

Integrais de Borwein e Passeios Aleatórios

L. Cioletti e C. R. Gonçalves

25 de Maio de 2025

Resumo

Neste artigo mostramos como a Teoria de Probabilidade pode ser usada para compreender um fenômeno curioso que ocorre nas chamadas **integrais de Borwein**, definidas por

$$I_n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(x/3)}{(x/3)} \frac{\text{sen}(x/5)}{(x/5)} \dots \frac{\text{sen}(x/(2n+1))}{(x/(2n+1))} dx$$

Essas integrais apresentam um comportamento intrigante: para $n = 0, \dots, 6$, temos que $I_n = \pi$, mas a partir de $n = 7$ temos uma quebra deste padrão, por exemplo, $I_7 = (0,99999999985292)\pi$ e para $n \geq 8$, temos que $I_n < \pi$.

O objetivo é revelar o mistério por trás dessa quebra de padrão usando a Teoria de Probabilidade. Nosso principal resultado afirma que

$$I_n = \pi \cdot \mathbb{P}(|S_n| \leq 1), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

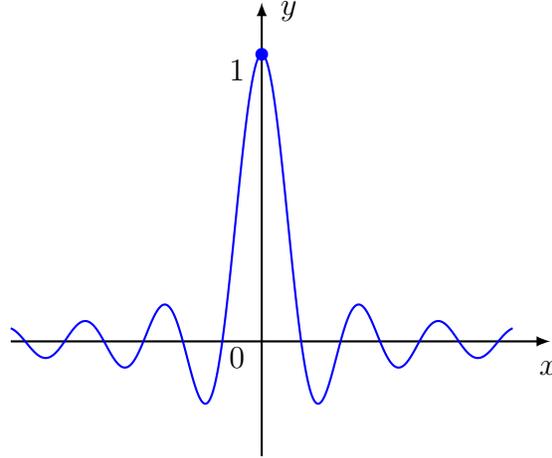
onde $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um **passeio aleatório** com incrementos independentes que será apresentado ao longo do texto. A análise probabilística desse passeio permite entender tanto a persistência do valor π nos primeiros casos, quanto a mudança brusca que ocorre a partir de $n = 7$.

Este é um texto de divulgação e tem como um dos seus principais objetivos o de apresentar o resultado mencionado acima em material escrito na língua portuguesa com enfoque didático e acessível. O texto é voltado para estudantes de Matemática, Física e Engenharias interessados em aplicações da Teoria de Probabilidade. Ressaltamos que o artigo não possui conteúdo original ou inovador e é completamente baseado nas ideias expostas em [3].

1 As Integrais de Borwein

É bem conhecido em Análise de Fourier que o valor principal de Cauchy da integral da função real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, às vezes chamada de $\text{sinc}(x)$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0; \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



satisfaz a seguinte identidade:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{\text{sen}(x)}{x} dx \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \pi.$$

Na verdade, existem diversas maneiras de obter esta igualdade. Uma delas, muito elegante, consiste em, inicialmente, considerar a extensão meromorfa da função auxiliar $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $g(x) = e^{ix}/x$. Verificar que esta extensão possui apenas uma singularidade isolada e localizada em $z = 0$. Em seguida, considerar a integral desta extensão ao longo da curva fechada suave por partes consistindo da união dos intervalos $[-M, -\varepsilon]$ e $[\varepsilon, M]$ e de dos semicírculos localizados no semiplano superior e dados, respectivamente, por $\gamma(t) \equiv \varepsilon e^{it}$ e $\beta(t) \equiv M e^{-it}$, com $t \in [0, \pi]$. Na etapa seguinte, observando que esta curva não envolve a singularidade da extensão meromorfa de g , aplicamos o Teorema dos Resíduos e deduzimos que a integral ao longo desta curva fechada se anula. Para finalizar, olhamos para a expansão em série de Laurent de g , em torno de $z = 0$, avaliamos cuidadosamente os limites quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e $M \rightarrow \infty$ e tomamos a parte imaginária da expressão resultante, finalmente obtendo a igualdade mencionada acima.

Curiosamente, obtemos uma identidade semelhante substituindo a função $\text{sinc}(x)$ pela função que aparece no integrando abaixo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(x/3)}{(x/3)} dx = \pi.$$

Observação. Antes de prosseguir, gostaríamos de observar que o integrando na expressão acima é agora uma função Lebesgue integrável. O que **não** é o caso da função $\text{sinc}(x)$. Isso permite pensar o lado esquerdo da igualdade acima ou como uma integral de Lebesgue ou como Valor Principal de Cauchy.

Diversas generalizações envolvendo identidades semelhantes às apresentadas acima são estudadas, na referência [2], por meio de Análise de Fourier. Mais precisamente, os autores estudam propriedades assintóticas e em alguns casos obtêm expressões explícitas para

integrais que são da seguinte forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=0}^n \frac{\text{sen}(a_k x)}{a_k x} dx, \quad (1)$$

onde a sequência $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ é uma sequência de números positivos. Estas integrais, hoje em dia, são chamadas, às vezes, de **Integrais de Borwein**.

No caso particular em que a sequência $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ é da forma $a_k = (2k + 1)^{-1}$, isto é, sequências dos recíprocos dos inteiros positivos ímpares, temos para $n = 0, \dots, 6$ que as Integrais de Borwein são todas iguais à π , isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \pi.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(x/3)}{(x/3)} dx = \pi.$$

⋮

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(x/3)}{(x/3)} \dots \frac{\text{sen}(x/13)}{(x/13)} dx = \pi.$$

Porém para $n = 7$, uma misteriosa quebra deste padrão ocorre. Pois neste caso, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(x/3)}{(x/3)} \dots \frac{\text{sen}(x/15)}{(x/15)} dx = (0,999999999985292)\pi.$$

O rompimento deste padrão nas integrais de Borwein é algo realmente surpreendente. Inclusive encontramos o seguinte relato na referência [2] de D. Borwein and J.M. Borwein:

“... When this fact was recently verified by a researcher using a computer algebra package, he concluded that there must be a “bug” in the software.”

O principal objetivo deste texto é mostrar como a Teoria de Probabilidade pode ser usada para dar uma explicação simples sobre o mecanismo por trás da quebra deste padrão.

2 Resultado Principal

A principal ideia deste artigo é considerar um passeio aleatório $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, da forma

$$S_n \equiv X_1 + \dots + X_n,$$

onde $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de v.a.'s independentes com

$$X_1 \sim U \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right], \quad X_2 \sim U \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right], \quad \dots, \quad X_n \sim U \left[-\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n+1} \right], \dots$$

e mostrar a validade da seguinte identidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(x/3)}{(x/3)} \frac{\text{sen}(x/5)}{(x/5)} \dots \frac{\text{sen}(x/(2n+1))}{(x/(2n+1))} dx = \pi \mathbb{P}(|S_n| \leq 1).$$

Esta identidade, por fim, fornece uma explicação simples e bastante clara para esta **surpreendente quebra de padrão** nas integrais de Borwein, já que $\mathbb{P}(|S_n| \leq 1) = 1$, para $n = 1, \dots, 6$ e por outro lado, $\mathbb{P}(|S_n| \leq 1) < 1$, para $n \geq 7$.

Antes, porém, de apresentarmos a prova desta incrível identidade, faremos um breve “passeio” por alguns resultados clássicos da Teoria das Probabilidades que serão necessários ao longo do texto.

2.1 Funções Características

Se X é uma variável aleatória arbitrária, definimos a função característica de X como sendo a função complexa $\phi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\phi_X(t) \equiv \mathbb{E}[\exp(itX)]$. Se $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ denota a função de distribuição X , segue diretamente do Teorema de Mudança de Variáveis que a função característica de X admite a seguinte representação:

$$\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mathbb{P}_X(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

onde \mathbb{P}_X é a medida de probabilidade sobre \mathbb{R} , induzida por X , isto é, a única medida de probabilidade levando $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni B \mapsto \mathbb{P}(X \in B)$. Nos casos em que a variável aleatória X possui uma função de densidade, digamos f , a função característica de X admite uma representação ainda mais simples que é dada por

$$\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx.$$

Para os leitores mais aficionados em Análise Real, observamos que neste caso particular, em que X possui densidade, podemos também representar a função característica de X em termos de uma Transformada de Fourier apropriada.

Exemplo. Se X tem distribuição uniforme no intervalo fechado $[-k, k] \subset \mathbb{R}$, então X possui função densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2k}, & \text{se } -k \leq x \leq k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Neste caso, a função característica de X pode ser explicitamente calculada e sua expressão, para cada $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, é dada por

$$\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx = \frac{1}{2k} \int_{-k}^k e^{itx} dx = \frac{1}{2k} \frac{1}{it} e^{itx} \Big|_{-k}^k = \frac{1}{2k} \frac{e^{itk} - e^{-itk}}{it} = \frac{\text{sen}(kt)}{kt}. \quad (2)$$

Outro fato bastante popular e extremamente útil na Teoria de Probabilidades é que se Z e W são variáveis aleatórias integráveis e independentes, então $\mathbb{E}[ZW] = \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[W]$. Este fato tem como consequência que a função característica da soma de duas variáveis aleatórias independentes, possui a seguinte propriedade:

$$\phi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{it(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{itX}]\mathbb{E}[e^{itY}] = \phi_X(t)\phi_Y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Outra propriedade, esta porém de verificação trivial, mas bastante útil é que se multiplicamos uma variável aleatória por um fator de escala, então isso se manifesta na função característica como uma mudança de escala do parâmetro. Mais precisamente, para cada $c \in \mathbb{R}$ fixado temos

$$\phi_{cX}(t) = \mathbb{E}[e^{itcX}] = \phi_X(ct), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Para finalizar nossa lista, de propriedades bem-conhecidas das funções características, apresentamos ao leitor a chamada **fórmula da inversão** que afirma, entre outras coisas, que se uma v.a. X possui função característica absolutamente integrável em toda reta, então ela necessariamente possui função de densidade e esta por sua vez é dada em termos função característica como segue

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \phi_X(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

A prova deste fato é intrincada. Uma maneira de obtê-la é via teoria da Transformada de Fourier, no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, juntamente com alguns resultados de regularização por convolução com núcleos suaves. Mas existem também alternativas mais palatáveis baseadas em cálculos explícitos de determinados Valores Principais de Cauchy, fórmula De-Moivre e o Teorema de Fubini-Tonelli. Ao leitor interessado na prova da fórmula da inversão, envolvendo a teoria da Transformada de Fourier, recomendamos a leitura da referência [4]. A alternativa palatável (e muito elegante) da prova desta fórmula é apresentada, na íntegra, nas páginas 369 e 370 da referência [1].

Vamos finalizar esta seção observando que se tomamos $x = 0$ em (5), então obtemos a seguinte identidade:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi_X(t) dt. \quad (6)$$

2.2 Passeios Aleatórios e Integrais de Borwein

Seja $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, onde para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a v.a. X_n é uniformemente distribuída no intervalo fechado $[-\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n+1}]$.

Considere o passeio aleatório $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, definido por $S_n \equiv X_1 + \dots + X_n$.

Como estamos assumindo que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ é uma sequência de v.a.'s independentes podemos usar (3) para garantir que

$$\phi_{X_0+S_n}(t) = \phi_{X_0+X_1+\dots+X_n}(t) = \phi_{X_0}(t)\phi_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot \phi_{X_n}(t).$$

Usando a expressão da função característica calculada em (2), para cada um dos fatores do lado direito da igualdade acima, obtemos a seguinte igualdade:

$$\phi_{X_0+S_n}(t) = \frac{\text{sen}(t)}{t} \frac{\text{sen}(t/3)}{(t/3)} \dots \frac{\text{sen}(t/(2n+1))}{t/(2n+1)}. \quad (7)$$

Note que para todo $n \geq 1$, a função $\phi_{X_0+S_n}$ é absolutamente integrável ao longo de toda reta real. De fato, olhando para o lado direito da igualdade acima podemos afirmar que existe alguma constante $M > 0$ tal que

$$|\phi_{X_0+S_n}(t)| \leq \frac{M}{1+t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, podemos tomar a integral de Lebesgue, ao longo de toda reta real, em ambos lados da igualdade (7) obtendo

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_{X_0+S_n}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{sen}(t)}{t} \frac{\text{sen}(t/3)}{(t/3)} \dots \frac{\text{sen}(t/(2n+1))}{t/(2n+1)} dt.$$

Aplicando (6) no lado esquerdo desta última igualdade, ficamos com

$$2\pi f_{X_0+S_n}(0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{sen}(t)}{t} \frac{\text{sen}(t/3)}{(t/3)} \dots \frac{\text{sen}(t/(2n+1))}{t/(2n+1)} dt, \quad (8)$$

onde $f_{X_0+S_n}(0)$ denota a função de densidade da v.a. $X_0 + S_n$ avaliada em $x = 0$.

3 O Fantástico Truque da Densidade no Zero

Vamos ver agora um truque muito legal, relacionado a como representar a imagem de certas funções de densidade, calculada na origem como múltiplo de uma determinada probabilidade.

Caso 1 - X Uniforme e Y Absolutamente Contínua

Suponha que X e Y são v.a.'s independentes e que ambas possuem densidade, digamos f_X e f_Y , respectivamente. Como mencionado acima, vamos assumir que $X \sim U[-k, k]$. Vamos mostrar a validade das seguintes igualdades:

$$f_{X+Y}(z) = \frac{1}{2k} \mathbb{P}(|Y - z| \leq k) \implies f_{X+Y}(0) = \frac{1}{2k} \mathbb{P}(|Y| \leq k). \quad (9)$$

Usando a fórmula de convolução sabemos que a densidade da v.a. $X + Y$ é dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-t)f_Y(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k} \mathbb{1}_{[-k,k]}(z-t)f_Y(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k} \mathbb{1}_{[z-k,z+k]}(t)f_Y(t) dt \\ &= \frac{1}{2k} \int_{z-k}^{z+k} f_Y(t) dt \\ &= \frac{1}{2k} \mathbb{P}(Y \in [z-k, z+k]) = \frac{1}{2k} \mathbb{P}(|Y - z| \leq k). \end{aligned}$$

Caso 2 - X Uniforme e Y Arbitrária

Agora vamos provar a validade de uma fórmula muito parecida com (9) em um contexto mais geral. Vamos assumir apenas que X e Y são independentes, $X \sim U[-k, k]$ e Y é uma v.a. arbitrária. Para isto será preciso, primeiro, mostrar que neste caso a v.a. $X + Y$ possui uma função de densidade. O que a princípio não é um fato óbvio.

Lema 1. Sejam X e Y v.a.'s aleatórias independentes com $X \sim U[-k, k]$ e Y arbitrária. Então a v.a. $Z \equiv X + Y$ é absolutamente contínua.

Prova. Fixe $z \in \mathbb{R}$. Então segue da Fórmula da Convolução que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \leq z) &= \mathbb{P}(X + Y \leq z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(z-u) dF_Y(u) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2k} \left[\int_{-\infty}^{z-u} \mathbb{1}_{[-k,k]}(s) ds \right] dF_Y(u). \\ (\text{mud. var. } t = s + u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2k} \left[\int_{-\infty}^z \mathbb{1}_{[-k,k]}(t-u) dt \right] dF_Y(u) \\ (\text{Teorema de Tonelli}) &= \int_{-\infty}^z \left[\frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-k,k]}(t-u) dF_Y(u) \right] dt. \end{aligned}$$

o que encerra a prova do lema. ■

Teorema 1. Se X e Y são v.a.'s independentes, $X \sim U[-k, k]$ e Y arbitrária, então

$$f_{X+Y}(z) = \frac{1}{2k} (\mathbb{P}(|Y - z| \leq k) - \mathbb{P}(Y = z - k))$$

e conseqüentemente,

$$f_{X+Y}(0) = \frac{1}{2k} (\mathbb{P}(|Y| \leq k) - \mathbb{P}(Y = -k)). \quad (10)$$

Prova. A prova é semelhante à do Caso 1. Mas optamos por apresentar os detalhes, para destacar a sutil diferença entre elas. Primeiro observamos que as hipóteses do Teorema permitem aplicar o **Lema 1**. Portanto existe a função de densidade para a v.a. $X + Y$ e além do mais, esta função de densidade é dada pela expressão em colchetes (com z no lugar de t) que aparece no final da prova do **Lema 1**. Logo, para cada $z \in \mathbb{R}$, fixado temos que

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-k, k]}(z - u) dF_Y(u) \\ &= \frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[z-k, z+k]}(u) dF_Y(u) \\ &= \frac{1}{2k} \int_{z-k}^{z+k} dF_Y(u) \\ &= \frac{1}{2k} (F_Y(z+k) - F_Y(z-k)). \\ &= \frac{1}{2k} \mathbb{P}(-k < Y - z \leq k) \\ &= \frac{1}{2k} (\mathbb{P}(|Y - z| \leq k) - \mathbb{P}(Y = z - k)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4 Fim do Mistério

Agora temos todas as peças para montar nosso quebra-cabeças. Primeiro consideramos a sequência de v.a.'s introduzidas no início da [Seção 2.2](#). Como as todas as variáveis aleatórias envolvidas neste caso são independentes e absolutamente contínuas, podemos usar a versão mais simples do truque da densidade que é fornecido pela identidade (9). E desta forma podemos afirmar que

$$2\pi f_{X_0+S_n}(0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{sen}(t)}{t} \frac{\text{sen}(t/3)}{(t/3)} \dots \frac{\text{sen}(t/(2n+1))}{t/(2n+1)} dt.$$

Lembrando que $X_0 \sim U[-1, 1]$ e considerando $Y \equiv S_n$, segue da segunda expressão obtida em (9) que $f_{X_0+S_n}(0) = \mathbb{P}(|S_n| \leq 1)/2$. Substituindo este valor na igualdade acima, concluímos finalmente que

$$\pi\mathbb{P}(|S_n| \leq 1) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{sen}(t)}{t} \frac{\text{sen}(t/3)}{(t/3)} \dots \frac{\text{sen}(t/(2n+1))}{t/(2n+1)} dt.$$

Observe que segue da desigualdade triangular e do fato de X_n tomar valores, quase certamente, apenas no intervalo fechado $[-\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n+1}]$ que

$$|S_1|, \dots, |S_6| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} < 1 \implies \mathbb{P}(|S_n| \leq 1) = 1, \quad n = 1, \dots, 6.$$

Por outro lado, observando que

$$1 < \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} \cong 1,02$$

podemos assegurar que para algum $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, existe probabilidade positiva de $S_7 \in (1, 1 + \varepsilon)$ portanto $\mathbb{P}(|S_7| \leq 1) < 1$. É claro que para todo $n \geq 7$ também teremos $\mathbb{P}(|S_n| \leq 1) < 1$.

Referências

- [1] P. Billingsley. *Probability and Measure - Anniversary Edition*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, New York, Anniversary edition, 2012. x+608 pp. ISBN: 978-1-118-12237-2.
- [2] D. Borwein and J. M. Borwein, *Some Remarkable Properties of Sinc and Related Integrals*, The Ramanujan Journal, **5**, 73–89 (2001).
- [3] Almost Sure (George Lowther), *Borwein integrals: expecting the unexpected*, YouTube, 2025. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=px1JLasCN2c&t=169s>. Acessado em: 20/05/2025.
- [4] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Fourier Analysis. An Introduction*. Princeton Lectures in Analysis, Vol. 1. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. xvi+311 pp. ISBN: 0-691-11384-X.