb{R}) \text{ para } t \in F \text{ (finito)} \;\text{ e }\; U_t = \mathbb{R} \text{ para } t \notin F.$$

Assim, todo aberto de $\tau(\mathbb{R}^T)$ é a união (possivelmente vazia) de tais cilindros.

**Teorema 54. (Propriedade universal).** Seja $(Y, \tau(Y))$ um espaço topológico arbitrário, $T$ um conjunto de índices arbitrário e $(\mathbb{R}^T, \tau(\mathbb{R}^T))$ o espaço produto. Uma função $f : Y \to \mathbb{R}^T$ é contínua se, e somente se, para cada $t \in T$, a composição $f_t \equiv \pi_t \circ f : Y \to \mathbb{R}$, onde $\pi_t : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$ é a projeção na $t$-ésima coordenada, é uma função contínua.

$$\begin{tikzcd}
(Y, \tau(Y)) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_t"'] & (\mathbb{R}^T, \tau(\mathbb{R}^T)) \arrow[dl, "\pi_t \circ f"] \\
(\mathbb{R},\, \tau(\mathbb{R})) &
\end{tikzcd}$$

**Prova**. Veja referência [4]. ■

**Proposição 55.** Seja $T$ um conjunto de índices enumerável e considere $\mathbb{R}^T$ com a topologia produto $\tau(\mathbb{R}^T)$. Então $\tau(\mathbb{R}^T)$, admite uma base enumerável.

**Prova**. Considere a seguinte base enumerável $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \equiv \{(a,b) \subset \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{Q},\; a < b\}$ da topologia usual de $\mathbb{R}$. Para cada subconjunto finito $J \subset T$, defina

$$\mathcal{B}_J \equiv \Big\{ \bigcap_{t\in J} \pi_t^{-1}(I_t) \;:\; I_t \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\; \text{para todo } t \in J \Big\},$$

onde $\pi_t : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$ é a projeção canônica na $t$-ésima coordenada. Considere a coleção de abertos do espaço produto $\mathbb{R}^T$ dada por

$$\mathcal{B} \equiv \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{\substack{J\subset T \\ \mathrm{Card}(J)=n}} \mathcal{B}_J. \tag{74}$$

Afirmamos que $\mathcal{B}$ é uma base enumerável de $\tau(\mathbb{R}^T)$. Vamos mostrar este fato em duas etapas. Primeiro, mostramos que $\mathcal{B}$ é uma base de $\tau(\mathbb{R}^T)$ e em seguida, que $\mathcal{B}$ é uma coleção enumerável de subconjuntos do espaço produto.

Segue da definição da topologia produto que seus aberto básicos são conjuntos da forma

$$\bigcap_{k=1}^{n} \pi_{t_k}^{-1}(U_k), \quad t_1, \ldots, t_n \in T, \quad U_1, \ldots, U_n \subset \mathbb{R} \text{ abertos.}$$

Dado um ponto $x \equiv \{x_t\}_{t \in T}$ nesse aberto, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ escolha $I_k \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ de forma que $x_{t_k} \in I_k \subset U_k$, para todo $k = 1, \ldots, n$. Então

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{t_k}^{-1}(I_k) \in \mathcal{B} \quad \text{e} \quad \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{t_k}^{-1}(I_k) \subset \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{t_k}^{-1}(U_k).$$

Logo, todo aberto é união de elementos de $\mathcal{B}$ e portanto $\mathcal{B}$ é uma base de $\tau(\mathbb{R}^T)$.

Vamos verificar agora que a coleção $\mathcal{B}$ é enumerável. Como $T$ é enumerável, a coleção de seus subconjuntos finitos

$$\mathscr{P}_0(T) \equiv \{J \subset T : \ J \text{ finito}\},$$

é também enumerável, já que esta coleção pode ser representada como união enumerável de conjuntos enumeráveis como segue

$$\mathscr{P}_0(T) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{\substack{\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T \\ t_i \neq t_j}} \{t_1, \ldots, t_n\}$$

Seja $J \equiv \{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ subconjunto fixado satisfazendo $\mathrm{Card}(J) = n$. Considere a aplicação $F_J : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \cdots \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{B}_J$ definida por

$$F_J(I_{t_1}, \ldots, I_{t_n}) \equiv \bigcap_{t \in J} \pi_t^{-1}(I_t).$$

É claro que $F_J$ é uma aplicação sobrejetiva e portanto temos que $\mathcal{B}_J$ é enumerável, uma vez que o domínio de $F_J$ é enumerável.

Das observações feitas acima e da igualdade (74) concluímos que $\mathcal{B}$ é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis, e portanto $\mathcal{B}$ é enumerável. O que completa a prova da proposição. ■

## D. Regularidade das Medidas Finitas Definidas sobre $\mathscr{B}(X)$

Os principais objetivos desta seção são: introduzir o importante conceito de medida regular (Definição 56); e provar que qualquer medida $\mu$ finita definida sobre $\mathscr{B}(X)$ é uma medida regular (Teorema 63). O conteúdo desta seção é baseado na referência [5] que aliás é uma excelente referência para medidas em espaços métricos.

Relembramos que a $\sigma$-álgebra de Borel de um espaço métrico $(X, d)$ é definida como sendo $\sigma$-álgebra gerada pelos subconjuntos abertos do espaço topológico $(X, \tau_d)$, onde $\tau_d$ denota a topologia em $X$ induzida pela métrica $d$. Esta $\sigma$-álgebra será denotada, como de maneira usual, por $\mathscr{B}(X)$.

Uma medida $\mu$ sobre $\mathscr{B}(X)$ é uma função $\mu : \mathscr{B}(X) \to [0, +\infty]$ que satisfaz:

- $\mu(\varnothing) = 0$;

- $\mu(B) \geqslant 0$, para todo $B \in \mathscr{B}(X)$;
- se $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos em $\mathscr{B}(X)$ dois-a-dois disjuntos, então

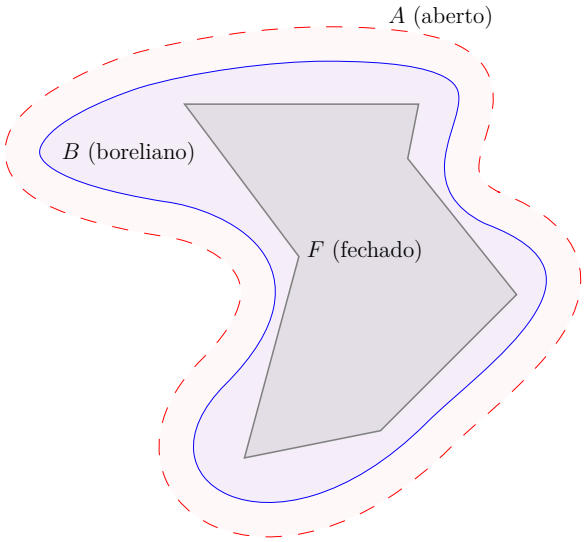
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

Dizemos que uma medida $\mu$ é finita se $\mu(X) < +\infty$. Se $\mu(X) = 1$, então dizemos que $\mu$ é uma medida de probabilidade.

**Definição 56** (Conjunto $\mu$-regular e Medida Regular)**.** Sejam $(X, d)$ um espaço métrico e $\mu$ uma medida sobre $\mathscr{B}(X)$. Dizemos que um boreliano $B \in \mathscr{B}(X)$ é $\mu$-regular se

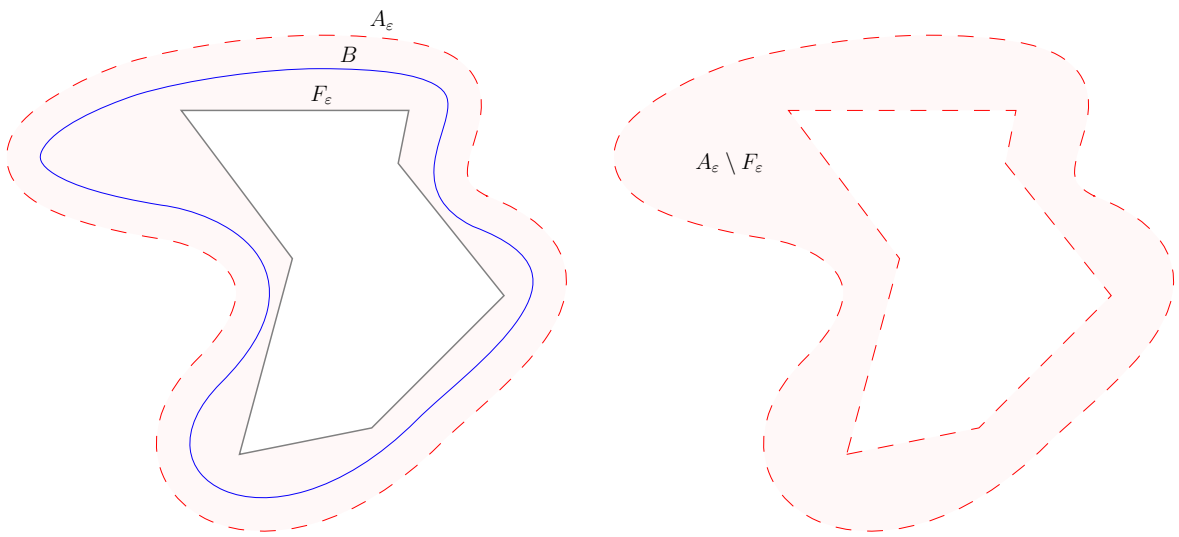
$$\sup\{\mu(F) : F \subseteq B,\ F \text{ fechado}\} \ = \ \mu(B) \ = \ \inf\{\mu(A) : B \subseteq A,\ A \text{ aberto}\}.$$

Se todo boreliano $B \in \mathscr{B}(X)$ é $\mu$-regular, então dizemos que $\mu$ é regular.



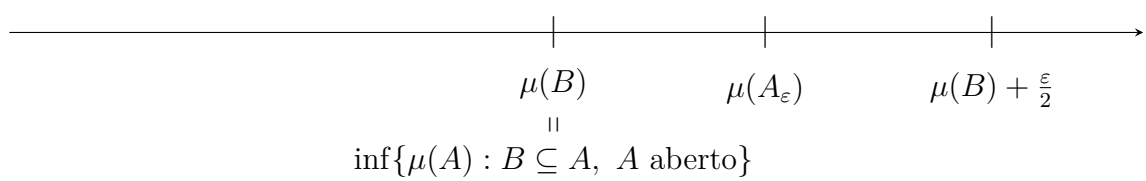

Antes de prosseguir para a prova do principal resultado desta seção que é o Teorema 63 vamos estabelecer novas (e mais simples) condições necessárias e suficientes para um conjunto $B \in \mathscr{B}(X)$ ser $\mu$-regular. Em seguida, vamos mostrar que a coleção de todos os borelianos $\mu$-regulares forma uma sub-$\sigma$-álgebra de $\mathscr{B}(X)$.

**Lema 57.** Sejam $(X, d)$ um espaço métrico e $\mu$ uma medida definida sobre $\mathscr{B}(X)$ satisfazendo $\mu(X) < +\infty$. Um boreliano $B \in \mathscr{B}(X)$ é $\mu$-regular se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existem um conjunto aberto $A_\varepsilon$ e um conjunto fechado $F_\varepsilon$ tais que: $F_\varepsilon \subseteq B \subseteq A_\varepsilon$ e $\mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$.

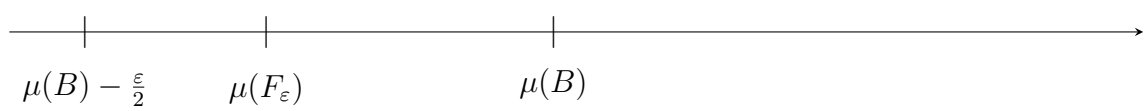



**Prova**. Suponha inicialmente que $B \in \mathscr{B}(X)$ é um conjunto $\mu$-regular. Então segue diretamente da Definição 56 que dado $\varepsilon > 0$, existem um conjunto aberto $A_\varepsilon \supseteq B$ e um conjunto fechado $F_\varepsilon \subseteq B$ satisfazendo:

- $\mu(A_\varepsilon) < \mu(B) + \frac{\varepsilon}{2}$;
- $\mu(B) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(F_\varepsilon)$.




$$\mu(B) = \inf\{\mu(A) : B \subseteq A,\ A \text{ aberto}\}$$




$$\mu(B) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq B,\ F \text{ fechado}\}$$

Já que $F_\varepsilon \subseteq B$, segue da propriedade de monotonicidade da medida $\mu$ e da desigualdade acima que

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \mu(F_\varepsilon) - \mu(B) \leqslant 0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(B) - \mu(F_\varepsilon)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Combinando estas desigualdades obtemos

$$\begin{aligned}
\mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) &= \mu(A_\varepsilon) - \mu(F_\varepsilon) \\
&< \mu(B) + \frac{\varepsilon}{2} - \mu(F_\varepsilon) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + |\mu(B) - \mu(F_\varepsilon)| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

O que encerra a prova de que se $B \in \mathscr{B}(X)$ é $\mu$-regular, então para todo $\varepsilon > 0$ dado, existem um conjunto aberto $A_\varepsilon$ e um conjunto fechado $F_\varepsilon$ tais que: $F_\varepsilon \subseteq B \subseteq A_\varepsilon$ e $\mu(A_\varepsilon - F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Agora vamos provar a recíproca. Primeiro observamos que dado um boreliano $B \in \mathscr{B}(X)$ temos da propriedade de monotonicidade da medida, para qualquer aberto $A \subseteq X$ satisfazendo $B \subseteq A$, que

$$\mu(B) \leqslant \mu(A) \implies \mu(B) \leqslant \inf\{\mu(A) : B \subseteq A,\ A \text{ aberto}\}.$$

Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$ existem um aberto $A_\varepsilon$ e um fechado $F_\varepsilon$ tais que $F_\varepsilon \subseteq B \subseteq A_\varepsilon$ e

$$\mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon \qquad \implies \qquad \mu(A_\varepsilon) - \mu(B) \leqslant \mu(A_\varepsilon) - \mu(F_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Portanto segue da desigualdade acima que $\mu(A_\varepsilon) - \mu(B) < \varepsilon$ que por sua vez implica

$$\mu(A_\varepsilon) < \mu(B) + \varepsilon.$$

Daí segue da definição de ínfimo que $\inf\{\mu(A) : B \subseteq A,\ A \text{ aberto}\} \leqslant \mu(A_\varepsilon) < \mu(B) + \varepsilon$. Já que $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue da desigualdade anterior que

$$\inf\{\mu(A) : B \subseteq A,\ A \text{ aberto}\} \leqslant \mu(B).$$

Como a desigualdade reversa foi estabelecida acima, podemos concluir que

$$\mu(B) = \inf\{\mu(A) : B \subseteq A,\ A \text{ aberto}\}.$$

Resta mostrar a igualdade $\sup\{\mu(F) : F \subseteq B,\ F \text{ fechado}\} = \mu(B)$. Como observado anteriormente, temos da hipótese que dado $\varepsilon > 0$, existem $A_\varepsilon$ aberto e $F_\varepsilon$ fechado tais que $F_\varepsilon \subseteq B \subseteq A_\varepsilon$. Novamente pela monotonicidade de $\mu$ temos as seguintes desigualdades:

$$\mu(A_\varepsilon) - \mu(F_\varepsilon) < \varepsilon \qquad \implies \qquad \mu(B) - \mu(F_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Da última desigualdade segue imediatamente que $\mu(B) < \mu(F_\varepsilon) + \varepsilon$. Tomando o supremo, sobre todos os fechado contidos em $B$ e observando que $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que

$$\mu(B) \leqslant \sup\{\mu(F) : F \subseteq B,\ F \text{ fechado}\}.$$

Observe que a desigualdade reversa segue também da monotonicidade de $\mu$. De fato, se $F$ é um fechado tal que $F \subseteq B$ temos $\mu(F) \leqslant \mu(B)$ e portanto $\sup\{\mu(F) : F \subseteq B,\ F \text{ fechado}\} \leqslant \mu(B)$. Portanto podemos finalmente concluir que

$$\mu(B) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq B,\ F \text{ fechado}\}$$

o que completa a prova que $B$ é $\mu$-regular. ■

**Proposição 58.** Se $(X, d)$ um espaço métrico e $\mu$ uma medida sobre $\mathscr{B}(X)$ satisfazendo $\mu(X) < +\infty$. Então a coleção

$$\mathscr{R} \equiv \{B \in \mathscr{B}(X) \,:\, B \text{ é } \mu\text{-regular}\}$$

é uma $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $X$.

**Prova**. A prova desta proposição é baseada em sucessivas aplicações do Lema 57.

Vamos começar mostrando que $\varnothing \in \mathscr{R}$. Primeiro, observe que o conjunto $\varnothing$ é simultaneamente aberto e fechado. Assim, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar como conjunto aberto $A_\varepsilon = \varnothing$ e como conjunto fechado $F_\varepsilon = \varnothing$. Claramente, estes conjuntos satisfazem $F_\varepsilon \subseteq \varnothing \subseteq A_\varepsilon$ e já que $\mu$ é uma medida temos $0 = \mu(\varnothing) = \mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário segue diretamente do Lema 57 que $\varnothing$ é $\mu$-regular e consequentemente $\varnothing \in \mathscr{R}$.

Analogamente, já que o espaço todo, $X$, é também simultaneamente aberto e fechado, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar como conjunto aberto $A_\varepsilon = X$ e como conjunto fechado $F_\varepsilon = X$. Claramente que estes conjuntos satisfazem $F_\varepsilon \subseteq X \subseteq A_\varepsilon$ e como no parágrafo anterior temos $0 = \mu(\varnothing) = \mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Novamente, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário podemos aplicar mais uma vez o Lema 57 e concluir $X$ is $\mu$-regular e portanto $X \in \mathscr{R}$.

Agora vamos mostrar que a coleção $\mathscr{R}$ é fechada por complementação, isto é, se $B \in \mathscr{R}$, então $B^c \in \mathscr{R}$. Sejam $B \in \mathscr{R}$ um conjunto arbitrário e $\varepsilon > 0$ dado. Já que $B$ é $\mu$-regular podemos afirmar que existem um conjunto aberto $A_\varepsilon$ e um conjunto fechado $F_\varepsilon$ tais que $F_\varepsilon \subseteq B \subseteq A_\varepsilon$ e $\mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Observe que tomando complementares, temos $A_\varepsilon^c \subseteq B^c \subseteq F_\varepsilon^c$. Como estamos assumindo que $\mu$ é uma medida finita temos das propriedades elementares de uma medida e da última desigualdade que

$$\begin{aligned}
\mu(F_\varepsilon^c \setminus A_\varepsilon^c) &= \mu(F_\varepsilon^c) - \mu(A_\varepsilon^c) \\
&= \mu(X) - \mu(A_\varepsilon^c) - (\mu(X) - \mu(F_\varepsilon^c)) \\
&= \mu(A_\varepsilon) - \mu(F_\varepsilon) \\
&= \mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Já que $\varepsilon > 0$ é arbitrário podemos aplicar mais uma vez o Lema 57 e concluir que que $B^c$ é $\mu$-regular. Portanto concluímos que se $B \in \mathscr{R}$, então $B^c \in \mathscr{R}$ o que mostra que $\mathscr{R}$ é uma coleção fechada por complementares.

Para finalizar a prova desta proposição resta mostrar que $\mathscr{R}$ é uma coleção fechada para uniões enumeráveis. Sejam $B_1, B_2, \ldots$ uma sequência arbitrária em $\mathscr{R}$ e $B \equiv \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Dado $\varepsilon > 0$, segue da $\mu$-regularidade de $B_n$ e do Lema 57 que, para $n \in \mathbb{N}$, existem um aberto $A_\varepsilon^n$ e um fechado $F_\varepsilon^n$ tais que

$$F_\varepsilon^n \subseteq B_n \subseteq A_\varepsilon^n \qquad \text{and} \qquad \mu(A_\varepsilon^n \setminus F_\varepsilon^n) < \frac{\varepsilon}{3^n}. \tag{75}$$

Considere os conjuntos $A_\varepsilon \equiv \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_\varepsilon^n$ e $F \equiv \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_\varepsilon^n$. Alertamos que na notação deste último conjunto não está faltando o subíndice $\varepsilon$. Na verdade, vamos definir mais a frente quem será o conjunto fechado $F_\varepsilon$.

Note que segue da definição do conjunto $F$ e do Teorema da Convergência Monótona que

$$\int_X \chi_F \, d\mu = \int_X \lim_{N\to\infty} \chi_{\left(\cup_{n=1}^N F_\varepsilon^n\right)} \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_X \chi_{\left(\cup_{n=1}^N F_\varepsilon^n\right)} \, d\mu$$

Já que estamos assumindo que $\mu(X) < +\infty$ segue das propriedades elementares de medida

e da igualdade acima que

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \mu\Big(F \setminus \bigcup_{n=1}^{N} F_\varepsilon^n\Big) &= \lim_{N\to\infty} \int_X \chi_{F\setminus\left(\cup_{n=1}^N F_\varepsilon^n\right)}\, d\mu \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_X \chi_F - \chi_{\left(\cup_{n=1}^N F_\varepsilon^n\right)}\, d\mu \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[\int_X \chi_F\, d\mu - \int_X \chi_{\left(\cup_{n=1}^N F_\varepsilon^n\right)}\, d\mu\right] \\
&= \int_X \chi_F\, d\mu - \lim_{N\to\infty} \int_X \chi_{\left(\cup_{n=1}^N F_\varepsilon^n\right)}\, d\mu \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto existe algum $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $N \geqslant N_0$ temos

$$\mu\Big(F \setminus \bigcup_{n=1}^{N} F_\varepsilon^n\Big) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{76}$$

Agora estamos prontos para definir o fechado $F_\varepsilon$. Já que uniões finitas de conjuntos fechados é um conjunto fechado, temos que $F_\varepsilon \equiv \bigcup_{n=1}^N F_\varepsilon^n$ é um conjunto fechado.

Por outro lado, como uniões arbitrárias de conjuntos abertos é um conjunto aberto temos que $A_\varepsilon$ é um conjunto aberto.

Segue diretamente das definições dos conjuntos $F, F_\varepsilon$, $A_\varepsilon$ e das relações de continência que aparecem em (75) que

$$F_\varepsilon \equiv \bigcup_{n=1}^{N} F_\varepsilon^n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_\varepsilon^n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \equiv B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_\varepsilon^n \equiv A_\varepsilon, \quad \text{ou seja,} \quad F_\varepsilon \subseteq F \subseteq B \subseteq A_\varepsilon.$$

Segue das propriedades elementares de medidas finitas e das desigualdades que aparecem em (75) e (76) que

$$\begin{aligned}
\mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon) - \mu(F_\varepsilon) &= \mu(A_\varepsilon) - \mu(F) + \mu(F) - \mu(F_\varepsilon) \\
&= \mu(A_\varepsilon \setminus F) + \mu(F \setminus F_\varepsilon) \\
&= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_\varepsilon^n \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_\varepsilon^n\right) + \mu(F \setminus F_\varepsilon) \\
&\leqslant \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_\varepsilon^n \setminus F_\varepsilon^n\right)\right) + \mu(F \setminus F_\varepsilon) \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_\varepsilon^n \setminus F_\varepsilon^n) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{3^n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

Já que $\varepsilon > 0$ é arbitrário, podemos aplicar novamente o Lema 57 para concluir que o conjunto $B \equiv \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathscr{R}$. Com isto finalmente encerramos a prova de que $\mathscr{R}$ é uma $\sigma$-álgebra. ■

Na sequência, mostramos a validade de dois resultados simples de natureza topológica que irão auxiliar na prova do Teorema 63.

**Lema 59.** Sejam $(X, d)$ espaço métrico arbitrário não-vazio e $C \subseteq X$ um subconjunto qualquer não-vazio. Então para quaisquer $x, y \in X$ temos

$$|d(x, C) - d(y, C)| \leqslant d(x, y), \qquad \text{onde } d(x, C) \equiv \inf\{d(x, w) : w \in C\}.$$

Em particular, a aplicação $x \longmapsto d(x, C)$ define uma função uniformemente contínua em $X$.

**Prova**. Observe que segue diretamente da desigualdade triangular e da definição de $d(x, C) \equiv \inf\{d(x, w) : w \in C\}$ que temos para quaisquer $z \in C$ e $x, y \in X$

$$d(x, C) \leqslant d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

Tomando o ínfimo sobre $z \in C$ na desigualdade acima obtemos $d(x, C) \leqslant d(x, y) + d(y, C)$ e consequentemente $d(x, C) - d(y, C) \leqslant d(x, y)$. Analogamente, trocando os papeis de $x$ e $y$, podemos verificar que também vale a seguinte desigualdade $d(y, C) \leqslant d(x, y) + d(x, C)$ o que implica $d(y, C) - d(x, C) \leqslant d(x, y)$. Portanto, segue destas desigualdades que

$$|d(x, C) - d(y, C)| \leqslant d(x, y).$$

■

**Definição 60** (Conjuntos $G_\delta$ e $F_\sigma$)**.** Seja $(X, d)$ um espaço métrico. Dizemos que um conjunto arbitrário $F \subset X$ é um conjunto $G_\delta$, se existe uma coleção enumerável $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de abertos em $(X, d)$ tal que $F = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Vamos dizer que um subconjunto $E \subset X$ é um conjunto $F_\sigma$ se existe uma coleção enumerável $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fechados em $(X, d)$ tal que $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

**Proposição 61.** Para qualquer $C \subseteq X$, não-vazio fixado e $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\left\{x \in X : d(x, C) < \frac{1}{n}\right\} \quad \text{é um subconjunto aberto de } X. \tag{77}$$

**Prova**. Seja $C \subseteq X$ um conjunto **arbitrário** não-vazio. Neste caso, podemos afirmar que a função $f_C : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_C(x) \equiv d(x, C) \equiv \inf_{y\in C} d(x, y), \qquad \forall x \in X,$$

está bem-definida.

Observe que segue diretamente do Lema 59 que a função $f_C$ satisfaz

$$|f_C(x) - f_C(y)| = |d(x, C) - d(y, C)| \leqslant d(x, y),$$

e portanto $f_C$ é uma função Lipschitziana, logo contínua. Já que para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\left\{x \in X : d(x, C) < \frac{1}{n}\right\} = f_C^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{n}\right)\right),$$

segue da continuidade de $f_C$ que o conjunto acima é aberto o que prova a validade de (77). ■

**Corolário 62.** Seja $(X, d)$ um espaço métrico arbitrário.

*i*) Se $F \subseteq X$ é um subconjunto fechado, então $F$ é um conjunto $G_\delta$. Além do mais, podemos mostrar que existe uma sequência $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abertos em $X$ tal que $A_{n+1} \subseteq A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

*ii*) Se $A \subseteq X$ é um aberto, então $A$ é um conjunto $F_\sigma$. Além do mais, podemos mostrar que existe uma sequência $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos fechados em $X$ tal que $F_n \subseteq F_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

**Prova**. Note que o corolário é obviamente verdadeiro se o conjunto fechado $F$ e o conjunto aberto $A$ são vazios, pois os conjuntos $A_n$'s e $F_n$'s do enunciados podem ser tomados todos como sendo o conjunto vazio. Portanto, resta considerar o caso em que estes conjuntos são não-vazios.

**Prova de *i*)**. Das propriedades elementares de espaços métricos sabemos que para qualquer conjunto $C \subseteq X$ temos $d(x, C) = 0$ se, e somente se, $x \in \overline{C}$. Em particular, se aplicamos esta afirmação à um conjunto fechado $F \subseteq X$ temos

$$F = \{x \in X : d(x, F) = 0\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \left\{x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Se definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n \equiv \left\{x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n}\right\}$$

segue das propriedades elementares de distância que $A_{n+1} \subseteq A_n$ e da Proposição 61 que $A_n$ é aberto, para cada $n \in \mathbb{N}$, e portanto

$$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

O que encerra a prova de que todo fechado $F$ é um conjunto $G_\delta$ e que ele pode ser escrito como uma interseção enumerável de uma sequência decrescente de abertos.

**Prova de *ii*)**. Por outro lado, já que todo aberto $A \subseteq X$ é complementar de um fechado e vice-versa, segue diretamente das leis *de Morgan* que se $A$ é um conjunto **aberto** então $A$ é um conjunto $F_\sigma$. De fato,

$$\begin{aligned} A = (A^c)^c = (\{x \in X : d(x, A^c) = 0\})^c &= \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \left\{x \in X : d(x, A^c) < \frac{1}{n}\right\}\right)^c \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\left\{x \in X : d(x, A^c) < \frac{1}{n}\right\}\right)^c. \end{aligned}$$

Além do mais, se definimos

$$F_n \equiv \left(\left\{x \in X : d(x, A^c) < \frac{1}{n}\right\}\right)^c$$

temos novamente da Proposição 61 que $F_n$ é fechado. Usando as propriedades elementares de distância podemos verificar imediatamente que $F_n \subseteq F_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n,$$

o que encerra a prova de que todo aberto $A$ é um conjunto $F_\sigma$ e que, além do mais, pode ser escrito como uma união enumerável de uma sequência crescente de fechados. ■

**Teorema 63.** Sejam $(X, d)$ um espaço métrico arbitrário não-vazio e $\mathscr{B}(X)$ a $\sigma$-álgebra de Borel de $X$. Se $\mu$ é uma medida finita ($\mu(X) < +\infty$) sobre $\mathscr{B}(X)$, então $\mu$ é regular, ou seja, para cada $B \in \mathscr{B}(X)$ temos

$$\sup\{\mu(F) : F \subseteq B,\ F \text{ fechado}\} \ = \ \mu(B) \ = \ \inf\{\mu(A) : B \subseteq A,\ A \text{ aberto}\}.$$

**Prova**. Considere a coleção

$$\mathscr{R} \equiv \{B \in \mathscr{B}(X) \ : \ B \text{ é } \mu\text{-regular}\}.$$

Como estamos assumindo que $\mu$ é uma medida finita sobre $\mathscr{B}(X)$, todas as hipóteses da Proposição 58 são satisfeitas e portanto podemos concluir que a coleção $\mathscr{R}$ é uma sub-$\sigma$-álgebra de $\mathscr{B}(X)$.

Vamos mostrar que a coleção de todos os fechados de $X$ está contida na coleção $\mathscr{R}$. De fato, seja $F \subset X$ um conjunto fechado. Pelo Corolário 62 sabemos $F$ é um $G_\delta$ e que além do mais, existe uma sequência de conjuntos abertos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $A_{n+1} \subseteq A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Já que $\mu(X) < \infty$, temos em particular que $\mu(A_1) < +\infty$ e assim podemos usar a propriedade de continuidade da medida para garantir que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu(F).$$

Como $F \subseteq A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\mu$ é finita, segue da igualdade acima que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n \setminus F) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) - \mu(F) = 0.$$

Portanto dado $\varepsilon > 0$ existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_{n_0} \setminus F) < \varepsilon$. Tomando $A_\varepsilon \equiv A_{n_0}$ e $F_\varepsilon \equiv F$, concluímos da desigualdade acima que para cada $\varepsilon > 0$ dado, existem um conjunto aberto $A_\varepsilon$ e um conjunto fechado $F_\varepsilon$ satisfazendo $F_\varepsilon \subseteq F \subseteq A_\varepsilon$ e $\mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue do Lema 57 que $F$ é $\mu$-regular e consequentemente que $F \in \mathscr{R}$. Já que o argumento acima é válido para qualquer fechado $F \subseteq X$, temos que a coleção de todos os fechados de $X$ está contida na $\sigma$-álgebra $\mathscr{R}$. Como $\mathscr{R}$ é fechada para complementos temos que a coleção de todos os abertos de $X$ está contida em $\mathscr{R}$. Desta última observação e da definição de $\sigma$-álgebra gerada segue que $\mathscr{B}(X) \subseteq \mathscr{R}$. Mas como $\mathscr{R}$ é por definição uma sub-$\sigma$-álgebra de $\mathscr{B}(X)$, podemos concluir que, na verdade, temos $\mathscr{B}(X) = \mathscr{R}$ e logo todo conjunto boreliano é $\mu$-regular, o que implica que $\mu$ é regular. ■

# Índice Remissivo


Base de uma topologia, 87

Cilindro finito-dimensional, 3, 4
Condições de consistência, 7, 8
    generalizada, 9
Conjunto
    $\mu$-regular, 91
    racionais diádicos, 38
Conjunto denso em nenhum lugar, 66
Conjunto perfeito, 66

Desigualdade Maximal
    de Etemadi, 36
    de Kolmogorov, 34
Distribuição Gaussiana, 26
Distribuições Finito-Dimensionais, 6

Espaço
    topológico, 87
Espaço Produto, 3
    funções coordenadas, 3
Espaços mensuráveis
    produto de, 3

Função localmente $\alpha$-Hölder, 69

Medida
    regular, 91
    exterior, 79
    sigma-finita, 80
Movimento Browniano, 30
    auto-similaridade, 47
    existência, 33
    localmente $\alpha$-Hölder contínuo, 77
    mensurabilidade, 46
    não diferenciabilidade, 52, 55
    propriedade de Markov Forte, 58, 64
    tempo de parada, 60
    trajetórias contínuas, 38
    zeros, 67

Processo Canônico, 11
Processo Estocástico, 4
    equivalentes, 70
    indistinguível, 70
    mensurável, 5
    modificação, 70
    versão, 70

Seções mensuráveis, 84
Sigma-álgebra
    caudal, 54
    produto, 3
Sub-base de uma topologia, 87

Tempo de parada, 59
Teorema
    da Existência de Kolmogorov, 15
    da Extensão de Carathéodory, 81
    de Chentsov-Kolmogorov, 71
    de Fubini, 86
    de Tonelli, 86
    Scheffe, 44
Topologia produto, 88
Trajetória
    amostral, 5
    contínua, 38

## Referências


[1] P. Billingsley. *Probability and measure*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, anniversary edition, 2012. With a foreword by Steve Lalley and a brief biography of Billingsley by Steve Koppes.

[2] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, volume 40. John Wiley & Sons, second edition, 1999.

[3] T. M. Liggett. *Continuous time Markov processes*, volume 113 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. An introduction.

[4] J. R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. Second edition.

[5] K. R. Parthasarathy. *Probability measures on metric spaces*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2005. Reprint of the 1967 original.

[6] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.

[7] P. Ruffino. *Uma iniciação aos sistemas dinâmicos estocásticos*. Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications]. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2009. 27º Colóquio Brasileiro de Matemática. [27th Brazilian Mathematics Colloquium].