

**Universidade Estadual de Campinas**

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

---

**Tese de Doutorado**

**Multiplicidade de Soluções Nodais  
para Problemas Elípticos Quasilineares**

por

**Marcelo Fernandes Furtado** †

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

**Orientador: Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo**

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

# Multiplicidade de Soluções Nodais para Problemas Elípticos Quasilineares

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Marcelo Fernandes Furtado** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 02 de Dezembro de 2004.

---

**Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo**  
(Orientador)

Banca examinadora:

Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo.

Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento.

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves.

Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves.

Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

*Dedico este trabalho aos meus  
pais e à minha esposa Aline*

*“Tudo o que é sólido desmancha no ar, tudo o que é sagrado é profanado, e os homens são finalmente forçados a enfrentar com sentidos mais sóbrios suas reais condições de vida e sua relação com outros homens.”*

Manifesto do Partido Comunista

*“OLÁ, GUARDADOR de rebanhos,  
Aí à beira da estrada,  
Que te diz o vento que passa?”*

*‘Que é vento, e que passa,  
E que já passou antes,  
E que passará depois.  
E a ti o que te diz?’*

*‘Muita cousa mais do que isso.  
Fala-me de muitas outras cousas.  
De memórias e de saudades  
E de cousas que nunca foram.’*

*‘Nunca ouviste passar o vento.  
O vento só fala do vento.  
O que lhe ouviste foi mentira,  
E a mentira está em ti.’”*

Fernando Pessoa.

---

# AGRADECIMENTOS

- À Aline, pelo seu amor e companheirismo.
- Aos meus pais, por proporcionarem um ambiente de carinho, amor e apoio importante para a minha formação como ser humano.
- Ao professor Djairo, pela confiança e pela orientação.
- Ao professores, e principalmente amigos, Elves e Celius, por terem despertado em mim o interesse pela pesquisa matemática.
- A todos os amigos, pelos momentos de descontração. Em especial ao pessoal do Seminário, pela promoção de um ambiente democrático de discussão de assuntos de extrema relevância em nosso dia a dia.
- A todos os professores e funcionários do IMECC. Em especial à Tânia e Cidinha, pela presteza com que administram os assuntos burocráticos da pós-graduação.
- À CAPES, pelo apoio financeiro.

---

# RESUMO

O objetivo desse trabalho é investigar o número de soluções que trocam de sinal exatamente uma vez para algumas classes de problemas elípticos quasilineares com simetria. Consideramos três tipos de problemas: subcríticos em domínio limitado ou em todo o  $\mathbb{R}^N$ , e um problema crítico em domínio limitado. Em todos eles, o número de soluções é relacionado com a topologia equivariante de algum conjunto apropriado. As principais ferramentas utilizadas são Métodos Variacionais e Teoria Equivariante de Ljusternik-Schnirelmann.

---

# ABSTRACT

The objective of this work is to investigate the number of solutions which change sign exactly once for some classes of quasilinear elliptic problems. We consider three type of problems: subcritical in a bounded domain or in the whole space  $\mathbb{R}^N$ , and a critical problem in a bounded domain. In all of them, the number of solutions is related with the equivariant topology of some suitable set. The main tools utilized are Variational Methods and Equivariant Ljusternik-Schnirelmann Theory.

---

# CONTEÚDO

<b>Agradecimentos</b> . . . . .	i
<b>Resumo</b> . . . . .	ii
<b>Abstract</b> . . . . .	iii
<b>1 Introdução</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Equação quasilinear subcrítica . . . . .	3
1.2 Equação de Schrödinger quasilinear subcrítica . . . . .	7
1.3 Equação quasilinear crítica . . . . .	11
<b>2 Equação quasilinear subcrítica</b> . . . . .	<b>14</b>
2.1 Notações e alguns resultados técnicos . . . . .	15
2.1.1 Algumas propriedades de $m_q$ e $m_q^\tau$ . . . . .	17
2.1.2 A função baricentro . . . . .	20
2.2 Soluções nodais minimais . . . . .	29
2.2.1 Demonstração do Teorema 1.1 . . . . .	30
2.2.2 Demonstração do Teorema 1.2 . . . . .	30
2.3 Multiplicidade de soluções positivas para $(D_q)$ . . . . .	34
<b>3 Equação de Schrödinger quasilinear subcrítica</b> . . . . .	<b>37</b>
3.1 Notações e alguns resultados técnicos . . . . .	38
3.1.1 A condição de Palais-Smale . . . . .	40
3.2 Soluções nodais minimais . . . . .	48



3.2.1	Demonstração do Teorema 1.3 . . . . .	48
3.2.2	Demonstração do Teorema 1.4 . . . . .	49
3.2.3	Demonstração do Teorema 1.5 . . . . .	52
3.3	Multiplicidade de soluções positivas para $(S_{\lambda,q})$ . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Equação quasilinear crítica</b>	<b>58</b>
4.1	Notações e alguns resultados técnicos . . . . .	59
4.1.1	A condição de Palais-Smale . . . . .	62
4.1.2	Algumas propriedades de $m_\mu$ e $m_\mu^\tau$ . . . . .	65
4.1.3	A função baricentro . . . . .	66
4.2	Soluções nodais minimais . . . . .	67
4.2.1	Demonstração do Teorema 1.6 . . . . .	68
4.2.2	Demonstração do Teorema 1.7 . . . . .	68
<b>A</b>	<b>Apêndice</b>	<b>70</b>
A.1	Princípio variacional de Ekeland . . . . .	70
A.2	Princípio de criticalidade simétrica . . . . .	75
A.3	Teoria de Ljusternik-Schnirelmann . . . . .	77
A.4	Seqüências minimizantes de $S$ . . . . .	81
	<b>Bibliografia</b>	<b>88</b>

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## Introdução

Em muitos problemas de equações diferenciais somos levados a resolver uma equação do tipo

$$\mathcal{F}(u) = 0,$$

em que a possível solução  $u$  pertence à uma classe admissível de funções contidas em um espaço de Banach  $X$ . Como muitas vezes a função  $\mathcal{F}$  é não linear, vários métodos foram desenvolvidos para resolver a equação acima: princípios de contração, métodos de ponto fixo, grau de Leray-Schauder, método de Galerkin, teoria de Morse, teoremas de função implícita, métodos variacionais, dentre outros. Nesse trabalho, estamos interessados em estudar o caso em que  $\mathcal{F}(u) = \mathcal{I}'(u)$  para algum funcional  $\mathcal{I}$  definido em um espaço de Banach  $X$ . Nessa classe de problemas, que chamamos de variacional, o objetivo de encontrar soluções se reduz à possibilidade de obter pontos críticos para o funcional  $\mathcal{I}$ . A teoria de Pontos Críticos consiste de uma coleção de resultados que estabelece condições suficientes para a existência de pontos críticos para o funcional  $\mathcal{I}$ .

Devido à vastidão da literatura em teoria de Pontos Críticos, não podemos apresentar aqui uma lista completa de referências. Apesar da teoria ter se consolidado no último século, não podemos deixar de destacar que as suas bases remontam aos trabalhos de Heron de Alexandria (aproximadamente 100 dC), baseados no princípio aristotélico de esforço minimal da natureza. Desde então, as idéias básicas e o desenvolvimento da teoria tem contado com a participação de matemáticos ilustres como Fermat [34], John Bernoulli [14], Euler [33], Hilbert [43, 44], Morse [53], dentre outros. Mais recentemente, poderíamos destacar os artigos de Schwartz [64], Palais e Smale [59], Ambrosetti e Rabinowitz [4], e Benci e Rabinowitz [13].

A ferramenta que vamos utilizar aqui para obter pontos críticos é a teoria de Ljusternik-Schnirelmann. Lembramos que se  $X$  é um espaço topológico e  $A \subset X$  é um subconjunto fechado, definimos a categoria de  $A$  em  $X$ ,  $\text{cat}_X(A)$ , como sendo o menor número de fechados contráteis em  $X$  que cobrem o conjunto  $A$ . A motivação para a introdução desse conceito é que ele fornece estimativas inferiores para o número de pontos críticos de uma função. Mais precisamente, se  $M$  é uma variedade diferenciável fechada e  $f$  é uma função diferenciável definida em  $M$  que possui certas propriedades de compacidade, então o número de pontos críticos de  $f$  é pelo menos  $\text{cat}_M(M) = \text{cat}(M)$ .

O conceito acima foi introduzido por Ljusternik [49] que considerou funcionais de classe  $C^2$  definidos em variedades de dimensão finita. As idéias iniciais foram desenvolvidas por Ljusternik e Schnirelmann em [50, 51], onde os autores exploraram propriedades de topologia combinatória para estimar a categoria de algumas variedades usuais. Por exemplo, se  $M = M_1 \times \cdots \times M_k$  é o produto de  $k$  variedades compactas, então  $\text{cat}_M(M) \geq k + 1$ . No caso particular do toro  $\mathbb{T}^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ , que é o produto de  $k$  círculos unitários, devemos ter  $\text{cat}_{\mathbb{T}^k}(\mathbb{T}^k) \geq k + 1$ . Eles verificaram também a desigualdade mais simples  $\text{cat}_{\mathbb{T}^k}(\mathbb{T}^k) \leq k + 1$ , concluindo assim que  $\text{cat}_{\mathbb{T}^k}(\mathbb{T}^k) = k + 1$ .

Uma importante extensão da teoria foi feita por Schwartz [64], que considerou o caso de variedades de dimensão infinita. Como havia necessidade de se recuperar a compacidade perdida pela infinitude da dimensão, Schwartz se valeu de uma importante condição introduzida por Palais e Smale [59] no estudo da não menos importante teoria de Morse. A extensão de variedades de Hilbert para variedades de Banach por meio de estruturas de Finsler é devida à Palais [57]. Destacamos ainda que importantes contribuições foram dadas também por Browder [19], Krasnoselskii [45] e Vainberg [72]. Depois desses trabalhos pioneiros, muitos outros avanços e generalizações se incorporaram à teoria. Destacamos somente aqueles mais relevantes para o nosso trabalho, a saber os de Reeken [61], Szulkin [69, 70] e, Clapp e Puppe [28].

O principal ponto desse trabalho é estudar como a teoria de Ljusternik-Schnirelmann aliada à presença de simetrias afeta o número de soluções de certas classes de problemas elípticos. Como motivação importante, enunciamos abaixo um dos primeiros resultados nessa direção, que foi provado no artigo de Ljusternik e Schnirelmann [50]:

**Teorema.** *Se  $\mathcal{I} \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  é par, então  $\mathcal{I}$  restrito à esfera  $\mathbb{S}^{N-1}$  tem pelo menos  $N$  pares de pontos críticos distintos.*

Note que, apesar de  $\text{cat}_{\mathbb{S}^{N-1}}(\mathbb{S}^{N-1}) = 2$ , o resultado acima nos garante a existência de  $N$  pares de pontos críticos, e não somente de 2. Isso nos leva a crer que quanto mais simetria tivermos em

nosso problema, maior é o número de soluções que podemos encontrar. Considere então  $X$  um espaço de Banach,  $G$  um grupo de transformações de  $X$  em  $X$ , e  $\mathcal{I} \in C^1(X, \mathbb{R})$ . Dizemos que o funcional  $\mathcal{I}$  é invariante sob a ação de  $G$  se  $\mathcal{I}(gu) = \mathcal{I}(u)$ , para todo  $g \in G$  e  $u \in X$ . No teorema acima, o funcional é invariante sob a ação do grupo  $\mathbb{Z}_2 = \{-\text{Id}, \text{Id}\}$ , que age naturalmente sob a esfera  $\mathbb{S}^{N-1}$ . Muitos matemáticos introduziram ferramentas para medir a quantidade de simetria de subconjuntos invariantes por  $G$ . O conceito que usamos aqui é a categoria equivariante de Ljusternik-Schnirelmann, que é a extensão natural da categoria usual sob a presença de simetrias.

Nos problemas que vamos tratar, estamos interessados em obter multiplicidade de soluções que trocam de sinal para três problemas distintos. Com isso, buscamos abordar vários aspectos dos problemas elípticos atuais, tais como: problemas de minimização, problemas subcríticos, questões de perda de compacidade devido à criticalidade de certas imersões de Sobolev e à não limitação do domínio.

Afim de explicar melhor os problemas e os resultados obtidos, dividimos o restante dessa introdução em três seções. Cada uma delas descreve um tipo de problema e apresenta os resultados que serão discutidos nos próximos três capítulos. O trabalho conta ainda com um Apêndice, onde introduzimos o conceito de categoria equivariante, apresentamos alguns resultados clássicos de métodos variacionais e um resultado técnico.

---

## 1.1 Equação quasilinear subcrítica

---

O primeiro problema que vamos estudar é uma equação quasilinear com expoente subcrítico e condições de Dirichlet. Mais especificamente, consideramos o problema

$$(D_q) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado e suave,  $\Delta_p u = \text{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$  é o operador  $p$ -Laplaciano,  $1 < p < N$  e o expoente  $q$  é subcrítico, isto é,  $p < q < p^* = pN/(N-p)$ .

Estamos inicialmente interessados em buscar soluções fracas para  $(D_q)$ . Por solução fraca, entendemos uma função  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  que verifica

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi + |u|^{p-2} u \phi) \, dx = \int_{\Omega} |u|^{q-2} u \phi \, dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Afim de obter tais soluções, note que a equação em  $(D_q)$  nada mais é do que a equação de

Euler-Lagrange do funcional  $E_q : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$E_q(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} (|\nabla u|^p + |u|^p) \, dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} |u|^q \, dx.$$

Como a imersão  $W_0^{1,p} \hookrightarrow L^q(\Omega)$  é contínua, sabemos que o funcional  $E_q$  está bem definido. Além disso,  $E_q \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$  com derivada dada por

$$\langle E'_q(u), \phi \rangle = \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi + |u|^{p-2} u \phi - |u|^{q-2} u \phi) \, dx, \quad \forall u, \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

A expressão acima mostra que as soluções fracas do problema  $(D_q)$  são exatamente os pontos críticos de  $E_q$ , isto é, as funções  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  tais que  $E'_q(u) = 0$ . Argumentos clássicos de regularidade mostram que, se  $u$  é uma solução fraca de  $(D_q)$ , então  $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ . Uma *região nodal* de  $u$  é uma componente conexa de um dos conjuntos  $\{x \in \Omega : u(x) > 0\}$  ou  $\{x \in \Omega : u(x) < 0\}$ . Dizemos que  $u$  é uma *solução nodal* se ela troca de sinal em  $\Omega$ . Neste caso temos pelo menos uma região nodal onde  $u$  é positiva e pelo menos outra onde  $u$  é negativa.

Vamos buscar soluções para  $(D_q)$  por meio da teoria de Pontos Críticos. Dessa forma, será necessário realizar deformações de conjuntos de nível do funcional  $E_q$ . A possibilidade de realizar tais deformações está intimamente ligada à exigência de algum tipo de compacidade para o funcional. Durante todo esse trabalho vamos utilizar a famosa condição de Palais-Smale. Lembramos então que, se  $X$  é um espaço de Banach,  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  e  $c \in \mathbb{R}$ , dizemos que o funcional  $I$  satisfaz a *condição de Palais-Smale no nível  $c$*  se toda seqüência  $(u_n) \subset X$  tal que  $I(u_n) \rightarrow c$  e  $\|I'(u_n)\|_{X^*} \rightarrow 0$  possui uma subsequência convergente.

Como  $p < q < p^*$  e  $\Omega$  é limitado, a imersão de Sobolev  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  é compacta. Logo, não é difícil verificar (veja Lema 2.2) que o funcional  $E_q$  satisfaz a condição de Palais-Smale em todos os níveis. Além do mais, pode-se verificar que  $E_q$  satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti e Rabinowitz [4]. Assim, o problema  $(D_q)$  possui pelo menos duas soluções, uma positiva e outra negativa. Mais ainda, como o funcional  $E_q$  é par, podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha com Simetria [4] para obter infinitas soluções para  $(D_q)$ . Neste caso, não podemos precisar o número de regiões nodais de tais soluções. Em um artigo recente, Bartsch [6] provou que o problema  $(D_q)$ , para  $p = 2$ , possui infinitas soluções nodais. Contudo, ele também não obtém informações sobre o número de regiões nodais das soluções.

Estamos interessados aqui em relacionar a topologia do domínio  $\Omega$  com o número de soluções de  $(D_q)$  que possuem no máximo duas regiões nodais. O ponto de partida de tal estudo é o artigo de Benci e Cerami [10], onde os autores mostram que, para  $p = 2$  e  $q$  suficientemente próximo

de  $2^*$ , o problema  $(D_q)$  tem pelo menos  $\text{cat}(\Omega)$  soluções positivas. Depois desse trabalho, outros autores estudaram o problema de multiplicidade de soluções para  $(D_q)$  em termos da topologia de  $\Omega$ . Citamos, por exemplo, [12, 23, 11] para problemas subcríticos, e [62, 46, 73] para problemas com expoente crítico. Todos esses trabalhos lidam somente com o caso semilinear  $p = 2$ . Ao que nos parece, o único trabalho nessa linha que trata o caso quasilinear é o artigo de Alves e Ding [2], onde os autores estudaram o problema crítico.

Em todos os trabalhos acima citados, os autores buscavam soluções positivas de  $(D_q)$ . Uma vez que é sabido que o problema possui infinitas soluções que trocam de sinal, é natural perguntarmos se existe alguma relação entre a topologia de  $\Omega$  e o número de soluções nodais. Motivados por essa questão e pelo trabalho de Castro e Clapp [21], estamos interessados em obter soluções que trocam de sinal exatamente uma vez, isto é, soluções  $u$  tais que  $\Omega \setminus u^{-1}(0)$  tem exatamente duas componentes conexas,  $u$  é positiva em uma delas e negativa na outra. Chamaremos tais soluções de *soluções nodais minimais*. Afim de obtê-las seguimos [21] e supomos que o domínio  $\Omega$  satisfaz a seguinte condição de simetria

(H) existe  $\tau \in O(N)$  tal que  $\tau \neq \text{Id}$ ,  $\tau^2 = \text{Id}$  e  $\tau(\Omega) = \Omega$ ,

em que  $O(N)$  denota o conjunto das transformações lineares ortogonais de  $\mathbb{R}^N$  em  $\mathbb{R}^N$ . Assim, estudamos o problema

$$(D_q^\tau) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u & \text{em } \Omega, \\ u(\tau x) = -u(x) & \text{para todo } x \in \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe que qualquer solução não trivial de  $(D_q^\tau)$  troca de sinal. Como uma consequência relativamente simples da simetria do domínio, provamos inicialmente o seguinte resultado de existência de soluções nodais minimais.

**Teorema 1.1.** *Suponha que (H) vale. Então, para todo  $q \in (p, p^*)$ , o problema  $(D_q^\tau)$  tem pelo menos um par de soluções que trocam de sinal exatamente uma vez.*

O resultado acima foi provado, no caso semilinear  $p = 2$ , por Castro, Cossio e Neuberger em [22]. Nesse trabalho eles consideraram não-linearidades mais gerais do que  $|u|^{p-2}u$  e não exigiram nenhum tipo de simetria para o domínio  $\Omega$ . Recentemente, Bartsch e Weth [8] complementaram os resultados de [22] provando que a solução obtida tem índice de Morse igual a 2. Como esses dois trabalhos utilizam a estrutura Hilbertiana do espaço  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , suas idéias não se aplicam ao problema  $(D_q^\tau)$ . Dessa forma, o Teorema 1.1 estende os resultados de existência de [22, 8].

O Teorema 1.1 também complementa o resultado de existência de [21], onde os autores consideraram o problema semilinear crítico

$$-\Delta u = \mu u + |u|^{2^*-2}u, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad u(\tau x) = -u(x) \text{ em } \Omega,$$

e obtiveram o mesmo resultado desde que  $\mu > 0$  fosse menor que o primeiro autovalor do Laplaciano. Tomando vantagem da simetria de  $\Omega$  eles também estudaram a relação entre a topologia do domínio e o número de soluções nodais minimais (veja Seção 1.3 onde explicamos melhor e estendemos os resultados de [21]). Nosso próximo resultado mostra que o mesmo fenômeno ocorre para o problema  $(D_q^\tau)$ , desde que o expoente  $q$  seja suficiente próximo do expoente crítico  $p^*$ .

**Teorema 1.2.** *Suponha que (H) vale. Então existe  $q_* \in (p, p^*)$  tal que, para todo  $q \in (q_*, p^*)$ , o problema  $(D_q^\tau)$  tem pelo menos  $\tau\text{-cat}_\Omega(\Omega \setminus \Omega^\tau)$  pares de soluções que trocam de sinal exatamente uma vez.*

Aqui,  $\Omega^\tau = \{x \in \Omega : \tau x = x\}$  é o conjunto dos pontos de  $\Omega$  que são fixados pela involução  $\tau$ , e  $\tau\text{-cat}$  é a  $G_\tau$ -categoria equivariante de Ljusternik-Schnirelmann para o grupo  $G_\tau = \{\text{Id}, \tau\}$  (veja Seção A.3). Existem algumas situações onde a categoria equivariante é maior do que a categoria usual. O exemplo clássico é a esfera unitária  $\mathbb{S}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$  com a ação antipodal  $\tau = -\text{Id}$ . Neste caso,  $\text{cat}(\mathbb{S}^{N-1}) = 2$  enquanto  $\tau\text{-cat}(\mathbb{S}^{N-1}) = N$ . Assim, como consequência simples do Teorema 1.2 e do Teorema de Borsuk-Ulam, obtemos um resultado de multiplicidade para a seguinte classe de domínios.

**Corolário 1.1.** *Suponha que  $\Omega$  é simétrico com relação à origem e que  $0 \notin \Omega$ . Suponha ainda que existe uma aplicação contínua e ímpar  $\varphi : \mathbb{S}^{N-1} \rightarrow \Omega$ . Então existe  $q_* \in (p, p^*)$  tal que, para todo  $q \in (q_*, p^*)$ , o problema  $(D_q)$  tem pelo menos  $N$  pares de soluções ímpares que trocam de sinal exatamente uma vez.*

Antes de finalizar a seção gostaríamos de destacar que os resultados de multiplicidade acima são novos mesmo no caso  $p = 2$ . Notamos também que a não linearidade do  $p$ -Laplaciano, que torna os cálculos mais complicados, é compensada pela homogeneidade do problema. Finalmente mencionamos que, quando a condição de simetria (H) não é satisfeita, obtemos um resultado que estende o de [10, Teorema B] para o caso quasilinear. Neste caso, relacionamos o número de soluções positivas com a categoria usual de Ljusternik-Schnirelmann de  $\Omega$  (veja Teorema 2.11).

## 1.2 Equação de Schrödinger quasilinear subcrítica

O nosso próximo objetivo é obter resultados de existência e multiplicidade para uma equação Schrödinger não linear. Antes de apresentar o problema vamos discutir um pouco alguns resultados conhecidos. Iniciamos citando Floer e Weinstein [35] que estudaram a equação

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx} + V(x)\psi + \gamma|\psi|^2\psi, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

com o potencial  $V$  limitado e tendo  $x = 0$  como ponto crítico não degenerado. Para  $\gamma > 0$  e  $\hbar > 0$  suficientemente pequeno, os autores usaram um método de redução do tipo Lyapunov-Schmidt para obter uma solução da forma

$$\psi(x, t) = \exp(-iEt/\hbar)u(x). \quad (1.2.1)$$

Posteriormente, Oh [54, 55] estendeu os resultados de [35] para dimensões maiores considerando a equação

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi - \gamma|\psi|^{q-2}\psi, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \quad (1.2.2)$$

com  $2 < q < 2^*$ . Para o potencial  $V$ , Oh supôs que existia  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $E < a$ ,  $V(x) \equiv a$  ou  $V(x) > a$  para todo  $x \in \mathbb{R}^N$  e além disso  $(V(x) - a)^{-1/2}$  era uma função de Lipschitz.

O primeiro autor a usar métodos variacionais para estudar a equação de Schrödinger foi Rabinowitz em [60]. Para descrever os resultados lá obtidos notamos que, substituindo (1.2.1) em (1.2.2), vemos que a função  $u$  satisfaz a seguinte equação elíptica

$$-\frac{\hbar^2}{2}\Delta u + (V(x) - E)u = |u|^{q-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Fazendo a mudança de variáveis  $y = \hbar^{-1}x$  e trocando  $y$  por  $x$ , a equação acima se transforma em

$$-\Delta u + b(x)u = |u|^{q-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (1.2.3)$$

onde  $b(x) = 2(V(\hbar x) - E)$ . Supondo que  $b(x) \geq b_0 > 0$ , o problema acima tem uma estrutura variacional e o espaço natural para buscar soluções é  $Y = \{u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} b(x)u^2 dx < \infty\}$ . O principal problema é que o domínio  $\mathbb{R}^N$  não é limitado. Assim, a imersão  $Y \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$  não é compacta e o funcional associado pode não satisfazer a condição de Palais-Smale. Para contornar esta dificuldade, Rabinowitz considerou potenciais coercivos, isto é,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} b(x) = \infty,$$



e mostrou que, nestas condições, a equação possui uma solução não trivial. Foi observado posteriormente por Omana e Willem [56] e Costa [29] que, de fato, a condição acima implica que a imersão  $Y \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$  é compacta.

Estamos interessados aqui em estudar uma classe de equações de Schrödinger quasilineares em que o potencial pode não ser coercivo. Considere então o problema

$$(S_{\lambda,q}) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + (\lambda a(x) + 1)|u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

em que  $2 \leq p < N$ ,  $p < q < p^*$  e  $\lambda > 0$  é um parâmetro positivo. Para o potencial vamos utilizar as hipóteses introduzidas por Bartsch e Wang em [7], onde os autores estudaram o problema acima com a função  $a$  satisfazendo

(A<sub>1</sub>)  $a \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  é não-negativa,  $\Omega = \text{int } a^{-1}(0)$  é um conjunto não vazio com fronteira suave e  $\bar{\Omega} = a^{-1}(0)$ .

(A<sub>2</sub>) existe  $M_0 > 0$  tal que

$$\mathcal{L}(\{x \in \mathbb{R}^N : a(x) \leq M_0\}) < \infty,$$

onde  $\mathcal{L}$  é a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^N$ .

Observe que a condição (A<sub>2</sub>) é satisfeita sempre que

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} a(x) > 0,$$

e portanto  $b_\lambda(x) = (\lambda a(x) + 1)$  pode não ser coercivo.

O espaço natural para trabalharmos é

$$X = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^p \, dx < \infty \right\},$$

no qual definimos o funcional  $I_{\lambda,q} : X \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$I_{\lambda,q}(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + (\lambda a(x) + 1)|u|^p) \, dx - \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \, dx.$$

Bartsch e Wang consideraram somente o caso semilinear  $p = 2$  e mostraram que, para valores grandes de  $\lambda$ , o problema  $(S_{\lambda,q})$  tem pelo menos uma solução positiva  $u_0$ , que é também uma solução de energia mínima, isto é,

$$I_{\lambda,q}(u_0) = \inf \{ I_{\lambda,q}(u) : u \text{ é uma solução não trivial de } (S_{\lambda,q}) \}.$$

Suponha agora que  $u \in X \cap C(\mathbb{R}^N)$  é uma solução de  $(S_{\lambda,q})$ . Como  $a \equiv 0$  em  $\Omega$ , temos que

$$-\Delta_p u + |u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u \quad \text{em } \Omega,$$

que é exatamente a equação do problema  $(D_q)$ . Com base nisto, Bartsch e Wang obtiveram o seguinte resultado de concentração: se  $p = 2$ ,  $\lambda_n \rightarrow \infty$  e  $(u_{\lambda_n})$  é uma seqüência de soluções de energia mínima de  $(S_{\lambda_n,q})$ , então existe uma subseqüência de  $(u_{\lambda_n})$  que converge, em  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ , para uma função  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , com  $u$  sendo uma solução positiva do problema de Dirichlet  $(D_q)$ . Dessa maneira, o problema  $(D_q)$  é uma espécie de problema limite de  $(S_{\lambda,q})$ . Lembrando que Benci e Cerami provaram que o problema  $(D_q)$  possui pelo menos  $\text{cat}(\Omega)$  soluções positivas quando  $q$  está próximo de  $2^*$ , Bartsch e Wang obtiveram o mesmo tipo de resultado para o problema  $(S_{\lambda,q})$ .

Motivados pelos resultados acima, e pelo Teorema 1.2 da seção anterior, nos perguntamos se os mesmos fenômenos ocorrem se consideramos um problema quasilinear com simetria e buscarmos soluções nodais minimais. Assim, estudamos o seguinte problema:

$$(S_{\lambda,q}^\tau) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + (\lambda a(x) + 1)|u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u(\tau x) = -u(x) & \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com  $\lambda > 0$ ,  $2 \leq p < N$ ,  $p < q < p^*$ , e  $\tau \in O(N)$  satisfazendo  $\tau \neq \text{Id}$  e  $\tau^2 = \text{Id}$ . O potencial  $a$  satisfaz  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  e é invariante por  $\tau$ , isto é,

$$(A_3) \quad a(\tau x) = a(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Note que a condição acima, juntamente com  $(A_2)$ , implicam que  $\tau(\Omega) = \Omega$ , e portanto a condição de simetria  $(H)$  introduzida na seção anterior é automaticamente satisfeita.

Afim de superar a falta de compacidade da imersão  $X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ , usamos idéias contidas nos trabalhos [7, 1] para obter uma condição de Palais-Smale local que depende do parâmetro  $\lambda$  (veja Proposição 3.3). Com a ajuda dessa compacidade, provamos inicialmente um resultado de existência de soluções nodais minimais.

**Teorema 1.3.** *Suponha que  $(A_1)$ - $(A_3)$  valem. Então existe  $\Lambda_0 = \Lambda_0(q) > 0$  tal que, para todo  $\lambda \geq \Lambda_0$ , o problema  $(S_{\lambda,q}^\tau)$  tem pelo menos um par de soluções que trocam de sinal exatamente uma vez.*

A demonstração do resultado acima consiste em minimizar o funcional  $I_{\lambda,q}$  restrito à uma subvariedade apropriada de  $X$ , e depois estabelecer uma relação entre o número de regiões nodais de um ponto crítico  $u$  com sua energia  $I_{\lambda,q}(u)$ . Da mesma maneira que em [7], o problema com simetria  $(D_q^\tau)$  age como um problema limite de  $(S_{\lambda,q}^\tau)$ . Assim, o seguinte resultado de concentração vale.

**Teorema 1.4.** *Seja  $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$  tal que  $\lambda_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  e  $(u_n)$  uma seqüência de soluções do problema  $(S_{\lambda_n,q}^\tau)$  tal que  $I_{\lambda_n,q}(u_n)$  é limitado. Então, a menos de uma subseqüência,  $u_n \rightarrow u$  forte em  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  com  $u$  sendo uma solução do problema  $(D_q^\tau)$ .*

Adaptando algumas idéias da demonstração de Teorema 1.2, somos capazes de relacionar o número de soluções nodais minimais de  $(S_{\lambda,q}^\tau)$  com a categoria equivariante de  $\Omega$ . Mais especificamente, obtemos o seguinte resultado de multiplicidade de soluções.

**Teorema 1.5.** *Suponha que  $(A_1)$ - $(A_3)$  valiam,  $\Omega$  é limitado e seja  $\Omega^\tau = \{x \in \Omega : \tau x = x\}$ . Então existe  $q_* \in (p, p^*)$  com a seguinte propriedade: para cada  $q \in (q_*, p^*)$ , existe um número  $\Lambda(q) > 0$  tal que, para todo  $\lambda \geq \Lambda(q)$ , o problema  $(S_{\lambda,q}^\tau)$  tem pelo menos  $\tau$ -cat $_\Omega(\Omega \setminus \Omega^\tau)$  pares de soluções nodais minimais.*

Observamos que os resultados acima são novos mesmo no caso  $p = 2$ . Como na seção anterior, podemos provar uma versão do Corolário 1.1 para o problema  $(S_{\lambda,q}^\tau)$  (veja Corolário 3.16). Explicitamos finalmente que, no Teorema 1.4 acima, não somos capazes de garantir que a solução limite troca de sinal exatamente uma vez. De fato, se tomarmos  $u_n = 0$ , vemos que a solução limite pode inclusive ser identicamente nula. Contudo, quando a seqüência de soluções  $(u_n)$  é dada pelo Teorema 1.3 ou pelo Teorema 1.5, somos capazes de provar que a solução limite  $u$  dada pelo Teorema 1.4 é uma solução nodal minimal de  $(D_q^\tau)$  (veja Corolário 3.17). Todos os nossos resultados referentes à equação de Schrödinger podem também ser encontrados no artigo [37].

Em [26] Clapp e Ding consideraram o problema

$$-\Delta u + \lambda a(x)u = \mu u + |u|^{2^*-2}u, \quad u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \quad u(\tau x) = -u(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

e provaram, para valores positivos e pequenos de  $\mu$ , resultados de existência, concentração e multiplicidade de soluções nodais minimais. Recentemente, tais resultados foram estendidos para o operador  $p$ -Laplaciano em [3]. Nossos resultados complementam os de [26, 3] visto que trabalhamos com o expoente subcrítico. Eles também complementam os resultados de [7] onde os autores buscaram, para  $p = 2$ , soluções positivas. Finalmente, destacamos que nossas idéias permitem, sem hipóteses de simetria, buscar soluções positivas de  $(S_{\lambda,q})$ . Dessa forma, estendemos todos os resultados de [7] para o caso quasilinear  $2 \leq p < N$  (veja Teoremas 3.9, 3.11 e 3.18).

### 1.3 Equação quasilinear crítica

No Capítulo 4 consideramos a seguinte equação crítica

$$(D_\mu) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \mu |u|^{q-2} u + |u|^{p^*-2} u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado e suave,  $1 < p < N$ ,  $p \leq q < p^*$  e  $\mu > 0$ .

O ponto de partida para o estudo do problema acima é o famoso trabalho de Brézis e Nirenberg [18] onde os autores estudaram o caso  $p = q = 2$  e mostraram que a existência de solução positiva para  $(D_\mu)$  está relacionada com a maneira como o parâmetro  $\mu$  interage com o primeiro autovalor  $\mu_1(\Omega)$  do operador  $-\Delta_p$  em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , definido por

$$\mu_1(\Omega) = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx : u \in W_0^{1,p}(\Omega), \int_{\Omega} |u|^p \, dx = 1 \right\}. \quad (1.3.1)$$

Mais especificamente eles mostraram que, se  $p = q = 2$ , então o problema  $(D_\mu)$  possui pelo menos uma solução positiva desde que  $N \geq 4$  e  $0 < \mu < \mu_1(\Omega)$  ou  $N = 3$  e  $\bar{\mu} < \mu < \mu_1(\Omega)$ , onde  $\bar{\mu}$  é um certo número positivo. Eles também provaram que a segunda condição acima é ótima, no sentido de que, se  $N = 3$  e  $\Omega$  é uma bola, então não existe solução positiva de  $(D_\mu)$  quando  $\mu \leq \bar{\mu}$ .

O que torna o problema  $(D_\mu)$  delicado é a falta de compacidade da imersão de Sobolev  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ . Essa falta de compacidade traz dificuldades na verificação da condição de Palais-Smale para o funcional associado  $E_\mu : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$E_\mu(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx - \frac{\mu}{q} \int_{\Omega} |u|^q \, dx - \frac{1}{p^*} \int_{\Omega} |u|^{p^*} \, dx.$$

De fato, se denotarmos por  $S$  a melhor constante de Sobolev da imersão acima citada, pode-se construir (veja [42, Teorema 3.5]), para cada  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , uma seqüência  $(u_n^k) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$  tal que  $E_\mu(u_n^k) \rightarrow \frac{k}{N} S^{N/p}$ ,  $\|E'_\mu(u_n^k)\|_{(W_0^{1,p}(\Omega))^*} \rightarrow 0$ , mas  $(u_n^k)$  não possui nenhuma subsequência convergente. Assim, a condição de Palais-Smale falha em todos os níveis da forma  $\frac{k}{N} S^{N/p}$ . Um dos pontos chaves do trabalho de Brézis e Nirenberg foi mostrar que, apesar dos problemas acima, o funcional  $E_\mu$  satisfaz a condição de Palais-Smale em todos os níveis menores que o primeiro nível crítico  $\frac{1}{N} S^{N/p}$ . Usando essa compacidade local e estimativas precisas dos níveis de min-max do funcional, eles foram capazes de obter soluções positivas do problema  $(D_\mu)$ .

Após o trabalho de Brezis e Nirenberg, muitos outros autores estudaram o problema  $(D_\mu)$ , de modo que seria impossível apresentar aqui uma lista completa dos resultados. Assim, citaremos

apenas os trabalhos que estão diretamente relacionados com os resultados que obtemos. Iniciamos destacando que em [38] Garcia Azorero e Peral Alonso estenderam parte dos resultados de [18] para o  $p$ -Laplaciano e mostraram que se  $p = q$ ,  $p^2 \leq N$  e  $\mu \in (0, \mu_1(\Omega))$ , então  $(D_\mu)$  possui uma solução positiva. Em [39], entre outros resultados, os mesmos autores provaram que se  $p^2 \leq N$ ,  $q \in (p, p^*)$  e  $\mu > 0$ , então  $(D_\mu)$  possui uma solução não trivial, não necessariamente positiva (veja também [42]).

No nosso caso, estamos interessados em obter soluções nodais para o problema  $(D_\mu)$ . O primeiro resultado nessa direção é devido à Cerami, Solimini e Struwe [24], que consideraram o caso  $p = q = 2$  e mostraram a existência de um par de soluções nodais, desde que  $N \geq 6$  e  $\mu \in (0, \mu_1(\Omega))$ . Resultados similares foram obtidos por Zhang [75] e Tarantello [71]. Afim de obter soluções nodais para o nosso problema, vamos proceder como antes e supor que o domínio  $\Omega$  satisfaz a condição de simetria  $(H)$ . Dessa forma, estudamos o problema com simetria

$$(D_\mu^\tau) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \mu |u|^{q-2} u + |u|^{p^*-2} u & \text{em } \Omega, \\ u(\tau x) = -u(x) & \text{para todo } x \in \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado e suave,  $p^2 \leq N$ ,  $p \leq q < p^*$  e  $\mu > 0$ .

O problema acima foi introduzido por Castro e Clapp [21] no caso em que  $p = q = 2$ . Eles obtiveram resultados de existência e multiplicidade de soluções nodais minimais. Nosso primeiro resultado está relacionado com a existência de soluções.

**Teorema 1.6.** *Suponha que  $(H)$  vale. Então, para todo  $\mu \in (0, \mu_1(\Omega))$ , o problema  $(D_\mu^\tau)$  tem pelo menos um par de soluções que trocam de sinal exatamente uma vez.*

O resultado acima estende o de [21, Teorema 1] em dois sentidos: primeiro porque consideramos o operador  $p$ -Laplaciano e segundo porque permitimos que a homogeneidade da perturbação  $\mu |u|^{q-2} u$  seja diferente de  $p$ . Ele também complementa os resultados obtidos em [24, 75, 71].

Em seguida, consideramos a questão de multiplicidade de soluções. Antes de apresentar nosso resultado, gostaríamos de destacar três artigos de multiplicidade de soluções positivas para  $(D_\mu)$  que foram importante no nosso estudo. Os dois primeiros são os trabalhos de Rey [62] e Lazzo [46], onde os autores consideraram o caso  $p = q = 2$  e obtiveram  $\text{cat}(\Omega)$  soluções positivas para  $\mu$  positivo e suficientemente pequeno. Tais resultados foram estendidos para o  $p$ -Laplaciano por Alves e Ding [2]. Nesse último trabalho os autores permitiram que o expoente  $q$  fosse qualquer número do intervalo  $[p, p^*)$ .

No que concerne à multiplicidade de soluções nodais citamos novamente [24], onde infinitas soluções nodais radiais foram obtidas quando  $\Omega$  é uma bola centrada na origem,  $p = q = 2$ ,  $N \geq 7$  e  $\mu \in (0, \mu_1(\Omega))$ . Para domínios com algum tipo de simetria Fortunato e Jannelli [36] mostraram a existência de soluções com energia arbitrariamente grande para  $p = q = 2$ ,  $N \geq 4$  e  $\mu > 0$ . Contudo, tais soluções trocam de sinal muitas vezes. Posteriormente, Castro e Clapp [21] relacionaram o número de soluções nodais minimais de  $(D_\mu^\tau)$  com a categoria equivariante de  $\Omega$ . No nosso trabalho estendemos esse último resultado para o operador  $p$ -Laplaciano e provamos o seguinte teorema.

**Teorema 1.7.** *Suponha que (H) vale. Então existe  $\mu_* \in (0, \mu_1(\Omega))$  tal que, para todo  $\mu \in (0, \mu_*)$ , o problema  $(D_\mu^\tau)$  tem pelo menos  $\tau\text{-cat}_\Omega(\Omega \setminus \Omega^\tau)$  pares de soluções que trocam de sinal exatamente uma vez.*

Destacamos que em todos os trabalhos sobre soluções nodais acima citados os autores consideraram  $p = q = 2$ . Usando algumas idéias contidas no trabalho de Alves e Ding [2] permitimos que o expoente  $q$  seja qualquer número do intervalo  $[p, p^*)$ . Dessa forma, os Teoremas 1.6 e 1.7 acima são novos mesmo no caso semilinear  $p = 2$ . Além disso, eles complementam o artigo [2], que trata apenas de soluções positivas. Como nas seções anteriores, somos também capazes de provar uma versão do Corolário 1.1 para o problema  $(D_\mu^\tau)$  (veja Corolário 4.10).

---

---

# CAPÍTULO 2

---

## Equação quasilinear subcrítica

Nesse capítulo estudamos o problema

$$(D_q^\tau) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u & \text{em } \Omega, \\ u(\tau x) = -u(x) & \text{para todo } x \in \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado e suave,  $1 < p < N$ ,  $p < q < p^*$  e o domínio  $\Omega$  satisfaz a seguinte condição de simetria

(H) existe  $\tau \in O(N)$  tal que  $\tau \neq \text{Id}$ ,  $\tau^2 = \text{Id}$  e  $\tau(\Omega) = \Omega$ .

Provamos os seguintes resultados:

**Teorema 1.1.** *Suponha que (H) vale. Então, para todo  $q \in (p, p^*)$ , o problema  $(D_q^\tau)$  tem pelo menos um par de soluções que trocam de sinal exatamente uma vez.*

**Teorema 1.2.** *Suponha que (H) vale. Então existe  $q_* \in (p, p^*)$  tal que, para todo  $q \in (q_*, p^*)$ , o problema  $(D_q^\tau)$  tem pelo menos  $\tau\text{-cat}_\Omega(\Omega \setminus \Omega^\tau)$  pares de soluções que trocam de sinal exatamente uma vez.*

**Corolário 1.1.** *Suponha que  $\Omega$  é simétrico com relação à origem e que  $0 \notin \Omega$ . Suponha ainda que existe uma aplicação contínua e ímpar  $\varphi : \mathbb{S}^{N-1} \rightarrow \Omega$ . Então existe  $q_* \in (p, p^*)$  tal que, para todo  $q \in (q_*, p^*)$ , o problema  $(D_q)$  tem pelo menos  $N$  pares de soluções nodais minimais ímpares.*

## 2.1 Notações e alguns resultados técnicos

Durante todo o transcorrer desse capítulo denotamos por  $\|\cdot\|_\Omega$  a norma

$$\|u\|_\Omega = \left\{ \int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) \, dx \right\}^{1/p}$$

definida no espaço de Sobolev  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Dado  $1 \leq s \leq \infty$ , indicamos por  $|u|_{s,\Omega}$  a  $L^s(\Omega)$ -norma de uma função  $u \in L^s(\Omega)$ .

Começamos observando que a involução  $\tau$  dada pela hipótese (H) induz uma ação em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , que denotamos ainda por  $\tau$ , da seguinte forma: para cada  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  definimos  $\tau u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  por

$$(\tau u)(x) = -u(\tau x). \quad (2.1.1)$$

Segue imediatamente da definição acima que  $\tau : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$  é linear e satisfaz  $\tau^2(u) = u$ , isto é,  $\tau$  é uma involução em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . O subespaço dos elementos fixados pela ação é indicado por  $W_0^{1,p}(\Omega)^\tau$ , isto é,

$$W_0^{1,p}(\Omega)^\tau = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \tau u = u\}.$$

Como estamos interessados em usar métodos variacionais, observamos inicialmente que a primeira equação em  $(D_q^\tau)$  é a equação de Euler-Lagrange do funcional  $E_{q,\Omega} : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$E_{q,\Omega}(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) \, dx - \frac{1}{q} \int_\Omega |u|^q \, dx.$$

As imersões de Sobolev mostram que o funcional acima está bem definido,  $E_{q,\Omega} \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$  e seus pontos críticos, a menos da condição de simetria, correspondem às soluções fracas de  $(D_q^\tau)$ . Com o intuito de obter tais pontos críticos vamos considerar a variedade de Nehari associada ao funcional  $E_{q,\Omega}$ , dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{q,\Omega} &= \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : \langle E'_{q,\Omega}(u), u \rangle = 0\} \\ &= \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : \|u\|_\Omega^p = |u|_{q,\Omega}^q\}. \end{aligned}$$

Observe agora que a condição de simetria em  $(D_q^\tau)$  é equivalente a dizer que a solução  $u$  está no espaço invariante  $W_0^{1,p}(\Omega)^\tau$ . Logo, é natural considerarmos a variedade de Nehari  $\tau$ -invariante

$$\mathcal{N}_{q,\Omega}^\tau = \{u \in \mathcal{N}_{q,\Omega} : \tau u = u\} = \mathcal{N}_{q,\Omega} \cap W_0^{1,p}(\Omega)^\tau.$$



Sempre que  $u \in \mathcal{N}_{q,\Omega}$  temos

$$E_{q,\Omega}(u) = \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|u\|_{\Omega}^p,$$

e portanto o funcional  $E_{q,\Omega}$  é limitado inferiormente em  $\mathcal{N}_{q,\Omega}$  (e também em  $\mathcal{N}_{q,\Omega}^{\tau}$ ). Assim, faz sentido considerar os seguintes problemas de minimização

$$m_{q,\Omega} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{q,\Omega}} E_{q,\Omega}(u) \quad \text{e} \quad m_{q,\Omega}^{\tau} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{q,\Omega}^{\tau}} E_{q,\Omega}(u). \quad (2.1.2)$$

Naturalmente  $m_{q,\Omega}^{\tau} \geq 0$ . Mais especificamente, vale o seguinte resultado.

**Lema 2.1.** *Suponha que  $p < q < p^*$ . Então existe  $r_{q,\Omega} > 0$  tal que*

$$\|u\|_{\Omega} \geq r_{q,\Omega},$$

para todo  $u \in \mathcal{N}_{q,\Omega}^{\tau}$ . Em particular  $m_{q,\Omega}^{\tau} > 0$ .

DEMONSTRAÇÃO. Como  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ , existe  $C > 0$  tal que, para todo  $u \in \mathcal{N}_{q,\Omega}$ ,

$$\|u\|_{\Omega}^p = |u|_{q,\Omega}^q \leq C \|u\|_{\Omega}^q,$$

e portanto  $1 \leq C \|u\|_{\Omega}^{q-p}$ . É suficiente então fazer  $r_{q,\Omega} = C^{1/(p-q)}$ . ■

Dado um domínio  $\tau$ -invariante  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$  definimos  $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$ ,  $E_{q,\mathcal{D}}$ ,  $\mathcal{N}_{q,\mathcal{D}}$ ,  $\mathcal{N}_{q,\mathcal{D}}^{\tau}$ ,  $m_{q,\mathcal{D}}$  e  $m_{q,\mathcal{D}}^{\tau}$  de maneira análoga, mas tomando as integrais sobre o conjunto  $\mathcal{D}$  ao invés de  $\Omega$ . Sempre que omitirmos a referência ao conjunto nas notações acima, estamos supondo que  $\mathcal{D} = \Omega$ . Considerando  $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < r\}$  e com o intuito de não carregar a notação, usaremos somente  $m_{q,r}$  e  $m_{q,r}^{\tau}$  para denotar  $m_{q,B_r(0)}$  e  $m_{q,B_r(0)}^{\tau}$ , respectivamente. Destacamos finalmente que, em todo o transcorrer desse trabalho e sempre que não causar confusão, vamos omitir a variável de integração. Dessa forma, escrevemos somente  $\int_{\mathcal{D}} u$  para indicar  $\int_{\mathcal{D}} u(x) dx$ .

É bem sabido que para utilizar teoria de pontos críticos exigimos sempre que o funcional com o qual estamos lidando satisfaça alguma condição de compacidade. Neste capítulo, e também nos outros que se seguem, vamos utilizar a bem conhecida condição de Palais-Smale. Lembramos então que se  $E$  é um espaço de Banach,  $M \subset E$  é uma  $C^{1,1}$ -variedade e  $c \in \mathbb{R}$ , dizemos que o funcional  $I \in C^1(M, \mathbb{R})$  satisfaz a condição de Palais-Smale no nível  $c$ , que denotamos simplesmente por  $(PS)_c$ , se toda seqüência  $(u_n) \subset E$  tal que  $I(u_n) \rightarrow c$  e  $I'(u_n) \rightarrow 0$  possui uma subseqüência convergente.

Para o nosso funcional  $E_q$  temos o seguinte resultado de compacidade.

**Lema 2.2.** *O funcional  $E_q$  restrito à  $\mathcal{N}_q^\tau$  satisfaz a condição de Palais-Smale em todos os níveis.*

DEMONSTRAÇÃO. Note inicialmente que, se  $\|E'_q(u)\|_*$  denota a norma da derivada do funcional  $E_q$  restrito à  $\mathcal{N}_q^\tau$ , então

$$\|E'_q(u)\|_* = \min_{\theta \in \mathbb{R}} \|E'_q(u) - \theta J'_q(u)\|_{(W_0^{1,p}(\Omega)^\tau)^*}$$

em que  $(W_0^{1,p}(\Omega)^\tau)^*$  é o espaço dual de  $W_0^{1,p}(\Omega)^\tau$  e  $J_q : W_0^{1,p}(\Omega)^\tau \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por

$$J_q(u) = \|u\|^p - |u|_q^q.$$

Seja então  $(u_n) \subset \mathcal{N}_q^\tau$  tal que  $E_q(u_n) \rightarrow c \in \mathbb{R}$  e  $\|E'_q(u_n)\|_* \rightarrow 0$ . Segue da observação acima que existe  $(\theta_n) \subset \mathbb{R}$  tal que

$$E'_q(u_n) - \theta_n J'_q(u_n) \rightarrow 0 \text{ em } (W_0^{1,p}(\Omega)^\tau)^*. \quad (2.1.3)$$

Observe que, como  $E_q(u_n) = (1/p - 1/q)\|u_n\|^p \rightarrow c$ , a seqüência  $(u_n)$  é limitada em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Lembrando que  $(u_n) \subset \mathcal{N}_q^\tau$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle J'_q(u_n), u_n \rangle &= p \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla u_n - |u_n|^{p-2} u_n u_n) - q \int_{\Omega} |u_n|^{q-2} u_n u_n \\ &= p\|u\|^p - q|u_n|_q^q = (p - q)\|u_n\|^p < 0, \end{aligned}$$

e portanto, da limitação de  $(u_n)$ , podemos supor que  $\langle J'_q(u_n), u_n \rangle \rightarrow l \leq 0$ . Se  $l = 0$  a expressão acima implicaria que  $\|u_n\| \rightarrow 0$ , contrariando o Lema 2.1. Logo  $l < 0$  e deduzimos de (2.1.3) que  $\theta_n \rightarrow 0$ , isto é,  $E'_q(u_n) \rightarrow 0$  em  $(W_0^{1,p}(\Omega)^\tau)^*$ . O resultado segue agora de um argumento padrão, visto que a imersão  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  é compacta. ■

### 2.1.1 Algumas propriedades de $m_q$ e $m_q^\tau$

Nessa subseção apresentamos algumas propriedades dos mínimos definidos em (2.1.2) que serão importantes no futuro. O primeiro resultado estabelece a relação entre esses mínimos.

**Lema 2.3.** *Para todo  $p < q < p^*$  temos que  $2m_q \leq m_q^\tau$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $u \in \mathcal{N}_q^\tau$ . Como  $\tau u = u$  e tendo em vista a definição (2.1.1), sabemos que se  $u$  é positiva em  $A \subset \Omega$ , então  $u$  tem que ser negativa em  $\tau(A)$ . Usando esse fato e a expressão (2.1.1) novamente, concluímos que

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^p + |u|^p) = 2 \int_{\Omega} (|\nabla u^\pm|^p + |u^\pm|^p)$$

e

$$\int_{\Omega} |u|^q = 2 \int_{\Omega} |u^{\pm}|^q,$$

em que  $u^{\pm} = \max\{\pm u, 0\}$ . Segue das igualdades acima que  $u^+, u^- \in \mathcal{N}_q$ . Assim

$$E_q(u) = E_q(u^+) + E_q(u^-) \geq 2m_q,$$

donde segue o resultado. ■

Dado um domínio limitado  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$ , denotamos por  $S$  a melhor constante da imersão  $W_0^{1,p}(\mathcal{D}) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathcal{D})$  dada por

$$S(\mathcal{D}) = S = \inf \left\{ \int_{\mathcal{D}} (|\nabla u|^p + |u|^p) : u \in W_0^{1,p}(\mathcal{D}), |u|_{p^*,\mathcal{D}} = 1 \right\}.$$

Lembramos que  $S$  não depende do conjunto  $\mathcal{D}$  e não é atingido a menos que  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^N$ . Vamos usar a estrutura da variedade de Nehari  $\mathcal{N}_q$  para estabelecer uma relação entre  $m_{p^*,\mathcal{D}}$  e  $S$ . Para tanto, seja

$$\Sigma_{\mathcal{D}} = \{u \in W_0^{1,p}(\mathcal{D}) : \|u\|_{\mathcal{D}} = 1\}$$

a esfera unitária de  $W_0^{1,p}(\mathcal{D})$  e considere  $u \in \Sigma_{\mathcal{D}}$ . Dado  $\alpha > 0$  e  $p < q \leq p^*$  temos

$$\|\alpha u\|_{\mathcal{D}}^p = \alpha^p \|u\|_{\mathcal{D}}^p = \alpha^p \quad \text{e} \quad |\alpha u|_{q,\mathcal{D}}^q = \alpha^q |u|_{q,\mathcal{D}}^q.$$

Igualando as expressões acima concluímos que a aplicação

$$\psi_{q,\mathcal{D}} : \Sigma_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{N}_{q,\mathcal{D}}, \quad \psi_{q,\mathcal{D}}(u) = |u|_{q,\mathcal{D}}^{q/(p-q)} u \tag{2.1.4}$$

define um homeomorfismo entre  $\Sigma_{\mathcal{D}}$  e  $\mathcal{N}_{q,\mathcal{D}}$ . Segue então que

$$\begin{aligned} Nm_{p^*,\mathcal{D}} &= \inf_{u \in \mathcal{N}_{p^*,\mathcal{D}}} \|u\|_{\mathcal{D}}^p \\ &= \inf_{u \in \Sigma_{\mathcal{D}}} \|\psi_{p^*,\mathcal{D}}(u)\|_{\mathcal{D}}^p = \inf_{u \in \Sigma_{\mathcal{D}}} \frac{\|u\|_{\mathcal{D}}^p}{|u|_{p^*,\mathcal{D}}^N} = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\mathcal{D}) \setminus \{0\}} \left( \frac{\|u\|_{\mathcal{D}}^p}{|u|_{p^*,\mathcal{D}}^p} \right)^{N/p} \\ &= \left( \inf_{u \in W_0^{1,p}(\mathcal{D}) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{\mathcal{D}}^p}{|u|_{p^*,\mathcal{D}}^p} \right)^{N/p} = S^{N/p}. \end{aligned}$$

Concluímos assim que, da mesma maneira que  $S$ , o ínfimo  $m_{p^*,\mathcal{D}}$  não depende do conjunto  $\mathcal{D}$ . Naturalmente, o mesmo não ocorre com  $m_{q,\mathcal{D}}$  se  $q \neq p^*$ . Contudo, tais ínfimos possuem uma independência assintótica, conforme estabelece o próximo lema.

**Lema 2.4 ([10, Lema 4.1]).** *Para todo domínio limitado  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$  temos*

$$\lim_{q \rightarrow p^*} m_{q,\mathcal{D}} = m_{p^*,\mathcal{D}} = \frac{1}{N} S^{N/p}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Afim de provar o lema vamos definir, para  $p < q \leq p^*$ , o seguinte problema de minimização

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{q,\mathcal{D}} &= \inf \left\{ \int_{\mathcal{D}} (|\nabla u|^p + |u|^p) : u \in W_0^{1,p}(\mathcal{D}), \int_{\mathcal{D}} |u|^q = 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{\int_{\mathcal{D}} (|\nabla u|^p + |u|^p)}{|u|_{q,\mathcal{D}}^p} : u \in W_0^{1,p}(\mathcal{D}) \setminus \{0\} \right\}. \end{aligned}$$

Denotando por  $\tilde{\mathcal{N}}_{q,\mathcal{D}} = \{u \in W_0^{1,p}(\mathcal{D}) : \int_{\mathcal{D}} |u|^q = 1\}$ , podemos proceder como acima e mostrar que

$$\Phi_{q,\mathcal{D}} : \tilde{\mathcal{N}}_{q,\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{N}_{q,\mathcal{D}}, \quad \Phi_{q,\mathcal{D}}(u) = \|u\|_{\mathcal{D}}^{p/(q-p)} u$$

define um difeomorfismo entre as variedades  $\tilde{\mathcal{N}}_{q,\mathcal{D}}$  e  $\mathcal{N}_{q,\mathcal{D}}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^{-1} m_{q,\mathcal{D}} &= \inf_{u \in \mathcal{N}_{q,\mathcal{D}}} \|u\|_{\mathcal{D}}^p = \inf_{u \in \tilde{\mathcal{N}}_{q,\mathcal{D}}} \|\Phi_{q,\mathcal{D}}(u)\|_{\mathcal{D}}^p \\ &= \inf_{u \in \tilde{\mathcal{N}}_{q,\mathcal{D}}} \|u\|_{\mathcal{D}}^p \|u\|_{\mathcal{D}}^{p^2/(q-p)} = \inf_{u \in \tilde{\mathcal{N}}_{q,\mathcal{D}}} \|u\|_{\mathcal{D}}^{pq/(q-p)} \\ &= \left( \inf_{u \in \tilde{\mathcal{N}}_{q,\mathcal{D}}} \|u\|_{\mathcal{D}}^p \right)^{q/(q-p)} = \tilde{m}_{q,\mathcal{D}}^{q/(q-p)}, \end{aligned}$$

donde segue que

$$m_{q,\mathcal{D}} = \left(\frac{q-p}{pq}\right) \tilde{m}_{q,\mathcal{D}}^{q/(q-p)}. \quad (2.1.5)$$

Tendo em vista a relação acima, é suficiente mostrarmos que  $\tilde{m}_{q,\mathcal{D}} \rightarrow S$  quando  $q \rightarrow p^*$ . Para tanto note que, se  $p \leq s < t \leq p^*$  e  $u \in W_0^{1,p}(\mathcal{D})$ , então

$$|u|_{s,\mathcal{D}} \leq \mathcal{L}(\mathcal{D})^{(t-s)/st} |u|_{t,\mathcal{D}},$$

donde se conclui que

$$\frac{\int_{\mathcal{D}} (|\nabla u|^p + |u|^p)}{|u|_{s,\mathcal{D}}^p} \geq \mathcal{L}(\mathcal{D})^{-p(t-s)/st} \left( \frac{\int_{\mathcal{D}} (|\nabla u|^p + |u|^p)}{|u|_{t,\mathcal{D}}^p} \right).$$

Aplicando a desigualdade acima com  $(s, t) = (q, p^*)$  e  $(s, t) = (p, q)$ , respectivamente, obtemos

$$\mathcal{L}(\mathcal{D})^{-p(p^*-q)/qp^*} S \leq \tilde{m}_{q,\mathcal{D}} \leq \mathcal{L}(\mathcal{D})^{(q-p)/q} \tilde{m}_{p,\mathcal{D}}.$$

Seja agora  $a = \liminf_{q \rightarrow p^*} \tilde{m}_{q,\mathcal{D}}$  e  $A = \limsup_{q \rightarrow p^*} \tilde{m}_{q,\mathcal{D}}$ . Da expressão acima segue que  $a$  e  $A$  são finitos e  $a \geq S$ . Precisamos mostrar que

$$a = S = A.$$

Suponha, por contradição, que  $a > S$ . Nesse caso, tomando  $\varepsilon \in (0, a - S)$ , podemos usar a definição de  $S$  para encontrar  $u_0 \in W_0^{1,p}(\mathcal{D})$  tal que

$$\frac{\int_{\mathcal{D}} (|\nabla u_0|^p + |u_0|^p)}{|u_0|_{p^*,\mathcal{D}}^p} < S + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, pela continuidade da aplicação  $q \mapsto |u_0|_{q,\mathcal{D}}$ , existe  $q_0 \in (p, p^*)$  tal que

$$\left| \frac{\int_{\mathcal{D}} (|\nabla u_0|^p + |u_0|^p)}{|u_0|_{q,\mathcal{D}}^p} - \frac{\int_{\mathcal{D}} (|\nabla u_0|^p + |u_0|^p)}{|u_0|_{p^*,\mathcal{D}}^p} \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

sempre que  $q \in (q_0, p^*)$ . As duas últimas desigualdades implicam que, para todo  $q \in (q_0, p^*)$

$$\tilde{m}_{q,\mathcal{D}} \leq \frac{\int_{\mathcal{D}} (|\nabla u_0|^p + |u_0|^p)}{|u_0|_{q,\mathcal{D}}^p} < \frac{\int_{\mathcal{D}} (|\nabla u_0|^p + |u_0|^p)}{|u_0|_{p^*,\mathcal{D}}^p} + \frac{\varepsilon}{2} < S + \frac{\varepsilon}{2} < a,$$

contradizendo a definição de  $a$ . De maneira análoga se prova que  $A = S$ , o que conclui a demonstração do lema. ■

### 2.1.2 A função baricentro

Para  $r > 0$  definimos o conjunto

$$\Omega_r^+ = \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, \Omega) < r\} \quad (2.1.6)$$

e a função baricentro  $\beta_q : W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^N$  fazendo

$$\beta_q(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q x \, dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \, dx}.$$

Conforme veremos, o lema abaixo é ponto chave para a demonstração do Teorema 1.2. O objetivo dessa subseção é apresentar uma prova para o mesmo.

**Lema 2.5.** *Dado  $r > 0$  existe  $q_0 = q_0(r) \in (p, p^*)$  tal que, para todo  $q \in (q_0, p^*)$ , temos que  $\beta_q(u) \in \Omega_r^+$ , sempre que  $u \in \mathcal{N}_q$  e  $E_q(u) \leq m_{q,r}$ .*

Antes de prosseguir vamos fazer alguns comentários sobre esse resultado. Em [10], Benci-Cerami consideraram o problema  $(D_q)$ , no caso semilinear  $p = 2$ , fazendo o estudo do seguinte problema de minimização:

$$\tilde{m}_q = \inf_{u \in \tilde{\mathcal{N}}_q} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2)$$

em que  $\tilde{\mathcal{N}}_q$  é a variedade  $\tilde{\mathcal{N}}_{q,\Omega}$  definida na prova do Lema 2.4. Como consequência do teorema de compacidade global de Struwe [68, Proposição 2.1], existe um  $\varepsilon \in (0, 1)$  tal que

$$\tilde{\beta}_q \left( \frac{u}{|u|_{2^*}} \right) \in \Omega_r^+, \quad \text{sempre que } \frac{\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2)}{|u|_{2^*}^2} \leq S + \varepsilon,$$

onde

$$\tilde{\beta}_q(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 x \, dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx}.$$

Utilizando a informação acima, Benci e Cerami obtiveram  $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_0(r)$  tal que

$$\tilde{\beta}_q(u) \in \Omega_r^+, \quad \text{sempre que } u \in \tilde{\mathcal{N}}_q \text{ e } \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) \leq \tilde{m}_{q,r},$$

para todo  $q \in (\tilde{q}_0, 2^*)$ .

De acordo com (2.1.5), para todo  $2 < q \leq 2^*$  temos que

$$m_q = \frac{q-2}{2q} \tilde{m}_q^{q/(q-2)}.$$

Em [7, Lema 3.2], Bartsch e Wang enunciaram o Lema 2.5 (para o caso  $p = 2$ ), afirmando que a demonstração segue da relação acima e do resultado de Benci e Cerami. Ao que nos aparece, a afirmação de Bartsch e Wang não é totalmente correta, visto que ela seria suficiente para provar uma versão do Lema 2.5 com a função baricentro do tipo  $\tilde{\beta}_q$ , e não  $\beta_q$ . De fato, conforme ficará claro no futuro, para o resultado de multiplicidade em domínios limitados a escolha da função baricentro como sendo  $\beta_q$  ou  $\tilde{\beta}_q$  é irrelevante, pois a argumentação final funciona com ambas as funções. Contudo, para o problema no  $\mathbb{R}^N$  (que será tratado no capítulo seguinte) é fundamental trabalharmos com a função  $\beta_q$ , que envolve somente a norma  $L^q$ .

As observações acima nos motivaram a apresentar uma nova demonstração do Lema 2.5. O argumento utilizado é um pouco diferente daquele contido em Benci e Cerami e também não usa reescalamentos, como sugerem Bartsch e Wang. Os lemas de concentração de compacidade são a ferramenta fundamental a ser utilizada.

Desde os trabalhos de P.L.Lions em [47, 48], o método de concentração de compacidade tem sido largamente utilizados por vários autores para compensar problemas de falta de compacidade. Os dois trabalhos acima citados podem ser grosseiramente divididos em dois tipos de resultado: perda de compacidade devido ao “comportamento no infinito” ou devido à “fenômenos de

concentração”. Posteriormente, alguns autores buscaram resultados que tratassem as duas possibilidades em um único enunciado. Podemos citar Bianchi, Chabrowski e Szulkin [15] e Ben-Naoum, Troestle e Willem [9] como primeiros autores a implementar tal projeto.

Afim de provar o Lema 2.5 vamos precisar de um resultado auxiliar que caminha na direção acima. Ele foi provado no caso particular  $p = 2$ ,  $q_n \equiv 2^*$  por Willem [73, Lema 1.40]. A versão que apresentamos aqui, bem como sua demonstração, foi inspirada nesse último trabalho e também pelo de Smets [67, Lema 2.1 e Observação 2.2], onde o autor considera o caso  $1 < p < N$ ,  $q_n \equiv p^*$  e permite o aparecimento de um potencial  $V$  que pode ser singular. Antes de apresentar o resultado, vamos introduzir algumas notações. Denotamos por  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$  o espaço de Banach das medidas de Radon finitas sobre  $\mathbb{R}^N$  equipado com a norma

$$|\omega| = \sup_{\phi \in C_0(\mathbb{R}^N), |\phi|_\infty \leq 1} |\omega(\phi)|.$$

Dizemos que uma seqüência  $(\omega_n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$  converge fracamente para  $\omega$  em  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$  se  $\omega_n(\phi) \rightarrow \omega(\phi)$  para toda  $\phi \in C_0(\mathbb{R}^N)$ . Pelo Teorema de Banach-Alaoglu toda seqüência limitada  $(\omega_n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$  possui uma subseqüência fracamente convergente.

**Lema 2.6.** *Seja  $(q_n) \subset [p, p^*]$  uma seqüência não-decrescente tal que  $q_n \rightarrow p^*$ . Seja  $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  satisfazendo*

$$\begin{aligned} u_n \rightharpoonup u & \quad \text{fracamente em } D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \\ |\nabla(u_n - u)|^p \rightharpoonup \omega & \quad \text{fracamente em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \\ |u_n - u|^{q_n} \rightharpoonup \nu & \quad \text{fracamente em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \\ u_n(x) \rightarrow u(x) & \quad \text{q.t.p. } x \in \mathbb{R}^N, \\ \nabla u_n(x) \rightarrow \nabla u(x) & \quad \text{q.t.p. } x \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

e defina

$$\omega_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > R} |\nabla u_n|^p, \quad \nu_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > R} |u_n|^{q_n}.$$

Então

$$|\nu|^{p/p^*} \leq S^{-1}|\omega|, \tag{2.1.8}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\nabla u_n|_{p, \mathbb{R}^N}^p = |\nabla u|_{p, \mathbb{R}^N}^p + |\omega| + \omega_\infty, \tag{2.1.9}$$

e

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |u_n|_{q_n, \mathbb{R}^N}^{q_n} = |u|_{p^*, \mathbb{R}^N}^{p^*} + |\nu| + \nu_\infty. \tag{2.1.10}$$

Além do mais, se  $u = 0$  e  $|\nu|^{p/p^*} = S^{-1}|\omega|$ , então cada uma das medidas  $\omega$  e  $\nu$  se concentra em um único ponto.

DEMONSTRAÇÃO. Suponha inicialmente que  $u = 0$ . Dada  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ , denote por  $K$  o suporte da função  $\phi$ . Usando as desigualdades de Hölder e a definição de  $S$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\phi u_n|^{q_n} dx \right)^{p/q_n} &\leq \left\{ \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\phi u_n|^{p^*} dx \right)^{q_n/p^*} \mathcal{L}(K)^{(p^*-q_n)/p^*} \right\}^{p/q_n} \\ &= \mathcal{L}(K)^{\frac{p(p^*-q_n)}{p^*q_n}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\phi u_n|^{p^*} dx \right)^{p/p^*} \\ &\leq S^{-1} \mathcal{L}(K)^{\frac{p(p^*-q_n)}{p^*q_n}} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(\phi u_n)|^p + |\phi u_n|^p) dx. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

AFIRMAÇÃO 1: a seqüência  $|\phi|^{q_n}$  converge para  $|\phi|^{p^*}$  em  $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ .

De fato, dado  $\varepsilon > 0$  considere, para  $n \in \mathbb{N}$ , o conjunto

$$K_n = \{x \in K : ||\phi(x)|^{q_n} - |\phi(x)|^{p^*}| \geq \varepsilon\}.$$

Cada  $K_n$  é fechado e portanto compacto. Além disso, como  $(q_n)$  é não-decrescente,

$$K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$$

Mas  $\bigcap K_n = \emptyset$ , pois  $x \in K_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  implicaria  $||\phi(x)|^{q_n} - |\phi(x)|^{p^*}| \geq \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , o que não pode ocorrer. Como cada  $K_n$  é compacto e  $\bigcap K_n = \emptyset$ , concluímos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $K_n = \emptyset$  para todo  $n \geq n_0$ . Logo  $||\phi|^{q_n} - |\phi|^{p^*}||_\infty < \varepsilon$  sempre que  $n \geq n_0$ , o que prova a afirmação.

Usando a afirmação 1 acima e a convergência fraca de  $|u_n|^{q_n}$  em  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$  concluímos que  $\int_{\mathbb{R}^N} |\phi u_n|^{q_n} dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{p^*} d\nu$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim, passando (2.1.11) ao limite, usando o fato de  $u_n \rightarrow 0$  em  $L_{loc}^p(\mathbb{R}^N)$  e (2.1.7), obtemos

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{p^*} d\nu \right)^{p/p^*} \leq S^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^p d\omega,$$

qualquer que seja  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Isso prova (2.1.8).

Vamos mostrar agora que, se  $|\nu|^{p/p^*} = S^{-1}|\omega|$ , então as medidas  $\nu$  e  $\omega$  são medidas concentradas. Para tanto, note que a desigualdade acima e Hölder implicam que

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{p^*} d\nu \right)^{p/p^*} \leq S^{-1} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{p^*} dx \right)^{p/p^*} |\omega|^{(p^*-p)/p^*},$$



ou ainda,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{p^*} d\nu \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{p^*} (S^{-p^*/p} |\omega|^{(p^*-p)/p}) d\omega. \quad (2.1.12)$$

Afirmamos agora que

$$\nu = S^{-p^*/p} |\omega|^{(p^*-p)/p} \omega. \quad (2.1.13)$$

De fato, supondo que não vale a igualdade acima e usando (2.1.12), obtemos um aberto  $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$  tal que

$$\nu(\Gamma) < S^{-p^*/p} |\omega|^{(p^*-p)/p} \omega(\Gamma).$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\nu| &= \int_{\Gamma} d\nu + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Gamma} d\nu \\ &< \int_{\Gamma} S^{-p^*/p} |\omega|^{(p^*-p)/p} d\omega + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Gamma} S^{-p^*/p} |\omega|^{(p^*-p)/p} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} S^{-p^*/p} |\omega|^{(p^*-p)/p} d\omega \\ &= S^{-p^*/p} |\omega|^{p^*/p}, \end{aligned}$$

donde se conclui que  $|\nu|^{p/p^*} < S^{-1} |\omega|$ , contrariando a nossa hipótese. Logo, vale a igualdade (2.1.13) e podemos escrever

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{p^*} d\nu \right)^{p/p^*} \leq S^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^p d\omega = S^{(p^*-p)/p} |\omega|^{(p-p^*)/p} \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^p d\nu.$$

Lembrando que  $|\nu|^{p/p^*} = S^{-1} |\omega|$ , podemos reescrever a desigualdade acima como

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{p^*} d\nu \right)^{p/p^*} |\nu|^{(p^*-p)/p^*} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^p d\nu,$$

qualquer que seja  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Assim, para todo conjunto  $\nu$ -mensurável  $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ , temos

$$\nu(\Gamma)^{p/p^*} \nu(\mathbb{R}^N)^{(p^*-p)/p^*} \leq \nu(\Gamma),$$

donde se conclui que

$$\nu(\Gamma) = 0 \quad \text{ou} \quad \nu(\Gamma)^{1-p/p^*} \geq \nu(\mathbb{R}^N)^{(p^*-p)/p^*}.$$

Note que a segunda possibilidade implica  $\nu(\Gamma) = \nu(\mathbb{R}^N)$ . Portanto, a  $\nu$ -medida de um conjunto  $\nu$ -mensurável arbitrário  $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$  é nula ou total, donde segue que  $\nu$  está concentrada em um único ponto. O mesmo vale para  $\omega$  em virtude de (2.1.13).

Considerando agora o caso geral, definimos  $v_n = u_n - u$ . Como  $\nabla u_n(x) \rightarrow \nabla u(x)$  q.t.p.  $x \in \mathbb{R}^N$ , podemos usar o lema de Brezis-Lieb's [17] para concluir que

$$|\nabla u_n|^p \rightharpoonup \omega + |\nabla u|^p \text{ fracamente em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N). \quad (2.1.14)$$

AFIRMAÇÃO 2: vale a seguinte especialização do lema de Brezis-Lieb

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \phi (|u_n|^{q_n} - |u_n - u|^{q_n}) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi |u|^{p^*} \, dx.$$

Usando a afirmação 2 obtemos

$$|u_n|^{q_n} \rightharpoonup \nu + |u|^{p^*} \text{ fracamente em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N). \quad (2.1.15)$$

A desigualdade (2.1.8) segue da expressão acima, (2.1.14) e da desigualdade correspondente para  $(v_n)$ .

Para provar a afirmação 2 usaremos algumas idéias contidas em [68, Teorema I.4.2] e [41, Lema 1.4]. Começamos observando que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \phi (|u_n|^{q_n} - |u_n - u|^{q_n}) \, dx &= - \int_K \int_0^1 \phi \frac{d}{d\vartheta} |u_n - \vartheta u|^{q_n} \, d\vartheta \, dx \\ &= \int_0^1 \int_K q_n \phi u (u_n - \vartheta u) |u_n - \vartheta u|^{q_n-2} \, dx \, d\vartheta. \end{aligned}$$

Para  $\vartheta \in [0, 1]$  fixo, definimos  $f_n(x, \vartheta) = q_n \phi u (u_n - \vartheta u) |u_n - \vartheta u|^{q_n-2}$ . Como  $u_n(x) \rightarrow u(x)$  q.t.p.  $x \in \mathbb{R}^N$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, \vartheta) = p^* \phi(x) u(x) (u(x) - \vartheta u(x)) |u(x) - \vartheta u(x)|^{p^*-2} = f(x, \vartheta).$$

Dado um conjunto mensurável  $E \subset K$  a desigualdade de Hölder e a limitação de  $(u_n)$  em  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  nos fornecem

$$\begin{aligned} \int_E f_n(x, \vartheta) \, dx &\leq C_1 \int_E |u_n - \vartheta u|^{q_n-1} |u| \, dx \\ &\leq C_2 \int_E (|u|^{q_n} + |u_n|^{q_n-1} |u|) \, dx \\ &\leq C_2 \left\{ \int_E |u|^{q_n} \, dx + \left( \int_E |u|^{q_n} \, dx \right)^{1/q_n} \left( \int_E |u_n|^{q_n} \, dx \right)^{(q_n-1)/q_n} \right\} \\ &\leq C_3 \left\{ \int_E |u|^{q_n} \, dx + \left( \int_E |u|^{q_n} \, dx \right)^{1/q_n} \right\}. \end{aligned}$$

Denotando  $E^+ = \{x \in E : |u(x)| \geq 1\}$  e  $E^- = E \setminus E^+$ , segue da expressão acima que

$$\int_E f_n(x, \vartheta) \, dx \leq C_3 \left\{ \int_{E^+} |u|^{p^*} \, dx + \left( \int_{E^+} |u|^{p^*} \, dx \right)^{1/q_n} + \mathcal{L}(E^-) + \mathcal{L}(E^-)^{1/q_n} \right\}. \quad (2.1.16)$$

Seja  $0 < \varepsilon < 1$  dado. Como  $|u|^{p^*} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ , existe  $0 < \delta < \varepsilon$  tal que  $\int_E |u|^{p^*} \, dx < \varepsilon$ , se  $\mathcal{L}(E) < \delta$ . Portanto, podemos usar (2.1.16) e obter

$$\int_E f_n(x, \vartheta) \, dx < 2C_3(\varepsilon + \varepsilon^{1/p^*}),$$

para todo conjunto mensurável  $E \subset K$  tal que  $\mathcal{L}(E) < \delta$ . Isso mostra que a seqüência  $(f_n(\cdot, \vartheta))$  é uniformemente integrável em  $K$  e portanto, pelo Teorema de Vitali [5, Teorema 7.12], temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K f_n(x, \vartheta) \, dx = \int_K f(x, \vartheta) \, dx, \quad \forall \vartheta \in [0, 1].$$

Para concluir defina  $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  por  $g_n(\vartheta) = \int_K f_n(x, \vartheta) \, dx$ . Temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\vartheta) = \int_K f(x, \vartheta) \, dx = g(\vartheta), \quad \forall \vartheta \in [0, 1].$$

Além do mais, fazendo  $E = K$  em (2.1.16), obtemos  $C_4 > 0$  tal que

$$|g_n(\vartheta)| \leq C_4, \quad \forall \vartheta \in [0, 1].$$

Assim, pelo Teorema de Lebesgue, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(\vartheta) \, d\vartheta = \int_0^1 g(\vartheta) \, d\vartheta.$$

Note finalmente que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|u_n|^{q_n} - |u_n - u|^{q_n}) \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_K f_n(x, \theta) \, dx \, d\theta \\ &= \int_0^1 \int_K p^* \phi u (u - \vartheta u) |u - \vartheta u|^{p^*-2} \, dx \, d\vartheta \\ &= - \int_K \int_0^1 \phi \frac{d}{d\vartheta} |u - \vartheta u|^{p^*} \, d\vartheta \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi |u|^{p^*} \, dx, \end{aligned}$$

conforme afirmado.

Para verificar as igualdades (2.1.9) e (2.1.10), procedemos como em [73, Lema 1.40] e consideramos, para  $R > 1$ ,  $\psi_R \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  uma função tal que  $\psi_R \equiv 0$  em  $B_R(0)$ ,  $\psi_R \equiv 1$  em

$\mathbb{R}^N \setminus B_{R+1}(0)$  e  $0 \leq \psi(x) \leq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}^N$ . Usando (2.1.15) obtemos

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (\psi_R |\nabla u_n|^p + (1 - \psi_R) |\nabla u_n|^p) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \psi_R) d\omega + \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \psi_R) |\nabla u|^p dx \\ &\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_R |\nabla u_n|^p dx. \end{aligned}$$

Passando a expressão acima ao limite quando  $R \rightarrow \infty$  e usando o Teorema de Lebesgue obtemos (2.1.9). A prova de (2.1.10) é similar. ■

Finalizamos a seção com a demonstração do Lema 2.5.

**DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 2.5:** Suponha, por contradição, que o lema é falso. Então existe  $q_n \uparrow p^*$ ,  $(u_n) \in \mathcal{N}_{q_n}$  com  $E_{q_n}(u_n) \leq m_{q_n, r}$  e  $\beta_{q_n}(u_n) \notin \Omega_r^+$ . Assim,

$$m_{q_n} \leq E_{q_n}(u_n) = \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{q_n} \right) \|u_n\|^p \leq m_{q_n, r}.$$

Passando ao limite, usando a definição de  $\mathcal{N}_{q_n}$  e o Lema 2.4, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|_{q_n}^{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^p = S^{N/p}. \quad (2.1.17)$$

Por Hölder

$$\int_{\Omega} |u_n|^{q_n} dx \leq \mathcal{L}(\Omega)^{(p^* - q_n)/p^*} \left( \int_{\Omega} |u_n|^{p^*} dx \right)^{q_n/p^*}.$$

A expressão acima e (2.1.17) implicam que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |u_n|_{p^*}^{p^*} \geq S^{N/p}.$$

Por outro lado, lembrando que  $|u_n|_{p^*}^p \leq S^{-1} \|u_n\|^p$ , temos  $|u_n|_{p^*}^{p^*} \leq S^{-N/(N-p)} (\|u_n\|^p)^{N/(N-p)}$ , donde segue que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |u_n|_{p^*}^{p^*} \leq S^{-\frac{N}{N-p} + \frac{N}{p} \frac{N}{N-p}} = S^{\frac{N}{N-p} (\frac{N}{p} - 1)} = S^{N/p}$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|_{p^*}^{p^*} = S^{N/p}. \quad (2.1.18)$$

Como  $(u_n)$  é limitada podemos supor que existe  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  tal que  $u_n \rightharpoonup u$  fracamente em  $W_0^{1,p}(\Omega)$  e fortemente em  $L^p(\Omega)$ . Definindo  $v_n := u_n / |u_n|_{p^*}$  temos que  $|v_n|_{p^*} = 1$ . Além disso, (2.1.17) e (2.1.18) implicam que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n\|^p}{|u_n|_{p^*}^p} = \frac{S^{N/p}}{S^{(N-p)/p}} = S.$$

Assim, a seqüência  $(v_n)$  é uma seqüência minimizante de  $S$ . O Lema A.11 nos garante então que, a menos de uma subseqüência,  $\nabla v_n(x) \rightarrow \nabla v(x)$  q.t.p.  $x \in \Omega$ . Segue então da definição de  $v_n$  que

$$\nabla u_n(x) \rightarrow \nabla u(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

As considerações acima mostram que  $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$  satisfaz (2.1.7). Assim, o Lema 2.6, as equações (2.1.17) e (2.1.18), e a convergência forte em  $L^p(\Omega)$  nos permitem concluir que

$$S^{N/p} = \|u\|^p + |\omega|, \quad S^{N/p} = |u|_{p^*}^{p^*} + |\nu|$$

e

$$|\nu|^{p/p^*} \leq S^{-1}|\omega|, \quad |u|_{p^*}^p \leq S^{-1}\|u\|^p.$$

Note que, como  $\Omega$  é limitado, os termos  $\omega_\infty$  and  $\nu_\infty$  não aparecem nas expressões acima.

As expressões acima implicam que  $u = 0$  ou  $|u|_{p^*}^{p^*} = S^{N/p}$ . De fato, supondo que isso não ocorre, podemos usar a desigualdade  $(a+b)^t < a^t + b^t$  para  $a, b > 0$  e  $0 < t < 1$ , obtendo assim

$$\begin{aligned} S^{(N-p)/p} &= S^{-1}(\|u\|^p + |\omega|) \geq \left(|u|_{p^*}^{p^*}\right)^{p/p^*} + |\nu|^{p/p^*} \\ &> \left(|u|_{p^*}^{p^*} + |\nu|\right)^{p/p^*} = S^{(N-p)/p}, \end{aligned}$$

o que é absurdo.

Como a norma é fracamente semicontínua inferiormente, temos que

$$\|u\|^p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^p = S^{N/p}.$$

Assim, se  $|u|_{p^*}^{p^*} = S^{N/p}$ , concluiríamos que

$$\frac{\|u\|^p}{|u|_{p^*}^p} \leq \frac{S^{N/p}}{S^{(N-p)/p}} = S,$$

e a constante de imersão  $S$  seria atingida por uma função  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Mas isso não pode ocorrer, visto que  $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ . Dessa forma,

$$u = 0, \quad |\nu|^{p/p^*} = S^{-1}S^{N/p} = S^{-1}|\omega| \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} |u_n|^{q_n} dx \rightarrow |\nu|.$$

Usando o Lema 2.6 novamente, concluímos que a medida  $\nu$  está concentrada em um ponto  $y \in \overline{\Omega}$ .

Logo,

$$\beta_{q_n}(u_n) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q_n} x dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q_n} dx} \rightarrow |\nu|^{-1} \int_{\Omega} x d\nu = y \in \overline{\Omega},$$

o que contradiz  $\beta_{q_n}(u_n) \notin \Omega_r^+$ . Essa contradição conclui a demonstração do lema. ■

## 2.2 Soluções nodais minimais

Iniciamos essa seção com um resultado que mostra que, para obtermos pontos críticos invariantes de  $E_q$ , é suficiente obtermos pontos críticos da restrição de  $E_q$  à variedade de  $\mathcal{N}_q^\tau$ .

**Lema 2.7.** *Se  $u \in \mathcal{N}_q^\tau$  é um ponto crítico de  $E_q$  restrito à  $\mathcal{N}_q^\tau$ , então  $u$  é um ponto crítico de  $E_q$  em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Como  $u$  é um ponto crítico de  $E_q$  restrito à  $\mathcal{N}_q^\tau$ , existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que

$$\langle E'_q(u) - \theta J'_q(u), \phi \rangle = 0, \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega)^\tau,$$

onde  $J_q$  foi definido na prova do Lema 2.2. Em particular, para  $\phi = u \in \mathcal{N}_q^\tau$ , temos

$$0 = \langle E'_q(u), u \rangle - \theta \langle J'_q(u), u \rangle = -\theta \langle J'_q(u), u \rangle = \theta(q-p)\|u\|^p.$$

Isso implica que  $\theta = 0$  e portanto

$$\langle E'_q(u), \phi \rangle = 0, \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega)^\tau.$$

Segue então do princípio de criticalidade simétrica (veja Teorema A.6) que a igualdade acima se verifica para toda  $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , isto é,  $E'_q(u) = 0$  em  $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$ . O lema está provado. ■

Observamos agora que, se  $u$  é uma solução de  $(D_q)$ , então  $u \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . Dizemos que  $u$  troca de sinal  $n$  vezes se o conjunto  $\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$  tem  $n+1$  componentes conexas. Tendo em vista a ação de  $\tau$  em  $W_0^{1,p}(\Omega)$  vemos que, se  $u$  é uma solução não-trivial do problema  $(D_q^\tau)$ , então ela troca de sinal um número ímpar de vezes. A relação entre o número de trocas de sinais e a energia de uma solução é dada pelo resultado abaixo, que foi inspirado em [21, Proposição 6].

**Lema 2.8.** *Se  $u$  é uma solução do problema  $(D_q^\tau)$  que troca de sinal  $2k-1$  vezes, então  $E_q(u) \geq km_q^\tau$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Como  $u$  troca de sinal  $2k-1$  vezes o conjunto  $\{x \in \Omega : u(x) > 0\}$  possui  $k$  componentes conexas  $A_1, \dots, A_k$ . Para  $i = 1, \dots, k$ , seja

$$u_i(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in A_i \cup \tau A_i, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Claramente temos que  $u_i \in W_0^{1,p}(\Omega)^\tau$ . Além disso, como  $u$  é um ponto crítico de  $E_q$ ,

$$0 = \langle E'_q(u), u_i \rangle = \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla u_i + |u|^{p-2} u u_i - |u|^{q-2} u u_i) = \|u_i\|^p - |u_i|_q^q.$$

Portanto  $u_i \in \mathcal{N}_q^\tau$  para todo  $i = 1, \dots, k$ , e

$$E_q(u) = E_q(u_1) + \dots + E_q(u_k) \geq k m_q^\tau,$$

conforme afirmado. ■

### 2.2.1 Demonstração do Teorema 1.1

Nesta subseção apresentamos a prova do Teorema 1.1. A idéia é tomar uma seqüência minimizante para  $m_q^\tau$  e obter uma subseqüência convergindo para um ponto de mínimo de  $E_q$  em  $\mathcal{N}_q^\tau$ . Por regularidade, tal ponto de mínimo deve ser um ponto crítico e portanto uma solução do problema.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.1. Seja  $(u_n) \subset \mathcal{N}_q^\tau$  uma seqüência tal que  $E_q(u_n) \rightarrow m_q^\tau$ . Pelo princípio variacional de Ekeland (veja observação após o Teorema A.2) podemos supor que  $\|E'_q(u_n)\|_* \rightarrow 0$ . Pelo Lema 2.2, o funcional  $E_q$  restrito à  $\mathcal{N}_q^\tau$  satisfaz a condição de Palais-Smale no nível  $m_q^\tau$ . Dessa forma podemos supor que, a menos de uma subseqüência,  $u_n \rightarrow u \in \mathcal{N}_q^\tau$ . Por regularidade  $E_q(u) = m_q^\tau$  e  $u$  é um ponto crítico do funcional  $E_q$  restrito à  $\mathcal{N}_q^\tau$ . Segue então dos Lemas 2.7 e 2.8 que a função  $u$  (e também  $-u$ ) é uma solução do problema  $(D_q^\tau)$  que troca de sinal exatamente uma vez. ■

### 2.2.2 Demonstração do Teorema 1.2

Dado  $r > 0$ , seja  $\Omega_r^-$  definido por

$$\Omega_r^- = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega \cup \Omega^\tau) \geq r\}.$$

Considerando  $\Omega_r^+$  definido em (2.1.6) vamos usar a regularidade de  $\Omega$  e supor, durante toda essa seção, que  $r > 0$  está fixado e é suficientemente pequeno de forma que as inclusões  $\Omega_r^- \hookrightarrow \Omega \setminus \Omega^\tau$  e  $\Omega \hookrightarrow \Omega_r^+$  são equivalências equivariantes de homotopia. Sem perda de generalidade podemos também supor que  $B_r(0) \subset \Omega$ .

Dado um número  $c \in \mathbb{R}$ , definimos o conjunto de nível do funcional  $E_q$  como sendo

$$E_q^c = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : E_q(u) \leq c\}.$$

O resultado abaixo é peça chave na demonstração do Teorema 1.2.

**Lema 2.9.** *Seja  $q_0 = q_0(r)$  dado pelo Lema 2.5. Então, para todo  $q \in (q_0, p^*)$ , existem duas aplicações*

$$\Omega_r^- \xrightarrow{\alpha_q} \mathcal{N}_q^\tau \cap E_q^{2m_{q,r}} \xrightarrow{\gamma_q} \Omega_r^+$$

*tais que  $\alpha_q(\tau x) = -\alpha_q(x)$ ,  $\gamma_q(-u) = \tau\gamma_q(u)$ , e  $\gamma_q \circ \alpha_q$  é equivariantemente homotópico à inclusão  $\Omega_r^- \hookrightarrow \Omega_r^+$ . Em particular,*

$$\mathbb{Z}_2\text{-cat}(\mathcal{N}_q^\tau \cap E_q^{2m_{q,r}}) \geq \tau\text{-cat}_\Omega(\Omega \setminus \Omega^\tau), \quad (2.2.1)$$

*para todo  $q \in (q_0, p^*)$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.** Para  $q \in (q_0, p^*)$  fixado, seja  $v_q \in \mathcal{N}_{q,B_r(0)}$  uma função radial positiva tal que  $E_{q,B_r(0)}(v_q) = m_{q,r}$ . Defina  $\alpha_q : \Omega_r^- \rightarrow \mathcal{N}_q^\tau \cap E_q^{2m_{q,r}}$  por

$$\alpha_q(y) = v_q(\cdot - y) - v_q(\cdot - \tau y).$$

Afim de verificar que  $\alpha_q$  está bem definida notamos, inicialmente, que  $\tau : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  é uma isometria. Assim, como  $v_q$  é radial e  $\tau^2 = \text{Id}$ , para todo  $y \in \Omega_r^-$  vale

$$\begin{aligned} (\tau\alpha_q(y))(x) &= -\alpha_q(y)(\tau x) \\ &= v_q(\tau x - \tau y) - v_q(\tau x - y) = v_q(\tau(x - y)) - v_q(\tau(x - \tau y)) \\ &= v_q(x - y) - v_q(x - \tau y) = \alpha_q(y)(x), \end{aligned}$$

e portanto  $\alpha_q(y) \in W_0^{1,p}(\Omega)^\tau$ , sempre que  $y \in \Omega_r^-$ .

**AFIRMAÇÃO:** se  $y \in \Omega_r^-$ , então  $|y - \tau y| \geq 2r$ .

De fato, suponha que  $|y - \tau y| < 2r$  e defina  $y_0 = (y + \tau y)/2$ . Então

$$\tau(y_0) = \tau\left(\frac{y + \tau y}{2}\right) = \frac{\tau y + \tau^2(y)}{2} = \frac{y + \tau y}{2} = y_0$$

e portanto, pela definição de  $\Omega_r^-$ , devemos ter  $|y - y_0| \geq r$ . Por outro lado,

$$|y - y_0| = \left|y - \frac{(y + \tau y)}{2}\right| = \frac{1}{2}|y - \tau y| < r$$

o que é uma contradição e prova a afirmação.

Usando a afirmação acima e o fato de que  $v_q \in W_0^{1,p}(B_r(0))$ , podemos reescrever  $\alpha_q(y)$  de uma forma mais conveniente, a saber

$$(\alpha_q(y))(x) = \begin{cases} v_q(x - y) & \text{se } |x - y| < r, \\ -v_q(x - \tau y) & \text{se } |x - \tau y| < r, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.2.2)$$



A expressão acima, o fato de  $\tau$  ser uma isometria e uma mudança de variáveis nos fornece

$$\begin{aligned}
 E_q(\alpha_q(y)) &= \frac{1}{p} \int_{B_r(y)} (|\nabla v_q(x-y)|^p + |v_q(x-y)|^p) \, dx - \frac{1}{q} \int_{B_r(y)} |v_q(x-y)|^q \, dx \\
 &\quad + \frac{1}{p} \int_{B_r(\tau y)} (|\nabla v_q(x-\tau y)|^p + |v_q(x-\tau y)|^p) \, dx - \frac{1}{q} \int_{B_r(\tau y)} |v_q(x-\tau y)|^q \, dx \\
 &= 2 \left( \frac{1}{p} \int_{B_r(0)} (|\nabla v_q(x)|^p + |v_q(x)|^p) \, dx - \frac{1}{q} \int_{B_r(0)} |v_q(x)|^q \, dx \right) \\
 &= 2E_{q,B_r(0)}(v_q) = 2m_{q,r}.
 \end{aligned}$$

Da mesma maneira, mostra-se que

$$\|\alpha_q(y)\|^p = 2\|v_q\|_{B_r(0)}^p = 2|v_q|_{q,B_r(0)}^q = |\alpha_q(y)|_q^q,$$

donde segue que  $\alpha_q(y) \in \mathcal{N}_q \cap E_q^{2m_{q,r}}$ . Uma vez que já havíamos verificado que  $\alpha_q(y) \in W_0^{1,p}(\Omega)^\tau$  concluímos que  $\alpha_q$  está bem definida. Segue imediatamente da definição que  $\alpha_q(\tau y) = -\alpha_q(y)$ .

Dado agora  $u \in \mathcal{N}_q^\tau \cap E_q^{2m_{q,r}}$  podemos argumentar como na prova do Lema 2.3 e concluir que  $u^+ \in \mathcal{N}_q \cap E_q^{2m_{q,r}}$ . Segue então do Lema 2.5 que  $\gamma_q : \mathcal{N}_q^\tau \cap E_q^{2m_{q,r}} \rightarrow \Omega_r^+$  dada por  $\gamma_q(u) = \beta_q(u^+)$  está bem definida. Um cálculo direto mostra que  $\gamma_q(-u) = \tau\gamma_q(u)$ . Além do mais, como  $v_q$  é radial e positiva, podemos usar (2.2.2) para obter

$$\gamma_q(\alpha_q(y)) = \frac{\int_{B_r(y)} |v_q(x-y)|^q x \, dx}{\int_{B_r(y)} |v_q(x-y)|^q \, dx} = \frac{\int_{B_r(0)} |v_q(x)|^q (x+y) \, dx}{\int_{B_r(0)} |v_q(x)|^q \, dx} = y,$$

para todo  $y \in \Omega_r^-$ .

Resta somente verificarmos (2.2.1). Para tanto note que, se  $u \in \mathcal{N}_q^\tau \cap E_q^{2m_{q,r}}$ , então  $-u \in \mathcal{N}_q^\tau \cap E_q^{2m_{q,r}}$ . Isso mostra que tal conjunto é simétrico e portanto o grupo  $\mathbb{Z}_2$  age naturalmente sobre ele. Pela definição dos conjuntos  $\Omega_r^\pm$  e pela propriedade (H), a involução  $\tau : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  age sobre os conjuntos  $\Omega_r^\pm$ . Na primeira parte do lema mostramos que as aplicações  $\alpha_q$  e  $\gamma_q$  são equivariantes. Segue então da teoria de Ljusternik-Schnirelmann equivariante (veja Lema A.8) que

$$\mathbb{Z}_2\text{-cat}(\mathcal{N}_q^\tau \cap E_q^{2m_{q,r}}) \geq \tau\text{-cat}_{\Omega_r^+}(\Omega_r^-).$$

Uma vez que escolhemos  $r > 0$  de forma que as inclusões  $\Omega_r^- \hookrightarrow \Omega \setminus \Omega^\tau$  e  $\Omega \hookrightarrow \Omega_r^+$  fossem equivalências equivariantes de homotopia, o Lema A.8 implica que  $\tau\text{-cat}_{\Omega_r^+}(\Omega_r^-) = \tau\text{-cat}_\Omega(\Omega \setminus \Omega^\tau)$ . Portanto,

$$\mathbb{Z}_2\text{-cat}(\mathcal{N}_q^\tau \cap E_q^{2m_{q,r}}) \geq \tau\text{-cat}_\Omega(\Omega \setminus \Omega^\tau),$$

sempre que  $q \in (q_0, p^*)$ . Isso conclui a demonstração do lema. ■

Estamos prontos para provar o Teorema 1.2.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.2. Como, pelo Lema 2.4,  $m_{q,r}$  e  $m_q$  têm o mesmo limite quando  $q \rightarrow p^*$ , existe  $\tilde{q}_0 \in (p, p^*)$  tal que

$$m_{q,r} < 2m_q, \quad (2.2.3)$$

sempre que  $q \in (\tilde{q}_0, p^*)$ . Vamos mostrar que o teorema vale para  $q_* = \max\{q_0, \tilde{q}_0\}$ , em que  $q_0 = q_0(r)$  é dado pelo Lema 2.5. Dado então  $q \in (q_*, p^*)$ , observe que  $E_q$  restrito a  $\mathcal{N}_q^\tau$  satisfaz Palais-Smale e é par. Podemos então aplicar o Teorema A.9 para obter  $\mathbb{Z}_2$ -cat( $\mathcal{N}_q^\tau \cap E_q^{2m_{q,r}}$ ) pares  $\pm u_i$  de pontos críticos com

$$E_q(\pm u_i) \leq 2m_{q,r} < 4m_q \leq 2m_q^\tau,$$

em que usamos (2.2.3) e o Lema 2.3. A desigualdade acima, a definição de  $W_0^{1,p}(\Omega)^\tau$ , o Lema 2.8 e o mesmo argumento usando na demonstração do Teorema 1.1 mostram que  $u_i$  é uma solução de  $(D_q^\tau)$  que troca de sinal exatamente uma vez. Finalmente, segue de (2.2.1), que

$$\mathbb{Z}_2\text{-cat}(\mathcal{N}_q^\tau \cap E_q^{2m_{q,r}}) \geq \tau\text{-cat}_\Omega(\Omega \setminus \Omega^\tau)$$

e o teorema está provado. ■

Finalizamos a seção apresentando uma prova do Corolário 1.1. Além do teorema acima, vamos precisar do seguinte resultado de topologia, cuja demonstração segue do Teorema de Borsuk-Ulam.

**Teorema 2.10 ([30, Corolário 4.2, Capítulo 1]).** *Seja  $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$  um aberto simétrico com relação à origem e tal que  $0 \in \Gamma$ . Seja  $k < N$  e  $f : \partial\Gamma \rightarrow \mathbb{R}^k$  uma função contínua. Então existe  $x \in \partial\Gamma$  tal que  $f(x) = f(-x)$ .*

DEMONSTRAÇÃO DO COROLÁRIO 1.1. Seja  $\tau : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  dada por  $\tau(x) = -x$ . Como  $\Omega^\tau = \emptyset$ , é suficiente mostrar que  $k = \tau\text{-cat}(\Omega) \geq N$  e aplicar o Teorema 1.2. Naturalmente podemos supor que  $k < \infty$  e portanto existe uma cobertura aberta  $X_1, \dots, X_k$  de  $\Omega$  e aplicações ímpares  $\alpha_i : X_i \rightarrow \{y_i, -y_i\}$ , com  $y_1, \dots, y_k \in \Omega$ . Seja  $\{e_1, \dots, e_k\}$  a base ortonormal canônica de  $\mathbb{R}^k$  e considere as aplicações ímpares  $\gamma_i : \{y_i, -y_i\} \rightarrow \{e_i, -e_i\}$  definidas por  $\gamma_i(\pm y_i) = \pm e_i$ . Composto  $\alpha_i$  com  $\gamma_i$  obtemos aplicações ímpares  $\tilde{\alpha}_i : X_i \rightarrow \{e_i, -e_i\}$ .

Considere agora  $\{\pi_i : X_i \rightarrow [0, 1]\}$  uma partição da unidade subordinada à cobertura  $X_i$  e consistida de funções ímpares. Defina  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^{k-1}$  por

$$\psi(x) = \frac{\sum_{i=1}^k \pi_i(x) \tilde{\alpha}_i(x)}{\left| \sum_{i=1}^k \pi_i(x) \tilde{\alpha}_i(x) \right|}.$$

Usando agora a função  $\varphi$  do enunciado do corolário e o diagrama abaixo

$$\mathbb{S}^{N-1} \xrightarrow{\varphi} \Omega \xrightarrow{\psi} \mathbb{S}^{k-1}$$

obtemos uma aplicação contínua e ímpar  $\psi \circ \varphi : \mathbb{S}^{N-1} \rightarrow \mathbb{S}^{k-1}$ . Mostremos que isso implica que  $k \geq N$ . Para tanto, suponha por contradição que  $k < N$ . Então podemos usar o Teorema 2.10 com  $\Gamma = B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$  e  $f = \psi \circ \varphi$  para obter  $x_0 \in \mathbb{S}^{N-1}$  tal que  $(\psi \circ \varphi)(x_0) = (\psi \circ \varphi)(-x_0)$ . Como  $\psi \circ \varphi$  é ímpar, concluímos que

$$(\psi \circ \varphi)(x_0) = (\psi \circ \varphi)(-x_0) = -(\psi \circ \varphi)(x_0),$$

donde se conclui que  $(\psi \circ \varphi)(x_0) = 0$ . Mas isso é um absurdo, visto que  $(\psi \circ \varphi)(\mathbb{S}^{N-1}) \subset \mathbb{S}^{k-1}$ . Dessa forma, devemos ter  $k \geq N$  e o corolário está provado. ■

---

## 2.3 Multiplicidade de soluções positivas para $(D_q)$

---

Nessa seção vamos mostrar que os argumentos utilizados nas seções anteriores nos permitem estender o resultado em [10, Teorema B] para o caso quasilinear  $1 < p < N$ . Nesse contexto não exigimos nenhum tipo de simetria para o domínio  $\Omega$  e vamos mostrar o seguinte resultado:

**Teorema 2.11.** *Existe  $q_* \in (p, p^*)$  tal que, para todo  $q \in (q_*, p^*)$ , o problema  $(D_q)$  tem pelo menos  $\text{cat}(\Omega)$  soluções positivas.*

Para provar o teorema acima vamos trabalhar com o funcional  $E_q$  restrito à variedade de Nehari usual  $\mathcal{N}_q$ . Fixamos  $r > 0$  tal que os conjuntos  $\Omega_r^+$  e

$$\tilde{\Omega}_r^- = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq r\}$$

sejam homotopicamente equivalentes a  $\Omega$  e  $B_r(0) \subset \Omega$ . A demonstração segue as mesmas linhas da prova do Teorema 1.2. Necessitaremos dos dois resultados abaixo que nada mais são do que versões dos Lemas 2.8 e 2.9.

**Lema 2.12.** *Se  $u$  é uma solução de  $(D_q)$  com  $E_q(u) < 2m_q$ , então  $u$  não troca de sinal.*

DEMONSTRAÇÃO. Como  $u$  é um ponto crítico de  $E_q$  temos

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi + |u|^{p-2} u \phi) = \int_{\Omega} |u|^{q-2} u \phi,$$

qualquer que seja  $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Em particular, se fizermos  $\phi = u^\pm$  na expressão acima, concluímos que

$$\|u^\pm\|^p = |u^\pm|_q^q.$$

Suponha, por contradição, que  $u$  troca de sinal em  $\Omega$ . Então  $u^+$  e  $u^-$  são ambas diferente de 0 e a expressão acima implica que  $u^\pm \in \mathcal{N}_q$ . Dessa forma,

$$E_q(u) = E_q(u^+) + E_q(u^-) \geq 2m_q,$$

contrariando a nossa hipótese. O lema está provado. ■

**Lema 2.13.** *Seja  $q_0 = q_0(r)$  dado pelo Lema 2.5. Então*

$$\text{cat}(\mathcal{N}_q \cap E_q^{m_{q,r}}) \geq 2\text{cat}(\Omega),$$

para todo  $q \in (q_0, p^*)$ .

DEMONSTRAÇÃO. Fixado  $q \in (q_0, p^*)$ , defina os conjuntos

$$\Sigma_q^+ = \{u \in \mathcal{N}_q \cap E_q^{m_{q,r}} : u \geq 0 \text{ em } \Omega\} \quad \text{e} \quad \Sigma_q^- = \{u \in \mathcal{N}_q \cap E_q^{m_{q,r}} : u \leq 0 \text{ em } \Omega\}.$$

Considere  $v_q \in \mathcal{N}_{q,B_r(0)}$  uma função radial positiva tal que  $E_q(v_q) = m_{q,r}$ . Defina, para  $y \in \tilde{\Omega}_r^-$ , as aplicações

$$\alpha_q^\pm(y) = v_q(\cdot - y).$$

Argumentando como na prova do Lema 2.9 concluímos que  $\alpha_q^\pm : \tilde{\Omega}_r^- \rightarrow \Sigma_q^\pm$  e que  $\beta(\alpha_q^\pm(y)) = y$  para todo  $y \in \tilde{\Omega}_r^-$ . Suponha agora que

$$\Sigma_q^+ = A_1 \cup \dots \cup A_k \tag{2.3.1}$$

com cada  $A_i$  fechado e contrátil em  $\mathcal{N}_q \cap E_q^{m_{q,r}}$ . Então existem aplicações contínuas  $\psi_i : [0, 1] \times A_i \rightarrow \mathcal{N}_q \cap E_q^{m_{q,r}}$  tais que

$$\psi_i(0, u) = u, \quad \psi_i(1, u) = u_i,$$

para todo  $u \in A_i$  e algum  $u_i \in \mathcal{N}_q \cap E_q^{m_{q,r}}$ . Para cada  $i = 1, \dots, k$ , denote por  $B_i$  a imagem inversa de  $A_i$  pela aplicação  $\alpha_q^+$ . É claro que cada  $B_i$  é fechado em  $\tilde{\Omega}_r^-$  e

$$\tilde{\Omega}_r^- = B_1 \cup \dots \cup B_k.$$

Considerando a homotopia  $\Theta_i : [0, 1] \times B_i \rightarrow \Omega_r^+$  dada por

$$\Theta_i(t, y) = \beta(\psi_i(t, \alpha_q^+(y))),$$

temos que

$$\Theta_i(0, y) = \beta(\psi_i(0, \alpha_q^+(y))) = \beta(\alpha_q^+(y)) = y,$$

para todo  $y \in B_i$ . Além disso,

$$\Theta_i(1, y) = \beta(\psi_i(1, \alpha_q^+(y))) = \beta(u_i).$$

Como  $u_i \in \mathcal{N}_q \cap E_q^{m_{q,r}}$ , o Lema 2.5 garante que  $\beta(u_i) \in \Omega_r^+$ . Assim, a aplicação  $\Theta_i$  é uma contração de  $B_i$  em  $\Omega_r^+$ . Uma vez que a cobertura em (2.3.1) é arbitrária, segue que

$$\text{cat}_{\mathcal{N}_q \cap E_q^{m_{q,r}}}(\Sigma_q^+) \geq \text{cat}_{\Omega_r^+}(\tilde{\Omega}_r^-).$$

Usando a aplicação  $\alpha_q^-$  e argumentando de maneira análoga obtemos

$$\text{cat}_{\mathcal{N}_q \cap E_q^{m_{q,r}}}(\Sigma_q^-) \geq \text{cat}_{\Omega_r^+}(\tilde{\Omega}_r^-).$$

Uma vez que  $\Sigma_q^+ \cap \Sigma_q^- = \emptyset$ , podemos usar as propriedades da categoria de Ljusternik-Schnirelmann e concluir que

$$\begin{aligned} \text{cat}_{\mathcal{N}_q \cap E_q^{m_{q,r}}}(\mathcal{N}_q \cap E_q^{m_{q,r}}) &\geq \text{cat}_{\mathcal{N}_q \cap E_q^{m_{q,r}}}(\Sigma_q^+ \cup \Sigma_q^-) \\ &\geq \text{cat}_{\mathcal{N}_q \cap E_q^{m_{q,r}}}(\Sigma_q^+) + \text{cat}_{\mathcal{N}_q \cap E_q^{m_{q,r}}}(\Sigma_q^-) \\ &\geq 2\text{cat}_{\Omega_r^+}(\tilde{\Omega}_r^-) \\ &= 2\text{cat}(\Omega), \end{aligned}$$

em que usamos, na última linha, o fato de  $\Omega_r^+$  e  $\tilde{\Omega}_r^-$  serem homotopicamente equivalentes a  $\Omega$ . O lema está provado. ■

**DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.11.** Seja  $q_*$  como na demonstração do Teorema 1.2. Para  $q \in (q_0, p^*)$  fixo, a condição de Palais-Smale para o funcional  $E_q$  restrito a  $\mathcal{N}_q$  segue dos mesmos argumentos utilizados no Lema 2.2. O Teorema A.7 e o lema acima nos fornecem pelo menos  $\text{cat}(\mathcal{N}_q \cap E_q^{m_{q,r}}) \geq 2 \text{cat}(\Omega)$  pontos críticos  $u_i$  tais que  $E_q(u_i) \leq m_{q,r} < 2m_q$ . Esses pontos críticos são soluções de  $(D_q)$  que, pelo Lema 2.12, não trocam de sinal. Como o funcional  $E_q$  é par, os pontos críticos de  $E_q$  aparecem aos pares. Assim, existem pelo menos  $\text{cat}(\Omega)$  pontos críticos  $u_i \geq 0$ . Segue do princípio do máximo que  $u_i > 0$  em  $\Omega$  e o teorema está provado. ■

---

---

## CAPÍTULO 3

---

# Equação de Schrödinger quasilinear subcrítica

Nesse capítulo estudamos o problema

$$(S_{\lambda,q}^{\tau}) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + (\lambda a(x) + 1)|u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u(\tau x) = -u(x) & \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com  $\lambda > 0$ ,  $2 \leq p < N$ ,  $p < q < p^*$ , e  $\tau \in O(N)$  satisfazendo  $\tau \neq \text{Id}$  e  $\tau^2 = \text{Id}$ . O potencial  $a$  satisfaz

(A<sub>1</sub>)  $a \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  é não-negativa,  $\Omega = \text{int } a^{-1}(0)$  é um conjunto não vazio com fronteira suave e  $\bar{\Omega} = a^{-1}(0)$ .

(A<sub>2</sub>) existe  $M_0 > 0$  tal que

$$\mathcal{L}(\{x \in \mathbb{R}^N : a(x) \leq M_0\}) < \infty,$$

(A<sub>3</sub>)  $a(\tau x) = a(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^N$ .

Provamos os seguintes resultados:

**Teorema 1.3.** *Suponha que (A<sub>1</sub>)-(A<sub>3</sub>) valem. Então existe  $\Lambda_0 = \Lambda_0(q) > 0$  tal que, para todo  $\lambda \geq \Lambda_0$ , o problema  $(S_{\lambda,q}^{\tau})$  tem pelo menos um par de soluções que trocam de sinal exatamente uma vez.*

**Teorema 1.4.** *Seja  $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$  tal que  $\lambda_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  e  $(u_n)$  uma seqüência de soluções do problema  $(S_{\lambda_n, q}^\tau)$  tal que  $I_{\lambda_n, q}(u_n)$  é limitado. Então, a menos de uma subseqüência,  $u_n \rightarrow u$  forte em  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  com  $u$  sendo uma solução do problema  $(D_q^\tau)$ .*

**Teorema 1.5.** *Suponha que  $(A_1)$ - $(A_3)$  valem,  $\Omega$  é limitado e seja  $\Omega^\tau = \{x \in \Omega : \tau x = x\}$ . Então existe  $q_* \in (p, p^*)$  com a seguinte propriedade: para cada  $q \in (q_*, p^*)$ , existe um número  $\Lambda(q) > 0$  tal que, para todo  $\lambda \geq \Lambda(q)$ , o problema  $(S_{\lambda, q}^\tau)$  tem pelo menos  $\tau$ -cat $_{\Omega}(\Omega \setminus \Omega^\tau)$  pares de soluções nodais minimais.*

### 3.1 Notações e alguns resultados técnicos

Neste capítulo denotamos por  $X$  o espaço

$$X = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^p < \infty \right\},$$

munido da norma

$$\|u\| = \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + (a(x) + 1)|u|^p) \right\}^{1/p},$$

que é claramente equivalente a cada uma das normas

$$\|u\|_\lambda = \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + (\lambda a(x) + 1)|u|^p) \right\}^{1/p},$$

para  $\lambda \geq 0$ . Além disso, diferente do capítulo anterior, quando escrevemos  $|u|_s$  estamos indicando a  $L^s(\mathbb{R}^N)$ -norma de uma função  $u \in L^s(\mathbb{R}^N)$ .

As hipóteses  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  e o Teorema de Sobolev implicam que a imersão  $X \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$  é contínua para todo  $p \leq s \leq p^*$ . Além do mais, o Teorema de Rellich-Kondrachov implica que, se  $p \leq s < p^*$ , então  $X$  está compactamente imerso em  $L_{loc}^s(\mathbb{R}^N)$ .

Da mesma forma que no capítulo anterior, a involução  $\tau$  induz uma ação em  $X$  se definirmos, para cada  $u \in X$ ,  $\tau u \in X$  por (2.1.1). Vamos denotar por  $X^\tau$  o subespaço dos elementos fixados pela ação, isto é,

$$X^\tau = \{u \in X : \tau u = u\}.$$

O funcional associado ao problema  $(S_{\lambda, q})$  é  $I_{\lambda, q} : X \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$I_{\lambda, q}(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + (\lambda a(x) + 1)|u|^p) - \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q.$$

As imersões de Sobolev e a condição  $(A_1)$  implicam que  $I_{\lambda,q}$  está bem definido,  $I_{\lambda,q} \in C^1(X, \mathbb{R})$  e seus pontos críticos, a menos da condição de simetria, correspondem às soluções fracas de  $(S_{\lambda,q}^\tau)$ . Seguindo os mesmos passos usados no capítulo anterior vamos considerar as variedades de Nehari associada ao funcional  $I_{\lambda,q}$

$$\mathcal{V}_{\lambda,q} = \{u \in X \setminus \{0\} : \langle I'_{\lambda,q}(u), u \rangle = 0\} = \{u \in X \setminus \{0\} : \|u\|_\lambda^p = |u|_p^p\}.$$

e

$$\mathcal{V}_{\lambda,q}^\tau = \{u \in \mathcal{V}_{\lambda,q} : \tau u = u\} = \mathcal{V}_{\lambda,q} \cap X^\tau.$$

Se  $u \in \mathcal{V}_{\lambda,q}$ , então

$$I_{\lambda,q}(u) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \|u\|_\lambda^p,$$

donde segue que  $I_{\lambda,q}$  é limitado inferiormente em ambas as variedades e estão bem definidos

$$c_{\lambda,q} = \inf_{u \in \mathcal{V}_{\lambda,q}} I_{\lambda,q}(u) \quad \text{e} \quad c_{\lambda,q}^\tau = \inf_{u \in \mathcal{V}_{\lambda,q}^\tau} I_{\lambda,q}(u).$$

Argumentando como na prova do Lema 2.1, podemos provar o seguinte resultado.

**Lema 3.1.** *Suponha que  $p < q < p^*$  e  $\lambda \geq 0$ . Então existe  $r_q > 0$  tal que*

$$\|u\| \geq r_q,$$

para todo  $u \in \mathcal{V}_{\lambda,q}^\tau$ . Em particular  $c_{\lambda,q}^\tau > 0$ .

O lema abaixo estabelece as primeiras relações entre os problemas de minimização acima e aqueles definidos em (2.1.2).

**Lema 3.2.** *Para todo  $\lambda > 0$  e  $p < q < p^*$  temos que*

$$(i) \quad 2c_{\lambda,q} \leq c_{\lambda,q}^\tau,$$

$$(ii) \quad c_{\lambda,q}^\tau \leq m_{q,\Omega}^\tau.$$

**DEMONSTRAÇÃO.** A prova de (i) é semelhante àquela do Lema 2.3 e será omitida. Para provar (ii), dado  $u \in \mathcal{N}_q^\tau$ , estendemos  $u$  para todo o  $\mathbb{R}^N$  fazendo  $u \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ . Dessa forma, como  $a \equiv 0$  em  $\Omega$ , concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + (\lambda a(x) + 1)|u|^p) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^p + |u|^p) = \int_{\Omega} |u|^q = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q,$$

isto é,  $u \in \mathcal{V}_{\lambda,q}$ . Como  $\tau(\Omega) = \Omega$ , concluímos ainda que a extensão de  $u$  satisfaz  $\tau u = u$ , de forma que  $u \in \mathcal{V}_{\lambda,q}^\tau$ . Assim,  $\mathcal{N}_q^\tau \subset \mathcal{V}_{\lambda,q}^\tau$  e o resultado se segue. ■



### 3.1.1 A condição de Palais-Smale

Nessa subseção vamos estabelecer uma condição de compacidade para o funcional  $I_{\lambda,q}$ . Se tentarmos repetir o argumento do Lema 2.2 vamos esbarrar na seguinte dificuldade: como  $\mathbb{R}^N$  é um domínio ilimitado, a imersão  $X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$  não é mais compacta. Assim, precisamos de uma argumentação diferente para obter compacidade. Mostraremos que, mesmo não havendo compacidade na imersão acima, a condição de Palais-Smale vale em determinados níveis, desde que o parâmetro  $\lambda$  seja suficientemente grande. Mais especificamente, provaremos o seguinte resultado de compacidade local:

**Proposição 3.3.** *Para todo  $C_0 > 0$  dado, existe  $\Lambda_0 = \Lambda_0(q) > 0$  tal que  $I_{\lambda,q}$  restrito à  $\mathcal{V}_{\lambda,q}^\tau$  satisfaz  $(PS)_c$  para todo  $c \leq C_0$  e  $\lambda \geq \Lambda_0$ .*

O resultado acima foi provado, para o caso semilinear  $p = 2$ , em [7, Proposição 2.1]. A demonstração que apresentamos aqui segue os mesmos passos. Contudo, como no caso geral  $2 \leq p < N$  não trabalhamos em um espaço de Hilbert, parte da demonstração teve que ser modificada (veja Lema 3.7 adiante). Nesse ponto, usamos algumas idéias contidas em [1].

**Lema 3.4 ([7, Lemas 2.2, 2.3 e 2.4]).** *Seja  $(u_n) \subset X$  uma seqüência  $(PS)_c$  para  $I_{\lambda,q}$ . Então*

- (i)  $(u_n)$  é limitada em  $X$ ,
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\lambda^p = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|_q^q = cpq/(q-p)$ ,
- (iii) se  $c \neq 0$ , então  $c \geq c_0 > 0$ , onde  $c_0$  é independente de  $\lambda$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Seja  $\varepsilon > 0$  dado. Usando a definição de  $I_{\lambda,q}$  e as hipóteses, obtemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$I_{\lambda,q}(u_n) \leq c + \varepsilon \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} \|I'_{\lambda,q}(u_n)\|_{X^*} \leq \varepsilon, \quad (3.1.1)$$

sempre que  $n > n_0$ . Assim

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \|u_n\|_\lambda^p = I_{\lambda,q}(u_n) - \frac{1}{q} \langle I'_{\lambda,q}(u_n), u_n \rangle \leq c + \varepsilon + \varepsilon \|u_n\|_\lambda + C_1,$$

em que  $C_1 = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \max\{\|u_1\|_\lambda, \dots, \|u_{n_0-1}\|_\lambda\}$ . Como  $p < q$ , a expressão acima implica que  $(u_n)$  é limitada em  $X$ . Assim,

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( I_{\lambda,q}(u_n) - \frac{1}{q} \langle I'_{\lambda,q}(u_n), u_n \rangle \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|u_n\|_\lambda^p,$$

e

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( I_{\lambda,q}(u_n) - \frac{1}{p} \langle I'_{\lambda,q}(u_n), u_n \rangle \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) |u_n|_q^q,$$

donde segue (ii).

Para verificar (iii) usamos a definição de  $\|\cdot\|_\lambda$  e a imersão  $X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$  para obter  $C_2 = C_2(N) > 0$  tal que

$$\langle I'_{\lambda,q}(u), u \rangle = \|u\|_\lambda^p - |u|_q^q \geq \|u\|^p - C_2 \|u\|^q \geq \frac{1}{2} \|u\|^p, \quad (3.1.2)$$

para todo  $\|u\| \leq (2C_2)^{1/(p-q)} = \delta$ . Suponha que  $c < \delta^p(q-p)/pq$ . Por (ii) temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\lambda^p < \delta^p$ . Como as normas  $\|\cdot\|$  e  $\|\cdot\|_\lambda$  são equivalentes, existe  $n_1 \geq n_0$  tal que  $\|u_n\| < \delta$  para todo  $n > n_1$ . Assim, podemos usar (3.1.2) para obter

$$\frac{1}{2} \|u_n\|^p \leq \langle I'_{\lambda,q}(u_n), u_n \rangle \leq \|I'_{\lambda,q}(u_n)\|_{X^*} \|u_n\| \leq \varepsilon q \|u_n\|,$$

ou ainda,

$$\|u_n\| \leq (2\varepsilon q)^{1/(p-1)},$$

sempre que  $n > n_1$ . A expressão acima implica que  $u_n \rightarrow 0$  e portanto  $I_{\lambda,q}(u_n) \rightarrow 0 = c$ . Essas considerações mostram que (iii) vale para  $c_0 = \delta^p \frac{(q-p)}{pq}$  e o lema está provado. ■

**Lema 3.5 ([7, Lema 2.5]).** *Seja  $C_0 > 0$  fixo. Então, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $\Lambda_\varepsilon > 0$  e  $R_\varepsilon > 0$  tais que, se  $(u_n)$  é uma seqüência (PS) $_c$  de  $I_{\lambda,q}$  com  $c \leq C_0$  e  $\lambda \geq \Lambda_\varepsilon$ , temos que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon}(0)} |u_n|^q \leq \varepsilon.$$

**DEMONSTRAÇÃO.** Fixe  $R > 0$  e escolha  $\theta \in (0, 1)$  tal que  $1/q = \theta/p + (1-\theta)/p^*$ . Usando Hölder, a imersão  $X \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$  e a equivalência das normas  $\|\cdot\|_\lambda$  e  $\|\cdot\|$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |u_n|^q &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |u_n|^{p^*} \right)^{\frac{(1-\theta)q}{p^*}} \left( \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |u_n|^p \right)^{\frac{\theta q}{p}} \\ &\leq C \|u_n\|_\lambda^{(1-\theta)q} \left( \int_{\Gamma_R^1} |u_n|^p + \int_{\Gamma_R^2} |u_n|^p \right)^{\frac{\theta q}{p}}, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

em que  $\Gamma_R^1 = \{x \in \mathbb{R}^N : a(x) < M_0\} \cap (\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))$  e  $\Gamma_R^2 = (\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)) \setminus \Gamma_R^1$ .

Para  $1 < r < N/(N-p)$  denotamos por  $r' = r/(r-1)$  o expoente conjugado de  $r$ . Usando Hölder, a imersão  $X \hookrightarrow L^{ps}(\mathbb{R}^N)$  e a equivalência das normas novamente, vem

$$\int_{\Gamma_R^1} |u_n|^p \leq \mathcal{L}(\Gamma_R^1)^{1/r'} |u_n|_{ps}^p \leq C_1 \mathcal{L}(\Gamma_R^1)^{1/r'} \|u_n\|_\lambda^p. \quad (3.1.4)$$

Por outro lado, como  $a(x) \geq M_0$  em  $\Gamma_R^2$ , temos que

$$\int_{\Gamma_R^2} |u_n|^p \leq \frac{1}{(\lambda M_0 + 1)} \int_{\Gamma_R^2} (\lambda a(x) + 1) |u_n|^p \leq \frac{1}{(\lambda M_0 + 1)} \|u_n\|_\lambda^p.$$

A expressão acima, (3.1.3), (3.1.4) e o Lema 3.4(i) implicam que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |u_n|^q &\leq C \|u_n\|_\lambda^{(1-\theta)q} \left( C_1 \mathcal{L}(\Gamma_R^1)^{1/s'} \|u_n\|_\lambda^p + \frac{1}{(\lambda M_0 + 1)} \|u_n\|_\lambda^p \right)^{\frac{\theta q}{p}} \\ &= C \|u_n\|_\lambda^q \left( C_1 \mathcal{L}(\Gamma_R^1)^{1/s'} + \frac{1}{(\lambda M_0 + 1)} \right)^{\frac{\theta q}{p}} \\ &\leq C_2 \left( C_1 \mathcal{L}(\Gamma_R^1)^{1/s'} + \frac{1}{(\lambda M_0 + 1)} \right)^{\frac{\theta q}{p}}. \end{aligned}$$

Pela hipótese  $(A_2)$ , sabemos que  $\mathcal{L}(\Gamma_R^1) \rightarrow 0$  quando  $R \rightarrow \infty$ . Logo o lado direito da expressão acima é pequeno desde que  $\lambda$  e  $R$  sejam suficientemente grandes. ■

O lema abaixo é uma versão vetorial do lema de Brezis-Lieb e foi provado por Alves em [1]. Ele vai compensar a falta de estrutura Hilbertiana do espaço  $X$ .

**Lema 3.6 ([1, Lema 3]).** *Seja  $K \geq 1$ ,  $s \geq 2$  e  $A(y) = |y|^{s-2}y$ , para  $y \in \mathbb{R}^K$ . Considere uma seqüência de funções vetoriais  $\eta_n : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^K$  tal que  $(\eta_n) \subset (L^s(\mathbb{R}^N))^K$  e  $\eta_n(x) \rightarrow 0$  q.t.p.  $x \in \mathbb{R}^N$ . Então, se  $|\eta_n|_{(L^s(\mathbb{R}^N))^K}$  é limitado, temos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n) + A(w) - A(\eta_n + w)|^{s/(s-1)} = 0,$$

para cada  $w \in (L^s(\mathbb{R}^N))^K$  fixado.

**DEMONSTRAÇÃO.** Para  $1 \leq i \leq K$ , sejam  $A_i(y)$  e  $w_i(x)$  a  $i$ -ésima componente dos vetores  $A(y)$  e  $w(x)$ , respectivamente. Então,

$$A_i(\eta_n + w) - A_i(\eta_n) = \int_0^1 \left( \frac{d}{dt} A_i(\eta_n + tw) \right) dt = \int_0^1 \left( \sum_{j=1}^K \frac{\partial}{\partial x_j} A_i(\eta_n + tw) w_j \right) dt,$$

donde segue que existe  $C_1 > 0$  tais que

$$|A_i(\eta_n + w) - A_i(\eta_n)| \leq C_1 |w| \int_0^1 |\eta_n + tw|^{s-2} dt \leq C_1 |w| (|\eta_n| + |w|)^{s-2}.$$

Conseqüentemente,

$$|A(\eta_n + w) - A(\eta_n)| \leq C_2 |w|^{s-1} + C_3 |w| |\eta_n|^{s-2},$$

com  $C_2, C_3 > 0$ . Para cada  $\varepsilon > 0$  fixado, podemos usar a expressão acima e a desigualdade de Young para obter

$$|A(\eta_n + w) - A(\eta_n)| \leq C_\varepsilon |w|^{s-1} + \varepsilon |\eta_n|^{s-1}.$$

Considere agora a função  $G_{\varepsilon,n} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$G_{\varepsilon,n}(x) = \max\{|A(\eta_n + w) - A(\eta_n) - A(w)|(x) - \varepsilon |\eta_n(x)|^{s-1}, 0\}.$$

Como consequência das hipóteses e da última desigualdade, vemos que  $G_{\varepsilon,n}$  satisfaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_{\varepsilon,n}(x) = 0,$$

q.t.p.  $x \in \mathbb{R}^N$  e

$$0 \leq G_{\varepsilon,n}(x) \leq C_4 |w|^{s-1} \in L^{s/(s-1)}(\mathbb{R}^N).$$

Dessa forma, podemos usar o Teorema de Lebesgue para concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |G_{\varepsilon,n}(x)|^{s/(s-1)} \, dx = 0.$$

Segue imediatamente da definição de  $G_{\varepsilon,n}$  que

$$|A(\eta_n + w) - A(\eta_n) - A(w)| \leq \varepsilon |\eta_n|^{s-1} + G_{\varepsilon,n}$$

e portanto

$$|A(\eta_n + w) - A(\eta_n) - A(w)|^{s/(s-1)} \leq C_5 \varepsilon |\eta_n| + C_5 |G_{\varepsilon,n}|^{s/(s-1)}.$$

Dessa forma,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n + w) - A(\eta_n) - A(w)|^{s/(s-1)} \, dx \leq C_5 \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\eta_n|^s \, dx \leq C_6 \varepsilon.$$

Passando ao limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n + w) - A(\eta_n) - A(w)|^{s/(s-1)} \, dx \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n + w) - A(\eta_n) - A(w)|^{s/(s-1)} \, dx \leq 0, \end{aligned}$$

o que conclui a prova do lema. ■

**Lema 3.7.** *Seja  $\lambda \geq 0$  fixo e  $(u_n)$  uma seqüência  $(PS)_c$  para  $I_{\lambda,q}$ . Então, a menos de uma subseqüência,  $u_n \rightharpoonup u$  fracamente em  $X$  com  $u$  sendo uma solução fraca do problema  $(S_{\lambda,q})$ . Além do mais, se  $c' = c - I_{\lambda,q}(u)$ , então  $v_n = u_n - u$  é uma seqüência  $(PS)_{c'}$  para  $I_{\lambda,q}$ .*

DEMONSTRAÇÃO. O Lema 3.4(i) implica que  $(u_n)$  é limitada em  $X$  e portanto, passando a uma subsequência se necessário, temos

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{fracamente em } X, \\ u_n &\rightarrow u && \text{em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ para todo } p \leq s < p^*, \\ u_n(x) &\rightarrow u(x) && \text{q.t.p. } x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Afirmamos que podemos supor ainda que

$$\begin{aligned} \nabla u_n(x) &\rightarrow \nabla u(x) && \text{q.t.p. } x \in \mathbb{R}^N, \\ |\nabla u_n|^{p-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} &\rightharpoonup |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} && \text{fracamente em } (L^p(\mathbb{R}^N))^*, \quad 1 \leq i \leq N, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

onde  $(L^p(\mathbb{R}^N))^*$  denota o espaço dual de  $L^p(\mathbb{R}^N)$ . Para verificar essa afirmação observamos inicialmente que, como  $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = |x|^p$  é estritamente convexa, temos

$$P_n(x) = (|\nabla u_n(x)|^{p-2} \nabla u_n(x) - |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x)) \cdot \nabla (u_n(x) - u(x)) \geq 0.$$

Seja  $K \subset \mathbb{R}^N$  um subconjunto compacto fixado. Dado  $\varepsilon > 0$  definimos

$$K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, K) \leq \varepsilon\}$$

e escolhemos uma função  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  tal que  $0 \leq \psi \leq 1$ ,  $\psi \equiv 1$  em  $K$  e  $\psi \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus K_\varepsilon$ .

Usando a definição de  $P_n$  temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_K P_n &\leq \int_{\mathbb{R}^N} P_n \psi = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \psi - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} (\nabla u_n \cdot \nabla u) \psi \\ &\quad + \int_{K_\varepsilon} |\nabla u|^{p-2} (\nabla u \cdot \nabla (u - u_n)) \psi. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Como  $(\psi u_n)$  é limitada em  $X$  e  $I'_{\lambda,q}(u_n) \rightarrow 0$ , temos

$$\begin{aligned} o(1) = \langle I'_{\lambda,q}(u_n), \psi u_n \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \psi + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} (\nabla u_n \cdot \nabla \psi) u_n \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x) + 1) |u_n|^p \psi - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q \psi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} o(1) = \langle I'_{\lambda,q}(u_n), -\psi u \rangle &= - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} (\nabla u_n \cdot \nabla u) \psi - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} (\nabla u_n \cdot \nabla \psi) u \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x) + 1) |u_n|^{p-2} u_n u \psi + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q-2} u_n u \psi, \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Substituindo as duas igualdades acima em (3.1.7), lembrando que  $\psi \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus K_\varepsilon$  e utilizando (3.1.5) concluímos que

$$0 \leq \int_K P_n \leq C_1(n) + C_2(n) + C_3(n) - C_4(n) + o(1), \quad (3.1.8)$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , com

$$C_1(n) := \int_{K_\varepsilon} |\nabla u_n|^{p-2} (\nabla u_n \cdot \nabla \psi) (u - u_n),$$

$$C_2(n) := \int_{K_\varepsilon} \lambda a(x) \psi (|u_n|^{p-2} u_n u - |u_n|^p),$$

$$C_3(n) := \int_{K_\varepsilon} (|u_n|^{p-2} u_n u - |u_n|^p) \psi \quad \text{e} \quad C_4(n) := \int_{K_\varepsilon} (|u_n|^{q-2} u_n u - |u_n|^q) \psi.$$

AFIRMAÇÃO 1: para  $1 \leq i \leq 4$ , temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_i(n) = 0$ .

De fato, a limitação de  $(u_n)$  em  $X$  nos fornece  $M$  tal que  $\|u_n\| \leq M$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, a convergência forte  $u_n \rightarrow u$  em  $L^p(K_\varepsilon)$ , implica que

$$\begin{aligned} |C_1(n)| &\leq |\nabla \psi|_\infty \int_{K_\varepsilon} |\nabla u_n|^{p-1} |u - u_n| \\ &\leq |\nabla \psi|_\infty \|u_n\|^{p-1} \|u - u_n\|_{p, K_\varepsilon} \\ &\leq |\nabla \psi|_\infty M^{p-1} \|u - u_n\|_{p, K_\varepsilon} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Para estimar os outros termos observamos inicialmente que, a menos de uma subsequência,

$$\int_{K_\varepsilon} |u_n|^p \rightarrow \int_{K_\varepsilon} |u|^p, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.1.9)$$

Note agora que

$$\| |u_n|^{p-2} u_n \|_{p/(p-1), K_\varepsilon} \leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p \right)^{(p-1)/p} \leq \|u_n\|^{p-1} \leq M^{p-1},$$

donde segue que  $(|u_n|^{p-2} u_n)$  é limitada em  $L^{p/(p-1)}(K_\varepsilon)$ . Usando este fato e a convergência pontual  $u_n(x) \rightarrow u(x)$  q.t.p.  $x \in K_\varepsilon$ , concluímos que  $|u_n|^{p-2} u_n \rightharpoonup |u|^{p-2} u$  fracamente em  $L^{p/(p-1)}(K_\varepsilon)$ . Portanto, como  $u \in (L^{p/(p-1)}(K_\varepsilon))^* = L^p(K_\varepsilon)$ ,

$$\int_{K_\varepsilon} |u_n|^{p-2} u_n u \rightarrow \int_{K_\varepsilon} |u|^p, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

A expressão acima, (3.1.9) e a limitação de  $a(x)\psi$  em  $K_\varepsilon$  implicam que  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_2(n) = 0$ . Da mesma maneira pode-se mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_3(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_4(n) = 0$ , o que conclui a prova da afirmação.

Usando a afirmação acima e (3.1.8), obtemos

$$0 \leq \int_K (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot \nabla (u_n - u) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.1.10)$$

AFIRMAÇÃO 2: A expressão acima implica que  $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$  em  $(L^p(K))^N$ .

Vamos usar que

$$(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b) \cdot (a - b) \geq M_p |a - b|^p,$$

para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}^N$  e alguma constante  $M_p > 0$  (veja [66, pg. 210]). Usando a desigualdade acima com  $a = \nabla u_n$  e  $b = \nabla u$ , e lembrando (3.1.10), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K |\nabla u_n - \nabla u|^p \\ &\leq \frac{1}{M_p} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot \nabla (u_n - u) = 0, \end{aligned}$$

conforme afirmado.

Como consequência imediata da afirmação 2 concluímos que  $\nabla u_n(x) \rightarrow \nabla u(x)$  q.t.p.  $x \in K$ . A arbitrariedade do compacto  $K$  e um processo diagonal estabelece a primeira parte de (3.1.6). Para provar a segunda afirmação em (3.1.6) é suficiente usar a primeira, a limitação de  $(|\nabla u_n|)$  em  $L^p(\mathbb{R}^N)$  e o mesmo argumento utilizado para mostrar que  $C_2(n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Dada uma função  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  temos

$$\langle I'_{\lambda,q}(u_n), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla \phi + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x) + 1) |u_n|^{p-2} u_n \phi - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q-2} u_n \phi.$$

Passando ao limite e usando (3.1.5) e (3.1.6) concluímos que  $\langle I'_{\lambda,q}(u), \phi \rangle = 0$ , donde segue que  $I'_{\lambda,q}(u) = 0$ . A limitação de  $(u_n)$  em  $X$ , as convergências pontuais em (3.1.5) e (3.1.6) e o lema de Brezis-Lieb implicam que.

$$I_{\lambda,q}(v_n) = I_{\lambda,q}(u_n) - I_{\lambda,q}(u) + o(1),$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{\lambda,q}(v_n) = c - I_{\lambda,q}(u)$ .

Resta apenas mostrar que  $I'_{\lambda,q}(v_n) \rightarrow 0$ . Para tanto note inicialmente que, dado  $\phi \in X$ , podemos computar

$$\langle I'_{\lambda,q}(v_n), \phi \rangle = \langle I'_{\lambda,q}(u_n), \phi \rangle - \langle I'_{\lambda,q}(u), \phi \rangle + C_5(n) + C_6(n) - C_7(n), \quad (3.1.11)$$

onde

$$C_5(n) := \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n + |\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n) \cdot \nabla \phi$$

$$C_6(n) := \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x) + 1) (|v_n|^{p-2} v_n + |u|^{p-2} u - |u_n|^{p-2} u_n) \phi$$

e

$$C_7(n) := \int_{\mathbb{R}^N} (|v_n|^{q-2} v_n + |u|^{q-2} u - |u_n|^{q-2} u_n) \phi.$$

Uma vez que  $(v_n)$  é limitada em  $X$ , segue que  $(\nabla v_n) \subset (L^p(\mathbb{R}^N))^N$  satisfaz as hipóteses do Lema 3.6. Assim, usando esse lema com  $w = \nabla u$  e a desigualdade de Hölder, vem

$$\begin{aligned} |C_5(n)| &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} \left| |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n + |\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \right|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} |\phi|_p \\ &\leq o(1) \|\phi\|, \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Da mesma maneira podemos mostrar que a estimativa acima vale também para  $C_6(n)$  e  $C_7(n)$ . Assim, como  $I'_{\lambda,q}(u_n) \rightarrow 0$  e  $I'_{\lambda,q}(u) = 0$ , obtemos de (3.1.11) que

$$|\langle I'_{\lambda,q}(v_n), \phi \rangle| \leq o(1) \|\phi\|, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

para toda  $\phi \in X$ . Isso implica que  $I'_{\lambda,q}(v_n) \rightarrow 0$  e conclui a prova do lema.  $\blacksquare$

Estamos prontos para provar o resultado de compacidade que vamos necessitar.

**DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 3.3.** Considere  $c_0$  dado pelo Lema 3.4(iii) e fixe  $\varepsilon > 0$  tal que  $2\varepsilon < c_0 pq/(q-p)$ . Dado  $C_0 > 0$  qualquer, escolhamos  $\Lambda_\varepsilon$  e  $R_\varepsilon$  dados pelo Lema 3.5 e vamos provar a veracidade da proposição para  $\Lambda_0 = \Lambda_\varepsilon$ . Seja então  $(u_n) \subset \mathcal{V}_{\lambda,q}^r$  tal que

$$I_{\lambda,q}(u_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad \|I'_{\lambda,q}(u_n)\|_* \rightarrow 0,$$

em que  $c \leq C_0$ ,  $\lambda \geq \Lambda_0$  e  $\|\cdot\|_*$  é a norma da derivada do funcional restrito. Argumentando como no Lema 2.2 concluímos que, de fato,  $I'_{\lambda,q}(u_n) \rightarrow 0$  em  $X^*$ . Assim, pelo Lema 3.7, podemos supor que  $u_n \rightharpoonup u$  fracamente em  $X$  e  $v_n = u_n - u$  é uma seqüência (PS) $_{c'}$  para  $I_{\lambda,q}$ , com  $c' = c - I_{\lambda,q}(u)$ . Afirmamos que  $c' = 0$  e portanto o Lema 3.4(ii) implica que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_\lambda^p = c' pq/(p-q) = 0$ . Como  $\|\cdot\|_\lambda$  é equivalente a  $\|\cdot\|$ , concluímos que  $u_n \rightarrow u$  fortemente em  $X$ .

Afim de verificar que  $c' = 0$  vamos supor, por contradição, que  $c' > 0$ . Pelo Lema 3.4(iii) temos que  $c' \geq c_0 > 0$ . Como  $v_n \rightarrow 0$  em  $L_{loc}^q(\mathbb{R}^N)$  segue dos Lemas 3.4(ii) e 3.5 que

$$\begin{aligned} c_0 \frac{pq}{q-p} &\leq c' \frac{pq}{q-p} = \lim_{n \rightarrow \infty} |v_n|_q^q \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{R_\varepsilon}} |v_n|^q + \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon}(0)} |v_n|^q \leq \frac{c_0}{2} \frac{pq}{q-p}, \end{aligned}$$



o que é um absurdo. Portanto  $c' = 0$  e a proposição está provada. ■

## 3.2 Soluções nodais minimais

Nessa seção apresentamos a prova dos teoremas que envolvem soluções nodais do problema  $(S_{\lambda,q}^\tau)$ . Conforme será visto, as demonstrações dos resultados de existência e multiplicidade seguem as mesmas linhas daquelas apresentadas no capítulo anterior. Dessa forma vamos destacar somente os detalhes que são diferentes dos anteriores. O primeiro resultado relaciona a energia de uma solução com o seu número de regiões nodais. Como a demonstração é análoga à do Lema 2.8, ela não será apresentada.

**Lema 3.8.** *Se  $u$  é uma solução do problema  $(S_{\lambda,q}^\tau)$  que troca de sinal  $2k - 1$  vezes, então  $I_{\lambda,q}(u) \geq kc_{\lambda,q}^\tau$ .*

### 3.2.1 Demonstração do Teorema 1.3

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.3. Seja  $q \in (p, p^*)$  fixado e  $\Lambda_0 = \Lambda_0(q)$  dado pela Proposição 3.3 com  $C_0 = m_{q,\Omega}^\tau = m_q^\tau$ , em que  $m_q^\tau$  é o mínimo relacionado com o problema  $(D_q^\tau)$  e definido em (2.1.2). Seja  $\lambda \geq \Lambda_0$  e  $(u_n) \subset \mathcal{V}_{\lambda,q}^\tau$  uma seqüência tal que  $I_{\lambda,q}(u_n) \rightarrow c_{\lambda,q}^\tau$ . Pelo princípio variacional de Ekeland podemos supor que  $\|I'_{\lambda,q}(u_n)\|_* \rightarrow 0$ . De acordo com o Lema 3.2(ii), temos que  $c_{\lambda,q}^\tau \leq m_q^\tau$ . Dessa forma, a Proposição 3.3 e a escolha de  $C_0$  nos assegura que, a menos de uma subseqüência,  $u_n \rightarrow u \in \mathcal{V}_{\lambda,q}^\tau$ . O princípio de criticalidade simétrica e o mesmo argumento do Lema 2.7 implica que  $u$  é um ponto crítico de  $I_{\lambda,q}$ . Segue então do Lema 3.8 que a função  $u$  (e também  $-u$ ) é uma solução do problema  $(S_{\lambda,q}^\tau)$  que troca de sinal exatamente uma vez. ■

As idéias acima nos permitem estender o resultado de existência em [7, Teorema 1.1] e provar o resultado abaixo.

**Teorema 3.9.** *Suponha que  $(A_1)$  e  $(A_2)$  valem. Então existe  $\Lambda_0 = \Lambda_0(q) > 0$  tal que, para todo  $\lambda \geq \Lambda_0$ , o problema  $(S_{\lambda,q})$  tem pelo menos uma solução positiva de energia mínima.*

DEMONSTRAÇÃO. Fixado  $q \in (p, p^*)$  considere  $\Lambda_0 = \Lambda_0(q)$  dado pela Proposição 3.3 com  $C_0 = m_{q,\Omega}$ . Para  $\lambda \geq \Lambda_0$ , argumentando como na prova do Teorema 1.3, podemos concluir que  $c_{\lambda,q}$  é atingido por algum  $u \in \mathcal{V}_{\lambda,q}$  que é uma solução de  $(S_{\lambda,q})$ . Da mesma maneira que no Lema 2.12, mostra-se facilmente que qualquer solução de  $(S_{\lambda,q})$  com energia inferior a  $2c_{\lambda,q}$  não troca de

sinal. Logo, podemos supor que  $u \geq 0$ . Segue então do princípio do máximo que  $u > 0$  em  $\mathbb{R}^N$ . Como  $\mathcal{V}_{\lambda,q}$  contém todas as soluções não triviais do problema  $(S_{\lambda,q})$ , é evidente que tal solução é de energia mínima. O teorema está provado. ■

### 3.2.2 Demonstração do Teorema 1.4

Nessa subseção vamos nos concentrar no estudo do comportamento assintótico das soluções de  $(S_{\lambda,q}^*)$ . Começamos com o seguinte resultado auxiliar, cuja demonstração foi baseada em [26, Lemma 4] (veja também [3, Lemma 1]).

**Lema 3.10.** *Seja  $M > 0$ ,  $\lambda_n \geq 1$  e  $(u_n) \subset X$  tais que  $\lambda_n \rightarrow \infty$  e  $\|u_n\|_{\lambda_n} \leq M$ . Então existe uma função  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  tal que, a menos de uma subsequência,  $u_n \rightarrow u$  fracamente em  $X$  e  $u_n \rightarrow u$  em  $L^s(\mathbb{R}^N)$ , para qualquer  $p \leq s < p^*$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Como  $\|u_n\| \leq \|u_n\|_{\lambda_n} \leq M$ , passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que  $u_n \rightarrow u$  fracamente em  $X$ . Provemos inicialmente que  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Para tanto, seja  $C_k = \{x \in \mathbb{R}^N \cap B_k(0) : a(x) > 1/k\}$ , para  $k \in \mathbb{N}$ . Então

$$\int_{C_k} |u_n|^p \leq k \int_{C_k} a(x) |u_n|^p \leq \frac{kM}{\lambda_n} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

para todo  $k$ . Assim, como  $C_k$  é limitado e  $u_n \rightarrow u$  em  $L_{loc}^p(\mathbb{R}^N)$ , temos que

$$\int_{C_k} |u|^p = 0, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

donde se conclui que  $u(x) = 0$  q.t.p.  $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$ . Da suavidade de  $\partial\Omega$  segue que  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Para verificar que  $u_n \rightarrow u$  em  $L^p(\mathbb{R}^N)$  definimos  $F = \{x \in \mathbb{R}^N : a(x) \leq M_0\}$ , em que  $M_0$  é dado pela hipótese  $(A_2)$ . Como  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  e  $\Omega \cap (\mathbb{R}^N \setminus F) = \emptyset$ , temos que  $u \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus F$ . Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus F} |u_n - u|^p = \int_{\mathbb{R}^N \setminus F} |u_n|^p \leq \frac{1}{\lambda_n M_0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus F} \lambda_n a(x) |u_n|^p \leq \frac{M}{\lambda_n M_0}.$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , uma vez que  $\lambda_n \rightarrow \infty$ , existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus F} |u_n - u|^p < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{sempre que } n \geq n_1. \quad (3.2.1)$$

Para  $R > 0$  arbitrário, denotamos  $B_R = B_R(0)$  e escolhemos  $r \in (1, N/(N-p))$ . Aplicando a desigualdade de Hölder, a imersão de Sobolev e usando a limitação de  $(u_n)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{F \cap (\mathbb{R}^N \setminus B_R)} |u_n - u|^p &\leq \mathcal{L}(F \cap (\mathbb{R}^N \setminus B_R))^{1/r'} \left( \int_{F \cap (\mathbb{R}^N \setminus B_R)} |u_n - u|^{rp} \right)^{1/r} \\ &\leq C_1 \mathcal{L}(F \cap (\mathbb{R}^N \setminus B_R))^{1/r'} |u_n - u|_{rp}^p \\ &\leq C_2 \mathcal{L}(F \cap (\mathbb{R}^N \setminus B_R))^{1/r'} \|u_n - u\|^p \\ &\leq C_3 \mathcal{L}(F \cap (\mathbb{R}^N \setminus B_R))^{1/r'}, \end{aligned}$$

em que  $r' = r/(r-1)$  é o expoente conjugado de  $r$ . Segue da hipótese  $(A_2)$  que  $\mathcal{L}(F) < \infty$ . Isso, juntamente com a expressão acima, implica que existe  $R_0 > 0$  tal que

$$\int_{F \cap (\mathbb{R}^N \setminus B_{R_0})} |u_n - u|^p < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.2.2)$$

Uma vez que  $u_n \rightarrow u$  em  $L_{loc}^p(\mathbb{R}^N)$ , existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\int_{F \cap B_{R_0}} |u_n - u|^p < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{sempre que } n \geq n_2.$$

Fazendo  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ , usando a expressão acima, (3.2.1) e (3.2.2), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^p < \varepsilon, \quad \text{sempre que } n \geq n_0,$$

isto é,  $u_n \rightarrow u$  em  $L^p(\mathbb{R}^N)$ .

Seja  $p < s < p^*$  fixado e escolha  $\theta > 0$  tal que  $1/s = \theta/p + (1-\theta)/p^*$ . Usando a desigualdade de Hölder e a continuidade da imersão  $X \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$  obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^s &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^{p^*} \right)^{(1-\theta)s/p^*} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^p \right)^{\theta s/p} \\ &\leq C_4 \|u_n - u\|^{(1-\theta)s} |u_n - u|_p^{\theta s} \\ &\leq C_5 |u_n - u|_p^{\theta s}. \end{aligned}$$

Como já sabemos que  $u_n \rightarrow u$  em  $L^p(\mathbb{R}^N)$ , a desigualdade acima implica que  $u_n \rightarrow u$  em  $L^s(\mathbb{R}^N)$ , o que conclui a prova do lema.  $\blacksquare$

**DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.4.** Seja  $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$  tal que  $\lambda_n \rightarrow \infty$  e  $(u_n) \subset X$  uma seqüência de soluções de  $(S_{\lambda_n, q}^T)$  tal que  $(I_{\lambda_n, q}(u_n))$  é limitada. Se  $(u_n)$  contiver uma subseqüência  $(u_{n_j}) \subset$

$(u_n)$  tal que  $u_{n_j} = 0$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ , então não há nada a fazer. Assim, podemos supor que  $u_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo,  $u_n \in \mathcal{V}_{\lambda_n, q}^\tau$  e

$$I_{\lambda_n, q}(u_n) = \frac{(q-p)}{pq} \|u_n\|_{\lambda_n}^p.$$

Da expressão acima e da limitação de  $(I_{\lambda_n, q}(u_n))$ , obtemos  $M > 0$  tal que  $\|u_n\|_{\lambda_n} \leq M$ . Vamos provar o teorema para  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  dada pelo Lema 3.10. Uma vez que  $I'_{\lambda_n, q}(u_n) = 0$  e  $a \equiv 0$  em  $\Omega$ , podemos argumentar como na prova de (3.1.6) e supor que

$$\nabla u_n(x) \rightarrow \nabla u(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega, \quad (3.2.3)$$

$$|\nabla u_n|^{p-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{fracamente em } (L^p(\Omega))^*, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3.2.4)$$

e

$$\int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla \phi + |u_n|^{p-2} u_n \phi) = \int_{\Omega} |u_n|^{q-2} u_n \phi,$$

qualquer que seja  $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Passando a expressão acima ao limite, usando (3.2.4) e o Lema 3.10 concluímos que  $u$  satisfaz a primeira equação em  $(D_q^\tau)$ . Como  $X^\tau$  é um subespaço fechado de  $X$ , é suficiente mostrarmos que  $u_n \rightarrow u$  fortemente em  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  para concluir também que  $\tau u = u$ .

Usando (3.2.3),  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  e o lema de Brezis-Lieb obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n - u)|^p &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} |\nabla u_n|^p + \int_{\Omega} |\nabla(u_n - u)|^p \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} |\nabla u_n|^p + \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p - \int_{\Omega} |\nabla u|^p + o(1) \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Além disso, usando novamente que  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x) |u_n - u|^p = \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |u_n|^p.$$

Isso, (3.2.5), o Lema 3.10 e o fato de  $u_n$  e  $u$  pertencerem à variedade de Nehari  $\mathcal{V}_{\lambda_n, q}^\tau$  implicam que

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{\lambda_n}^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n)|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n a(x) |u_n|^p - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + o(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + o(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + o(1) = o(1), \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto,  $\|u_n - u\|_0^p \leq \|u_n - u\|_{\lambda_n}^p \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$  e o teorema está provado. ■

Os mesmos argumentos utilizados acima nos permitem estender o resultado de concentração em [7, Teorema 1.3] para a caso quasilinear  $2 \leq p < N$  e provar o

**Teorema 3.11.** *Seja  $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$  tal que  $\lambda_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  e  $(u_n)$  uma seqüência de soluções positivas do problema  $(S_{\lambda_n, q})$  tal que  $I_{\lambda_n, q}(u_n)$  é limitado. Então, a menos de uma subsequência,  $u_n \rightarrow u$  forte em  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  com  $u$  sendo uma solução positiva do problema  $(D_q)$ .*

### 3.2.3 Demonstração do Teorema 1.5

Nessa subseção provamos o teorema de multiplicidade de soluções para  $(S_{\lambda, q}^\tau)$ . O resultado abaixo é ponto chave da nossa argumentação e relaciona  $(S_{\lambda, q})$  com seu problema limite  $(D_q)$ .

**Lema 3.12.** *Para todo  $q \in (p, p^*)$  temos  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} c_{\lambda, q} = m_{q, \Omega}$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Como  $\mathcal{N}_q \subset \mathcal{V}_{\lambda, q}$  sabemos que  $0 \leq c_{\lambda, q} \leq m_q$  para todo  $\lambda \geq 0$ . Suponha, por contradição, que o lema é falso. Então existe uma seqüência  $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$  tal que  $\lambda_n \rightarrow \infty$  e  $c_{\lambda_n, q} \rightarrow c < m_q$ . Pelo Teorema 3.9, para  $n$  suficientemente grande, existe  $(u_n) \in \mathcal{V}_{\lambda_n, q}$  tal que

$$c_{\lambda_n, q} = I_{\lambda_n, q}(u_n) = \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) |u_n|_q^q.$$

O Teorema 3.11 implica que, a menos de subsequência,  $u_n \rightarrow u$  em  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  (e também em  $L^q(\mathbb{R}^N)$ ) para uma solução  $u \in \mathcal{N}_q$  do problema  $(D_q)$ . Tomando o limite na expressão acima vem

$$c = \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) |u|_q^q = \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) |u|_{q, \Omega}^q = E_q(u),$$

e portanto  $c$  é atingido por  $E_q$  em  $\mathcal{N}_q$ . Segue da definição de  $m_q$  que  $c \geq m_q$ , o que é uma contradição. O lema está provado. ■

Fixamos, daqui por diante, um número  $r > 0$  suficientemente pequeno de forma que os conjuntos

$$\Omega_{2r}^+ = \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, \Omega) < 2r\}$$

e

$$\Omega_r^- = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega \cup \Omega^c) \geq r\}.$$

sejam tais que as inclusões  $\Omega_r^- \hookrightarrow \Omega \setminus \Omega^r$  e  $\Omega \hookrightarrow \Omega_{2r}^+$  são equivalências equivariantes de homotopia. Sem perda de generalidade podemos também supor que  $B_r(0) \subset \Omega$ .

Seguindo [7], escolhemos  $R > 0$  tal que  $\bar{\Omega} \subset B_R(0)$  e definimos

$$\xi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq R, \\ R/t & \text{se } t \geq R. \end{cases}$$

Também definimos, para  $u \in \mathcal{V}_{\lambda,q}$ , a função baricentro truncada

$$\bar{\beta}_q(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \xi(|x|) x \, dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \, dx}.$$

**Lema 3.13 ([7, Lema 3.8]).** *Existe  $q_1 \in (p, p^*)$  com a seguinte propriedade: para cada  $q \in (q_1, p^*)$ , existe um número  $\Lambda_1 = \Lambda_1(q)$  tal que, para todo  $\lambda \geq \Lambda_1$ , temos  $m_{q,r} < 2c_{\lambda,q}$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Como, pelo Lema 2.4,  $m_{q,r}$  e  $m_q$  têm o mesmo limite quando  $q \rightarrow p^*$ , existe  $q_1$  tal que

$$m_{q,r} < \frac{3}{2}m_q, \quad \text{para todo } q \in (q_1, p^*).$$

Afirmamos que o lema vale para  $q_1$  como acima. De fato, suponha por contradição que existe  $q \in (q_1, p^*)$  e  $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$  tal que  $\lambda_n \rightarrow \infty$  e  $m_{q,r} \geq 2c_{\lambda_n,q}$ . Da expressão acima segue que

$$\frac{3}{2}m_q > 2c_{\lambda_n,q}.$$

Passando ao limite e usando o Lema 3.12 concluímos que  $3m_q \geq 4m_q$ , donde segue que  $m_q = 0$ . Mas isso é uma contradição e o lema está provado. ■

**Lema 3.14 ([7, Lema 3.8]).** *Existe  $q_2 \in (p, p^*)$  com a seguinte propriedade: para cada  $q \in (q_2, p^*)$ , existe um número  $\Lambda_2 = \Lambda_2(q)$  tal que, para todo  $\lambda \geq \Lambda_2$ , temos que  $\bar{\beta}_q(u) \in \Omega_{2r}^+$  sempre que  $u \in \mathcal{V}_{\lambda,q}$  e  $I_{\lambda,q}(u) \leq m_{q,r}$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $q_2 = q_0(r)$  dado pelo Lema 2.5. Suponha, por contradição, que o lema é falso para essa escolha de  $q_2$ . Então existe  $q \in (q_2, p^*)$ ,  $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ ,  $u_n \in \mathcal{V}_{\lambda_n,q}$  tais que  $\lambda_n \rightarrow \infty$ ,

$$I_{\lambda_n,q}(u_n) = \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|u_n\|_{\lambda_n}^p \leq m_{q,r}$$

e  $\bar{\beta}_q(u_n) \notin \Omega_{2r}^+$ . A expressão acima mostra que as todas as hipóteses do Lema 3.10 são satisfeitas, de modo que existe  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $L^s(\mathbb{R}^N)$  para todo  $p \leq s < p^*$ .

Como  $u_n \in \mathcal{V}_{\lambda_n, q}$  temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + |u_n|^p) \leq \|u_n\|_{\lambda_n}^p = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q.$$

Lembrando que a norma  $\|\cdot\|_0$  é fracamente semi-contínua inferiormente e que  $u_n \rightarrow u$  em  $L^q(\mathbb{R}^N)$ , podemos usar a expressão acima para obter

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + |u|^p) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + |u_n|^p) \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q,$$

ou ainda, como  $u \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ ,

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^p + |u|^p) \leq \int_{\Omega} |u|^q.$$

A expressão acima implica que existe  $t \in (0, 1]$  tal que

$$\int_{\Omega} (|\nabla(tu)|^p + |tu|^p) = \int_{\Omega} |tu|^q,$$

isto é,  $tu \in \mathcal{N}_{q, \Omega}$ . Desta forma, temos

$$\begin{aligned} E_{q, \Omega}(tu) &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \int_{\Omega} (|\nabla(tu)|^p + |tu|^p) \\ &\leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + |u|^p) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + (\lambda_n a(x) + 1)|u_n|^p) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} I_{\lambda_n, q}(u_n) \leq m_{q, r}. \end{aligned}$$

Segue da desigualdade acima e do Lema 2.5 que  $\beta_q(tu) \in \Omega_r^+$ . Como  $u_n \rightarrow u$  em  $L^q(\mathbb{R}^N)$ , podemos usar o Teorema de Lebesgue, a definição de  $\xi$  e  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  para obter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\beta}_q(u_n) = \bar{\beta}_q(u) = \beta_q(u) = \beta_q(tu) \in \Omega_r^+.$$

Mas isso contradiz o fato de  $\bar{\beta}_q(u_n) \notin \Omega_{2r}^+$  e conclui a demonstração do lema. ■

O resultado abaixo é uma versão do Lema 2.9.

**Lema 3.15.** *Seja  $q_2$  dado pelo Lema 3.14,  $q \in (q_2, p^*)$  e  $\Lambda_2 = \Lambda_2(q)$  satisfazendo a propriedade do enunciado do Lema 3.14. Então, para todo  $\lambda \geq \Lambda_2(q)$ , existem duas aplicações*

$$\Omega_r^- \xrightarrow{\alpha_q} \mathcal{V}_{\lambda, q}^\tau \cap I_{\lambda, q}^{2m_{q, r}} \xrightarrow{\gamma_q} \Omega_{2r}^+$$

tais que  $\alpha_q(\tau x) = -\alpha_q(x)$ ,  $\gamma_q(-u) = \tau\gamma_q(u)$ , e  $\gamma_q \circ \alpha_q$  é equivariantemente homotópico à inclusão  $\Omega_r^- \hookrightarrow \Omega_{2r}^+$ . Em particular,

$$\mathbb{Z}_2\text{-cat}(\mathcal{V}_{\lambda,q}^\tau \cap I_{\lambda,q}^{2m_{q,r}}) \geq \tau\text{-cat}_\Omega(\Omega \setminus \Omega^\tau),$$

para todo  $\lambda \geq \Lambda_2(q)$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Para  $q \in (q_2, p^*)$  fixado e  $\lambda \geq \Lambda_2(q)$ , seja  $v_q \in \mathcal{N}_{q,B_r(0)}$  uma função radial e positiva tal que  $E_{q,B_r(0)}(v_q) = m_{q,r}$ . Defina  $\alpha_q : \Omega_r^- \rightarrow \mathcal{V}_{\lambda,q}^\tau \cap I_{\lambda,q}^{2m_{q,r}}$  por

$$\alpha_q(x) = v_q(\cdot - x) - v_q(\cdot - \tau x).$$

Dado  $x \in \Omega_r^-$ , segue do Lema 2.9 que  $\alpha_q(x) \in \mathcal{N}_q^\tau \cap E_q^{2m_{q,r}}$  e  $\alpha_q(\tau x) = -\alpha_q(x)$ . Além disso, como  $a \equiv 0$  em  $\Omega$ , concluímos que  $I_{\lambda,q}(\alpha_q(x)) = E_q(\alpha_q(x)) = 2m_{q,r}$  e que  $\alpha_q(x) \in \mathcal{V}_{\lambda,q}^\tau$ . Logo,  $\alpha_q$  está bem definida. Como  $u^+ \in \mathcal{V}_{\lambda,q}^\tau \cap I_{\lambda,q}^{m_{q,r}}$ , o Lema 3.14 implica que  $\gamma_q(u) = \bar{\beta}(u^+) \in \Omega_{2r}^+$ . É suficiente agora repetir os argumentos usados na prova do Lema 2.9. ■

Estamos prontos para provar o Teorema 1.5.

**DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.5.** Sejam  $q_1$  e  $q_2$  dados pelos Lemas 3.13 e 3.14, respectivamente. Defina  $q_* = \max\{q_1, q_2\}$ . Fixado  $q \in (q_*, p^*)$  sejam  $\Lambda_1 = \Lambda_1(q)$  e  $\Lambda_2 = \Lambda_2(q)$  dados pelos Lemas 3.13 e 3.14, respectivamente. Definimos ainda  $\Lambda = \Lambda(q) = \max\{\Lambda_0(q), \Lambda_1(q), \Lambda_2(q)\}$ , onde  $\Lambda_0(q)$  é dado pela aplicação da Proposição 3.3 com  $C_0 = 2m_{q,r}$ . Vamos provar que o teorema vale para essa escolha de  $q_*$  e  $\Lambda$ .

Seja então  $\lambda \geq \Lambda$ . Como o funcional  $I_{\lambda,q}$  restrito a  $\mathcal{V}_{\lambda,q}^\tau$  é par e satisfaz Palais-Smale abaixo do nível  $2m_{q,r}$ , podemos aplicar o Teorema A.9 para obter  $\mathbb{Z}_2\text{-cat}(\mathcal{V}_{\lambda,q}^\tau \cap I_{\lambda,q}^{2m_{q,r}})$  pares  $\pm u_i$  de pontos críticos com

$$I_{\lambda,q}(\pm u_i) \leq 2m_{q,r} < 4c_{\lambda,q} < 2c_{\lambda,q}^\tau$$

em que usamos os Lemas 3.13 e 3.2(i). A desigualdade acima, a definição de  $X^\tau$ , o Lema 3.8 e o mesmo argumento usando na demonstração do Teorema 1.3 mostram que  $u_i$  é uma solução de  $(S_{\lambda,q}^\tau)$  que troca de sinal exatamente uma vez. Finalmente, segue do Lema 3.15 que

$$\mathbb{Z}_2\text{-cat}(\mathcal{N}_q^\tau \cap E_q^{2m_{q,r}}) \geq \tau\text{-cat}_\Omega(\Omega \setminus \Omega^\tau)$$

e o teorema está provado. ■

Usando o teorema acima e o mesmo argumento do Corolário 1.1, podemos facilmente provar o resultado seguinte.



**Corolário 3.16.** *Suponha que  $(A_1)$  e  $(A_2)$  valem,  $\Omega$  é limitado e simétrico com relação à origem e  $0 \notin \Omega$ . Suponha ainda que o potencial  $a$  é par e que existe uma aplicação contínua e ímpar  $\varphi : \mathbb{S}^{N-1} \rightarrow \Omega$ . Então existe  $q_* \in (p, p^*)$  com a propriedade de, para cada  $q \in (q_*, p^*)$ , existe um número  $\Lambda(q) > 0$  tal que, para todo  $\lambda \geq \Lambda(q)$ , o problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u + (\lambda a(x) + 1)|u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

*tem pelo menos  $N$  pares de soluções ímpares que trocam de sinal exatamente uma vez.*

O resultado abaixo mostra que as soluções obtidas pelo corolário acima, bem como aquelas obtidas pelos Teoremas 1.3 e 1.5, se concentram em soluções nodais minimais de  $(D_q^\tau)$ .

**Corolário 3.17.** *Seja  $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$  tal que  $\lambda_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  e  $(u_n)$  uma seqüência de soluções do problema  $(S_{\lambda_n,q}^\tau)$  dada pelo Teorema 1.3, pelo Teorema 1.5 ou pelo Corolário 3.16. Então, a menos de uma subsequência,  $u_n \rightarrow u$  forte em  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  com  $u$  sendo uma solução do problema  $(D_q^\tau)$  que troca de sinal exatamente uma vez.*

**DEMONSTRAÇÃO.** Vamos usar as mesmas notações da demonstração do Teorema 1.3. Lembrando que  $I'_{\lambda_n,q}(u_n) = 0$  e que a energia das soluções  $u_n$  estão no intervalo  $[c_{\lambda_n,q}^\tau, 2m_{q,r}]$ , podemos usar os Lemas 3.4(iii), 3.13 e 3.2 para concluir que

$$0 < c_0 \leq c_{\lambda_n,q}^\tau \leq I_{\lambda_n,q}(u_n) \leq 2m_{q,r} < 4c_{\lambda_n,q} \leq 2c_{\lambda_n,q}^\tau \leq 2m_{q,\Omega}^\tau. \quad (3.2.6)$$

Pelo Teorema 1.4 sabemos que, a menos de uma subsequência,  $u_n \rightarrow u$  em  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  com  $u$  sendo uma solução de  $(D_q^\tau)$ . Além disso, passando a expressão acima ao limite, obtemos

$$0 < c_0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I_{\lambda_n,q}(u_n) = E_q(u) < 2m_{q,\Omega}^\tau.$$

A expressão acima e o Lema 2.8 implicam que  $u$  troca de sinal exatamente uma vez. ■

---

### 3.3 Multiplicidade de soluções positivas para $(S_{\lambda,q})$

---

Nessa seção vamos obter um resultado de multiplicidade de soluções positivas para o problema  $(S_{\lambda,q})$ . Nesse contexto a hipótese de simetria  $(A_3)$  não é necessária. A idéia é argumentar como na última seção do capítulo anterior e estender o resultado em [7, Teorema 1.2] para o caso quasilinear  $2 \leq p < N$ . Enunciamos abaixo nosso resultado de multiplicidade para soluções positivas.

**Teorema 3.18.** *Suponha que  $(A_1)$ - $(A_2)$  valem e que  $\Omega$  é limitado. Então existe  $q_* \in (p, p^*)$  com a propriedade de, para cada  $q \in (q_*, p^*)$ , existe um número  $\Lambda(q) > 0$  tal que, para todo  $\lambda \geq \Lambda(q)$ , o problema  $(S_{\lambda,q})$  tem pelo menos  $\text{cat}(\Omega)$  soluções positivas.*

Para provar o teorema acima vamos trabalhar com o funcional  $I_{\lambda,q}$  restrito à variedade de Nehari usual  $\mathcal{V}_{\lambda,q}$ . Fixamos  $r > 0$  tal que os conjuntos  $\Omega_{2r}^+$  e

$$\tilde{\Omega}_r^- = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq r\}$$

sejam homotopicamente equivalentes a  $\Omega$  e  $B_r(0) \subset \Omega$ .

**Lema 3.19.** *Seja  $q_2$  dado pelo Lema 3.14,  $q \in (q_2, p^*)$  e  $\Lambda_2 = \Lambda_2(q)$  satisfazendo a propriedade do enunciado do Lema 3.14. Então*

$$\text{cat}_{\mathcal{V}_{\lambda,q} \cap I_{\lambda,q}^{m_{q,r}}}(\mathcal{V}_{\lambda,q} \cap I_{\lambda,q}^{m_{q,r}}) \geq 2\text{cat}(\Omega),$$

para todo  $\lambda \geq \Lambda_2(q)$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Para  $q \in (q_2, p^*)$  fixado e  $\lambda \geq \Lambda_2(q)$ , seja  $v_q \in \mathcal{N}_{q,B_r(0)}$  uma função radial e positiva tal que  $I_{\lambda,q}(v_q) = E_{q,B_r(0)}(v_q) = m_{q,r}$  e defina os conjuntos

$$\Sigma_q^+ = \{u \in \mathcal{V}_{\lambda,q} \cap I_{\lambda,q}^{m_{q,r}} : u \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^N\} \quad \text{e} \quad \Sigma_q^- = \{u \in \mathcal{V}_{\lambda,q} \cap I_{\lambda,q}^{m_{q,r}} : u \leq 0 \text{ em } \Omega\}.$$

Argumentando como no Lema 2.13 concluímos que  $\text{cat}_{\mathcal{V}_{\lambda,q} \cap I_{\lambda,q}^{m_{q,r}}}(\Sigma_q^\pm) \geq \text{cat}_{\Omega_{2r}^+}(\tilde{\Omega}_r^-)$ . Como  $\Sigma_q^+ \cap \Sigma_q^- = \emptyset$ , temos que

$$\begin{aligned} \text{cat}_{\mathcal{V}_{\lambda,q} \cap I_{\lambda,q}^{m_{q,r}}}(\mathcal{V}_{\lambda,q} \cap I_{\lambda,q}^{m_{q,r}}) &\geq \text{cat}_{\mathcal{V}_{\lambda,q} \cap I_{\lambda,q}^{m_{q,r}}}(\Sigma_q^+ \cup \Sigma_q^-) \\ &\geq \text{cat}_{\mathcal{V}_{\lambda,q} \cap I_{\lambda,q}^{m_{q,r}}}(\Sigma_q^+) + \text{cat}_{\mathcal{V}_{\lambda,q} \cap I_{\lambda,q}^{m_{q,r}}}(\Sigma_q^-) \\ &\geq 2\text{cat}_{\Omega_{2r}^+}(\tilde{\Omega}_r^-) = 2\text{cat}(\Omega), \end{aligned}$$

e o lema está provado. ■

**DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.18.** Sejam  $q_1$  e  $q_2$  dados pelos Lemas 3.13 e 3.14, respectivamente. Defina  $q_* = \max\{q_1, q_2\}$ . Fixado  $q \in (q_*, p^*)$  sejam  $\Lambda_1 = \Lambda_1(q)$  e  $\Lambda_2 = \Lambda_2(q)$  dados pelos Lemas 3.13 e 3.14, respectivamente. Definimos ainda  $\Lambda = \Lambda(q) = \max\{\Lambda_0(q), \Lambda_1(q), \Lambda_2(q)\}$ , onde  $\Lambda_0(q)$  é dado pela aplicação da Proposição 3.3 com  $C_0 = m_{q,r}$ . Dado  $\lambda > \Lambda$  podemos usar o Teorema A.7, o lema acima e o Lema 3.13 para obter  $\text{cat}(\mathcal{V}_{\lambda,q} \cap I_{\lambda,q}^{m_{q,r}}) \geq 2 \text{cat}(\Omega)$  pontos críticos  $u_i$  tais que  $I_{\lambda,q}(u_i) \leq m_{q,r} < 2c_{\lambda,q}$ . Da mesma maneira que no Lema 2.12, mostra-se que esses pontos críticos não trocam de sinal. Como  $I_{\lambda,q}$  é par, existem pelo menos  $\text{cat}(\Omega)$  soluções de  $(S_{\lambda,q})$  tais que  $u_i \geq 0$ . O princípio do máximo mostra que  $u_i > 0$  em  $\mathbb{R}^N$ , e o teorema está provado. ■

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## Equação quasilinear crítica

Nesse capítulo estudamos o problema

$$(D_\mu^\tau) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \mu|u|^{q-2}u + |u|^{p^*-2}u & \text{em } \Omega, \\ u(\tau x) = -u(x) & \text{para todo } x \in \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado e suave,  $N \geq p^2$ ,  $p < q < p^*$  e o domínio  $\Omega$  satisfaz a seguinte condição de simetria

(H) existe  $\tau \in O(N)$  tal que  $\tau \neq \text{Id}$ ,  $\tau^2 = \text{Id}$  e  $\tau(\Omega) = \Omega$ .

Denotando por  $\mu_1(\Omega)$  o primeiro autovalor de  $-\Delta_p$  em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , provamos os seguintes resultados:

**Teorema 1.6.** *Suponha que (H) vale. Então, para todo  $\mu \in (0, \mu_1(\Omega))$ , o problema  $(D_\mu^\tau)$  tem pelo menos um par de soluções que trocam de sinal exatamente uma vez.*

**Teorema 1.7.** *Suponha que (H) vale. Então existe  $\mu_* \in (0, \mu_1(\Omega))$  tal que, para todo  $\mu \in (0, \mu_*)$ , o problema  $(D_\mu^\tau)$  tem pelo menos  $\tau$ -cat $_\Omega(\Omega \setminus \Omega^\tau)$  pares de soluções que trocam de sinal exatamente uma vez.*

## 4.1 Notações e alguns resultados técnicos

Nesse capítulo vamos trabalhar no espaço  $W_0^{1,p}(\Omega)$  munido da norma

$$\|u\|_\Omega = \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^p \right\}^{1/p}$$

e denotar por  $|u|_{s,\Omega}$  a  $L^s(\Omega)$ -norma de uma função  $u \in L^s(\Omega)$ . A involução  $\tau$  dada pela hipótese (H) induz uma ação em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , conforme definido em (2.1.1), e o subespaço dos elementos fixados pela ação é denotado por  $W_0^{1,p}(\Omega)^\tau$ .

As soluções clássicas do problema  $(D_\mu)$  são precisamente os pontos críticos do funcional  $E_{\mu,\Omega} \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$  dado por

$$E_{\mu,\Omega}(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p - \frac{\mu}{q} \int_\Omega |u|^q - \frac{1}{p^*} \int_\Omega |u|^{p^*},$$

que pertencem também ao subespaço invariante  $W_0^{1,p}(\Omega)^\tau$ . Como antes, definimos as variedades de Nehary

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mu,\Omega} &= \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : \langle E'_{\mu,\Omega}(u), u \rangle = 0\} \\ &= \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : \|u\|_\Omega^p = \mu |u|_{q,\Omega}^q + |u|_{p^*,\Omega}^{p^*} \right\} \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{N}_{\mu,\Omega}^\tau = \{u \in \mathcal{N}_{\mu,\Omega} : \tau u = u\} = \mathcal{N}_{\mu,\Omega} \cap W_0^{1,p}(\Omega)^\tau,$$

bem como os problemas de minimização

$$m_{\mu,\Omega} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{\mu,\Omega}} E_{\mu,\Omega}(u) \quad \text{e} \quad m_{\mu,\Omega}^\tau = \inf_{u \in \mathcal{N}_{\mu,\Omega}^\tau} E_{\mu,\Omega}(u).$$

O lema abaixo mostra que  $m_{\mu,\Omega}^\tau > 0$  e portanto o segundo problema acima está bem definido. Naturalmente, o mesmo vale para  $m_{\mu,\Omega}$ .

**Lema 4.1.** *Suponha que  $q = p$  e  $\mu \in (0, \mu_1(\Omega))$  ou  $p < q < p^*$  e  $\mu > 0$ . Então existe  $r_{\mu,q,\Omega} > 0$  tal que*

$$\|u\|_\Omega \geq r_{\mu,q,\Omega}, \tag{4.1.1}$$

para todo  $u \in \mathcal{N}_{\mu,\Omega}^\tau$ . Em particular  $m_{\mu,\Omega}^\tau > 0$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Suponha inicialmente que  $q = p$  e  $\mu \in (0, \mu_1(\Omega))$ . Usando a definição de  $\mu_1(\Omega)$  e a imersão de Sobolev  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$  temos que, se  $u \in \mathcal{N}_{\mu,\Omega}$ , então

$$\left(1 - \frac{\mu}{\mu_1(\Omega)}\right) \|u\|_\Omega^p \leq \|u\|_\Omega^p - \mu |u|_{p,\Omega}^p = |u|_{p^*,\Omega}^{p^*} \leq C_1 \|u\|_\Omega^{p^*},$$

para algum  $C_1 > 0$ . Assim,

$$\left(1 - \frac{\mu}{\mu_1(\Omega)}\right) \leq C_1 \|u\|_{\Omega}^{p^*-p},$$

e portanto o item (i) vale para  $r_{\mu,q,\Omega} = \left\{\frac{1}{C_1} \left(1 - \frac{\mu}{\mu_1(\Omega)}\right)\right\}^{1/(p^*-p)}$ . Conseqüentemente, se  $u \in \mathcal{N}_{q,\Omega}^{\tau}$ , então

$$\begin{aligned} E_{\mu,\Omega}(u) &= \frac{1}{p} \|u\|_{\Omega}^p - \frac{\mu}{p} |u|_{p,\Omega}^p - \frac{1}{p^*} |u|_{p^*,\Omega}^{p^*} \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right) (\|u\|_{\Omega}^p - \mu |u|_{p,\Omega}^p) \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right) \left(1 - \frac{\mu}{\mu_1(\Omega)}\right) \|u\|_{\Omega}^p \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right) \left(1 - \frac{\mu}{\mu_1(\Omega)}\right) r_{\mu,q,\Omega}^p, \end{aligned}$$

e o item (ii) se segue.

Vamos agora considerar o caso  $p < q < p^*$  e  $\mu > 0$ . Usando as imersões de Sobolev obtemos  $C_2 > 0$  tal que

$$\|u\|_{\Omega}^p = \mu |u|_{q,\Omega}^q + |u|_{p^*,\Omega}^{p^*} \leq \mu C_2 \|u\|_{\Omega}^q + C_1 \|u\|_{\Omega}^{p^*},$$

ou ainda

$$1 \leq \mu C_2 \|u\|_{\Omega}^{q-p} + C_1 \|u\|_{\Omega}^{p^*-p},$$

sempre que  $u \in \mathcal{N}_{\mu,\Omega}^{\tau}$ . Como  $q > p$  e  $p^* > p$ , a expressão acima mostra que não pode existir  $(u_n) \subset \mathcal{N}_{\mu,\Omega}^{\tau}$  com  $\|u_n\|_{\Omega} \rightarrow 0$ , donde segue o item (i).

Para verificar (ii) note inicialmente que, se  $u \in \mathcal{N}_{\mu,\Omega}^{\tau}$ , então

$$\begin{aligned} E_{\mu,\Omega}(u) &= \frac{1}{p} \|u\|_{\Omega}^p - \frac{\mu}{q} |u|_{q,\Omega}^q - \frac{1}{p^*} |u|_{p^*,\Omega}^{p^*} \\ &= \mu \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) |u|_{q,\Omega}^q + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right) |u|_{p^*,\Omega}^{p^*} \geq 0, \end{aligned}$$

e portanto  $m_{\mu,\Omega}^{\tau} \geq 0$ . Suponha, por contradição, que  $m_{\mu,\Omega}^{\tau} = 0$ . Então existe  $(u_n) \subset \mathcal{N}_{\mu,\Omega}^{\tau}$  tal que  $E_{\mu,\Omega}(u_n) \rightarrow 0$ . A expressão acima mostra que, nesse caso, devemos ter  $|u_n|_{q,\Omega}^q \rightarrow 0$  e  $|u_n|_{p^*,\Omega}^{p^*} \rightarrow 0$ , donde se conclui que  $\|u_n\|_{\Omega}^p \rightarrow 0$ , contrariando o item (i). Logo  $m_{\mu,\Omega}^{\tau} > 0$  e o lema está provado. ■

Dado um domínio  $\tau$ -invariante  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$  definimos  $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$ ,  $E_{\mu,\mathcal{D}}$ ,  $\mathcal{N}_{\mu,\mathcal{D}}$ ,  $\mathcal{N}_{\mu,\mathcal{D}}^{\tau}$ ,  $m_{\mu,\mathcal{D}}$  e  $m_{\mu,\mathcal{D}}^{\tau}$  de maneira análoga, mas tomando as integrais sobre o conjunto  $\mathcal{D}$  ao invés de  $\Omega$ . Sempre que

omitirmos a referência ao conjunto nas notações acima, estamos supondo que  $\mathcal{D} = \Omega$ . Escrevemos simplesmente  $m_{\mu,r}$  e  $m_{\mu,r}^\tau$  para denotar  $m_{\mu,B_r(0)}$  e  $m_{\mu,B_r(0)}^\tau$ , respectivamente.

O lema abaixo estabelece uma importante propriedade de  $m_\mu$ .

**Lema 4.2.** *A função  $\mu \mapsto m_\mu$  é não-crescente em  $[0, \infty)$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.** Sejam  $0 \leq \mu_1 < \mu_2$  dados. Precisamos verificar que  $m_{\mu_2} \leq m_{\mu_1}$ . Para tanto, note inicialmente que

$$E_\mu(u) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \|u\|^p + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}\right) |u|_{p^*}^{p^*},$$

qualquer que seja  $\mu \geq 0$  e  $u \in \mathcal{N}_\mu$ .

**AFIRMAÇÃO:** Para cada  $u \in \mathcal{N}_{\mu_1}$  existe  $t_u \in (0, 1)$  tal que  $t_u u \in \mathcal{N}_{\mu_2}$ .

Usando a afirmação acima obtemos, para  $u \in \mathcal{N}_{\mu_1}$ ,

$$\begin{aligned} E_{\mu_2}(t_u u) &= t_u^p \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \|u\|^p + t_u^{p^*} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}\right) |u|_{p^*}^{p^*} \\ &\leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \|u\|^p + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}\right) |u|_{p^*}^{p^*} = E_{\mu_1}(u), \end{aligned}$$

donde se conclui que

$$m_{\mu_2} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{\mu_2}} E_{\mu_2}(u) \leq \inf_{u \in \mathcal{N}_{\mu_1}} E_{\mu_2}(t_u u) \leq \inf_{u \in \mathcal{N}_{\mu_1}} E_{\mu_1}(u) = m_{\mu_1}.$$

Resta então mostrar a veracidade da afirmação. Para tanto note que, como  $u \in \mathcal{N}_{\mu_1}$ ,

$$\|t_u u\|^p = t^p \mu_1 |u|_q^q + t^{p^*} |u|_{p^*}^{p^*}.$$

Assim, precisamos encontrar  $t > 0$  tal que

$$t^p \mu_1 |u|_q^q + t^{p^*} |u|_{p^*}^{p^*} = t^q \mu_2 |u|_q^q + t^{p^*} |u|_{p^*}^{p^*},$$

o que é equivalente a obter uma raiz positiva da função  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(t) = t^{q-p} \mu_2 |u|_q^q + t^{p^*-p} |u|_{p^*}^{p^*} - \left(\mu_1 |u|_q^q + |u|_{p^*}^{p^*}\right)$$

Observe que  $g(0) < 0$ ,  $g(t) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$  e  $g'(t) > 0$ . Logo, existe um único  $t_u > 0$  tal que  $g(t_u) = 0$ . Como  $\mu_1 < \mu_2$ , concluímos que

$$g(1) = \mu_2 |u|_q^q + |u|_{p^*}^{p^*} - \mu_1 |u|_q^q - |u|_{p^*}^{p^*} = (\mu_2 - \mu_1) |u|_q^q > 0,$$

e portanto  $t_u \in (0, 1)$ . Isso conclui a prova do lema. ■

### 4.1.1 A condição de Palais-Smale

O objetivo dessa subseção é estabelecer uma condição de compacidade local para o funcional  $E_\mu$ . Como a imersão  $L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$  não é compacta, não é possível argumentar como no Lema 2.2. No trabalho pioneiro de Brezis e Nirenberg [18], os autores trabalharam com o caso semilinear  $p = 2$  e mostraram que, mesmo com a imersão acima não sendo compacta, o funcional  $E_\mu$  satisfaz a condição de Palais-Smale em  $H_0^1(\Omega)$  abaixo do nível crítico  $\frac{1}{N}S^{N/2}$ . O caso quasilinear foi tratado por Garcia Azorero e Peral Alonso [38, 39]. Dentre outros resultados, eles mostraram que para o funcional  $E_\mu$  em  $W_0^{1,p}(\Omega)$  o nível crítico é igual a  $\frac{1}{N}S^{N/p}$ . Além disso, através de um cálculo preciso do nível mini-max do funcional  $E_\mu$ , eles provaram o seguinte resultado de existência de solução positiva para  $(D_\mu)$ .

**Teorema 4.3.** *Seja  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado e suave. Suponha que  $q = p$  e  $\mu \in (0, \mu_1(\mathcal{D}))$  ou  $q < p < p^*$  e  $\mu > 0$ . Então o ínfimo  $m_{\mu,\mathcal{D}}$  é atingido por uma função positiva  $u \in \mathcal{N}_{\mu,\mathcal{D}}$ . Além disso,*

$$m_{\mu,\mathcal{D}} < \frac{1}{N}S^{N/p}.$$

Estabelecemos abaixo um resultado de compacidade local para o funcional  $E_\mu$  em  $W_0^{1,p}(\Omega)^\tau$ . Observe que a simetria das funções nos permite obter compacidade abaixo do nível  $\frac{2}{N}S^{N/p}$ , que é exatamente o dobro do nível crítico para o funcional  $E_\mu$  no espaço  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

**Lema 4.4.** *Suponha que  $q = p$  e  $\mu \in (0, \mu_1(\Omega))$  ou  $q < p < p^*$  e  $\mu > 0$ . Seja  $(u_n) \subset \mathcal{N}_\mu^\tau$  uma seqüência tal que  $\|E'_\mu(u_n)\|_* \rightarrow 0$  e  $E_\mu(u_n) \rightarrow c < \frac{2}{N}S^{N/p}$ . Então  $(u_n)$  possui uma subsequência convergente.*

**DEMONSTRAÇÃO.** Vamos mostrar inicialmente que  $(u_n)$  é limitada em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Lembremos então que

$$\|u_n\|^p = \mu|u_n|_q^q + |u_n|_{p^*}^{p^*}, \quad (4.1.2)$$

donde segue que

$$E_\mu(u_n) = \mu \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) |u_n|_q^q + \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) |u_n|_{p^*}^{p^*}. \quad (4.1.3)$$

Suponha inicialmente que  $q = p$  e  $\mu \in (0, \mu_1(\Omega))$ . Usando a definição de  $\mu_1(\Omega)$  e (4.1.2) obtemos

$$\left( 1 - \frac{\mu}{\mu_1(\Omega)} \right) \|u_n\|^p \leq |u_n|_{p^*}^{p^*}.$$

Como  $E_\mu(u_n) \rightarrow c$  e  $p < p^*$ , (4.1.3) e a expressão acima implicam que  $(u_n)$  tem que ser limitada. Se  $p < q < p^*$  e  $\mu > 0$  a convergência de  $E_\mu(u_n)$  e (4.1.3) implicam que  $|u_n|_q^q$  e  $|u_n|_{p^*}^{p^*}$  são limitados. A limitação de  $(u_n)$  em  $W_0^{1,p}(\Omega)$  segue então de (4.1.2).

Como  $\|E_\mu(u_n)\|_* \rightarrow 0$ , existe  $(\theta_n) \subset \mathbb{R}$  tal que

$$E'_\mu(u_n) - \theta_n J'_\mu(u_n) \rightarrow 0 \quad \text{em } (W_0^{1,p}(\Omega))^*, \quad (4.1.4)$$

onde

$$J_\mu(u) = \|u\|^p - \mu|u|_q^q - |u|_{p^*}^{p^*}, \quad (4.1.5)$$

para todo  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Como  $(u_n) \subset \mathcal{N}_\mu^\tau$ , temos que

$$\langle J'_\mu(u_n), u_n \rangle = \mu(p - q)|u_n|_q^q + (p - p^*)|u_n|_{p^*}^{p^*} < 0.$$

Podemos supor que  $\langle J'_\mu(u_n), u_n \rangle \rightarrow l \leq 0$ . Se  $l = 0$  a expressão acima implicaria que  $\|u_n\| \rightarrow 0$ , o que contraria o (4.1.1). Portanto  $l < 0$  e deduzimos de (4.1.4) que  $\theta_n \rightarrow 0$ , isto é,  $E'_\mu(u_n) \rightarrow 0$  em  $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$ .

Uma vez que  $(u_n)$  é limitada podemos supor que existe  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  tal que, a menos de uma subsequência,

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{fracamente em } W_0^{1,p}(\Omega), \\ u_n &\rightarrow u && \text{em } L^p(\Omega), \\ u_n(x) &\rightarrow u(x) && \text{q.t.p. } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Além disso, usando o Lema de Concentração de Compacidade de Lions (veja Lema A.10) e os mesmos argumentos utilizados nos passos 1 e 2 da demonstração do Lema A.11, podemos mostrar que  $u_n \rightarrow u$  fortemente em  $L_{loc}^{p^*}(\Omega)$ . Logo, seguindo as mesmas linhas da prova do Lema 3.7, podemos também supor que

$$\begin{aligned} \nabla u_n(x) &\rightarrow \nabla u(x) && \text{q.t.p. } x \in \Omega, \\ |\nabla u_n|^{p-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} &\rightharpoonup |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} && \text{fracamente em } (L^p(\Omega))^*, \quad 1 \leq i \leq N, \end{aligned}$$

donde segue que  $u$  é um ponto crítico de  $E_\mu$ . Além disso,

$$\begin{aligned} c + o(1) &= E_\mu(u_n) - \frac{1}{p} \langle E'_\mu(u_n), u_n \rangle \\ &= \mu \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) |u_n|_q^q + \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) |u_n|_{p^*}^{p^*}, \end{aligned}$$



em que  $o(1)$  denota uma quantidade que vai a zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Lembrando que  $u_n \rightarrow u$  em  $L^q(\Omega)$ , obtemos

$$\frac{1}{N}|u_n|_{p^*}^{p^*} = c + \mu \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) |u|_q^q + o(1) \leq c + o(1). \quad (4.1.6)$$

Seja  $w_n = u_n - u$ . Usando a convergência pontual do gradiente de  $u_n$  e o lema de Brezis-Lieb obtemos

$$\|w_n\|^p - \mu|w_n|_q^q = \|u_n\|^p - \mu|u_n|_q^q - \|u\|^p + \mu|u|_q^q + o(1),$$

$$|w_n|_{p^*}^{p^*} = |u_n|_{p^*}^{p^*} - |u|_{p^*}^{p^*} + o(1).$$

Uma vez que  $(u_n) \subset \mathcal{N}_\mu^\tau$  e  $E'_\mu(u) = 0$ , obtemos

$$\|w_n\|^p - \mu|w_n|_q^q = b + o(1) \quad \text{e} \quad |w_n|_{p^*}^{p^*} = b + o(1)$$

ou ainda, como  $w_n \rightarrow 0$  em  $L^q(\Omega)$ ,

$$\|w_n\|^p = b + o(1) \quad \text{e} \quad |w_n|_{p^*}^{p^*} = b + o(1) \quad (4.1.7)$$

para algum  $b \in \mathbb{R}$ . Além disso, por (4.1.6),

$$b + o(1) = |w_n|_{p^*}^{p^*} = |u_n|_{p^*}^{p^*} - |u|_{p^*}^{p^*} + o(1) \leq Nc + o(1),$$

e portando

$$b \leq Nc < 2S^{N/p}. \quad (4.1.8)$$

Como  $(w_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)^\tau$ , sabemos que  $\|w_n\|^p = 2\|w_n^+\|^p$  e  $|w_n|_{p^*}^{p^*} = 2|w_n^+|_{p^*}^{p^*}$ . Dessa forma, a definição de  $S$  nos fornece

$$S|w_n^+|_{p^*}^{p^*} \leq \|w_n^+\|^p = b/2 + o(1).$$

Passando ao limite, obtemos  $S(b/2)^{p/p^*} \leq b/2$ . Se  $b \neq 0$ , segue da última desigualdade que

$$S \leq \left( \frac{b}{2} \right)^{1-p/p^*} = \left( \frac{b}{2} \right)^{1-\frac{N-p}{N}} = \left( \frac{b}{2} \right)^{\frac{p}{N}},$$

que é equivalente a  $b \geq 2S^{N/p}$ . Como isso contraria (4.1.8), concluímos que  $b = 0$ . Segue então da primeira igualdade em (4.1.7) que  $w_n \rightarrow 0$ , isto é,  $u_n \rightarrow u$  fortemente em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Isso finaliza a prova do lema. ■

### 4.1.2 Algumas propriedades de $m_\mu$ e $m_\mu^\tau$

Nessa subseção apresentamos versões dos Lemas 2.3 e 2.4 para o caso crítico.

**Lema 4.5.** *Para todo  $\mu \in (0, \mu_1(\Omega))$  temos que*

$$2m_\mu \leq m_\mu^\tau < \frac{2}{N}S^{N/p}.$$

**DEMONSTRAÇÃO.** A prova da primeira desigualdade é semelhante àquela do Lema 2.3 e será omitida. Para verificar a segunda desigualdade acima escolhemos  $y \in \Omega$ , e  $r > 0$  tal que  $y \neq \tau y$ ,  $B_r(y) \in \Omega$  e  $B_r(y) \cap B_r(\tau y) = \emptyset$ . De acordo com o Teorema 4.3, existe uma função  $v_\mu \in \mathcal{N}_{\mu, B_r(0)}$  positiva tal que  $E_{\mu, B_r(0)}(v_\mu) = m_{\mu, r}$ . Além disso, podemos supor que  $v_\mu$  é radialmente simétrica. Dessa forma, argumentando como na prova do Lema 2.9, concluímos que

$$u_\mu = v_\mu(\cdot - y) - v_\mu(\cdot - \tau y) \in \mathcal{N}_\mu^\tau.$$

Usando a estimativa do Teorema 4.3, obtemos

$$m_\mu^\tau \leq E_\mu(u_\mu) = 2E_{\mu, B_r(0)}(v_\mu) = 2m_{\mu, r} < \frac{2}{N}S^{N/p},$$

o que prova o lema. ■

**Lema 4.6 ([2, Lema 2.4]).** *Para todo domínio limitado  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$  vale*

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} m_{\mu, \mathcal{D}} = m_{0, \mathcal{D}} = \frac{1}{N}S^{N/p}.$$

**DEMONSTRAÇÃO.** Como a função  $\mu \mapsto m_{\mu, \mathcal{D}}$  é não-crescente, temos que  $m_{\mu_n, \mathcal{D}} \leq m_{0, \mathcal{D}}$ , e portanto

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} m_{\mu_n, \mathcal{D}} \leq m_{0, \mathcal{D}}. \tag{4.1.9}$$

Seja  $(\mu_n) \subset (0, \infty)$  tal que  $\mu_n \rightarrow 0$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $(\mu_n) \subset (0, \mu_1(\mathcal{D}))$ . Pelo Teorema 4.3, podemos tomar uma seqüência  $(u_n) \subset \mathcal{N}_{\mu_n, \mathcal{D}}$  tal que  $E_{\mu_n, \mathcal{D}}(u_n) = m_{\mu_n, \mathcal{D}}$  e  $E'_{\mu_n, \mathcal{D}}(u_n) = 0$ . Como  $(m_{\mu_n, \mathcal{D}})$  é limitada, podemos argumentar como na prova do Lema 4.4 e concluir que  $(u_n)$  é limitada em  $W_0^{1,p}(\mathcal{D})$ .

Procedendo como no Lema 4.2, obtemos  $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$  tal que  $t_n u_n \in \mathcal{N}_{0, \mathcal{D}}$ .

AFIRMAÇÃO: a seqüência  $(t_n)$  é limitada.

De fato, suponha por contradição que  $(t_n)$  não é limitada. Então, como  $(u_n)$  é limitada em  $W_0^{1,p}(\mathcal{D})$  e

$$\|u_n\|_{\mathcal{D}}^p = t_n^{p^*-p} |u_n|_{p^*,\mathcal{D}}^{p^*},$$

deveríamos ter  $|u_n|_{p^*,\mathcal{D}}^{p^*} \rightarrow 0$ . Assim, a limitação de  $(u_n)$  em  $L^q(\mathcal{D})$  e a igualdade

$$\|u_n\|_{\mathcal{D}}^p = \mu_n |u_n|_{q,\mathcal{D}}^q + |u_n|_{p^*,\mathcal{D}}^{p^*}$$

implicariam que  $\|u_n\|_{\mathcal{D}} \rightarrow 0$ . Dessa forma,  $m_{\mu_n,\mathcal{D}} \rightarrow 0$ , contrariando o fato da função  $\mu \mapsto m_{\mu,\mathcal{D}}$  ser não-crescente em  $[0, \infty)$  e  $m_{0,\mathcal{D}} = 1/NS^{N/p} > 0$ . Logo,  $(t_n)$  tem que ser limitada.

Uma vez que  $t_n u_n \in \mathcal{N}_{0,\mathcal{D}}$ , obtemos

$$m_{0,\mathcal{D}} \leq E_{0,\mathcal{D}}(t_n u_n) = I_{\mu_n,\mathcal{D}}(t_n u_n) + \frac{\mu_n t_n^q}{q} |u_n|_{q,\mathcal{D}}^q.$$

Fixado  $n \in \mathbb{N}$ , considere a função  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $g(t) = E_{\mu_n,\mathcal{D}}(t u_n)$ . Como  $p \leq q < p^*$  e  $p^* > p$ , podemos facilmente verificar que  $g(0) = 0$ ,  $g(t) > 0$  para todo  $t$  em uma pequena vizinhança à direita de 0 e  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = -\infty$ . Uma vez que  $g'(t) = \langle E_{\mu_n,\mathcal{D}}(t u_n), u_n \rangle$ , vemos que  $g'(t) = 0$  se, e somente se,  $t u_n \in \mathcal{N}_{\mu_n,\mathcal{D}}$ . Essas considerações e o fato de que  $(u_n) \in \mathcal{N}_{\mu_n,\mathcal{D}}$ , mostram que a função  $g$  assume seu máximo em  $t = 1$ . Desta forma,  $E_{\mu_n,\mathcal{D}}(t_n u_n) \leq E_{\mu_n,\mathcal{D}}(u_n) = m_{\mu_n,\mathcal{D}}$ , donde segue que

$$m_{0,\mathcal{D}} \leq m_{\mu_n,\mathcal{D}} + \frac{\mu_n t_n^q}{q} |u_n|_{q,\mathcal{D}}^q. \quad (4.1.10)$$

Passando a expressão acima ao limite e usando a limitação de  $(t_n)$  concluímos que

$$m_{0,\mathcal{D}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( m_{\mu_n,\mathcal{D}} + \frac{\mu_n t_n^q}{q} |u_n|_{q,\mathcal{D}}^q \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} m_{\mu_n,\mathcal{D}}.$$

A expressão acima e (4.1.9) finalizam a demonstração da primeira igualdade do enunciado do lema. A segunda foi provada no Lema 2.4. ■

### 4.1.3 A função baricentro

Para  $r > 0$  definimos o conjunto

$$\Omega_r^+ = \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, \Omega) < r\}$$

e a aplicação baricentro  $\beta : W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^N$  dada por

$$\beta(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} x \, dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \, dx} \quad (4.1.11)$$

Finalizamos a seção com uma versão do Lema 2.5 para o caso crítico.

**Lema 4.7.** *Dado  $r > 0$  existe  $\mu_0 \in (0, \mu_1(\Omega))$  tal que, para todo  $\mu \in (0, \mu_0)$ , temos que  $\beta(u) \in \Omega_r^+$ , sempre que  $u \in \mathcal{N}_\mu$  e  $E_\mu(u) \leq m_{\mu,r}$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha, por contradição, que o lema é falso. Então existe  $\mu_n \rightarrow 0^+$ ,  $u_n \in \mathcal{N}_{\mu_n}$  tal que  $E_{\mu_n}(u_n) \leq m_{\mu_n,r}$  mas  $\beta(u_n) \notin \Omega_r^+$ . Note inicialmente que,

$$m_{\mu_n} \leq E_{\mu_n}(u_n) = \frac{1}{p} \|u_n\|^p - \frac{\mu_n}{q} |u_n|_q^q - \frac{1}{p^*} |u_n|_{p^*}^{p^*} \leq m_{\mu_n,r}$$

e

$$0 = \langle E'_{\mu_n}(u_n), u_n \rangle = \|u_n\|^p - \mu_n |u_n|_q^q - |u_n|_{p^*}^{p^*}.$$

Como  $E_{\mu_n}(u_n)$  é limitado, podemos argumentar como na prova do Lema 4.4 e concluir que  $(u_n)$  é limitada em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Logo,

$$m_{\mu_n} + o(1) \leq \frac{1}{p} \|u_n\|^p - \frac{1}{p^*} |u_n|_{p^*}^{p^*} \leq m_{\mu_n,r} + o(1) \quad (4.1.12)$$

e  $\|u_n\|^p - |u_n|_{p^*}^{p^*} = o(1)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim,

$$\|u_n\|^p = b + o(1) \quad \text{e} \quad |u_n|_{p^*}^{p^*} = b + o(1), \quad (4.1.13)$$

para algum  $b \geq 0$ . Passando (4.1.12) ao limite e usando o Lema 4.6, concluímos que  $b = S^{N/p}$ . Aplicando agora o Lema 2.6 com  $q_n \equiv p^*$  e argumentando como na prova do Lema 2.5, obtemos uma medida finita  $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$  tal que  $|u_n|^{p^*} \rightharpoonup \nu$  fracamente em  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ ,  $\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \rightarrow |\nu|$  e além disso  $\nu$  está concentrada em um único ponto  $y \in \bar{\Omega}$ . Dessa forma,

$$\beta(u_n) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} x dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx} \rightarrow |\nu|^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} x d\nu = y \in \bar{\Omega},$$

o que contradiz  $\beta(u_n) \notin \Omega_r^+$  e conclui a prova do lema. ■

## 4.2 Soluções nodais minimais

Nessa seção apresentamos as provas dos teoremas de existência e multiplicidade de soluções para o problema  $(D_\mu^\tau)$ . Iniciamos com os dois lemas abaixo que são versões dos Lemas 2.7 e 2.8 para o caso crítico.

**Lema 4.8.** *Se  $u \in \mathcal{N}_\mu^\tau$  é um ponto crítico de  $E_\mu$  restrito à  $\mathcal{N}_\mu^\tau$ , então  $u$  é um ponto crítico de  $E_\mu$  em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .*

**Lema 4.9.** *Se  $u$  é uma solução do problema  $(D_\mu^\tau)$  que troca de sinal  $2k - 1$  vezes, então  $E_\mu(u) \geq km_\mu^\tau$ .*

### 4.2.1 Demonstração do Teorema 1.6

A demonstração segue as mesmas linhas da demonstração do Teorema 1.1.

**DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.6.** Seja  $(u_n) \subset \mathcal{N}_\mu^\tau$  uma seqüência tal que  $E_\mu(u_n) \rightarrow m_\mu^\tau$ . Pelo princípio variacional de Ekeland podemos supor que  $\|E'_\mu(u_n)\|_* \rightarrow 0$ . O Lema 4.5 nos garante que  $m_\mu^\tau < 2/NS^{N/p}$ , de modo que podemos aplicar o Lema 4.4 para garantir que, a menos de uma subsequência,  $u_n \rightarrow u \in \mathcal{N}_q^\tau$ . O mesmo argumento utilizando na prova do Teorema 1.1 e os Lemas 4.8 e 4.9 implicam que a função  $u$  (e também  $-u$ ) é uma solução do problema  $(D_\mu^\tau)$  que troca de sinal exatamente uma vez. Isso conclui a prova do teorema. ■

### 4.2.2 Demonstração do Teorema 1.7

Para provar nosso resultado de multiplicidade vamos supor que  $r > 0$  está fixado de forma que as inclusões  $\Omega_r^- \hookrightarrow \Omega \setminus \Omega^+$  e  $\Omega \hookrightarrow \Omega_r^+$  são equivalências equivariantes de homotopia, em que, como antes,

$$\Omega_r^- = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega \cup \Omega^+) \geq r\}.$$

Vamos supor também que  $B_r(0) \subset \Omega$ .

**DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.7.** Como, pelo Lema 4.6,  $m_{\mu,r}$  e  $m_\mu$  têm o mesmo limite quando  $\mu \rightarrow 0$ , existe  $\tilde{\mu}_0 > 0$  tal que

$$m_{\mu,r} < 2m_\mu, \tag{4.2.1}$$

sempre que  $\mu \in (0, \tilde{\mu}_0)$ . Vamos mostrar que o teorema vale para  $\mu_* = \min\{\mu_0, \tilde{\mu}_0\}$ , em que  $\mu_0$  é dado pelo Lema 4.7. De acordo com o Teorema 4.3, temos que  $2m_{\mu,r} < 2/NS^{N/p}$ . Assim, o funcional  $E_\mu$  restrito a  $\mathcal{N}_\mu^\tau$  satisfaz a condição de Palais-Smale em todos níveis  $c \in [m_\mu^\tau, 2m_{\mu,r})$ . Como  $E_\mu$  é par, podemos aplicar o Teorema A.9 para obter  $\mathbb{Z}_2$ -cat( $\mathcal{N}_\mu^\tau \cap E_\mu^{2m_{\mu,r}}$ ) pares  $\pm u_i$  de pontos críticos com

$$E_\mu(\pm u_i) \leq 2m_{\mu,r} < 4m_\mu \leq 2m_\mu^\tau,$$

em que usamos (4.2.1) e o Lema 4.5. A desigualdade acima, a definição de  $W_0^{1,p}(\Omega)^\tau$ , o Lema 2.8 e o mesmo argumento usando na demonstração do Teorema 1.1 mostram que  $u_i$  é uma solução de  $(D_q^\tau)$  que troca de sinal exatamente uma vez.

Resta somente mostrar que

$$\mathbb{Z}_2\text{-cat}(\mathcal{N}_\mu^\tau \cap E_\mu^{2m_{\mu,r}}) \geq \tau\text{-cat}_\Omega(\Omega \setminus \Omega^+). \tag{4.2.2}$$

Para tanto considere o seguinte diagrama

$$\Omega_r^- \xrightarrow{\alpha_\mu} \mathcal{N}_\mu^\tau \cap E_\mu^{2m_{\mu,r}} \xrightarrow{\gamma_\mu} \Omega_r^+$$

em que  $\gamma_\mu = \beta(u^+)$ ,  $\alpha_\mu(y) = v_\mu(\cdot - y) - v_\mu(\cdot - \tau y)$  e  $v_\mu \in \mathcal{N}_{\mu, B_r(0)}$  é uma função radial e positiva tal que  $E_{\mu, B_r(0)} = m_{\mu,r}$ . A escolha de  $v_\mu$  é possível em vista do Teorema 4.3 e do fato de que  $\mu_1(\Omega) < \mu_1(B_r(0))$ . O Lema 4.7 e os mesmos argumentos usados da prova do Lema 2.9 mostram que o diagrama está bem definido e que a estimativa (4.2.2) se verifica. ■

Usando o teorema provado acima e os mesmos argumentos da prova do Corolário 1.1, podemos provar o seguinte resultado de multiplicidade.

**Corolário 4.10.** *Suponha que  $\Omega$  é simétrico com relação à origem e que  $0 \notin \Omega$ . Suponha ainda que existe uma aplicação contínua e ímpar  $\varphi : \mathbb{S}^{N-1} \rightarrow \Omega$ . Então existe  $\mu_* \in (0, \mu_1(\Omega))$  tal que, para todo  $\mu \in (0, \mu_*)$ , o problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu |u|^{q-2} u + |u|^{p^*-2} u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

*tem pelo menos  $N$  pares de soluções ímpares que trocam de sinal exatamente uma vez.*

---

---

# APÊNDICE A

---

## Apêndice

---

### A.1 Princípio variacional de Ekeland

---

O objetivo dessa seção é apresentar uma prova para o princípio variacional de Ekeland, que foi largamente utilizado nesse trabalho. Temos como referência básica para essa seção o artigo de Ekeland [31]. Começamos com o resultado abaixo.

**Teorema A.1.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo e  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  uma função semi-contínua inferiormente tal que  $\varphi(u_0) < \infty$  para algum  $u_0 \in X$ . Se  $\varphi$  é limitada inferiormente então, para todo  $\lambda > 0$  dado e todo  $\bar{u} \in X$  satisfazendo*

$$\varphi(\bar{u}) \leq \inf_X \varphi + \varepsilon,$$

*existe  $u_\lambda \in X$  tal que  $d(\bar{u}, u_\lambda) \leq \lambda$ ,*

$$\varphi(u_\lambda) < \varphi(\bar{u}) \tag{A.1.1}$$

*e*

$$\varphi(u) > \varphi(u_\lambda) - (\varepsilon/\lambda)d(u_\lambda, u), \tag{A.1.2}$$

*para todo  $u \in X \setminus \{u_\lambda\}$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.** Para simplificar a notação vamos denotar  $d_\lambda(u, v) = (1/\lambda)d(u, v)$ . Defina em  $X$  a seguinte ordem parcial

$$u \leq v \iff \varphi(u) \leq \varphi(v) - \varepsilon d_\lambda(u, v).$$

Segue facilmente da definição que essa ordem é reflexiva, antisimétrica e transitiva, isto é, para quaisquer  $u, v, w \in X$ , vale

- (i)  $u \leq u$ ,
- (ii) se  $u \leq v$  e  $v \leq u$ , então  $u = v$ ,
- (ii) se  $u \leq v$  e  $v \leq w$ , então  $u \leq w$ .

Vamos definir uma seqüência de conjuntos  $(S_n) \subset X$  da seguinte forma: faça  $u_1 = \bar{u}$ ,

$$S_1 = \{u \in X : u \leq u_1\},$$

e escolha  $u_2 \in S_1$  tal que  $\varphi(u_2) \leq \inf_{S_1} \varphi + \frac{\varepsilon}{2^2}$ . Procedendo indutivamente definimos

$$S_n = \{u \in X : u \leq u_n\},$$

e escolhamos  $u_{n+1} \in S_n$  tal que  $\varphi(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} \varphi + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ . Claramente temos que

$$S_1 \supset S_2 \supset \dots \supset S_n \supset \dots$$

Além disso, cada  $S_n$  é fechado. De fato, seja  $(x_j) \subset S_n$  tal que  $x_j \rightarrow x \in X$ . Temos  $\varphi(x_j) \leq \varphi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(x_j, u_n)$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Segue da semi-continuidade inferior de  $\varphi$  e da continuidade de  $d$  que

$$\varphi(x) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \varphi(x_j) \leq \varphi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(x, u_n),$$

e portanto  $x \in S_n$ .

Afirmamos que o diâmetro de  $S_n$  tende a zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Para provar isso, seja  $x \in S_n$  um ponto arbitrário. Da definição de  $S_n$  segue que

$$\varphi(x) \leq \varphi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(x, u_n).$$

Por outro lado, como  $x \in S_{n-1}$ , a escolha de  $u_n$  nos permite concluir que

$$\varphi(u_n) \leq \varphi(x) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Usando as duas últimas desigualdades obtemos

$$d_\lambda(x, u_n) \leq \frac{1}{2^n}, \quad \text{para todo } x \in S_n \tag{A.1.3}$$

e portanto  $\text{diam } S_n \leq 2^{1-n}$ , o que prova a afirmação.



Obtemos assim uma seqüência de conjuntos fechados e encaixados  $(S_n)$  cujo diâmetro vai a zero. Dessa forma, sabemos que existe um único  $u_\lambda \in X$  tal que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{u_\lambda\}$ . Vamos mostrar que o teorema vale para este  $u_\lambda$ . A expressão (A.1.1) segue do fato de  $u_\lambda \in S_1$  e  $u_1 = \bar{u}$ . Dado  $u \neq u_\lambda$ , não podemos ter  $u \leq u_\lambda$  pois nesse caso o elemento  $u$  pertenceria à intersecção de todos os  $S_n$ . Logo,

$$\varphi(u) > \varphi(u_\lambda) - \varepsilon d_\lambda(u, u_\lambda),$$

o que prova (A.1.2). Finalmente, como  $u_1 = \bar{u}$ , podemos usar a desigualdade triangular e (A.1.3) para obter

$$d_\lambda(\bar{u}, u_n) \leq \sum_{j=1}^{n-1} d_\lambda(u_{j+1}, u_j) \leq \sum_{j=1}^{n-1} 2^{-j}.$$

Passando ao limite e usando que  $u_n \rightarrow u_\lambda$  quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos que  $d_\lambda(\bar{u}, u_\lambda) \leq 1$  ou, equivalentemente,  $d(\bar{u}, u_\lambda) \leq \lambda$ . O teorema está provado. ■

Suponha agora que  $(X, \|\cdot\|)$  é um espaço de Banach e  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável no sentido de Fréchet, isto é, para todo  $u_0 \in X$  existe um funcional linear  $\varphi'(u_0) \in X^*$  (em que  $X^*$  é o dual topológico de  $X$ ) tal que

$$\varphi(u_0 + u) = \varphi(u_0) + \langle \varphi'(u_0), u \rangle + \delta(u)\|u\|$$

com  $\delta(u) \rightarrow 0$  quando  $\|u\| \rightarrow 0$ . Dada uma função  $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$  considere a  $C^1$ -variedade  $V = \{u \in X : \psi(u) = 0\}$ . Estamos interessados em obter uma versão do Teorema A.1 para a restrição  $\varphi|_V$  do funcional  $\varphi$  à variedade  $V$ . Por motivos técnicos, vamos supor também que 0 é valor regular de  $\psi$ , isto é,  $\psi'(u) \neq 0$  para todo  $u \in V$ .

**Teorema A.2.** *Seja  $X$  um espaço de Banach,  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional diferenciável no sentido de Fréchet e  $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ . Suponha que  $V = \{u \in X : \psi(u) = 0\} \neq \emptyset$ ,  $\psi'(u) \neq 0$  para todo  $u \in V$  e que  $\varphi|_V$  é limitado inferiormente. Então, para todo  $\bar{u} \in V$  satisfazendo*

$$\varphi(\bar{u}) \leq \inf_V \varphi + \varepsilon^2,$$

existe  $u_\varepsilon \in V$  e  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $\|\bar{u} - u_\varepsilon\| \leq 2\varepsilon$ ,

$$\varphi(u_\varepsilon) \leq \varphi(\bar{u})$$

e

$$\|\varphi'(u_\varepsilon) - \theta\psi'(u_\varepsilon)\|_{X^*} \leq \varepsilon. \quad (\text{A.1.4})$$

**Observação A.3.** *Uma conseqüência importante do teorema acima é seguinte: seja  $(u_n) \subset V$  é uma seqüência minimizante, isto é,  $\varphi(u_n) \rightarrow c = \inf_V \varphi$  e denote por  $\|\varphi'(u)\|_*$  a norma da derivada de  $\varphi|_V$  no ponto  $u \in V$ . Então existe uma nova seqüência minimizante  $(\tilde{u}_n) \subset V$  tal que  $\|u_n - \tilde{u}_n\| \rightarrow 0$  e  $\tilde{u}_n$  é quase um ponto crítico, no sentido de que  $\|\varphi'(\tilde{u}_n)\|_* \rightarrow 0$ . De fato, basta lembrar que*

$$\|\varphi'(u)\|_* = \min_{\theta \in \mathbb{R}} \|\varphi'(u) - \theta\psi'(u)\|_{X^*}$$

e aplicar o resultado acima com  $\varepsilon_n = \max\{1/n, c - \varphi(u_n)\}$ . Além disso, note que se  $\tilde{u}_n \rightarrow u$  então o mesmo ocorre para  $(u_n)$ .

Dedicamos o resto dessa seção à demonstração do Teorema A.2. Começamos com o seguinte lema de análise funcional.

**Lema A.4.** *Sejam  $\varepsilon > 0$  e  $f, g \in X^*$  tais que*

$$\langle g, u \rangle \geq -\varepsilon\|u\| \quad \text{sempre que } \langle f, u \rangle = 0.$$

Então existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $\|f - \theta g\|_{X^*} \leq \varepsilon$ .

DEMONSTRAÇÃO. Considere o conjunto

$$\Gamma = \{\theta f + \varepsilon w : \theta \in \mathbb{R}, w \in X^*, \|w\|_{X^*} \leq 1\}.$$

Como o conjunto  $\mathbb{R}f$  é convexo e fechado, temos que  $\mathbb{R}f$  é fechado na topologia fraca-\*  $\sigma(X^*, X)$ . Lembrando que a bola unitária de  $X^*$  é  $\sigma(X^*, X)$ -compacta concluimos que  $\Gamma$  é fechado nessa topologia.

Tendo em vista a definição de  $\Gamma$  é suficiente mostrarmos que  $g \in \Gamma$ . Suponha então, por contradição, que  $g \notin \Gamma$ . Como  $\Gamma$  é  $\sigma(X^*, X)$ -fechado podemos usar o Teorema de Hahn-Banach [16, Teorema I.7] para obter um funcional linear  $\sigma(X^*, X)$ -contínuo  $w^* : X^* \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

$$w^*(g) < \alpha,$$

$$w^*(h) \geq \alpha, \quad \forall h \in \Gamma.$$

Uma vez que  $w^*$  é  $\sigma(X^*, X)$ -contínua, existe  $u \in X$  tal que  $w^*(h) = \langle h, u \rangle$  para todo  $h \in X^*$ . Logo

$$\langle g, u \rangle < \alpha \tag{A.1.5}$$

e

$$\langle h, u \rangle \geq \alpha, \quad \forall h \in \Gamma.$$

Usando a definição de  $\Gamma$  podemos reescrever a desigualdade acima como sendo

$$\theta \langle f, u \rangle \geq \alpha + \varepsilon \sup_{\|w\|_{X^*} \leq 1} \langle w, -u \rangle, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Mas o supremo acima é exatamente  $\|u\|$  (veja [16, Corolário I.4]) e portanto

$$\theta \langle f, u \rangle \geq \alpha + \varepsilon \|u\|, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.1.6})$$

Como  $\theta$  é arbitrário segue que  $\langle f, u \rangle = 0$  e portanto  $\langle g, u \rangle \geq -\varepsilon \|u\|$ . Por outro lado, usando (A.1.5) e (A.1.6) com  $\theta = 0$  obtemos

$$\langle g, u \rangle < \alpha \leq -\varepsilon \|u\|,$$

o que é um absurdo. O lema está provado. □

**DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA A.2:** Definindo a função  $\bar{\varphi} : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  por

$$\bar{\varphi}(u) = \begin{cases} \varphi(u) & \text{se } u \in V, \\ +\infty & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

temos que  $\bar{\varphi}$  é semi-contínua inferiormente e limitada inferiormente. Aplicando o Teorema A.1 com a tríade  $(\bar{u}, \lambda, \varepsilon)$  substituída por  $(\bar{u}, 2\varepsilon, 2\varepsilon^2)$  obtemos  $u_\varepsilon \in X$  tal que  $\|\bar{u} - u_\varepsilon\| \leq 2\varepsilon$ ,  $\bar{\varphi}(u_\varepsilon) \leq \bar{\varphi}(\bar{u})$  e

$$\bar{\varphi}(u) \geq \bar{\varphi}(u_\varepsilon) - \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|, \quad \forall u \in X.$$

Usando a definição de  $\bar{\varphi}$  e as hipóteses do teorema concluímos que  $u_\varepsilon \in V$ ,

$$\varphi(u_\varepsilon) \leq \varphi(\bar{u}) \leq \inf_V \varphi + \varepsilon^2$$

e

$$\varphi(u) \geq \varphi(u_\varepsilon) - \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|, \quad \forall u \in V. \quad (\text{A.1.7})$$

Afirmamos que a última desigualdade implica que

$$\langle \varphi'(u_\varepsilon), u \rangle \geq -\varepsilon \|u\| \quad \text{sempre que } \langle \psi'(u_\varepsilon), u \rangle = 0. \quad (\text{A.1.8})$$

De fato, como  $\langle \psi'(u_\varepsilon), u \rangle = 0$  e  $\psi'(u_\varepsilon) \neq 0$ , podemos usar o Teorema da Função Implícita para obter uma curva  $\mathbf{u} : [0, \tau) \rightarrow V$  tal que

$$\mathbf{u}(0) = u_\varepsilon \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = u. \quad (\text{A.1.9})$$

A expressão acima e (A.1.7) nos fornecem

$$\varphi(\mathbf{u}(t)) - \varphi(\mathbf{u}(0)) \geq -\varepsilon\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(0)\|, \quad \forall t \in (0, \tau).$$

Dividindo por  $t$  e fazendo  $t \rightarrow 0^+$  obtemos, usando (A.1.9),

$$\langle \varphi'(u_\varepsilon), u \rangle \geq -\varepsilon\|u\|.$$

Logo, (A.1.8) se verifica e (A.1.4) segue do Lema A.4. O teorema está provado. ■

Finalizamos a seção observando que Ekeland [31] provou o Teorema A.2 para uma classe mais geral de vínculos do tipo

$$V = \left( \bigcap_{i=1}^k \psi_i^{-1}(0) \right) \cap \left( \bigcap_{i=k+1}^j \psi_i^{-1}([0, \infty)) \right)$$

em que  $\psi_i \in C^1(X, \mathbb{R})$  e o conjunto  $\{\psi'_i(u) : \psi_i(u) = 0\}$  é linearmente independente para todo  $u \in V$ . A demonstração segue os mesmos passos da apresentada acima.

---

## A.2 Princípio de criticalidade simétrica

---

Seja  $(X, \|\cdot\|)$  em espaço normado e  $G$  um grupo topológico. Dizemos que  $G$  age em  $X$  se existe uma aplicação contínua  $(g, u) \mapsto gu$  de  $G \times X$  em  $X$  satisfazendo

(i)  $(1, u) = u,$

(ii)  $(gh, u) = (g, hu),$

(iii)  $u \mapsto gu$  é linear,

para todo  $u \in X$  e todos  $g, h \in G$ . Dizemos que  $G$  age isometricamente se  $\|gu\| = \|u\|$  para todo  $u \in X, g \in G$ . Podemos considerar o espaço invariante da ação dado por

$$Fix(G) = \{u \in X : gu = u \text{ para todo } g \in G\}.$$

Suponha que o grupo  $G$  age isometricamente em  $X$  e que  $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$  é um funcional  $G$ -invariante, isto é,  $\varphi \circ g = \varphi$  para todo  $g \in G$ . Seja  $\tilde{u}$  um ponto crítico da restrição de  $\varphi$  ao espaço invariante  $Fix(G)$ . O princípio de criticalidade simétrica fornece condições suficientes para que  $\tilde{u}$  seja um ponto crítico de  $\varphi$ , ou seja, que  $\varphi'(\tilde{u}) = 0$  no dual topológico  $X^*$  de  $X$ .

**Teorema A.5 ([58]).** *Suponha que  $X$  é um espaço de Hilbert, que  $G$  age isometricamente em  $X$  e que  $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ , Então, se  $\varphi$  é  $G$ -invariante e  $\tilde{u}$  é um ponto crítico de  $\varphi$  restrito à  $Fix(G)$ , então  $\tilde{u}$  é um ponto crítico de  $\varphi$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Uma vez que  $\varphi$  é  $G$ -invariante temos

$$\begin{aligned} \langle \varphi'(g\tilde{u}), v \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(g\tilde{u} + tv) - \varphi(g\tilde{u})}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(g(\tilde{u} + tg^{-1}v)) - \varphi(g\tilde{u})}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\tilde{u} + tg^{-1}v) - \varphi(\tilde{u})}{t} \\ &= \langle \varphi'(\tilde{u}), g^{-1}v \rangle. \end{aligned}$$

Como  $G$  age isometricamente temos

$$(\nabla\varphi(gu) | v) = (\nabla\varphi(u) | g^{-1}v) = (g\nabla\varphi(u) | v),$$

em que  $(\cdot | \cdot)$  denota o produto interno em  $X$ . Da expressão acima segue que  $\nabla\varphi$  é  $G$ -invariante.

É claro que

$$g\nabla\varphi(\tilde{u}) = \nabla\varphi(g\tilde{u}) = \nabla\varphi(\tilde{u})$$

e portanto  $\nabla\varphi(\tilde{u}) \in Fix(G)$ . Assim, como  $\tilde{u}$  é ponto crítico de  $\varphi$  restrito à  $Fix(G)$ , temos

$$\nabla\varphi(\tilde{u}) \in Fix(G) \cap Fix(G)^\perp = \{0\},$$

donde segue que  $\tilde{u}$  é um ponto crítico de  $\varphi$ . □

Na demonstração acima usamos fortemente a estrutura de espaço de Hilbert. Contudo, em muitas das aplicações, o espaço funcional adequado para lidar com equações é um espaço de Sobolev  $W^{1,p}$ , que não é um espaço de Hilbert a menos que  $p = 2$ . Portanto, é importante termos um versão do princípio acima para espaços mais gerais que espaços de Hilbert.

Considere então  $(X, \|\cdot\|)$  um espaço de Banach reflexivo satisfazendo a seguinte hipótese

$$\text{dado } f \in X^*, \text{ existe um único } u_0 \in X \text{ tal que } \langle f, u_0 \rangle = \|u_0\|^2 \text{ e } \|f\|_{X^*} = \|u_0\|. \quad (\text{A.2.1})$$

Conforme observado em [52], espaços de Hilbert, espaços uniformemente convexos e espaços de Sobolev  $W^{1,p}$ , com  $1 < p < \infty$ , satisfazem a condição acima. Para tais espaços, vale o

**Teorema A.6 ([52, Proposição 1]).** *Suponha que  $X$  é um espaço de Banach reflexivo satisfazendo (A.2.1),  $G$  age isometricamente em  $X$  e  $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ . Então, se  $\varphi$  é  $G$ -invariante e  $\tilde{u}$  é um ponto crítico de  $\varphi$  restrito à  $Fix(G)$ , então  $\tilde{u}$  é um ponto crítico de  $\varphi$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Observe inicialmente que o operador linear  $\varphi'(\tilde{u})$  é  $G$ -invariante. Considerando  $f = \varphi'(\tilde{u})$ , seja  $u_0 \in X$  dada pela hipótese (A.2.1), isto é,  $\langle \varphi'(\tilde{u}), u_0 \rangle = \|u_0\|^2$  e  $\|\varphi'(\tilde{u})\|_{X^*} = \|u_0\|$ . É suficiente mostrarmos que  $u_0 = 0$ . Para tanto, note que

$$\langle \varphi'(\tilde{u}), g\tilde{u} \rangle = \langle \varphi'(\tilde{u}) \circ g, \tilde{u} \rangle = \langle \varphi'(\tilde{u}), u_0 \rangle = \|u_0\|^2 = \|gu_0\|^2,$$

e  $\|\varphi'(\tilde{u})\|_{X^*} = \|u_0\| = \|gu_0\|$ , para todo  $g \in G$ . Da unicidade de  $u_0$  segue que  $gu_0 = u_0$  para todo  $g \in G$ , isto é,  $u_0 \in \text{Fix}(G)$ . Como  $\tilde{u}$  é ponto crítico de  $\varphi$  restrito à  $\text{Fix}(G)$ , o conjunto  $\text{Fix}(G)$  está contido no núcleo de  $\varphi'(\tilde{u})$ . Logo  $0 = \langle \varphi'(\tilde{u}), u_0 \rangle = \|u_0\|$  e o lema está provado.  $\square$

### A.3 Teoria de Ljusternik-Schnirelmann

Seja  $X$  um espaço topológico. Lembremos que um subconjunto  $A \subset X$  é contrátil em  $X$  se existe uma deformação contínua  $H : [0, 1] \times A \rightarrow X$  tal que

$$H(0, x) = x, \quad H(1, x) = x_A,$$

para todo  $x \in A$  e algum  $x_A \in X$ . Supondo agora que  $A$  é fechado, dizemos que a categoria de  $A$  em  $X$  é igual a  $k$  se  $A$  pode ser coberto por  $k$  conjuntos fechados  $A_1, \dots, A_k$  que são contráteis em  $X$  e  $k$  é minimal com relação a essa propriedade. Se não existir uma tal cobertura dizemos que a categoria de  $A$  em  $X$  é igual a infinito. Vamos denotar por  $\text{cat}_X(A)$  a categoria de  $A$  em  $X$ . No caso em que  $A = X$ , escrevemos apenas  $\text{cat}(X)$ .

Se  $X$  é um espaço vetorial normado e  $A \subset X$  é fechado, limitado e não vazio então  $\text{cat}_X(A) = 1$ . De fato, para ver isso basta notar que bolas são conjuntos contráteis em tais espaços. Como a esfera  $\mathbb{S}^{k-1} \subset \mathbb{R}^k$  não é contrátil em  $\mathbb{R}^k$ ,  $\text{cat}_{\mathbb{S}^{k-1}}(\mathbb{S}^{k-1}) = 2$ . Para ver isso, basta tomar  $A_1$  e  $A_2$  como sendo  $\mathbb{S}^{k-1}$  menos uma vizinha aberta e pequena dos pólos norte e sul, respectivamente. Em contrapartida, lembrando que a esfera  $\mathbb{S} \subset X$  de um espaço normado de dimensão infinita é contrátil, temos  $\text{cat}_{\mathbb{S}}(\mathbb{S}) = 1$ . Conforme já foi citado na introdução, se  $\mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k / \mathbb{Z}_2$  é um  $k$ -toro, pode-se mostrar [50] que  $\text{cat}_{\mathbb{T}^k}(\mathbb{T}^k) = k + 1$ .

De uma maneira geral, não é tarefa fácil determinar a categoria de um dado conjunto  $A \subset X$ . Contudo, as propriedades abaixo podem ser facilmente verificadas.

(c1)  $\text{cat}_X(A) \geq 0$  e  $\text{cat}_X(A) = 0$  se, e somente se,  $A = \emptyset$ ,

(c2) se  $A \subset B$ , então  $\text{cat}_X(A) \leq \text{cat}_X(B)$ ,

$$(c3) \quad \text{cat}_X(A \cup B) \leq \text{cat}_X(A) + \text{cat}_X(B),$$

$$(c4) \quad \text{se } h : X \rightarrow X \text{ é um homeomorfismo então } \text{cat}_X(A) = \text{cat}_X(h(A)),$$

$$(c5) \quad \text{se } A \text{ é compacto, então } \text{cat}_X(A) < \infty \text{ e existe uma vizinhança aberta } \mathcal{O} \text{ de } A \text{ tal que } \text{cat}_X(A) = \text{cat}_X(\overline{\mathcal{O}}).$$

As propriedades (c1)-(c3) seguem imediatamente da definição de categoria. Para verificar (c4) basta lembrar que homeomorfismos preservam propriedades topológicas. A demonstração de propriedade (c5) pode ser encontrada em [68, Capítulo 2, Proposição 5.13].

Destacamos abaixo uma outra propriedade importante da categoria.

$$(c6) \quad \text{se } \eta : [0, 1] \times A \rightarrow X \text{ é contínua e tal que } \eta(0, x) = x \text{ para todo } x \in A, \text{ então } \text{cat}_X(A) \leq \text{cat}_X(\overline{\eta(1, A)}).$$

Para provar (c6) considere  $B = \overline{\eta(1, A)}$  e suponha que  $\text{cat}_X(B) = k < \infty$ . Sejam  $(B_i)_{i=1}^k$  conjuntos fechados e contráteis em  $X$  que cobrem  $B$  e  $(H_i)_{i=1}^k$  as deformações associadas. Claramente, os conjuntos fechados  $A_i = \eta(1, \cdot)^{-1}(B_i)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , cobrem  $A$ . Basta mostrar que cada  $A_i$  é contrátil em  $X$ . Para tanto, é suficiente considerarmos as deformações contínuas  $H_i * \eta : [0, 1] \times A_i \rightarrow X$  dadas por

$$(H_i * \eta)(x, t) = \begin{cases} \eta(2t, x) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1, \\ H_i(2t - 1, \eta(1, x)) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2. \end{cases}$$

A categoria de Ljusternik-Schnirelmann nos fornece limites inferiores para uma classe de funcionais limitados inferiormente, conforme estabelece o teorema abaixo.

**Teorema A.7.** *Seja  $X$  um espaço de Banach,  $M \subset X$  uma  $C^1$ -variedade e  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$  um funcional limitado inferiormente em  $M$ . Suponha que  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  para todo  $c \leq d$  e considere  $I^d = \{u \in M : I(u) \leq d\}$ . Então o funcional  $I$  restrito à  $M$  tem pelo menos  $\text{cat}(I^d)$  pontos críticos  $u$  tais que  $I(u) \leq d$ .*

Não vamos apresentar aqui a demonstração do resultado acima. Para o caso em que a variedade  $M$  é de classe  $C^{1,1}$  a demonstração mais simples que conhecemos pode ser encontrada em [73, Teorema 5.20]. Nesse caso, a regularidade da variedade nos permite construir um campo pseudo-gradiente e realizar deformações de maneira usual. No caso em que  $M$  é apenas de classe  $C^1$  a demonstração é bem mais complicada e as deformações são realizadas através de uma aplicação do princípio variacional de Ekeland. Os detalhes podem ser encontrados em [40, Corolário 4.17] (veja

também [69]), onde considera-se uma classe mais geral de funcionais definidos em  $C^1$ -variedades de Finsler.

Observamos que as propriedades (c1)-(c5) descritas acima incluem a categoria de Ljusternik-Schnirelmann como um caso particular de um conceito mais geral denominado *índice* (veja [68, Capítulo 2, Definição 5.9]). De fato, o teorema acima enunciado é uma versão bem particular de um outro mais geral que pode ser encontrado em [68, Capítulo 2, Teorema 5.11] e que lida com índices bem mais gerais. Não pretendemos aqui nos delongar no conceito de índice bem como em suas propriedades e/ou resultados existentes. Discutimos somente uma especialização da noção usual de categoria que lida com espaços nos quais podemos introduzir a ação de um grupo topológico.

Seja  $G$  um grupo de Lie compacto. Um  $G$ -espaço é um espaço topológico  $X$  munido de uma  $G$ -ação contínua  $G \times X \rightarrow X$ ,  $(g, x) \mapsto gx$ . A  $G$ -órbita de um elemento  $x \in X$  é o conjunto  $Gx = \{gx : g \in G\}$ . Um subconjunto  $A \subset X$  é  $G$ -invariante se  $Ga \subset A$  para todo  $a \in A$ .

Suponha agora que  $G$  age em dois  $G$ -espaços  $X$  e  $Y$ . Uma  $G$ -aplicação é uma função contínua  $f : X \rightarrow Y$  compatível com as ações de  $G$ , isto é,  $f(gx) = gf(x)$  para todo  $x \in X$ ,  $g \in G$ . Duas  $G$ -aplicações  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  são  $G$ -homotópicas se existe uma aplicação contínua  $\Theta : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  tal que  $\Theta(t, \cdot)$  é uma  $G$ -aplicação para todo  $t \in [0, 1]$  e, além disso,  $\Theta(0, x) = f_0(x)$  e  $\Theta(1, x) = f_1(x)$  para todo  $x \in X$ .

A  $G$ -categoria de uma  $G$ -aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é o menor número  $k = G\text{-cat}(f)$  de subconjuntos abertos e  $G$ -invariantes  $X_1, \dots, X_k$  de  $X$  que cobrem  $X$  e que têm a seguinte propriedade: para cada  $i = 1, \dots, k$ , existe um ponto  $y_i \in Y$  e uma  $G$ -aplicação  $\alpha_i : X_i \rightarrow Gy_i \subset Y$  tal que a restrição de  $f$  a  $X_i$  é  $G$ -homotópica a  $\alpha_i$ . Se não existe uma tal cobertura definimos  $G\text{-cat}(f) = \infty$ .

Se  $A \subset X$  é  $G$ -invariante e  $\iota : A \hookrightarrow X$  é a inclusão, denotamos simplesmente

$$G\text{-cat}_X(A) = G\text{-cat}(\iota) \text{ e } G\text{-cat}(X) = G\text{-cat}_X(X).$$

Observe que se  $A \subset X$  e  $G = \{\text{Id}\}$  é o grupo trivial, então  $G\text{-cat}_X(A)$  nada mais é do que  $\text{cat}_X(A)$ . Dessa forma, o conceito de  $G$ -categoria estende o de categoria de Ljusternik-Schnirelmann. Devido a similaridade dos conceitos e dos resultados que se pode obter, a  $G$ -categoria é muitas vezes referida como  $G$ -categoria equivariante de Ljusternik-Schnirelmann.

O resultado abaixo é uma consequência simples da definição e foi usado diversas vezes no decorrer do trabalho.

**Lema A.8.** (i) Se  $f : X \rightarrow Y$  e  $h : Y \rightarrow Z$  são aplicações  $G$ -aplicações então

$$G\text{-cat}(h \circ f) \leq \min\{G\text{-cat}(f), G\text{-cat}(g)\};$$



(ii) Se  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  são  $G$ -homotópicas, então  $G\text{-cat}(f_0) = G\text{-cat}(f_1)$ .

DEMONSTRAÇÃO. Afim de verificar (i), suponha que  $G\text{-cat}(f) = k < \infty$ . Então existem abertos  $G$ -invariantes  $X_1, \dots, X_k$  que cobrem  $X$ , pontos  $y_1, \dots, y_k \in Y$  e  $G$ -aplicações  $\alpha_i : X_i \rightarrow Gy_i$  tais que  $f|_{X_i}$  é  $G$ -homotópico a  $\alpha_i$ . Fixado  $i \in \{1, \dots, k\}$  considere  $z_i = h(y_i)$  e defina  $\hat{\alpha}_i : X_i \rightarrow Gz_i$  por  $\hat{\alpha}_i(x) = h(\alpha_i(x))$ . Note inicialmente que, como  $\alpha_i(x) \in Gy_i$  e  $h$  é uma  $G$ -aplicação,  $h(\alpha_i(x)) \in Gz_i$  e portanto  $\hat{\alpha}_i$  está bem definida. Além disso, como  $\alpha_i$  e  $h$  são  $G$ -aplicações, o mesmo ocorre para  $\hat{\alpha}_i$ . Afirmamos que  $h \circ f|_{X_i}$  é  $G$ -homotópico a  $\hat{\alpha}_i$ . De fato, seja  $\Theta_i : [0, 1] \times X_i \rightarrow Y$  a homotopia entre  $f|_{X_i}$  e  $\alpha_i$ . Definindo  $\hat{\Theta}_i : [0, 1] \times X_i \rightarrow Z$  por  $\hat{\Theta}_i(t, x) = h(\Theta_i(t, x))$ , temos

$$\hat{\Theta}_i(0, x) = h(\Theta_i(0, x)) = (h \circ f)(x)$$

e

$$\hat{\Theta}_i(1, x) = h(\Theta_i(1, x)) = (h \circ \alpha_i)(x) = \hat{\alpha}_i(x),$$

para todo  $x \in X_i$ , o que mostra a afirmação. Segue então que

$$G\text{-cat}(h \circ f) \leq G\text{-cat}(f).$$

No caso em que  $G\text{-cat}(f) = \infty$  a desigualdade acima é trivialmente satisfeita. Argumentando de maneira análoga mostra-se que

$$G\text{-cat}(h \circ f) \leq G\text{-cat}(h),$$

o que conclui a demonstração do item (i).

Para verificar (ii) suponha que  $G\text{-cat}(f_1) = k < \infty$ . Sejam  $X_1, \dots, X_k$  conjuntos abertos  $G$ -invariantes que cobrem  $X$ ,  $\alpha_i : X_i \rightarrow Gy_i$   $G$ -aplicações tais que  $f_1|_{X_i}$  é  $G$ -homotópico a  $\alpha_i$  e  $\Theta_i : [0, 1] \times X_i \rightarrow Y$  as respectivas homotopias. Considere ainda  $\Theta : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  a homotopia entre  $f_0$  e  $f_1$  e defina  $\hat{\Theta}_i : [0, 1] \times X_i \rightarrow Y$  por

$$\hat{\Theta}_i(t, x) = \begin{cases} \Theta(2t, x) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \Theta_i(2t - 1, x) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Como  $\Theta(t, \cdot)$  e  $\Theta_i(t, \cdot)$  são  $G$ -aplicações para todo  $t \in [0, 1]$ , o mesmo ocorre para  $\hat{\Theta}_i(t, \cdot)$ . Além disso,

$$\hat{\Theta}_i(0, x) = \Theta(0, x) = f_0(x) \text{ e } \hat{\Theta}_i(1, x) = \Theta_i(1, x) = \alpha_i(x),$$

para todo  $x \in X_i$ . Assim, concluímos que  $f_0|_{X_i}$  é  $G$ -homotópico a  $\alpha_i$ , e portanto

$$G\text{-cat}(f_0) \leq G\text{-cat}(f_1).$$

Se  $G\text{-cat}(f_1) = \infty$  a desigualdade acima também se verifica. Argumentos análogos mostram que

$$G\text{-cat}(f_1) \leq G\text{-cat}(f_0).$$

e o lema está provado. □

Finalizamos apresentando a versão equivariante do Teorema A.7.

**Teorema A.9.** *Seja  $X$  um espaço de Banach,  $M \subset X$  uma  $C^1$ -variedade simétrica com relação à origem e  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$  um funcional par limitado inferiormente em  $M$ . Suponha que  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  para todo  $c \leq d$ . Então o funcional  $I$  restrito à  $M$  tem pelo menos  $\mathbb{Z}_2\text{-cat}(I^d)$  pares antipodais  $\{u, -u\}$  de pontos críticos tais que  $I(\pm u) \leq d$ .*

Apesar do teorema acima poder ser enunciado de uma maneira bem mais geral, optamos por apresentar apenas a versão para  $\mathbb{Z}_2$ -categoria que foi utilizada no trabalho. Por isso exigimos que o funcional seja par e a variedade seja simétrica com relação à origem. A demonstração segue as mesmas linhas da prova do Teorema A.7. No caso mais simples em que  $M$  é de classe  $C^{1,1}$ , citamos também [28, Teorema 1.1] onde o resultado é provado para o conceito mais geral de categoria relativa. Para variedades de classe  $C^1$ , além do já citado livro de Ghoussoub [40], destacamos o artigo de Szulkin [69] e o excelente *survey* de Ekeland e Ghoussoub [32, Corolário 4.1].

## A.4 Seqüências minimizantes de $S$

Lembramos que se  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado e  $\lambda \geq 0$ , denotamos por

$$S_\lambda(\mathcal{D}) = S = \inf \left\{ \int_{\mathcal{D}} (|\nabla u|^p + \lambda|u|^p) \, dx : u \in W_0^{1,p}(\mathcal{D}), \int_{\mathcal{D}} |u|^{p^*} \, dx = 1 \right\}$$

a melhor constante da imersão de Sobolev  $W_0^{1,p}(\mathcal{D}) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathcal{D})$ . É bem sabido que  $S$  não depende de  $\lambda$  nem do conjunto  $\mathcal{D}$ , e que  $S$  não é atingido em subconjuntos próprios de  $\mathbb{R}^N$ .

Seja  $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\mathcal{D})$  uma seqüência limitada. Passando a uma subseqüência se necessário, podemos supor que existe  $u \in W_0^{1,p}(\mathcal{D})$  tal que  $u_n \rightharpoonup u$  fracamente em  $W_0^{1,p}(\mathcal{D})$  e  $u_n \rightarrow u$  fortemente em  $L^\theta(\mathbb{R}^N)$ , para todo  $p \leq \theta < p^*$ . Contudo, como a imersão  $W_0^{1,p}(\mathcal{D}) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathcal{D})$  não é compacta, não podemos assegurar convergência forte em  $L^{p^*}(\mathcal{D})$ . O aspecto quantitativo da perda de compacidade é descrito pelo lema abaixo, devido à P.L. Lions.

**Lema A.10 ([48, Lema I.1]).** *Seja  $(u_n) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  uma seqüência convergindo fracamente para  $u$  em  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ . Então existem duas medidas finitas não-negativas  $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ , um conjunto no máximo enumerável  $I$ , uma família  $(x_i)_{i \in I}$  de pontos distintos em  $\mathbb{R}^N$ , e duas seqüências  $(\nu_i)_{i \in I}, (\mu_i)_{i \in I}$  contidas em  $(0, \infty)$  tais que*

$$\begin{aligned}\nu &= |u|^{p^*} + \sum_{i \in I} \nu_i \delta_{x_i}, \\ \mu &\geq |\nabla u|^p + \sum_{i \in I} \mu_i \delta_{x_i}, \\ \mu_i &\geq S \nu_i^{p/p^*},\end{aligned}$$

para todo  $i \in I$ . Em particular,  $\sum_{i \in I} \nu_i^{p/p^*} < \infty$ . Além do mais, se  $\nu(\mathbb{R}^N)^{1/p^*} \geq S \mu(\mathbb{R}^N)^{1/p}$  então  $\nu = \gamma \delta_{x_0} = \gamma^{-p/q} C_0^p \mu$ , para algum  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  e  $\gamma \geq 0$ .

O resultado abaixo nos fornece uma propriedade importante das seqüências minimizantes para  $S$ . Apesar ser largamente citado na literatura, não encontramos nenhuma demonstração, de modo que adaptamos as idéias de [65, Corolário 3.7] para produzir a demonstração baixo.

**Lema A.11.** *Seja  $(v_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$  tal que  $\int_{\Omega} |v_n|^{p^*} dx = 1$  e  $\|v_n\|^p \rightarrow S$ . Então existe  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$  tal que, a menos de subsequência,  $v_n \rightharpoonup v$  fracamente em  $W_0^{1,p}(\Omega)$  e  $\nabla v_n(x) \rightarrow \nabla v(x)$  q.t.p.  $x \in \Omega$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.** Como  $\|v_n\|^p \rightarrow S$  temos que  $(v_n)$  é limitada em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Assim, a menos de subsequência,  $v_n \rightharpoonup v$  fracamente em  $W_0^{1,p}(\Omega)$  para alguma função  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Seja

$$M = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \int_{\Omega} |u|^{p^*} = 1\}.$$

Pelo princípio variacional de Ekeland podemos supor que  $(v_n)$  é uma  $(PS)_S$  seqüência do funcional  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $\varphi(u) = \|u\|^p$ , isto é, existe  $(\theta_n) \subset \mathbb{R}$  tal que

$$-\Delta_p v_n + |v_n|^{p-2} v_n - \theta_n |v_n|^{p^*-2} v_n \rightarrow 0, \quad \text{em } (W_0^{1,p}(\Omega))^*.$$

A expressão acima implica que  $\varphi(v_n) - \theta_n \rightarrow 0$  e portanto  $\theta_n \rightarrow S$ . Definindo  $w_n = \theta_n^{(N-p)/p^2} v_n$ , uma conta simples mostra que  $(w_n)$  é uma seqüência de Palais-Smale no nível  $1/NS^{N/p}$  do funcional  $E_{p^*} : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$E_{p^*}(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} (|\nabla u|^p + |u|^p) dx - \frac{1}{p^*} \int_{\Omega} |u|^{p^*} dx.$$

Denotando  $w(x) = S^{(N-p)/p^2} v(x)$  e tendo em vista a definição de  $w_n$ , é suficiente mostrar que  $\nabla w_n(x) \rightarrow \nabla w(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ .

Como  $(w_n)$  é limitada podemos usar o Teorema de Rellich-Kondrachov e o Lema A.10 para obter  $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , medidas positivas  $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\Omega)$ , um conjunto no máximo enumerável  $I$ ,  $\{x_i\}_{i \in I} \subset \Omega$  e números  $\mu_i, \nu_i > 0$  tais que

$$\begin{aligned}
 w_n &\rightharpoonup w && \text{fracamente em } W_0^{1,p}(\Omega), \\
 w_n &\rightarrow w && \text{em } L^s(\Omega), 1 < s < p^*, \\
 w_n(x) &\rightarrow w(x) && \text{q.t.p. em } \Omega, \\
 |w_n|^{p^*} &\rightharpoonup \nu = |w|^{p^*} + \sum_i \nu_i \delta_{x_i} && \text{fracamente em } \mathcal{M}(\Omega), \\
 |\nabla w_n|^p &\rightharpoonup \mu \geq |\nabla w|^p + \sum_{i \in I} \mu_i \delta_{x_i} && \text{fracamente em } \mathcal{M}(\Omega),
 \end{aligned} \tag{A.4.1}$$

$$\mu_i \geq S \nu_i^{p/p^*} \text{ e } \sum_{i \in I} \nu_i^{p/p^*} < \infty.$$

A demonstração será concluída com uma série de passos.

PASSO 1: O conjunto  $\Gamma = \{x_i\}_{i \in I}$  é finito.

Considere  $\nu_i > 0$  e  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  tal que  $0 \leq \phi \leq 1$ ,  $\phi(x) = 1$  se  $|x| < 1/2$  e  $\phi(x) = 0$  se  $|x| > 1$ . Para  $\varepsilon > 0$  pequeno defina

$$\varphi_\varepsilon^i(x) = \varphi_\varepsilon(x) = \phi\left(\frac{x - x_i}{\varepsilon}\right).$$

Como  $(\varphi_\varepsilon w_n)$  é limitado em  $W_0^{1,p}(\Omega)$  independente de  $\varepsilon$ , segue que  $\langle E'_{p^*}(w_n), \varphi_\varepsilon w_n \rangle \rightarrow 0$ . Assim,

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^p \varphi_\varepsilon \, dx = \int_\Omega |w_n|^{p^*} \varphi_\varepsilon \, dx - \int_\Omega |w_n|^p \varphi_\varepsilon \, dx - \int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2} w_n (\nabla w_n \cdot \nabla \varphi_\varepsilon) \, dx + o(1),$$

em que  $o(1)$  denota uma quantidade que vai a zero quando  $n$  vai para infinito. Fazendo  $n \rightarrow \infty$  e usando (A.4.1) obtemos

$$\int_\Omega \varphi_\varepsilon \, d\mu = \int_\Omega \varphi_\varepsilon \, d\nu - \int_\Omega |w|^{p^*} \varphi_\varepsilon \, dx - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2} w_n (\nabla w_n \cdot \nabla \varphi_\varepsilon) \, dx. \tag{A.4.2}$$

Afirmamos agora que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2} w_n (\nabla w_n \cdot \nabla \varphi_\varepsilon) \, dx = 0. \tag{A.4.3}$$

Suponha por ora que a afirmação é verdadeira. Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  em (A.4.2), usando a afirmação acima e o Teorema da Convergência Dominada obtemos

$$\mu_i = \mu\{x_i\} = \nu_i.$$

Uma vez que  $\mu_i \geq S\nu_i^{p/p^*}$  concluímos que  $\nu_i \geq S^{N/p}$ . Como  $\sum_i \nu_i^{p/p^*} < \infty$  o conjunto  $I$  tem que ser finito. Afim de verificar (A.4.3) note que, se denotarmos,

$$I_{n,\varepsilon} = \int_{\Omega} |\nabla w_n|^{p-2} w_n (\nabla w_n \cdot \nabla \varphi_\varepsilon) \, dx$$

temos que

$$|I_{n,\varepsilon}| \leq \int_{\Omega} |\nabla w_n|^{p-1} |w_n| |\nabla \varphi_\varepsilon| \, dx \leq \left( \int_{\Omega} |\nabla w_n|^p \, dx \right)^{(p-1)/p} \left( \int_{B_\varepsilon(x_i)} |w_n|^p |\nabla \varphi_\varepsilon|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Usando a limitação de  $(w_n)$  e a expressão acima vem

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} |I_{n,\varepsilon}| &\leq C \left( \int_{B_\varepsilon(x_i)} |w|^p |\nabla \varphi_\varepsilon|^p \, dx \right)^{1/p} \\ &\leq C \left( \int_{B_\varepsilon(x_i)} |w|^{p^*} \, dx \right)^{1/p^*} \left( \int_{B_\varepsilon(x_i)} |\nabla \varphi_\varepsilon|^N \, dx \right)^{1/N} \\ &= C \left( \int_{B_\varepsilon(x_i)} |w|^{p^*} \, dx \right)^{1/p^*} \left( \int_{B_\varepsilon(x_i)} \varepsilon^{-N} \left| \nabla \phi \left( \frac{x - x_i}{\varepsilon} \right) \right|^N \, dx \right)^{1/N} \\ &= C \left( \int_{B_\varepsilon(x_i)} |w|^{p^*} \, dx \right)^{1/p^*} \left( \int_{B_1(0)} |\nabla \phi(x)|^N \, dx \right)^{1/N} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**PASSO 2:** Se  $K \subset \Omega \setminus \Gamma$  é compacto então  $w_n \rightarrow u$  em  $L^{p^*}(K)$ .

Como  $K$  é compacto e  $\Gamma$  é finito temos que  $\delta = \text{dist}(K, \Gamma) > 0$ . Seja  $0 < \varepsilon < \delta$  e  $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $0 \leq \psi \leq 1$ ,  $\psi \equiv 1$  em  $K_{\varepsilon/2} = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, K) < \varepsilon/2\}$  e  $\psi \equiv 0$  em  $\Omega \setminus K_\varepsilon$ . Temos

$$\int_K |w_n|^{p^*} \, dx \leq \int_{K_\varepsilon} \psi |w_n|^{p^*} \, dx = \int_{\Omega} \psi |w_n|^{p^*} \, dx.$$

Uma vez que  $\text{supp } \psi \subset K_\varepsilon$  e  $K_\varepsilon \cap \Gamma = \emptyset$  temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_K |w_n|^{p^*} \, dx \leq \int_{\Omega} \psi \, d\nu = \int_{\Omega} \psi |w|^{p^*} \, dx = \int_{K_\varepsilon} \psi |w|^{p^*} \, dx \leq \int_{K_\varepsilon} |w|^{p^*} \, dx.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  e usando o Teorema da Convergência Dominada concluimos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_K |w_n|^{p^*} dx \leq \int_K |w|^{p^*} dx. \quad (\text{A.4.4})$$

Uma vez que  $w_n \rightharpoonup u$  fracamente no espaço uniformemente convexo  $L^{p^*}(K)$  temos

$$\int_K |w|^{p^*} dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_K |w_n|^{p^*} dx.$$

Da expressão acima e de (A.4.4) segue que  $w_n \rightarrow w$  em  $L^{p^*}(K)$ .

PASSO 3: Se  $K \subset \Omega \setminus \Gamma$  é compacto então  $\nabla w_n \rightarrow \nabla w$  em  $(L^p(K))^N$ .

Seja  $0 < \varepsilon < \delta = \text{dist}(K, \Gamma)$  e  $\psi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \Gamma)$  tal que  $0 \leq \psi \leq 1$ ,  $\psi \equiv 1$  em  $K$  e  $\psi \equiv 0$  em  $\Omega \setminus K_{\varepsilon/2}$ . Como  $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = |x|^p$  e estritamente convexa temos

$$0 \leq (|\nabla w_n|^{p-2} \nabla w_n - |\nabla w|^{p-2} \nabla w) \cdot \nabla(w_n - w) = P_n(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_K P_n(x) dx \leq \int_\Omega P_n(x) \psi dx \\ &= \int_\Omega (|\nabla w_n|^p \psi - |\nabla w_n|^{p-2} (\nabla w_n \cdot \nabla w) \psi) dx \\ &\quad + \int_\Omega |\nabla w|^{p-2} (\nabla w \cdot \nabla(w - w_n)) \psi dx. \end{aligned} \quad (\text{A.4.5})$$

Como  $\langle E'_{p^*}(w_n), \psi w \rangle \rightarrow 0$  temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2} (\nabla w_n \cdot \nabla w) \psi dx &+ \int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2} (\nabla w_n \cdot \nabla \psi) w dx \\ &+ \int_\Omega |w_n|^{p-2} w_n w \psi dx - \int_\Omega |w_n|^{p^*-2} w_n w \psi dx = o(1). \end{aligned}$$

Além disso, uma vez que  $(\psi w_n)$  é limitada em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , temos também que  $\langle E'_{p^*}(w_n), \psi w_n \rangle \rightarrow 0$ , isto é,

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^p \psi dx + \int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2} (\nabla w_n \cdot \nabla \psi) w_n dx + \int_\Omega |w_n|^p \psi dx - \int_\Omega |w_n|^{p^*} \psi dx = o(1).$$

Substituindo as duas últimas igualdade em (A.4.5) e lembrando que  $w_n \rightharpoonup w$  fracamente em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , obtemos

$$0 \leq \int_K P_n(x) dx \leq C_1(n) + C_2(n) + C_3(n) + o(1), \quad (\text{A.4.6})$$

com

$$C_1(n) = \int_{\Omega} |\nabla w_n|^{p-2} (\nabla w_n \cdot \nabla \psi) (w - w_n) \, dx,$$

$$C_2(n) = \int_{\Omega} |w_n|^{p-2} w_n (w - w_n) \psi \, dx, \quad C_3(n) = \int_{\Omega} |w_n|^{p^*-2} w_n (w_n - w) \psi \, dx.$$

Afirmamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_i(n) = 0$  para  $i = 1, 2, 3$ . Afim de verificar essa afirmação note inicialmente que, pela desigualdade de Hölder, temos

$$|C_1(n)| \leq |\nabla \psi|_{\infty} \int_{\Omega} |\nabla w_n|^{p-1} |w_n - w| \, dx \leq |\nabla \psi|_{\infty} \left( \int_{\Omega} |\nabla w_n|^p \, dx \right)^{(p-1)/p} |w_n - w|_{L^p(\Omega)}.$$

A expressão acima, a limitação de  $(w_n)$  e (A.4.1) implicam que  $C_1(n) \rightarrow 0$ . De maneira análoga mostra-se que  $C_2(n) \rightarrow 0$ . Para estimar  $C_3(n)$ , lembre que  $\text{supp } \psi \subset K_{\varepsilon/2}$ , e portanto

$$|C_3(n)| \leq \int_{K_{\varepsilon/2}} |w_n|^{p^*-1} |w_n - w| \, dx \leq |w_n|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*-1} |w_n - w|_{L^{p^*}(K_{\varepsilon/2})}.$$

Como  $\varepsilon < \text{dist}(K, \Gamma)$ , podemos usar o Passo 2 e proceder como acima para concluir que  $C_3(n) \rightarrow 0$ .

Uma vez que  $C_i(n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , segue de (A.4.6) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K (|\nabla w_n|^{p-2} \nabla w_n - |\nabla w|^{p-2} \nabla w) \cdot \nabla (w_n - w) \, dx = 0. \quad (\text{A.4.7})$$

Afim de concluir o Passo 3 lembramos que

$$(|a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b) \cdot (a - b) \geq \begin{cases} M_p |a - b|^p, & \text{se } p \geq 2 \\ M_p \frac{|a-b|^2}{(|a|+|b|)^{2-p}}, & \text{se } 1 < p < 2, \end{cases}$$

para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}^N$  (veja [66], pg. 210). Se  $p \geq 2$ , a desigualdade acima e (A.4.7) implicam que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_p \int_K |\nabla w_n - \nabla w|^p \, dx = 0.$$

Se  $1 < p < 2$  temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_p \int_K \frac{|\nabla w_n - \nabla w|^2}{(|\nabla w| + |\nabla w_n|)^{2-p}} \, dx = 0. \quad (\text{A.4.8})$$

Portanto, usando Hölder, concluimos que

$$\begin{aligned} \int_K |\nabla (w_n - w)|^p \, dx &= \int_K \frac{|\nabla (w_n - w)|^p}{(|\nabla w| + |\nabla w_n|)^{p(2-p)/2}} (|\nabla w| + |\nabla w_n|)^{p(2-p)/2} \, dx \\ &\leq \left( \int_K \frac{|\nabla w_n - \nabla w|^2}{(|\nabla w| + |\nabla w_n|)^{2-p}} \, dx \right)^{p/2} \left( \int_K (|\nabla w_n| + |\nabla w|)^p \, dx \right)^{(2-p)/2}. \end{aligned}$$

A desigualdade acima, a limitação de  $(w_n)$  e (A.4.8) implicam que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K |\nabla w_n - \nabla w|^p \, dx = 0$$

e portanto o Passo 3 fica demonstrado.

PASSO 4: A menos de subsequência,  $\nabla w_n(x) \rightarrow \nabla w(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ .

A verificação desse último passo é uma consequência imediata do Passo 3 e de um processo diagonal. Com isso concluímos a demonstração do lema. ■



---

## BIBLIOGRAFIA

- [1] C.O. Alves, *Existence of positive solutions for a problem with lack of compactness involving the  $p$ -Laplacian*, *Nonlinear Anal.* **51** (2002), 1187-1206.
- [2] C.O. Alves, Y.H. Ding, *Multiplicity of positive solutions to a  $p$ -Laplacian equation involving critical nonlinearity*, *J. Math. Anal. Appl.* **279** (2003), 508-521.
- [3] C.O. Alves, Y.H. Ding, *Existence, multiplicity and concentration of positive solutions for a class of quasilinear problems*, preprint.
- [4] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, *J. Funct. Anal.* **149** (1973), 349-381.
- [5] R.G. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue measure*, John Wiley Inc, Nova York, 1995.
- [6] T. Bartsch, *Critical point theory in partially ordered Hilbert spaces*, *J. Funct. Anal.* **186** (2001), 117-152.
- [7] T. Bartsch, Z.Q. Wang, *Multiple positive solutions for a nonlinear Schrödinger equation*, *ZAMP* **51** (2000), 366-384.
- [8] T. Bartsch, T. Weth, *A note on additional properties of sign changing solutions to superlinear elliptic equations*, *Top. Meth. Non. Analysis* **22** (2003), 1-14.
- [9] A.K. Ben-Naoum, C. Troestler, M. Willem, *Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains*, *Nonlinear Anal.* **26** (1996), 823-833.

- [10] V. Benci, G. Cerami, *The effect of the domain topology on the number of positive solutions of nonlinear elliptic problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **114** (1991), 79-93.
- [11] V. Benci, G. Cerami, *Multiple positive solutions of some elliptic problems via the Morse theory and the domain topology*, Cal. Var. Partial Differential Equations **2** (1994), 29-48.
- [12] V. Benci, G. Cerami, D. Passaseo, *On the number of positive solutions of some nonlinear elliptic problems*, Nonlinear Analysis, A tribute in honour of G. Prodi, Quaderno Scuola Norm. Sup., Pisa, 1991, 93-107
- [13] V. Benci, P.H. Rabinowitz, *Critical point theory for indefinite functionals*, Invent. Math. **52** (1979), 241-273.
- [14] J. Bernoulli, *Joahannis Bernoulli, Opera Omnia*, J. E. Hofmann ed., 4 vols, Lausanne-Geneva, 1742, Reimpressão Hildesheim, 1968.
- [15] G. Bianchi, J. Chabrowski, A. Szulkin, *On symmetric solutions of an elliptic equation with a nonlinearity involving critical Sobolev exponent*, Nonlinear Anal. **25** (1995), 41-59.
- [16] H. Brézis, *Analise Fonctionelle*, Masson, Paris, 1983.
- [17] H. Brézis, E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), 486-490.
- [18] H. Brézis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437-477.
- [19] F. Browder, *Infinite dimensional manifolds and nonlinear eigenvalue problems*, Ann. of Math. **82** (1965), 459-477.
- [20] D. Cao, S. Peng, *A note on sign-changing solutions to elliptic problems with critical Sobolev and Hardy terms*, J. Differential Equations **193** (2003), 424-434.
- [21] A. Castro, M. Clapp, *The effect of the domain topology on the number of minimal nodal solutions of an elliptic equation at critical growth in a symmetric domain*, Nonlinearity **16** (2003), 579-590.
- [22] A. Castro, J. Cossio, M. Neuberger, *A sign-changing solution for a superlinear Dirichlet problem*, Rocky Mountain J. Math. **27** (1997), 1041-1053.

- [23] G. Cerami, D. Passaseo, *Existence and multiplicity of positive solutions for nonlinear elliptic problems in exterior domains with “rich” topology*, *Nonlinear Anal.* **18** (1992), 109-119.
- [24] G. Cerami, S. Solimini, M. Struwe, *Some existence results for superlinear elliptic boundary value problems involving critical exponents*, *J. Func. Anal.* **69** (1986), 289-306.
- [25] M. Clapp, *On the number of positive symmetric solutions of a nonautonomous semilinear elliptic problem*, *Nonlinear Anal.* **42** (2000), 405-422.
- [26] M. Clapp, Y.H. Ding, *Positive solutions of a Schrödinger equation with critical nonlinearity*, *Z. Angew. Math. Phys.* **55** (2004), 1-14
- [27] M. Clapp, Y.H. Ding, *Minimal nodal solutions of a Schrödinger equation with critical nonlinearity and symmetric potential*, *Diff. Int. Equations* **16** (2003), 981-992.
- [28] M. Clapp, D. Puppe, *Critical point theory with symmetries*, *J. Reine. Angew. Math.* **418** (1991), 1-29.
- [29] D.G. Costa, *On a class of elliptic systems in  $\mathbb{R}^N$* , *Electr. J. Diff. Eq.* **7** (1994), 1-14.
- [30] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [31] I. Ekeland, *On the variational principle*, *J. Math. Anal. Appl.* **47** (1974), 324-353.
- [32] I. Ekeland, N. Ghoussoub, *Selected new aspects of the calculus of variations in the large*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **39** (2002), 207-265.
- [33] L. Euller, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, Lausanne-Geneva, 1744, Opera, Ser. I, Vol 24 (ed. C. Carathéodory), Bern, 1952.
- [34] P. Fermat, *Ouvres de Fermat*, P. Tannery e C. Henry, eds, 4 vols, 1891-1912, Supplément C d. Waard, ed. Paris, 1992.
- [35] A. Floer, A. Weinstein, *Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential*, *J. Funct. Anal.* **69** (1986), 397-408.
- [36] D. Fortunato, E. Jannelli, *Infinitely many solutions for some nonlinear elliptic problems in symmetrical domains*, *Proc. R. Soc. Edinburgh A* **105** (1987), 205-213.

- [37] M.F. Furtado, *Multiple minimal nodal solutions for a quasilinear equation with symmetric potential*, aceito para publicação na revista J. Math. Anal. Appl..
- [38] J. Garcia Azorero, I. Peral Alonso, *Existence and non-uniqueness for the  $p$ -Laplacian: Non-linear eigenvalues*, Comm. Partial Diff. Eq. **12** (1987), 1389-1430.
- [39] J. Garcia Azorero, I. Peral Alonso, *Multiplicity of solutions for elliptic problem with critical exponent or with a nonsymmetric term*, Trans. Amer. Math. Soc. **323** (1991), 877-895.
- [40] N. Ghoussoub, *Duality and perturbation methods in critical point theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [41] C. Goulart, *Problema de Dirichlet quasilinear em  $\mathbb{R}^N$  com crescimento crítico*, Tese de Mestrado, UnB, 2000.
- [42] M. Gueda, L. Veron, *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. **13** (1989), 879-902.
- [43] D. Hilbert, *Ueber das Dirichlet'sche Prinzip Jahresber*, Deutsche Math. Verein **8** (1900), 184-188 (reimpresso em J. Reinde Angew. Math. **129** (1905), 63-67.
- [44] D. Hilbert, *Ueber das Dirichlet'sche Prinzip*, Festchr. Feier, 150, Jahr, Best V. Goes. Wiss. Göttingen, 1901 (reimpresso em Math. Ann. **59** (1904), 161-186).
- [45] M.A. Krasnoselskii, *Topological methods in theory of nonlinear integral equations*, Pergamon, Oxford, 1965.
- [46] M. Lazzo, *Solutions positives multiples pour une équation elliptique non linéaire avec l'exposant critique de Sobolev*, C. R. Acad. Sci. Paris **314** (1992), 61-64.
- [47] P.L. Lions, *The concentration compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case*, Ann. Ins. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire **1** (1984), 109-145 e 223-283.
- [48] P.L. Lions, *The concentration compactness principle in the calculus of variations. The limit case*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), 145-201 e **2** (1985), 45-121.
- [49] L. Ljusternik, *Topologische Grundlagen der allgemeinen Eigenwerttheorie*, Monatsh. Math. Phys. **37** (1930), 125-130.

- [50] L. Ljusternik, L. Schnirelmann, *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*, Hermann, Paris, 1934.
- [51] L. Ljusternik, L. Schnirelmann, *Topological methods in variational problems and their applications in differential geometry of surfaces*, Uspehi Mat. Nauk **2** (1947), 166-217.
- [52] D.C. de Morais Filho, M.A.S. Souto, J.M. do O, *A compactness embedding lemma, a principle of symmetric criticality and applications to elliptic problems*, Proyecciones **19** (2000), 1-17.
- [53] M. Morse, *Relations between the critical points of a real function  $f$  of  $n$  independent variables*, Trans. Amer. Math. Soc. **27** (1925), 345-396.
- [54] Y.-G. Oh, *Existence of semi-classical bound states of nonlinear Schrödinger equations with potentials of the class  $(V)_a$* , Comm. Partial Diff. Eq. **13** (1988), 1499-1519.
- [55] Y.-G. Oh, *Corrections to "Existence of semi-classical bound states of nonlinear Schrödinger equations with potentials of the class  $(V)_a$ "*, Comm. Partial Diff. Eq. **14** (1989), 833-834.
- [56] W. Omana, M. Willem, *Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems*, Diff. Int. Equations **5** (1992), 1115-1120.
- [57] R.S. Palais, *Ljusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds*, Topology **5** (1966), 115-132.
- [58] R.S. Palais, *The principle of symmetric criticality*, Comm. Math. Phys. **69** (1979), 19-30.
- [59] R.S. Palais, S. Smale, *A generalized Morse Theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 165-171.
- [60] P.H. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. angew Math. Phys. **43** (1992), 270-291.
- [61] M. Reeken, *Stability of critical points under small perturbations*, Manuscripta Math. **7** (1972), 387-411.
- [62] O. Rey, *A multiplicity result for a variational problem with lack of compactness*, Nonlinear Anal. **13** (1989), 1241-1249.

- [63] D. Ruiz, M. Willem, *Elliptic problems with critical exponents and Hardy potentials*, J. Differential Equations **190** (2003), 524-538.
- [64] J. Schwartz, *Generalizing the Ljusternik-Schnirelman theory of critical points*, Comm. Pure Appl. Math. **17** (1964), 307-315.
- [65] E.A.B. Silva, S.H.M. Soares, *Quasilinear Dirichlet problems in  $\mathbb{R}^N$  with critical growth*, Nonlinear Anal. **43** (2001), 1-20.
- [66] J. Simon, in: P. Benilan (Ed.), *Regularité de la solution d'une equation non lineaire dans  $\mathbb{R}^N$* , Lecture Notes in Mathematics, vol. 665, Springer, Berlin, 1978.
- [67] D. Smets, *A concentration-compactness lemma with applications to singular eigenvalues problems*, J. Funct. Anal. **167** (1999), 463-480.
- [68] M. Struwe, *Variational Methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [69] A. Szulkin, *Ljusternik-Schnirelman theory on  $C^1$ -manifolds*, Ann. Inst. Henri Poincaré **5** (1988), 119-139.
- [70] A. Szulkin, *A relative category and applications to critical point theory for strongly indefinite functionals*, Nonlinear Anal. **15** (1990), 725-739.
- [71] G. Tarantello, *Nodal solutions of semilinear elliptic equations with critical exponent*, Diff. Int. Equations **5** (1992), 25-42.
- [72] M.M. Vainberg, *Variational methods for the study of nonlinear operators*, Holden-Day, San Francisco, Cal., 1964.
- [73] M. Willem, *Minimax theorems*, Birkhäuser, Boston, 1996.
- [74] J. Yang, *Positive solutions of quasilinear elliptic obstacle problems with critical exponents*, Nonlinear Anal. **25** (1995), 1283-1306.
- [75] D. Zhang, *On multiple solutions of  $\Delta u + \lambda u + |u|^{4/(n-2)} = 0$* , Nonlinear Anal. **13** (1989), 353-372.