UnB | Departamento de Matemática

Processos Estocásticos

Lista Exercícios - Data de Entrega: 29/08/2025

Definições e Teoremas

Definição 1 (π-Sistema)**.** Seja Ω um conjunto não-vazio. Uma coleção $\mathscr{P}$ de subconjuntos de Ω que é fechada por interseções finitas é chamada de π-sistema. Mais precisamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, com $n \geqslant 2$ e para cada coleção de n conjuntos $E_1, \ldots, E_n \in \mathscr{P}$ temos $E_1 \cap \ldots \cap E_n \in \mathscr{P}$.

Definição 2 (λ-Sistema)**.** Seja Ω um conjunto não-vazio. Uma coleção $\mathscr{L}$ de subconjuntos de Ω é chamada de um λ-sistema em Ω (ou simplesmente λ-sistema, se for claro pelo contexto qual é o conjunto base Ω) se satisfaz:

- $\Omega \in \mathscr{L}$;
- se $E \in \mathscr{L}$, então $E^c \in \mathscr{L}$;
- se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathscr{L}$, com $E_n \cap E_m = \varnothing$ se $m \neq n$, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{L}$.

Teorema 3 (Teorema π–λ de Dynkin)**.** Sejam Ω um conjunto não-vazio, $\mathscr{P}$ um π-sistema e $\mathscr{L}$ um λ-sistema. Se $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{L}$, então $\sigma(\mathscr{P}) \subseteq \mathscr{L}$.

Lista de Exercícios

1. Sejam Ω um conjunto não-vazio e $\{\mathscr{L}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma família de λ-sistemas sobre Ω, indexada sobre algum conjunto de índices Λ. Mostre que

$$\mathscr{L} \equiv \bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathscr{L}_\alpha$$

   é um λ-sistema.

2. Seja Ω um conjunto não-vazio. Se $\mathscr{C}$ é uma coleção de subconjuntos de Ω que é simultâneamente um π-sistema e um λ-sistema, mostre que $\mathscr{C}$ é uma σ-álgebra.

3. Sejam $(\Omega, \mathscr{F})$ um espaço mensurável, $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ e $\nu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ medidas de probabilidade sobre Ω. Suponha que $\mathscr{P}$ seja um π-sistema que gera $\mathscr{F}$. Mostre que se $\mu(E) = \nu(E)$ para todo $E \in \mathscr{P}$, então $\mu = \nu$.

4. Mostre que coleção $\mathscr{C} \equiv \{(a, b] \subset \mathbb{R} \,:\, a < b\} \cup \{\varnothing\}$ é um π-sistema sobre $\mathbb{R}$.

5. Seja $T \subset \mathbb{R}$ um intervalo não-vazio e considere o espaço produto $\mathbb{R}^T$. Para cada $t \in T$, considere a projeção $\pi_t : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$. Seja $\mathscr{C}$ a coleção de todos cilindros de $\mathbb{R}^T$ da forma $\pi_{t_1}^{-1}((a_1, b_1]) \cap \pi_{t_2}^{-1}((a_2, b_2]) \ldots \cap \pi_{t_n}^{-1}((a_n, b_n])$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $-\infty = a_j < b_j < +\infty$, para todo $1 \leqslant j \leqslant n$. Mostre que $\mathscr{C} \cup \{\varnothing\}$ é um π-sistema que gera a σ-álgebra produto de $\mathbb{R}^T$.

6. Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias simples (que assumem apenas uma quantidade finita de valores).

   (a) Mostre que $E \in \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, se e somente se, existe algum conjunto finito $H \subset \mathbb{R}^n$ tal que $E = \{(X_1, \ldots, X_n) \in H\}$.

   (b) Uma variável aleatória Y é mensurável, com respeito, à $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$ se, e somente se, existe alguma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $Y = f(X_1, \ldots, X_n)$.

7. Seja $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Suponha que $E_1, \ldots, E_n$ seja uma partição $\mathscr{F}$-mensurável de Ω, satisfazendo $0 < \mathbb{P}(E_j) < 1$, para todo $1 \leqslant j \leqslant n$. Dada uma v.a. X integrável obtenha explicitamente, em função dos conjuntos $E_1, \ldots, E_n$, uma versão de $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$, onde $\mathscr{G} \equiv \sigma(E_1, \ldots, E_n)$.

8. Sejam $(X, \mathscr{X}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{Y}, \nu)$ espaços de probabilidade. Considere a família de funções

$$\mathcal{D} \equiv \left\{ X \times Y \ni (x,y) \longmapsto \sum_{j=1}^{n} f_i(x) g_i(y) : \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}, \quad f_i : X \to \mathbb{R} \text{ é } \mathscr{X}\text{-mensurável} \\ g_i : Y \to \mathbb{R} \text{ é } \mathscr{Y}\text{-mensurável}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n \\ \sup\limits_{x \in X} |f_i(x)| < +\infty \text{ e } \sup\limits_{y \in Y} |g_i(y)| < +\infty \end{array} \right\}.$$

   (a) Fixado $E \in \mathscr{X} \otimes \mathscr{Y}$. Usando o Teorema da Extensão de Caratheodory, mostre que existe alguma sequência $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{X \times Y} |\varphi_n(x,y) - \mathbb{1}_E(x,y)| \, d\mu(x) d\nu(y) = 0.$$

   (b) Usando os argumentos padrões de aproximação da Teoria da Medida, conclua que $\mathcal{D}$ é um subconjunto denso de $L^1(X \times Y, \mathscr{X} \otimes \mathscr{Y}, \mu \times \nu)$. Ou seja, para cada $f \in L^1(X \times Y, \mathscr{X} \otimes \mathscr{Y}, \mu \times \nu)$ existe uma sequência $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}$ tal que

$$\|f - \varphi_n\|_1 \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

9. Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, X e Y variáveis aleatórias e $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$-mensurável satisfazendo $\mathbb{E}[|\psi(X,Y)|] < +\infty$. Seja $\mathscr{G}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathscr{F}$. Suponha que Y é $\mathscr{G}$-mensurável e $\sigma(X)$ é independente de $\mathscr{G}$. Mostre que

$$\mathbb{E}[\psi(X,Y)|\mathscr{G}] = h(X), \qquad \text{onde } h(x) \equiv \mathbb{E}[\psi(x,Y)], \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sugestão: Considere inicialmente o caso em que $\mathscr{G} = \sigma(Y)$ e obtenha o resultado diretamente do Teorema da Mudança de Variáveis e do Teorema de Fubini-Tonelli.
Para o caso geral, obtenha inicialmente a identidade desejada assumindo que a função ψ é da forma $\psi(x,y) = f_1(x)g_1(y) + \ldots f_n(x)g_n(y)$ e em seguida, use o Item 8.

10. Este exercício é uma generalização do anterior. Seja $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $(\mathcal{S}_1, \mathscr{F}_1)$ e $(\mathcal{S}_2, \mathscr{F}_2)$ espaços mensuráveis. Sejam $X : \Omega \to \mathcal{S}_1$ e $Y : \Omega \to \mathcal{S}_2$ aplicações mensuráveis, isto é, $X^{-1}(B_1) \in \mathscr{F}$ e $Y^{-1}(B_2) \in \mathscr{F}$, para todos $B_1 \in \mathscr{F}_1$ e $B_2 \in \mathscr{F}_2$. Suponha que $\psi : \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \to \mathbb{R}$ seja uma aplicão Borel mensurável, satisfazendo $\mathbb{E}[|\psi(X, Y)|] < +\infty$. Seja $\mathscr{G}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathscr{F}$. Suponha que Y é uma aplicação $\mathscr{G}$-mensurável, isto é, $Y^{-1}(B_2) \in \mathscr{G}$ para todo $B_2 \in \mathscr{F}_2$. Adicionalmente, assuma que $\sigma(X)$ é independente de $\mathscr{G}$. Mostre que

$$\mathbb{E}[\psi(X, Y)|\mathscr{G}] = h(X), \qquad \text{onde } h(x) \equiv \mathbb{E}[\psi(x, Y)], \qquad \forall x \in \mathcal{S}_1.$$

Observação. Note que este resultado é válido em grande generalidade, para vetores aleatórios, onde tomamos $\mathcal{S}_1 = \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{S}_2 = \mathbb{R}^m$ munido de suas σ-álgebras usuais. Também podemos aplicá-los aos casos onde S_1 e S_2 são grupos topológicos, espaços produtos como $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, espaços vetorias de dimensão infinita, espaços topológicos e demais estuturas munidas de suas respectivas σ-álgebras naturais.

Definições e Teoremas

Definição 4. Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $(\mathcal{S}, \mathscr{B})$ um espaço mensurável. Seja $Y : \Omega \to \mathcal{S}$ uma aplicação $\mathscr{F}/\mathscr{B}$-mensurável, isto é, $Y^{-1}(B) \in \mathscr{F}$, para todo $B \in \mathscr{B}$.

Fixada uma sub-σ-álgebra $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ dizemos que uma função $\gamma^{\mathscr{G}} \equiv \gamma : \mathscr{B} \times \Omega \to \mathbb{R}$ é uma distribuição condicional **regular** de Y dada $\mathscr{G}$ se

1. para cada $B \in \mathscr{B}$ fixado, a função $\omega \longmapsto \gamma(B, \omega)$ é $\mathscr{G}$-mensurável;

2. para cada $\omega \in \Omega$ fixado, a função $B \longmapsto \gamma(B, \omega)$ é uma medida de probabilidade sobre a σ-álgebra $\mathscr{B}$.

3. para cada $B \in \mathscr{B}$ fixado, $\gamma(B, \cdot) = \mathbb{P}(Y \in B|\mathscr{G})$, quase certamente. Em outras palavras a função $\omega \longmapsto \gamma(B, \omega)$ é uma versão da probabilidade condicional $\mathbb{P}(Y \in B|\mathscr{G})$.

Definição 5. Seja (M, d) um espaço métrico. Seja τ a topologia sobre M, induzida pela métrica d. A σ-álgebra de Borel de M, notação, $\mathscr{B}(M)$ é a σ-álgebra gerada pela coleção dos abertos de M, isto é, $\mathscr{B}(M) \equiv \sigma(\tau)$.

Definição 6. Dizemos M é um espaço *Polônes* se M está equipado com alguma topologia τ que é induzida por alguma métrica d sobre M tal que

- a topologia induzida por esta métrica coincida com τ;

- (M, d) é um espaço métrico completo;

- e (M, d) é um espaço métrico separável, isto é, existe algum conjunto enumerável $E \subseteq M$ tal que seu fecho $\overline{E} = M$.

Teorema 7 (Doob-Blackwell)**.** Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\mathcal{S}$ um espaço polônes. Considere o espaço mensurável $(\mathcal{S}, \mathscr{B})$, onde $\mathscr{B}$ é a σ-álgebra de Borel de $\mathcal{S}$. Seja $Y : \Omega \to \mathcal{S}$ uma aplicação $\mathscr{F}/\mathscr{B}$-mensurável. Então para cada sub-σ-álgebra $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ existe uma distribuição condicional regular de Y dada $\mathscr{G}$.

A prova deste resultado pode ser encontrada na referência [1, p.77-80].

Lista de Exercícios

1. Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, $\mathcal{S}$ um espaço polônes e $\mathscr{B}$ a σ-álgebra de Borel de $\mathcal{S}$. Sejam $Y : \Omega \to \mathcal{S}$ uma função $\mathscr{F}/\mathscr{B}$-mensurável e $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ uma função Borel-mensurável. Suponha que $\mathbb{E}[|f(Y)|] < +\infty$. Fixe uma sub-$\sigma$-álgebra $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$. Seja $\gamma^{\mathscr{G}} \equiv \gamma : \mathscr{B} \times \Omega \to \mathbb{R}$ uma distribuição condicional regular de Y dada $\mathscr{G}$, cuja existência é fornecida pelo Teorema de Doob-Blackwell. Mostre que

$$\mathbb{E}[f(Y)|\mathscr{G}](\omega) = \int_{\mathcal{S}} f(s)\, d\gamma(s, w), \qquad \forall \omega \in \Omega \setminus Z,$$

   onde $\mathbb{P}(Z) = 0$.

2. Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e Y uma variável aleatória. Sejam $(\mathcal{S}, \mathscr{B})$ um espaço mensurável e $X : \Omega \to \mathcal{S}$ uma aplicação $\mathscr{F}/\mathcal{B}$-mensurável. Mostre que Y é $\sigma(X)$-mensurável se, e somente se, existe alguma função $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ Borel mensurável tal que $Y = f(X)$.

⚠ Como devemos entender a notação $\mathbb{E}[Y|X = x]$.

Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $(\mathcal{S}, \mathscr{B})$ um espaço mensurável. Suponha que Y é uma variável aleatória integrável. Seja $X : \Omega \to \mathcal{S}$ uma aplicação $\mathscr{F}/\mathcal{S}$-mensurável. Pelo Exercício 2 existe alguma função $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ Borel-mensurável tal que

$$\mathbb{E}[Y|\sigma(X)] = f(X),$$

quase certamente. Note que a variável aleatória $f(X)$ que é, na verdade, sendo definida como a função $\Omega \ni \omega \longmapsto f(X(\omega))$ é constante ao longo do evento $\{X = x\} \in \mathscr{B}$. Portanto, temos

$$\mathbb{E}[Y|\sigma(X)](\omega) = f(X(\omega)) = f(x), \qquad \forall \omega \in \{X = x\}.$$

Em virtude da observação é comum usar a notação mnemônica $\mathbb{E}[Y|X = x]$ cujo o significado é definido por $\mathbb{E}[Y|X = x] \equiv f(x)$, para todo $x \in \mathcal{S}$.

Referências

[1] L. Breiman. *Probability*, volume 7 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992. Corrected reprint of the 1968 original.