UnB | Departamento de Matemática

Processos Estocásticos

Lista Exercícios - Data de Entrega: 09/10/2025

Lista de Exercícios

1. Em Teoria da Medida construímos o espaço produto de uma quantidade finita n de espaços de medida σ-finitos $(\Omega_j, \mathscr{F}_j, \mu_j)$ como sendo o espaço de medida

$$\left(\prod_{j=1}^{n}\Omega_j\ ,\ \bigotimes_{j=1}^{n}\mathscr{F}_j\ ,\ \prod_{j=1}^{n}\mu_j\right).$$

Usando o Teorema da Existência de Kolmogorov formalize a construção dos seguintes espaços de medida (neste caso serão de probabilidade)

$$\left(\prod_{j=1}^{+\infty}\Omega_j\ ,\ \bigotimes_{j=1}^{+\infty}\mathscr{F}_j\ ,\ \prod_{j=1}^{+\infty}\mu_j\right) \tag{1}$$

$$\left(\prod_{j=-\infty}^{+\infty}\Omega_j\ ,\ \bigotimes_{j=-\infty}^{+\infty}\mathscr{F}_j\ ,\ \prod_{j=-\infty}^{+\infty}\nu_j\right) \tag{2}$$

onde $\Omega_j \equiv \mathbb{R}$, $\mathscr{F}_j \equiv \mathscr{B}(\mathbb{R})$ e $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de medidas de probabilidade, onde para cada $n \in \mathbb{N}$ a medida de probabilidade μ_n está definida no espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Analogamente, $\{\nu_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ uma medida de probabilidade tal que para cada $m \in \mathbb{Z}$ a medida de probabilidade ν_m está definida no espaço $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

2. Sejam $(\Omega, \mathscr{F})$ e $(\Upsilon, \mathscr{G})$ espaços mensuráveis abstratos. Seja $T : \Omega \to \Upsilon$ uma aplicação mensurável, isto é, $T^{-1}(B) \in \mathscr{F}$, para todo $B \in \mathscr{G}$. Suponha que $\mu : \mathscr{F} \to [0, 1]$ é uma medida de probabilidade. Mostre que o "pushforward" da medida μ , isto é, $\nu \equiv \mu \circ T^{-1}$ é uma medida de probabilidade sobre $(\Upsilon, \mathscr{G})$.

3. Neste exercício vamos construir os chamados "shifts de Bernoulli". Fixe $m \in \mathbb{N}$, com $m \geqslant 2$. Às vezes, nos referimos a este parâmetro como números de símbolos. Para cada $i \in \mathbb{N}$, denote por $\Omega_i \equiv \{0, \ldots, m-1\}$ e considere $\mathscr{F}_i \equiv \mathscr{P}(\Omega_i)$ (σ-álgebra das partes de Ω_i). Será conveniente olhar para Ω_i como subconjunto de $\mathbb{R}$ e $\mathscr{F}_i$ como sub-σ-álgebra de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Seja para cada $i \in \mathbb{N}$ seja $\mu_i : \mathscr{F}_i \to [0, 1]$ uma medida de probabilidade tal que a medida de cada conjunto unitário satisfaz $\mu_i(\{j\}) > 0$, para todo $j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ e claro $\mu_i(\{0, 1, \ldots, m\}) = 1$. Por simplicidade, assuma que $\mu_i \equiv \mu$, onde a medida $\mu : \mathscr{P}(\{0, 1, \ldots, m-1\}) \to [0, 1]$ é uma medida de probabilidade arbitrária satisfazendo

$\mu(\{j\}) > 0$, para cada $j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Considere o espaço produto (como espaço mensurável) como definido nas notas de aula na página 3

$$\left(\prod_{j \in \mathbb{N}} \Omega_j \ , \ \bigotimes_{j \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_j \right)$$

Use as identificações mencionadas acima $\Omega_i \subset \mathbb{R}$ e $\mathscr{F}_i \subset \mathscr{B}(\mathbb{R})$ e o Teorema de Existência de Kolmogorov para formalizar a construção do espaço de probabilidade

$$\left(\{0, 1, \ldots, m-1\}^{\mathbb{N}} \ , \ \bigotimes_{j \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_j \ , \ \prod_{j \in \mathbb{N}} \mu_j \right)$$

de forma que para qualquer $k \in \mathbb{N}$ fixado

$$\left(\prod_{j \in \mathbb{N}} \mu_j \right) \left(A_1 \times \cdots \times A_k \times \{0, 1, \ldots, m-1\} \times \{0, 1, \ldots, m-1\} \times \cdots \right)$$

$$=$$

$$\mu(A_1) \cdot \ldots \cdot \mu(A_k),$$

onde $A_j \subseteq \{0, 1, \ldots, m-1\}$.

4. Este exercício é continuação do exercício anterior. Mantendo a notação do exercício anterior defina $\Omega \equiv \{0, 1, \ldots, m-1\}^{\mathbb{N}}$ e identifique cada elemento de $\omega \in \Omega$ com uma sequência tomando valores no conjunto de símbolos $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, isto é, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$, onde para cada $j \in \mathbb{N}$ temos $\omega_j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$.

   Defina o "shift para esquerda" como sendo a aplicação $\sigma : \Omega \to \Omega$ dada por

   $$\sigma(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots) = (\omega_2, \omega_3, \omega_4, \ldots).$$

   Defina

   $$\mathscr{F} \equiv \bigotimes_{j \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_j \qquad \text{e} \qquad \nu \equiv \left(\prod_{j \in \mathbb{N}} \mu_j \right)$$

   Mostre, usando a coleção dos cilindros e o Teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin, que para todo mensurável $E \in \mathscr{F}$, temos a seguinte igualdade $\nu(\sigma^{-1}(E)) = \nu(E)$.

5. Seja $T = \mathbb{N}$ conjunto de índices. Para cada k-úpla ordenada $1 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ considere a medida de probabilidade $\mu_{t_1, \ldots, t_k} : \mathscr{B}(\mathbb{R}^k) \to [0, 1]$ determinada por

   $$\mu_{t_1, \ldots, t_k}(H_1 \times \cdots \times H_k) = \mu(H_1) \cdot \ldots \cdot \mu(H_k),$$

   onde $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ é uma medida de probabilidade fixada. Mostre que existe uma medida de probabilidade $\mathbb{P}$ em $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{F}$, onde $\mathscr{F}$ é a σ-álgebra produto tal que $\mathbb{P}(Z_n \in H) = \mu(H)$, onde $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é o processo coordenada. Mostre que a coleção $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ vista como uma coleção de v.a.'s sobre $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ é uma coleção de variáveis aleatórias iid. Além do mais seja $\sigma : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a aplicação de "shift para esquerda" definida de maneira análoga à do exercício anterior. Seja $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ uma aplicação Borel mensurável e limitada tal que $f(\omega) = \varphi(\omega_1)$, onde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Borel-mensurável e limitada. Mostre que

   $$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\sigma^n(\omega)) \xrightarrow{n \to \infty} \mathbb{E}[\varphi(X_1)], \qquad \text{quase certamente.}$$

6. Seja $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ uma função de distribuição. Explique como construir explicitamente no espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ uma medida de probabilidade $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ e uma variável aleatória $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\mu(X \leqslant x) = F(x)$.

7. Usando o Teorema da Existência de Kolmogorov construa explicitamente um espaço de probabilidade suportando a existência de uma sequência de v.a's independentes com distribuição prescrita. Isto é, dada uma sequência de funções de distribuição $\{F_n\}$ mostre que existe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e uma sequência de funções $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathscr{F}$-mensuráveis tais que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de v.a.'s aleatórias independentes e para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $\mathbb{P}(X_n \leqslant x) = F_n(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

8. Este exercício é uma generalização do exercício anterior. Seja T um conjunto de índices arbitrário (não necessariamente enumerável). Dada uma família $\{F_t : t \in T\}$ de funções de distribuição, construa explicitamente um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e uma família de variáveis aleatórias **independentes** $\{X_t : t \in T\}$ tal que para cada $t \in T$ fixado, $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma v.a. $\mathscr{F}$-mensurável e temos $\mathbb{P}(X_t \leqslant x) = F_t(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

9. Seja $\xi \equiv (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, onde $\xi_1, \ldots, \xi_n$ são v.a.'s iid com distribuição Gaussiana padrão. Mostre que se O uma matriz $n \times n$ ortogonal (isto é, $O^T O = I$), então o vetor aleatório $O\xi$ tem a mesma distribuição que ξ.

10. Suponha que $\xi_k \Rightarrow \xi$, onde "$\Rightarrow$" denota a convergência em distribuição, e que cada $\xi_k \sim N(\mu_k, \sigma_k^2)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Mostre que $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, onde μ e σ^2 são limites das sequências $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{\sigma_k^2\}_{k\in\mathbb{N}}$, respectivamente. (Sugestão: resolva o problema inicialmente para o caso de média é zero, usando uma processo de simetrização, isto é, considerando uma nova sequência de v.a.s $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, que são independentes das v.a.'s $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e olhando para as v.a.'s $\zeta_k \equiv \xi_k - \eta_k$.)

11. Enuncie e prove um análogo do Exercício 10. para vetores Gaussianos usando o Teorema de Cramér-Wold e o resultado obtido no exercício anterior.

12. Suponha que $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$ é um processo estocástico com incrementos estacionários e independentes e satisfazendo $\mathbb{E}[X_1] = 0$, $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$ e $X_t \stackrel{d}{=} \sqrt{t} X_1$. Usando o Teorema do Limite Central mostre que $X_t - X_s \stackrel{d}{=} N(0, t-s)$, para todo par de números reais s, t satisfazendo $0 \leqslant s < t < +\infty$.

13. Seja $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$ um Movimento Browniano contínuo definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

    (a) Para cada $t \in [0, +\infty)$ fixado, mostre que a integral abaixo está bem-definida (em qual sentido? Riemann ou Lebesgue ou ambas?) e define uma variável aleatória sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$

    $$X_t \equiv \int_0^t B_s \, ds;$$

    (b) Mostre que $\{X(t) : t \in [0, +\infty)\}$ define um processo Gaussiano;

    (c) Determine $\mathbb{E}[X_t]$ e $\mathrm{Var}[X_t]$.

(d) Calcule $\mathbb{E}\big[(X_t - X_s)^2\big]$ e compare sua taxa de decaimento, quando $t \downarrow s$, com a taxa de decaimento de $\mathbb{E}\big[(W_t - W_s)^2\big]$, quando $t \downarrow s$.

14. Seja $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$ um Movimento Browniano contínuo definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Calcule

$$\mathbb{P}(\{W_s > 0\} \cap \{W_t > 0\}), \qquad 0 < s < t.$$

Sugestão: escreva o evento acima em função de duas Gaussianas independentes cada uma tendo distribuição $N(0, 1)$ e em seguida, use coordenadas polares para avaliar a integral dupla associada.

15. (Ponte Browniana) Seja $\{W_t : t \in [0, +\infty)\}$ um Movimento Browniano contínuo. Considere o processo estocástico $\{X_t : t \in [0, 1]\}$ dado por $X_t = W_t - tW_1$.

(a) Calcule X_0 e X_1;

(b) Mostre que $\{X_t : t \in [0, 1]\}$ é um processo Gaussiano e calcule sua função de covariância $\mathrm{Cov}(X_s, X_t)$;

(c) Dados $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < 1$ mostre que a distribuição condicional conjunta do vetor $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k})$ dado $|W_1| \leqslant \varepsilon$, converge para a distribuição conjunta de $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$, quando $\varepsilon \downarrow 0$.

16. Nas notas de aula mostramos que um Movimento Browniano contínuo é quase certamente, localmente α-Hölder contínuo para cada $\alpha < \frac{1}{2}$. Neste exercício, vamos mostrar que este resultado é ótimo, no sentido de que este processo estocástico não pode ser localmente α-Hölder contínuo para $\alpha = \frac{1}{2}$.

(a) Usando o Teorema do Limite Central e a Lei 0–1 de Kolmogorov prove as seguintes afirmações. Sejam $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência iid com média zero e variância finita e $S_n \equiv X_1 + \ldots + X_n$ a sequência de somas parciais associadas à $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Então

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty.$$

(b) Usando o Teorema 24 (página 48) e o item anterior mostre que

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \liminf_{t\downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty.$$

17. Fixe $\lambda > 0$ e considere o conjunto de índices $T = [0, +\infty)$, munido de sua σ-álgebra de Borel, $\mathscr{B}(T)$. Para $k \in \mathbb{N}$ e cada k-úpla de tempos ordenada $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_k$, defina

$$t_0 \equiv 0, \qquad \Delta_j \equiv t_j - t_{j-1}, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

No espaço mensurável $(\mathbb{N}^k, \mathscr{P}(\mathbb{N}^k))$, considere o produto de medidas de Poisson

$$\rho_{t_1,\ldots,t_k} \equiv \prod_{j=1}^{k} \nu_j,$$

onde ν_j é a medida de probabilidade boreliana induzida em $\mathbb{R}$ por uma variável aleatória com distribuição Poisson$(\lambda\Delta_j)$.

Introduza a aplicação linear $S_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ (soma cumulativa)

$$S_k(y_1, \ldots, y_k) \;=\; (y_1,\; y_1 + y_2,\; \ldots,\; y_1 + \cdots + y_k).$$

Note que $S_k(\mathbb{N}^k) \subset \mathbb{N}^k$. Seja $\mu^{\lambda}_{t_1,\ldots,t_k}$ o "pushforward" pela aplicação S_k da medida de probabilidade $\rho_{t_1,\ldots,t_k}$, ou seja, para todo $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$,

$$\mu^{\lambda}_{t_1,\ldots,t_k}(H) \;=\; \rho_{t_1,\ldots,t_k}\big(S_k^{-1}(H) \cap \mathbb{N}^k\big).$$

(a) Verifique que $\mu^{\lambda}_{t_1,\ldots,t_k}$ é uma medida de probabilidade bem-definida em $\mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ e é suportada em $\mathbb{N}^k$.

(b) Sejam π uma permutação de $\{1, \ldots, k\}$ e $\varphi_\pi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ como no texto (rearranjo de coordenadas). Mostre que

$$\mu^{\lambda}_{t_1,\ldots,t_k} \;=\; \mu^{\lambda}_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(k)}} \circ \varphi_\pi^{-1}.$$

(c) Se $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k-1}$ a projeção $\psi(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_{k-1})$, prove que

$$\mu^{\lambda}_{t_1,\ldots,t_{k-1}} \;=\; \mu^{\lambda}_{t_1,\ldots,t_k} \circ \psi^{-1}.$$

Dica: sob $\rho_{t_1,\ldots,t_k}$, o último incremento $Y_k \sim \text{Pois}(\lambda\Delta_k)$ é independente dos demais; tome a marginal no fator final e use que S_{k-1} é a restrição de S_k às primeiras $k-1$ coordenadas.

(d) Mostre que a família $\{\mu^{\lambda}_{t_1,\ldots,t_k}\}$ (para todas as k-úplas de tempos distintos em T) é consistente e, pelo Teorema 9 das notas de aula, deduza a existência de uma medida de probabilidade $\mathbb{P}$ sobre $(\mathbb{R}^T, \mathscr{F})$ tal que o processo coordenada $\{Z_t : t \in T\}$ tenha distribuições finito-dimensionais dadas por $\mu^{\lambda}_{t_1,\ldots,t_k}$. Denote $N_t \equiv Z_t$.

(e) Mostre que, para $t \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(N_t = n) \;=\; e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Mais geralmente, mostre que para $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_k$ e $n_0 \equiv 0 \leqslant n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_k$,

$$\mathbb{P}\big(N_{t_1} = n_1, \ldots, N_{t_k} = n_k\big) = \prod_{j=1}^{k} e^{-\lambda\Delta_j}\frac{\big(\lambda\Delta_j\big)^{\,n_j - n_{j-1}}}{(n_j - n_{j-1})!},$$

e a probabilidade é 0 quando algum $n_j < n_{j-1}$.