Marcelo Fernandes Furtado

Algumas Realizações de Charles Hermite

Monografia apresentada junto à CAPES como atividade do Programa Especial de Treinamento

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Julho de 1996

CONTEÚDO

CAPÍTULO 1

Introdução

A presente monografia tem como objetivo apresentar os trabalhos do matemático francês Charles Hermite e mostrar a importância destes trabalhos no desenvolvimento da ciência, não só no ramo da matemática, mas também nas teorias físicas originárias da primeira metade do século XX.

Devido à vastidão da obra de Hermite nos concentraremos em dois trabalhos específicos. Um deles, acerca da teoria dos números transcendentes, é apontado pelos historiadores como o principal trabalho de Hermite. O outro foi escolhido levando-se em conta a relativa simplicidade dos argumentos bem como a sua importância no desenvolvimento da mecânica quântica, que é uma das grandes vertentes da física moderna.

Na parte matemática da monografia tomamos o cuidado de argumentar da forma mais simples possível, sem contudo deixar de lado o rigor matemático que tais teorias exigem. Diante da impossibilidade óbvia de construir todas as ferramentas matemáticas necessárias, admitimos que o leitor possui conhecimentos equivalentes a um curso elementar de Cálculo Diferencial e Integral, bem como um curso introdutório à teoria das Equações Diferenciais Ordinárias. Os resultados mais modernos, que dependeriam de outros conhecimentos mais profundos, são enunciados acompanhados de referências bibliográficas que trazem tais resultados demonstrados.

CAPÍTULO 2

Notas Biográficas

Charles Hermite nasceu em Dieuze, França, em 24 de dezembro de 1822. Ele é um exemplo raro da perfeita combinação entre gênio criativo e capacidade de dominar o melhor dos trabalhos de outros matemáticos. Isto lhe permitiu conciliar as criações aritméticas de Gauss com as descobertas de Abel e Jacobi a respeito das funções elípticas. Soube também extrair o melhor da vasta teoria dos invariantes algébricos, que nessa altura era rapidamente desvendada pelos matemáticos ingleses Boole, Cayley e Sylvester.

A grande instabilidade política que pairava sobre a França daquela época por pouco não tira a vida de Hermite. A Revolução Francesa levara à morte seu avô paterno bem como muitos outros familiares. Se a capacidade matemática de Hermite foi herdada de algum parente certamente foi do lado de seu pai, que havia estudado engenharia. Mais tarde, decepcionado com a engenharia, seu pai amargou um fracasso na indústria do sal. Depois deste insucesso ele conseguiu se estabelecer de maneira satisfatória no ramo do comércio de tecidos. Hermite foi o sexto de um total de sete filhos, cinco homens e duas mulheres. Nasceu com uma deformidade na perna direita, razão pela qual sempre mancou. De certa forma a deformidade foi útil no sentido de tê-lo livrado de toda e qualquer possibilidade de ingressar nas tropas francesas.

As primeiras instruções foram dadas a Hermite pelos próprios pais. Contudo, a prosperidade nos negócios fez com que a família se mudasse para Nancy. Nesta ocasião Hermite tinha apenas seis anos e, devido a demanda de serviço de seus pais, ingressou como aluno em *lycée* na própria cidade de Nancy. Porém essa escola não correspondeu às expectativas dos pais e Hermite foi mandado para Paris, onde estudou por um curto período de tempo em *I ycée Henri IV*, sendo transferido, quando tinha dezoito anos, para a famosa Louis-le-Grand, que fora a primeira escola do grande matemático Évariste Galois. Ali ele se preparou para os exames da Politécnica.

Este período foi suficiente para mostrar que, como Galois, Hermite tinha aversão às aulas e era completamente indiferente aos tópicos de matemática elementar que eram apresentados. Porém, competentes leituras em física o fascinavam e tornaram menos tedioso o processo de aprendizagem. Quando era estudante de *lycée* ignorava as lições de casa. Em vez de fazê-las, gastava seu tempo com leituras na biblioteca de Sainte-Geneviéve, onde estudou os trabalhos de Lagrange a respeito de soluções de equações numéricas. Teve acesso também a *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss. Hermite costumava dizer que nestes dois livros ele havia aprendido álgebra. Apesar de toda esta capacidade de absorção de conceitos matemáticos o desempenho de Hermite nos exames era medíocre.

Neste período Hermite foi enconrajado pelo devotado professor Richard, que via em Hermite uma rara capacidade de tratar os conceitos matemáticos. Richard temia que Hermite tivesse o mesmo fim trágico que tivera Galois. Por isso lutava contra a estupidez do regime educacional que, da forma como se apresentava, não conseguia extrair de Hermite todo o potencial que ele certamente possuía.

Os primeiro trabalhos de Hermite publicados foram dois artigos no recém fundado *Nouvelles Annales de Mathématiques*, um jornal voltado para o interesse dos estudantes de matemática. O jornal data de 1842 e traz dois artigos de Hermite. O primeiro é um exercício de geometria analítica das cônicas. O segundo, este sim um marco na carreira de Hermite, tem como título *Considerations on the algebraic solution of the equation of fifth degree* (tradução). Neste artigo Hermite faz observações que espantaram a todos que conviviam com ele. Era difícil entender como uma pessoa que tinha idéias tão incríveis como as expressadas no artigo pudesse ter tanta dificuldade em assimilar tópicos de matemática elementar e tivesse um rendimento tão medíocre nos exames a que era submetido.

Hermite ingressou na École Polytechnique em 1842. Seu desempenho nas provas de admissão foi desastroso, amargando um sexagésimo oitavo lugar dentre os classificados. Este desempenho ruim acabou por marcar profundamente a vida do nosso jovem matemático.

O primeiro ano na Polytechnique foi decisivo para o seu futuro como matemático. Ignorando completamente a geometria descritiva e os outros tópicos estudados por seus colegas, Hermite teve seu primeiro contato com as funções Abelianas. Este ramo da matemática tomava o tempo de grande parte dos matemáticos da Europa. Através de seus trabalhos Hermite teve a oportunidade de conhecer Joseph Liouville (ver 3.2 adiante), matemático francês de grande destaque que, ao tomar conhecimento dos feitos de Hermite, o encorajou a escrever para Jacobi, que a esta altura era um dos matemáticos de maior prestígio na Europa. Outro fato importante foi que, ao fim deste primeiro ano, o defeito na perna de Hermite o obrigou a sair da Polytechnique.

Apesar de receoso Hermite escreve, em 1843, sua primeira carta a Jacobi: "O estudo do seu ensaio sobre funções de quatro períodos, originário da teoria das funções Abelianas, conduziu-me a um teorema, para a divisão das variáveis dessas funções , análogo ao que você tem... para obter expressões simples para as raízes das equações tratadas por Abel. M. Liouville aconselhou-me escrever para você, submetendo o meu trabalho; então eu o fiz, Senhor. Espero que você tenha a satisfação de recebê-lo com toda a indulgência necessária."

A resposta não poderia ser melhor:

"Nao fique desconcertado, Senhor, se algumas de suas descobertas coincidem com alguns de meus antigos trabalhos. Como você deve começar de onde terminei, há necessariamente uma pequena esfera de contato. No futuro, se você me honrar com suas comunicações , terei somente a aprender."

Empolgado com a receptividade de Jacobi e com o fato do mesmo tê-lo citado em um de seus trabalhos, onde agradecia a ajuda dada por Hermite às idéias ali apresentadas, Hermite volta a corresponder-se com Jacobi. Escreveu outras quatros cartas versando sobre assuntos os mais diversos possíveis.

Numa dessas cartas Hermite faz uma talentosa exposição acerca das funções uniformes. Na carta ele agradece à Jacobi a citação que o mesmo fizera dele. Vale notar que o estudo de Hermite com respeito às funções uniformes foi um dos seus grandes trabalhos. Este assunto, bem como outros correlatos, já tinha sido abordado, sem sucesso, por Gauss. Hermite usa aqui a sua extrema criatividade e também outras ferramentas matemáticas que Gauss não possuia na época em que abordara o problema.

Hermite continuava a trabalhar em suas pesquisas mas, em 1847, é obrigado a interromper os trabalhos afim de realizar os exames que o tornariam bacharel em letras e ciências. Como era de costume os exames foram longos e penosos para Hermite. Ele acabou passando nos exames, não só pelo seu desempenho, mas também pela ajuda de dois amigos que eram examinadores, Sturm e Bertrand. Em 1848 Hermite acabou por se casar com Louise, irmã de Bertrand.

Apesar de todo o ódio pelos exames e pela estupidez do sistema de ensino oficial Hermite se torna, em 1848, examinador da Polytechnique, instituição que o havia rejeitado tempos atrás.

Apoś se livrar de uma vez por todas dos examinadores pode impulsionar com força total sua brilhante carreira de matemático. Em 1856 foi admitido como membro da Acadêmia de Ciências. Após uma breve passagem pela École Normate se torna, em 1870, professor na Sorbone, onde trabalharia mais vinte e sete anos antes de se aposentar. Neste longo período em que foi professor, instruiu jovens que viriam a se tornar grande matemáticos como Émile Picard, Gastou Darboux, Émile Borel e Henri Poincaré, dentre outros. Este último foi o mais eminente dentre todos os discípulos de Hermite. Os dois estão, sem sombra de dúvidas, na lista dos maiores pensadores franceses.

A posição de destaque que Hermite ocupava fazia com que ele estivésse entre os centralizadores de conhecimentos matemáticos da época. Neste ponto merece destaque o caráter extremamente cordial de Hermite para com aqueles que lhe escreviam, especialmente com os iniciantes, que tinham em Hermite uma fonte de constante encorajamento.

Um outro trabalho de Hermite que merece destaque foi o que versava sobre as formas Hermitianas. Um exemplo bem simples é o seguinte:

$$a_{11}x_1\overline{x_1} + a_{12}x_1\overline{x_2} + a_{21}x_2\overline{x_1} + a_{22}x_2\overline{x_2},$$

onde x_1 e x_2 são números complexos, $\overline{x_1}$ e $\overline{x_2}$ são seus respectivos conjugados e os coeficientes a_{ij} são tais que $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Quando do descobrimento destas formas algébricas Hermite estava interessado em pesquisar os números que poderiam ser representados desta maneira. Posteriormente este trabalho foi exaustivamente usado por Heinsenberg para fundamentar a mecânica quântica (ver 4.1 adiante). É interessante notar que, em momento algum, Hermite esteve preocupado com as aplicações físicas de seus resultados. Mesmo assim estes acabaram por se tornar esseciais na formulação da teoria de Heisenberg. Outro trabalho de Hermite utilizado pelos físicos da primeira metade do século XX foram os Polinômios e as funções de Hermite. O cápitulo 4 do presente trabalho trata tais polinômios e mostra que eles são soluções de um caso particular da equção de Schrödinger.

Hermite também deixou a sua marca no estudo da teoria dos invariantes algébricos. Uma famosa frase de Sylvester é:

> *"Cayley, Hermite and I constitute an Invariantive Trinity"* [1]

A frase, por si só, já diz a importância de Hermite nesta área. Porém os dois trabalhos mais belos de Hermite situam na teoria dos números transfinitos e na equação geral do quinto grau.

Com respeito a este último trabalho citado, já se sabia na época que uma equação completa do quinto grau podia ser reduzida, através de substituições baseadas exclusivamente nos coeficientes e na incógnita, a uma do tipo:

$$x^5 - x - a = 0.$$

Abel havia mostrado que a equação acima não tinha solução por radicais, isto é, havia a necessidade de introduzir um novo elemento, de origem analítica, afim da resolver a equação . Hermite mostrou que este novo elemento analítico a ser introduzido deve ser as funções elípticas. A partir

---

[1] [1], pg. 459.

de tal introdução Hermite procede com a resolução da equação do quinto grau. Esta idéia criou um verdadeiro reboliço no mundo matemático. De fato ela inaugurou um novo ramo, na álgebra e análise, onde o problema era descobrir e investigar essas funções em termos da equação geral de n-ésimo grau que pode ser resolvida por intermédio de tal função elíptica. Neste sentido Poincaré, que fora aluno de Hermite, obteve em 1800 resultados extremamente representativos nesta área.

O outro grandioso trabalho de Hermite é a sua demonstração , que data de 1873, da transcendência do numero e. O capítulo 3 apresentará em detalhes este trabalho.

Hermite não só demonstrou que e é transcendente, mas apresentou ao mundo um método completamente novo de enfrentar problemas desta natureza. A demonstração de Hermite prima pela extrema simplicidade e elegância. Conforme diz Bell:

> *"... when Hermite proved in 1873 that e is transcendental, the mathematical world was not only delghted but astonished at the marvellous ingenuity at the proof."* [2]

A simplicidade na apresentação dos argumentos e a extrema criatividade são fatores presentes em toda a obra de Hermite. A verdade é que ele é daqueles que parece ter nascido para a matemática.

A já citada cordialidade para com matemáticos iniciantes que lhe remetiam escritos é uma das grandes qualidades de Hermite. Aliado a isso tome a extrema convicção que tinha a respeito da inexistência de barreiras de raça, credo ou posição social para a ciência. Bell descreve esta característica de Hermite com a seguinte colocação :

> *"Even when the arrogant Prussians were humiliating Paris in the Franco-Prussian war, Hermite, patriot though he was, kept his head, and he saw clearly that the mathematics of 'the enemy' was mathematics and nothing else."* [3]

Estas características mostram que Hermite, além de grande matemático, foi também um grande homem. Hermite morreu em 14 de janeiro de 1901.

[2] [1], pg. 463.
[3] [1], pg. 465.

CAPÍTULO 3

Números Transcendentes

O objetivo deste capítulo é apresentar um dos principais trabalhos de Hermite e mostrar a sua importância para o desenvolvimento da Teoria dos Números Transcendentes.

Inicialmente, como de costume, teremos uma apresentação dos conceitos e das definições necessárias ao desenvolvimento do capítulo. A partir daí os resultados serão apresentados na ordem em que foram surgindo no decorrer do desenvolvimento da matemática.

Inicialmente veremos os trabalhos de Liouville. Tais trabalhos foram importantes porque iniciaram todos os estudos acerca de números transcendentes. Em seguida surgem os estudos de Hermite que, conforme será visto, foram fundamentais por apresentar um método poderoso de se obter novos resultados. Posteriormente outros grandes matemáticos como Cantor e Hilbert se envolveram na tentativa de solucionar problemas nesta área, o que mostra a importância deste belíssimo ramo da matemática moderna.

Ao final do capítulo teremos a oportunidade de conhecer alguns resultados relativamente recentes bem como os problemas que ainda estão por resolver. Será apresentada também uma aplicação da teoria na resolução de problemas de construção geométrica.

3.1 Conceitos e definições

Definição 3.1. *Um número α é dito* **algébrico** *se for solução de uma equação polinomial da forma:*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

onde os coeficientes $a_{i's}$ são tomados em $\mathbb{Z}$. No caso particular em que $a_n = 1$ dizemos que α é um **inteiro algébrico**.

Definição 3.2. *Um número β é dito* **transcendente**, *ou* **transfinito**, *se ele não for algébrico.*

Observe que as definições dadas acima nos fornecem uma forma de particionar os números reais. De fato, dado um número real qualquer, ele dever ser algébrico ou transcendente.

A partir das definições também é fácil concluir que todo número racional é algébrico. Com efeito seja $\dfrac{a}{b}$ um número racional qualquer. É evidente que este número satisfaz a relação $ax - b = 0$ e portanto é algébrico.

Vale notar também que existem números irracionais que são algébricos. Para exemplificar isto tomemos o número $\sqrt{2}$ que, como se sabe, é irracional. Para mostrar que $\sqrt{2}$ é algébrico basta tomarmos a equação $x^2 - 2 = 0$, da qual $\sqrt{2}$ é solução .

3.2 A existência de transcendentes

Uma pergunta que surge naturalmente é a da existência de números transcendentes. Isto porque, a partir da definição , não nos parece muito claro que realmente existam números transcendentes. Quem primeiro respondeu esta questão foi Liouville[1]. Ele determinou, em 1851, um critério suficiente para que um dado número seja transfinito. A partir deste critério Liouville conseguiu produzir a primeira lista de números transfinitos que se tem notícia.

Vamos ver alguns pontos importantes do trabalho de Liouville.

Definição 3.3. *Diz-se que um número algébrico α é de* **grau n** *se ele for raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros de grau n e não existir nenhum polinômio com coeficientes inteiros, de grau menor que n, que contenha α como uma de suas raízes.*

Definição 3.4. *Um número α é* **aproximável na ordem n por racionais** *se existirem uma constante $c > 0$ e uma sequência $\{\frac{p_k}{q_k}\}$ de racionais distintos, com $q_k > 0$ e mdc(p_k,q_k)=1, tais que:*

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{c}{q_k^n} \tag{3.2.1}$$

[1] Joseph Liouville : matemático francês (Saint-Omer 1809 - Paris 1882). Em 1836, fundou o Journal des Mathematiques Pures et Appliquées que exerceu profunda influência em seu século. Foi o primeiro a determinar um número transcente.

Convém observar aqui que, fixado um q na desigualdade acima, uma simples manipulação algébrica nos permite escrever:

$$|q\alpha - p_k| < \frac{c}{q^{n-1}}$$

Uma vez que p_k só assume valores inteiros a desigualdade acima nos permite concluir que, para um denominador q fixo, existe somente um número finito de possíveis numeradores para a nossa sequência de racionais. Isto é importante porque, a partir deste fato, podemos concluir que a sequência $\{q_k\}$ dos denominadores é ilimitada. De fato, se assim não o fosse, uma vez que q_k só assume valores inteiros, teríamos um número finito de possíveis denominadores. Para cada denominador fixo teríamos um número finito de possíveis numeradores distintos. Para que isso fosse correto, uma vez que $\{\frac{p_k}{q_k}\}$ é uma sequência de racionais, deveríamos ter repetições , o que vai contra a hipotése de que os elementos são todos distintos. Logo a sequência $\{q_k\}$ dos denominadores é ilimitada

Teorema 3.5. *Seja α um número algébrico real de ordem n. Então existe uma constante $A > 0$ tal que:*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Aq^n} \tag{3.2.2}$$

para qualquer racional $\dfrac{p}{q}$.

Demonstração : Como α é um número algébrico de ordem n, então α é raiz de

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

onde $a_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ e $a_n \neq 0$.

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ todas as raízes de $f(x)$. O Teorema Fundamental da Álgebra nos garante que $r \leq n$ e portanto esta lista é realmente finita. Considere o conjunto

$$B = \{|\alpha - \alpha_1|, |\alpha - \alpha_2|, \cdots, |\alpha - \alpha_r|\} - \{0\}.$$

Como B é finito existe $d > 0$ tal que $d = Min(B)$.

Portanto, se considerarmos o intervalo $I = (\ \alpha - d, \alpha + d\ )$ o polinômio $f(x)$, no intervalo I, só se anulará no ponto $x = \alpha$.

Seja $\frac{p}{q}$ um racional tal que $\frac{p}{q} \in I$. O Teorema do Valor Médio nos assegura que existe $\lambda \in I$ tal que :

$$f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\alpha - \frac{p}{q}\right) f'(\lambda)$$

Uma vez que $f(\alpha) = 0$ teremos :

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| |f'(\lambda)| \tag{3.2.3}$$

Agora observe que, como $f(x)$ é um polinômio de grau n, $f'(x)$ é um polinômio de grau $n-1$. Como todo polinômio, restrito a um intervalo finito, é limitado, existe $M > 0$ tal que $|f'(x)| < M$ para todo $x \in I$. Usando esta desigualdade e olhando para (3.2.3) temos :

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| M \tag{3.2.4}$$

Vamos agora limitar inferiormente a parcela da esquerda. Lembrando que $f(\frac{p}{q}) \neq 0$ podemos escrever:

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \frac{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_0 q^n}{q^n} \right| \geq \frac{|\delta|}{q_n}$$

Uma vez que $f(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros e tanto p como q são inteiros podemos concluir que δ também é inteiro. Logo:

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \geq \frac{1}{q^n}$$

Usando esta estimativa e a desigualdade (3.2.4) teremos:

$$\frac{1}{q^n} < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| M \quad \Rightarrow \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{Mq^n},$$

para todo $\frac{p}{q} \in I$.

Se $\frac{p}{q} \notin I$ teremos $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > d$ e, como $q \geq 1$, podemos escrever

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{d}{q^n} = \frac{1}{\frac{1}{d}q^n}$$

Agora, fazendo $A = Max\{M, \frac{1}{d}\}$, obtemos finalmente :

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{Aq^n},$$

para todo racional $\dfrac{p}{q}$. □

Necessitamos ainda de algumas informações adicionais. Vamos a elas.

Definição 3.6. *Diz-se que um número real α é um* **número de Liouville** *quando existe uma sequência de racionais distintos $\{\frac{p_k}{q_k}\}$, com $q_k > 0$ e mdc(p_k,q_k)=1, tal que:*

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^k}$$

De acordo com a definição devemos ter todos os racionais da sequência em sua forma irredutível. Porém, dada uma sucessão de racionais que verifique a desigualdade da definição é sempre possível obter uma outra, derivada da primeira, tal que seus elementos estejam na forma irredutível. Portanto é suficiente termos uma sequência qualquer de racionais distintos.

Vamos justificar agora a nosso interesse nos números de Liouville.

Teorema 3.7. *Todo número de Liouville é transcendente.*

Demonstração : Suponha o contrário, isto é, que um dado número de Liouville α seja algébrico. Como α é algébrico ele possui uma ordem, que denotaremos por n. O Teorema 3.5 nos garante que a relação (3.2.2) é verdadeira para todo racional $\frac{p}{q}$ e, em particular, para os racionais $\frac{p_k}{q_k}$ da definição 3.4. Portanto podemos escrever :

$$\frac{1}{Aq_k^n} < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^k},$$

e portanto temos que $q_k^{k-n} < A$ o que é um absurdo visto que a sequência $\{q_k\}$ é ilimitada. O absurdo provém do fato de supormos α como sendo algébrico. Logo α é transcendente. □

O Teorema 3.7 nos assegura que, se conseguirmos encontrar um número de Liouville, teremos encontrado também um número transfinito. Dessa maneira Liouville encontrou toda uma família de números transcendentes. Vamos exemplificar com um desses números.

Teorema 3.8. *Considere o número α definido por*

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}.$$

Então α é transcendente.

Demonstração : Conforme visto é suficiente mostrar que α é um número de Liouville. Para isso defina a seguinte sequência:

$$\frac{p_k}{q_k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{10^{j!}}. \tag{3.2.5}$$

Com esta definição teremos:

$$\alpha - \frac{p_k}{q_k} = \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{10^{j!}} = \gamma \tag{3.2.6}$$

Observe que, ao escrevermos a expressão de γ, o primeiro 1 aparece na posição $(k+1)!$. Explicitemos isto:

$$\gamma = 0,\overbrace{000\ldots00}^{(k+1)!-1}100... < 0,\overbrace{000\ldots00}^{(k+1)!-1}2 = \frac{2}{10^{(k+1)!}} \tag{3.2.7}$$

Trabalhemos um pouco mais esta expressão.

$$\frac{2}{10^{(k+1)!}} = \frac{2}{10^{(k+1)k!}} = \frac{2}{10^{kk!}10^{k!}} = \frac{1}{(10^{k!})^k} \frac{1}{\frac{10^{k!}}{2}}$$

Uma vez que $\frac{10^{k!}}{2} > 1$ temos que

$$\frac{2}{10^{(k+1)!}} < \frac{1}{(10^{k!})^k} \tag{3.2.8}$$

Finalmente considerando (3.2.6), (3.2.7) e (3.2.8) podemos escrever:

$$\gamma = \alpha - \frac{p_k}{q_k} < \frac{1}{(10^{k!})^k} \tag{3.2.9}$$

Olhando agora para (3.2.5) temos que

$$\frac{p_k}{q_k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{10^{j!}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^{2!}} + \cdots + \frac{1}{10^{k!}} = \frac{p_k}{10^{k!}}.$$

A última igualdade foi obtida colocando a soma sob um mesmo denominador comum. Isto nos mostra que $q_k = 10^{k!}$.

Agora, observando a desigualdade (3.2.9) e lembrando que $q_k = 10^{k!}$ podemos concluir que α é um número de Liouville. Logo, pelo Teorema 3.7, α é um número transfinito. $\square$

Uma pequena sofisticação nos argumentos acima nos permite mostrar que o número $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{10^{j!}}$, onde a_j é um inteiro positivo menor que 10, é também transcendente. Ao leitor interessado em conhecer melhor os números de Liouville recomendamos a leitura de [5].

3.3 Hermite e a transcendência do e

Conforme dito anteriormente Liouville foi o primeiro matemático a conseguir "fabricar" um número transcendente. Os trabalhos de Liouville datam de 1851.

Nas duas décadas seguintes pouca coisa nova e significante foi acrescentada à Teoria dos Números Transcendentes. Até que, em 1873, os estudos de Hermite sobre as funções contínuas algébricas o levaram a estabelecer a transcendência do número e, base dos logaritmos neperianos.

Este trabalho é importante não só porque estabelece, pela primeira vez, a transcendência de um número familiar aos matemáticos mas também pelo método empregado na demostração , que seria a fonte de inspiração de outros grandes trabalhos de autoria dos matemáticos que sucederam Hermite nos estudos a respeito de números transfinitos.

Como é comum na história da matemática, a demonstração de Hermite sofreu um processo de simplificação , por outros matemáticos, ao longo dos anos. Hilbert[2] foi um dos que simplificou bastante a demonstração . No presente trabalho veremos uma variante, devida a Hurwitz, da demonstração de Hilbert. Antes porém dois pequenos lemas que nos serão úteis posteriormente.

Lema 3.9. *Seja $f(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros e seja p um número inteiro positivo menor que o grau de $f(x)$. Então, para $i \geq p$*

$$\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{f(x)}{(p-1)!}\right)$$

é um polinômio com coeficientes inteiros e divisíveis por p.

Demonstração : Uma vez que a derivada é um operador linear é suficiente mostrarmos que

$$\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{x^j}{(p-1)!}\right)$$

tem coeficiente inteiro e divisível por p. Se tivermos $i > j$ esta derivada será nula e não há nada a mostrar, por isso vamos considerar apenas o caso $i \leq j$. Lembrando que $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ podemos estabelecer, de maneira recursiva, o seguinte resultado:

$$\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{x^j}{(p-1)!}\right) = \frac{j!}{(j-i)!(p-1)!}x^{j-i}$$

[2]David Hilbert : matemático alemão (Königsberg 1862 - Göttingen 1943). Seus trabalhos versam sobre a teoria dos números, a álgebra, a análise e a geometria. Foi um dos fundadores do método axiomático, concebendo os termos fundamentais como seres lógicos, que têm como únicas propriedades as que lhes são atribuídas pelos axiomas.

Vamos mostrar que $\dfrac{j!}{(j-i)!(p-1)!}$ é um número inteiro e divisível por p. Com efeito temos:

$$\frac{j!}{(j-i)!(p-1)!} = \frac{j!i!}{(j-i)!i!(p-1)!}.$$

Mas $\dfrac{j!}{(j-i)!i!} = \dbinom{j}{i}$ é um dos coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^j$ sendo portanto um número inteiro, digamos m. Agora, lembrando que $i \geq p$ podemos escrever:

$$\frac{j!}{(j-i)!(p-1)!} = \frac{mi(i-1)(i-2)\cdots p(p-1)!}{(p-1)!} = mi(i-1)(i-2)\cdots p,$$

que é o que queríamos.

Lema 3.10. *Considere a seqûencia $\{a_p\}$ definida por*

$$a_p = \frac{e^n n^p (M)^p}{(p-1)!},$$

onde M é uma constante. Então $\lim\limits_{p\to\infty} a_p = 0$.

Demonstração : Para demonstrar usaremos o seguinte fato: se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente então $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Com isso é suficiente mostrarmos que $\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_p$ converge. Façamos isto:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^n(nM)^p}{(p-1)!} = e^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(Mn)^{p+1}}{p!} = e^n \sum_{p=0}^{\infty} c_p$$

Pelo Teste da Razão é suficiente mostrarmos que $\lim\limits_{p\to\infty} \left|\dfrac{c_{p+1}}{c_p}\right| < 1$. Calculemos este limite:

$$\lim_{p\to\infty} \left|\frac{c_{p+1}}{c_p}\right| = \lim_{p\to\infty} \frac{(nM)^{p+1}nM}{(p+1)p!} \frac{p!}{(nM)^{p+1}} = \lim_{p\to\infty} \frac{nM}{p+1} = 0 < 1.$$

Assim a série converge e temos que $\lim\limits_{p\to\infty} a_p = 0$. □

Teorema 3.11. *O número e̲ é transcendente.*

Demonstração : Considere $f(x)$ um polinômio de grau r com coeficientes reais. Seja

$$F(x) = f(x) + f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) + \cdots + f^{(r)}(x), \tag{3.3.1}$$

onde $f^{(i)}(x)$ representa a i-ésima derivada de $f(x)$ em relação a x. Temos que:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right) &= e^{-x}f^{(1)}(x) - e^{-x}f(x) + e^{-x}f^{(2)}(x) - e^{-x}f^{(1)}(x) + \cdots + \\ &+e^{-x}f^{(r)}(x) - e^{-x}f^{(r-1)}(x) + e^{-x}f^{(r+1)}(x) - e^{-x}f^{(r)}(x) \end{aligned}$$

Efetuando todos os cancelamentos e lembrando que $f^{(r+1)}(x) = 0$ teremos a seguinte relação :

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right) = -e^{-x}f(x) \tag{3.3.2}$$

Uma vez que $F(x)$ é um polinômio e a função exponencial é infinitamente derivável podemos afirmar que $e^{-x}F(x)$ também é infinitamente derivável e portanto vale o Teorema do Valor Médio em qualquer intervalo da reta. Em particular, se tomarmos o intervalo $[0,k]$, $k > 0$, e lembrando a relação (3.3.2) teremos:

$$e^{-k}F(k) - F(0) = -ke^{-k\theta_k}f(k\theta_k),$$

onde θ_k é um número real que depende de k e está entre 0 e 1. Multiplicando esta última igualdade por e^k obtemos:

$$F(k) - e^kF(0) = -ke^{k(1-\theta_k)}f(k\theta_k) \tag{3.3.3}$$

Defina agora

$$\epsilon_k = F(k) - e^kF(0) = -ke^{k(1-\theta_k)}f(k\theta_k).$$

Vamos supor, por absurdo, que e seja um número algébrico. Assim existem constantes inteiras $c_o, c_1, \ldots, c_n$ tais que

$$c_ne^n + c_{n-1}e^{n-1} + \cdots + c_1e + c_0 = 0, \tag{3.3.4}$$

e podemos supor, sem perda de generalidade, que $c_0 > 0$.

Observe agora que

$$\begin{aligned} c_1\epsilon_1 &= c_1F(1) - c_1eF(0) \\ c_2\epsilon_2 &= c_2F(2) - c_2e^2F(0) \\ c_3\epsilon_3 &= c_3F(3) - c_3e^3F(0) \\ &\vdots \\ c_n\epsilon_n &= c_nF(n) - c_ne^nF(0) \end{aligned}$$

Somando todas essas igualdades teremos:

$$c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + \cdots + c_n\epsilon_n = c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_nF(n) - \gamma,$$

onde $\gamma = F(0)(c_1e + c_2e^2 + \cdots + c_ne^n)$. Mas, por (3.3.4), podemos concluir que $\gamma = -c_0F(0)$ e portanto ficamos com

$$c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + \cdots + c_n\epsilon_n = c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_nF(n) \tag{3.3.5}$$

Uma vez que $f(x)$ é um polinômio qualquer, vamos continuar nossa argumentação colocando

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}[(1-x)(2-x)\cdots(n-x)]^p,$$

onde p é um primo tal que $p > n$ e $p > c_0$.

Note que

$$(1-x)(2-x)\cdots(n-x) = n! + \sum_{j=1}^{n} d_jx^j, \quad \text{com } d_j \in \mathbb{Z}$$

e portanto

$$f(x) = \frac{(n!)^px^{p-1}}{(p-1)!} + \sum_{j=p}^{p(n+1)-1} \frac{b_jx^j}{(p-1)!}, \quad \text{com } b_j \in \mathbb{Z} \tag{3.3.6}$$

Observe agora que $x = 1, 2, \ldots, n$ é raíz de multiplicidade p do polinômio $f(x)$. Em virtude disto teremos

$$f(x) = f^{(1)}(x) = \cdots = f^{(p-1)}(x) = 0, \quad \text{para } x = 1, 2, \ldots, n \tag{3.3.7}$$

Aplicando o resultado do Lema 3.9 ao polinômio $f(x)$ podemos concluir que, para $x = 1, 2, \ldots, n$, $f^{(p)}(x), f^{(p+1)}(x), \cdots, f^{(n(p+1)-1)}(x)$ assume somente valores múltiplos de p. Deste fato e da definição (3.3.1) podemos afirmar que $F(x)$ é múltpilo de p para $x = 1, 2, \ldots, n$ e portanto

$$c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_nF(n) \quad \text{é múltiplo de } p. \tag{3.3.8}$$

Olhemos agora para $F(0)$.

Observe inicialmente que $x = 0$ é uma raíz de multiplicidade $p - 1$ do polinômio $f(x)$. Deste fato segue que

$$f(0) = f^{(0)}(0) = \cdots = f^{(p-2)}(0) = 0 \tag{3.3.9}$$

Para $i \geq p$, $f^{(i)}(0)$ é um múltiplo de p, pelo Lema 3.9.

Porém, da relação (3.3.6), temos que $f^{(p-1)}(0) = (n!)^p$. Uma vez que $p > n$ e p é um número primo podemos concluir que p não divide $(n!)^p$ e portanto $f^{(p-1)}(0)$ é um inteiro não divisível por

p. Agora note que $F(0)$ é uma soma de inteiros. Todos estes inteiros, exceto um, são divisíveis por p. Logo p não divide $F(0)$ e, uma vez que $p > c_0$, p não divide $c_0F(0)$ e podemos, finalmente, afirmar

$$c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n) \quad \text{é um inteiro não divisível por } p. \tag{3.3.10}$$

Guardemos esta informação e trabalhemos agora o lado esquerdo da igualdade (3.3.5).

Recordemos a definição dada:

$$\epsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)}f(k\theta_k)$$

Em virtude da definição de $f(x)$ teremos então

$$|\epsilon_k| = \frac{e^{k(1-\theta_k)}}{(p-1)!}k^p\theta_k^{p-1}[|1-k\theta_k|\,|2-k\theta_k|\cdots|n-k\theta_k|]^p$$

Agora observe que, como $0 < k \leq n$ e $0 < \theta_k < 1$, para todo $i \in \mathbb{Z}$ tal que $0 < i \leq n$ vale a seguinte relação :

$$|i - k\theta_k| \leq |i| + |k\theta_k| \leq 2n.$$

E desta última desigualdade segue que

$$[|1-k\theta_k|\,|2-k\theta_k|\cdots|n-k\theta_k|]^p \leq (2^n n^n)^p = (M)^p, \tag{3.3.11}$$

onde $M = 2^n n^n$ é uma constante.

Como $k \leq n$ e $0 < \theta_k < 1$ teremos:

$$\begin{array}{ll} (i) & k(1-\theta_k) \leq n(1-\theta_k) \leq n \;\; \Rightarrow \;\; e^{k(1-\theta_k)} \leq e^n \;; \\ (ii) & k^p \leq n^p \;; \\ (iii) & \theta_k^{p-1} \leq 1. \end{array}$$

Estas três desigualdades e a desigualdade (3.3.11) nos permitem escrever

$$|\epsilon_k| \leq \frac{e^n n^p (M)^p}{(p-1)!} \quad \text{para } k \leq n.$$

Uma vez que o conjunto dos números primos é infinito e em virtude do Lema 3.10 podemos fazer com que os termos ϵ's sejam tão próximos de zero quanto se queira. Em virtude disso podemos afirmar que

$$|c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + \cdots + c_n\epsilon_n| < 1 \quad \text{para } p \text{ suficientemente grande.} \tag{3.3.12}$$

Em virtude da igualdade (3.3.5) e de (3.3.10), a parcela da esquerda na última desigualdade deve ser um inteiro. Como tal parcela é menor do que 1 devemos ter $c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + \cdots + c_n\epsilon_n = 0$. Portanto concluímos que $c_0F(0)+c_1F(1)+c_2F(2)+\cdots+c_nF(n) = 0$ o que implica que p divide $[c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_nF(n)]$. Ora mais isto é um absurdo visto que vai contra o resultado (3.3.10). O absurdo provém do fato de termos considerado e como sendo algébrico. Logo conclui-se que e é transcendente. □

Este resultado obtido por Hermite marcou época devido à grande dificuldade de se mostrar que um número é transcendente.

Dissemos no início da seção que o resultado também foi fundamental por inspirar outros trabalhos importantes. De fato o método de Hermite foi extendido por Lindemann[3], em 1882, para demonstrar a transcendência de π. Este trabalho, como o de Hermite, prima pela sua beleza matemática e é considerado por muitos como o mais belo resultado acerca dos números transcendentes porque mostra a impossibilidade de se resolver o problema da quadratura do círculo, um dos mais famosos problemas de construção . (ver 3.5 adiante).

A idéia de Lindemann é fundamentalmente a mesma que utilizamos na demostração da transcendência do número e. Considera-se π como sendo algébrico e obtem-se uma relação de igualdade envolvendo um número primo p arbitrário. Depois observa-se que, quando tomamos p suficientemente grande, chegamos a um resultado absurdo, donde se conclui que π é transfinito. A idéia é simples mas sua execução complicada e bastante engenhosa. No decorrer da demonstração são utilizados alguns resultados de Teoria de Variável Complexa e da Aritmética dos Números Transcendentes, razão pela qual preferimos não apresentar aqui a demonstração da transcedência de π. Ao leitor interessado em conhecer a prova recomendamos a leitura de [3]. Importante para nós é o fato de que os trabalhos de Hermite foram fundamentais para o amadurecimento das idéias que levaram Lindemann a realizar tal demonstração .

3.4 A não enumerabilidade dos transfinitos

Hermite publicou seus resultados em uma série de notas no Comptes Rendus de l'Acedémie des Sciences de Paris, em 1873. Passado algum tempo, as questões acerca dos números transfini-

[3]Ferdinand VON Lindemann : matemático alemão (Hanôver 1852 - Munique 1939). Demonstrou a transcendência do número π (1882), encerrando assim a controvérsia sobre a quadratura do círculo.

tos mereceram os cuidados de um grande matemático alemão, que já se tornara famoso por ter concebido, com Dedekind, todas as idéias da Teoria dos Conjuntos. Isto foi suficiente para que o mundo conhecesse uma nova prova da existência de números transcendentes, prova esta totalmente diferente da de Liouville. Esta nova demonstração foi apresentada por Georg Cantor[4].

A demonstração de existência dada por Cantor é interessante porque nos permite comparar a quantidade de números transcendentes com a de números algébricos. Outro fator que merece destaque é a extrema simplicidade dos argumentos utilizados no decorrer da prova e dos seus resultados preliminares.

Cantor também apresentou, mais tarde, grandes trabalhos com respeito à aritmética dos números transcendentes.

Vamos à prova de existência de Cantor. Como de costume necessitamos inicialmente de algumas definições e alguns resultados preliminares.

Definição 3.12. *Um conjunto A é dito* **enumerável** *se existir uma função injetiva $f : A \to \mathbb{N}$.*

Assim um conjunto finito é enumerável. É claro que se pudermos colocar os elementos do conjunto em correspondência biunívoca com os números naturais este conjunto também será enumerável. Dizemos que uma função nas condições da definição acima fornece uma **enumeração** para os elemento do conjunto A.

A seguir apresentamos um teorema que nos será útil posteriormente:

Teorema 3.13. *Uma união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Demonstração : Sejam $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots\}$, $\cdots$, $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots\}$, $\cdots$ conjuntos enumeráveis, e seja $A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n$. Obteremos uma enumeração para os elementos do conjunto A usando o conhecido método da diagonal de Cantor. O método se baseia no seguinte diagrama:

[4]Georg Cantor : matemático alemão de origem russa (São Petersburgo 1845 - Halle 1918). Um dos responsáveis pelas idéias acerca da Teoria dos Conjuntos. Foi considerado um inovador com as noções de potência do enumerável e do contínuo. Estabeleceu bons resultados na aritmética dos números transfinitos.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & & a_{12} & \rightarrow & a_{13} & & a_{14} & \rightarrow & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \cdots \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \cdots \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \cdots \\
a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \cdots \\
a_{51} & & a_{52} & & a_{53} & & a_{54} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \cdots \\
a_{61} & & a_{62} & & a_{63} & & a_{64} & & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Todos os elementos do conjunto A estão na lista acima. Basta agora definirmos a enumeração da seguinte maneira :

$$f(n) = n\text{-ésimo termo da lista que se obtém seguindo as flechas}$$

Desta forma temos que f é uma injeção de A em $I\!N$, donde segue a enumerabilidade de A. $\square$

Definição 3.14. *Seja* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ *um polinômio com coeficientes inteiros. O* **índice** *deste polinômio é, por definição ,*

$$|p| = |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_0| + n.$$

Observe que, uma vez que a definição envolve não só os coeficientes mas também o grau de $p(x)$, para um dado número inteiro qualquer existe somente um número finito de polinômios que têm como índice este número dado. Esta observação é fundamental para mostrarmos o

Teorema 3.15. *O conjunto de todos os números algébricos é enumerável.*

Demonstração : Considere a família de conjuntos $\{P_n\}$, onde P_n é o conjunto de todos os polinômios com coeficientes inteiros e com índice igual a n. Defina também a família de conjuntos $\{A_n\}$ pondo

$$A_n = \{ \text{ raízes complexas de } p(x) \mid p(x) \in P_n \}$$

e note que os elementos de A_n são números algébricos.

Agora, fixado um $j \in I\!\!N$ sabemos que P_j tem um número finito de elementos. Como um polinômio de grau n possui no máximo n raízes complexas concluimos que A_j também é finito. Defina agora $A = \bigcup_{n \in Z\!\!\!Z} A_n$ e observe que os elementos A são números algébricos. Assim, pelo Teorema 3.13, podemos afirmar que A é enumerável. Mostraremos agora que A coincide com o conjunto de todos os números algébricos.

De fato, seja α um número algébrico. Da definição de número algébrico sabemos que α é raíz de algum polinômio $g(x)$ com coeficientes inteiros. A este polinômio está associado um único índice, logo $g(x) \in P_k$ para algum $k \in I\!\!N$. Assim, pela definição da família $\{A_n\}$, temos que $\alpha \in A_k$ e, consequentemente $\alpha \in A$. Dessa forma o conjunto A nada mais é do que o conjunto de todos os números algébricos e é portanto enumerável. $\square$

Teorema 3.16. *O conjunto $I\!\!R$ dos números reais é não enumerável.*

Demonstração : Suponhamos por absurdo que o conjunto dos números reais seja enumerável. Dessa forma qualquer subconjunto de $I\!\!R$ também será enumerável. Considere agora $B = \{x \in I\!\!R \mid 0 < x \leq 1\}$. Uma vez que B é enumerável podemos listar todos os seus elementos. Façamos isto usando a forma decimal infinita dos números pertencentes a B. Listemos pois os elementos:

$$b_1 = 0, \beta_{11}\beta_{12}\beta_{13}\beta_{14}\dots$$

$$b_2 = 0, \beta_{21}\beta_{22}\beta_{23}\beta_{24}\dots$$

$$b_3 = 0, \beta_{31}\beta_{32}\beta_{33}\beta_{34}\dots$$

$$b_4 = 0, \beta_{41}\beta_{42}\beta_{43}\beta_{44}\dots$$

$$\vdots$$

$$b_n = 0, \beta_{n1}\beta_{n2}\beta_{n3}\beta_{n4}\dots$$

$$\vdots$$

onde β_{ij} é o j-ésimo algarismo após a vírgula do i-ésimo elemento de B.

Vamos olhar agora para o número

$$\gamma = 0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\dots,$$

onde $\gamma_j \in \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{\beta_{jj}\}$.

Observe que $\gamma \neq b_j$ para todo j pois γ e b_j diferem na j-ésima casa decimal. Deste fato podemos concluir que γ não está na nossa lista, o que é um absurdo pois $\gamma \in B$. O absurdo provém do fato de termos considerado B como sendo um conjunto enumerável. Logo B não é enumerável. Uma vez que $B \subset I\!R$ é não enumerável segue que $I\!R$ é não enumerável. $\square$

Vamos recapitular os resultados conseguidos até aqui. Temos :

(i) O conjunto de todos os números algébricos é enumerável ;

(ii) O conjunto $I\!R$ dos números reias é não enumerável.

Estamos prontos para enunciar e provar o

Teorema 3.17. *O conjunto de todos os números transcendentes reais é não enumerável.*

Demonstração : Considere os conjunto A e T definidos da seguinte maneira:

$$A = \{x \in I\!R \mid x \text{ é algébrico } \} \quad \text{e} \quad T = \{x \in I\!R \mid x \text{ é transfinito } \}.$$

Note que $I\!R = A \cup T$. Sabemos que A é enumerável. Suponha, por absuro, que T também o seja. Teríamos assim $I\!R = A \cup T$ como sendo uma união enumerável de conjuntos enumeráveis. Logo concluímos que $I\!R$ é enumerável, o que é um absurdo. O absurdo provém do fato de termos considerado T como sendo enumerável e portanto o conjunto de todos os números transcendentes reais é não enumerável. $\square$

Corolário *O conjunto de todos os números transcendentes é não enumerável.*

Demonstração : Basta observa que o conjunto de todos os números transcendentes reais é um subconjunto do conjunto de todos os números transcendentes. $\square$

Observe que este último resultado nos assegura a existência de números transfinitos. Mais do que isso, ele nos diz que, de certa maneira, existem mais números transcendentes do que números algébricos.

3.5 Problemas de construção

Uma aplicação simples e direta da teoria estudada é na resolução de problemas de construção . Daqui para frente resolver um problema de construção significará fazer o que é proposto utilizando-se apenas uma régua sem marcação , um compasso e um segmento unitário. Diremos que um número é **construtível** quando for possível construir um segmento de comprimento igual ao número em questão.

Como o nosso propósito aqui é o de mostrar como utilizar os resultados obtidos na resolução de tais problemas, nos limitaremos a dar uma noção de como se mostra a impossibilidade de solução de três dos mais famosos problemas dessa natureza. Aceitaremos como válido o seguinte teorema, que é um dos teoremas fundamentais da Teoria das Construções Algébricas.

Teorema 3.18. *Todo segmento não unitário construtível tem como comprimento um número algébrico de ordem igual a uma potência de 2.*

Demonstração : Ver [4].

Aceitando como válido esta afirmação vamos, a grosso modo, mostrar a não solubilidade de três problemas. São eles:

3.5.1 Duplicação do Cubo

O problema aqui é construir um cubo de volume igual ao dobro do volume de um cubo dado.

Tomando como unidade o comprimento da aresta do cubo dado nosso problema se reduz a construir um segmento de comprimento $\sqrt[3]{2}$.

Ora, $\sqrt[3]{2}$ satisfaz $x^3 - 2 = 0$ e portanto é um número algébrico. Não é difícil mostrar que $\sqrt[3]{2}$ não satisfaz nenhuma equação com coeficientes inteiros de grau 1 ou 2. Portanto $\sqrt[3]{2}$ é um número algébrico de ordem 3 e, uma vez que 3 não é uma potência de 2, podemos concluir que $\sqrt[3]{2}$ não é construtível e portanto é impossível duplicar o cubo.

3.5.2 Trisecção do Ângulo

Nosso problema é dividir um ângulo dado em três partes iguais.

Para mostrar a impossibilidade de resolver este problema vamos mostrar que não se pode fazer tal divisão para um ângulo de 60^o.

Se pudéssemos fazê-lo então o número $\cos 20^o$ seria construtível.

Vamos inicialmente mostrar que $\cos 20^o$ satisfaz a uma equação polinomial de grau 3. Para isso, considere as seguintes identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \\
\text{sen}\, 2\theta &= 2\,\text{sen}\,\theta \cos\theta \\
\cos(\theta + 2\theta) &= \cos\theta\cos 2\theta - \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,2\theta
\end{aligned}$$

Combinando estas três igualdades temos:

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)\cos\theta - (2\text{sen}\theta\cos\theta)\text{sen}\theta \\ &= \cos^3\theta - 3\text{sen}^2\theta\cos\theta \\ &= \cos^3\theta - 3(1-\cos^2\theta)\cos\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

Agora fazendo $\theta = 20^o$ e $x = \cos 20^o$ temos:

$$\cos 60^o = \frac{1}{2} = 4x^3 - 3x \quad \Rightarrow \quad 8x^3 - 6x - 1 = 0$$

Assim temos que $\cos 20^o$ é uma número algébrico que satisfaz uma equação com coeficientes inteiros e de grau 3. Novamente afirmamos que $\cos 20^o$ não satisfaz nenhuma equação com coeficientes inteiros de grau 1 ou 2. Logo $\cos 20^o$ é um número algébrico de ordem 3 e portanto o problema proposto não tem solução .

3.5.3 Quadratura do Círculo

O problema é construir um quadrado com área igual à de um círculo dado.

Tomando como unidade o raio do círculo dado, o problema se resume em construir um quadrado com área π. Isto equivale a construir um segmento de comprimento $\sqrt{\pi}$. Um resultado bem conhecido da Teoria das Construções Geométricas nos garante que se pode construir um segmento de comprimento l^2 a partir de um segmento unitário e outro de comprimento l. Portanto se pudéssemos construir um segmento de comprimeto $\sqrt{\pi}$ também poderíamos construir um de comprimento π. Mas isto nos levaria a um absurdo pois concluiríamos que π é um número algébrico, o que iria contra o resultado de Lindemann. Logo é impossível fazer-se a quadratura do círculo.

3.6 Perspectivas Futuras

Para finalizar este capítulo vamos apresentar alguns resultados que já se conhece hoje acerca dos números transcendentes.

Hermite mostrou que o número e é transcendente. De fato, sabe-se hoje que e^a, onde a é um número algébrico não nulo, é transcendente. Obviamente este resultado traz em si a transcendência do número e como caso particular.

Outro problema já resolvido é a transcendência do númenro $2^{\sqrt{2}}$. Essa questão foi levantada por Hilbert, no Segundo Congresso Internacional de Matemática, realizado em Paris. Nessa ocasião Hilbert apresentou não só este mas outros 22 problemas que, ao seu ver, seriam objeto de estudo dos matemáticos no decorrer do século XX. Em meados de 1929 Siegel, que estudava em Göttingen, mostrou que $2^{\sqrt{2}}$ era transcendente. Mas uma solução mais completa e abrangente veio em 1934, quando Gelfond e Schneider chegaram, de maneira independente, ao seguinte resultado:

Teorema 3.19. *Sejam a e b dois números algébricos, com $a \neq 0$, $a \neq 1$ e b não sendo um racional. Então a^b é transcendente.*

Demonstração : Ver [6].

Este resultado traz como caso particular a transcendência de $2^{\sqrt{2}}$. Mais ainda, ele resolve outro antigo problema que era mostrar a transcendência de e^{π}. De fato temos que $e^{\pi} = i^{-2i}$ e isso determina a transcendência do número em questão.

Existem muitos problemas que estão em aberto. Um bom exemplo é a transcendência de $\pi + e$, que ainda desafia os matemáticos. Isto nos mostra que a Teoria dos Números Transcendentes permanece viva e convidativa pois, conforme disse o próprio Hilbert quando da divulgação da lista contendo os 23 problemas :

> *"Enquanto um ramo da ciência oferecer uma abundância de problemas, ele estará vivo: uma falta de problemas prenuncia extinção ou cessação de desenvolvimento independente."*

CAPÍTULO 4

Polinômios de Hermite

Neste capítulo estudaremos uma parte importante dos trabalhos de Hermite. Conheceremos os Polinômios de Hermite e algumas de suas principais propriedades.

Destacaremos a importância deste trabalho de Hermite para o desenvolvimento das bases da mecânica quântica.

A primeira seção é uma breve introdução aos conceitos quânticos. Segue uma seção onde será apresentado um importante modelo de problema físico.

Na seção seguinte resolveremos o problema proposto através do uso dos Polinômios de Hermite e estabeleceremos algumas propriedades importantes de tais polinômios.

Finalizando o capítulo, a seção número 4 apresenta ao leitor uma breve introdução às idéias de autofunções e autovalores de problemas.

4.1 Mecânica Quântica

A mecânica é a parte da física que estuda as forças em geral e sua ação sobre o mundo material. A história da mecânica remonta aos trabalhos de Arquimedes sobre estática e hidrostática. Um dos maiores nomes dentre os físicos que contribuíram para o desenvolvimento da mecânica é o de Isaac Newton.

Newton considerava a luz como sendo um feixe de partículas. Durante a primeira metade do século XIX importantes propriedades da luz, como refração e difração , foram exaustivamente demonstradas. Estas propriedades fizeram com que a ótica fosse incluída na teoria eletromagnética. Neste contexto a velocidade da luz c é relacionada com constantes elétricas e magnéticas e o fenômeno da polarização da luz pode ser interpretado como manifestações de características vetoriais do campo elétrico gerado.

Contudo, o estudo do *blackbody radiation* não podia ser explicado com base na teoria eletromagnética. Os resultados do experimento de Young[1] apresentavam a luz como tendo características de partícula, e não de uma onda como era de se esperar. Este comportamento aparentemente paradoxal só podia ser explicado conservando ambos os aspectos da luz: como sendo partícula e como sendo uma onda. A solução foi a introdução dos conceitos quânticos fundamentais. O principal deles é o conceito da dualidade onda-partícula da luz:

(i) Os aspectos de onda e partícula da luz são inseparáveis. A luz comporta-se simultaneamente como onda e como fluxo de partículas. A onda nos permite calcular a probabilidade de manifestação de uma partícula.

(ii) A capacidade de prever-mos o comportamento de um fóton[2] é apenas probabilística.

(iii) A informação sobre um fóton em um tempo t é dado pela equação $\eta(r,t)$, que é uma solução das equações de Maxwell. $\eta(r,t)$ pode ser interpretada como a amplitude de probabilidade de um fóton estar, num tempo t, no ponto r.

Portanto o estado quântico de uma partícula é caracterizado por uma função de onda $\eta(r,t)$, que contém todas as informações possíveis de se obter sobre a partícula.

Observe que esta mecânica difere da mecânica determística desenvolvida por Newton. Esta impossibilidade de determinarmos de maneira exata todas as características intrísecas à partícula, chamada de Prinípio da Incerteza, é a base de toda a mecânica quântica.

A determinação da equação $\eta(r,t)$ pode ser feita de maneira natural através das relações de Planck[3] e de Broglie[4]. Contudo, devido ao caráter matemático deste trabalho, isto não será feito. Nos restringiremos a apresentar esta equação fundamental, chamada *equação de Schrödinger*. Portanto iremos assumir que, quando uma partícula de massa m está sujeita a um potencial $V(r,t)$, a equação de Schrödinger assume a forma:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\eta(r,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\eta(r,t) + V(r,t)\eta(r,t), \tag{4.1.1}$$

[1]Thomas Young: médico e físico inglês (Milverton 1773 - Londres 1829). Descobriu a acomodação do cristalino e as interferências luminosas. Ademais, realizou trabalhos de egiptologia.

[2]Partícula de luz.

[3]Max Planck: físico alemão (Kiel 1858 - Göttingen 1947). Para explicar as leis da radiação , considerou a descontinuidade da energia e formulou, em 1900, a teoria dos quanta.

[4]Louis de Broglie: físico francês (Dieppe 1892). Foi o criador, em 1924, da mecânica ondulatória, teoria segundo a qual o életron e as demais partículas em movimento têm também as características de uma onda (Prêmio Nobel de física, 1929).

onde Δ é o operador Laplaciano $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ e $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ é definido em termos da constante de Planck:

$$h \cong 6,62 \cdot 10^{-24} \text{ Joule x Segundo.}$$

A primeira observação a ser feita é que a equação (4.1.1) é linear e homogênea em η. Consequentemente vale um princípio de superposição para esta equação . Além disso ela é de primeira ordem com respeito a t, o que significa que é suficiente determinarmos o estado da partícula num instante inicial t_0 para podermos determiná-lo nos instantes subsequentes.

Uma vez que a função $\eta(r,t)$ mede a amplitude de probabilidade da presença da partícula, ela deve ser de quadrado integrável. Logo, a menos de uma constante, podemos escrever:

$$\int |\eta(r,t)|^2 d^3r = 1$$

4.2 O Oscilador Harmônico Quântico

O oscilador harmônico quântico é um sistema físico que governa inúmeros fenômenos. Vamos estudar um caso particular que é o oscilador harmônico quântico uni-dimensional. Ao leitor interessado em conhecer alguns exemplos de osciladores desta natureza recomendamos a leitura de [2].

O oscilador harmônico uni-dimensional da mecânica clássica é composto por uma partícula de massa m imersa numa região de potencial da forma:

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2, \tag{4.2.1}$$

onde x é a posição da partícula e k é uma constante positiva. O ponto $x = 0$ é o ponto onde o potencial é mínimo. A partícula está sujeita a uma força restauradora dada por:

$$F_x = -\frac{d}{dx}V = -kx. \tag{4.2.2}$$

A segunda lei de Newton nos fornece:

$$m\frac{d^2}{dx^2} = -kx.$$

A solução geral desta equação é da forma:

$$x = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t,$$

onde x_0 é a amplitude da oscilação . Além disso o período T é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

e, como a frequência v é o inverso do período, tem-se ainda:

$$k = 4\pi^2 m v^2. \tag{4.2.3}$$

Lembremos agora que estamos trabalhando com um oscilador em uma única dimensão. Em virtude disso a equação de Schrödinger assume a seguinte forma:

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\eta(x,t) = -\frac{h^2}{8m\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\eta(x,t) + V(x)\eta(x,t). \tag{4.2.4}$$

Afim de resolver a equação acima vamos utilizar o método de separação de variáveis. Para tal escrevamos η como um produto de duas funções :

$$\eta(x,t) = \phi(t)\psi(x). \tag{4.2.5}$$

Tomando as derivadas e substituindo em (4.2.4) obtemos:

$$\frac{ih}{2\pi}\phi_t(t)\psi(x) = -\frac{h^2}{8m\pi^2}\phi(t)\psi_{xx}(x) + V(x)\phi(t)\psi(x).$$

Dividindo a relação acima por $\phi(t)\psi(x)$ obtemos:

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{\phi_t(t)}{\phi(t)} = -\frac{h^2}{8m\pi^2}\frac{\psi_{xx}(x)}{\psi(x)} + V(x).$$

Observe agora que temos uma função que depende de t igual a outra que depende de x. Como x e t são variáveis independentes devemos ter:

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{\phi_t(t)}{\phi(t)} = -\frac{h^2}{8m\pi^2}\frac{\psi_{xx}(x)}{\psi(x)} + V(x) = \lambda,$$

onde λ é uma constante.

Para encontrarmos a função $\phi(t)$ é suficiente resolvermos a equação :

$$\phi_t(t) + \lambda\frac{2\pi i}{h}\phi(t) = 0.$$

Portanto devemos ter

$$\phi(t) = e^{-\lambda\frac{2\pi i}{h}t}. \tag{4.2.6}$$

Encontrar $\psi(x)$ é um processo mais delicado. Para isso devemos resolver a seguinte equação :

$$\psi_{xx}(x) + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left[\lambda - V(x)\right]\psi(x) = 0.$$

Lembrando que $V(x)$ é dado por (4.2.1) nosso problema passa a ser resolver a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(\lambda - \frac{1}{2}kx^2\right)\psi = 0. \qquad (4.2.7)$$

Observando a relação (4.2.3) podemos escrever:

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(\lambda - 2\pi^2 m v^2 x^2)\psi = 0. \qquad (4.2.8)$$

Conforme visto anteriormente procuramos soluções de (4.2.8) tais que:

$$\int |\psi|^2 dx = 1$$

Observe que, uma vez que ψ é uma amplitude de probabilidade, a medida que $|x|$ se torna grande, estamos medindo a probabilidade da partícula estar num local muito distante da origem do movimento. Se, por alguma razão, a medida que tomamos $|x|$ muito grande o valor de ψ não diminuisse rapidamente, correríamos o risco da partícula "fugir" do raio de ação força restauradora. Isto porém não pode ocorrer pois nossso sistema exige que a partícula oscile em torno da origem. Por isso é natural impormos a seguinte condição :

$$\psi \to 0, \text{ quando } |x| \to \infty.$$

Estando posto o problema e afim de simplificar a equação (4.2.8) faremos uma substituição de variável. Para isto tome

$$u = 2\pi\sqrt{\frac{vm}{h}}x. \qquad (4.2.9)$$

Feita esta substituição (4.2.8) toma a forma:

$$\frac{d^2}{du^2}\psi(u) + \left(\frac{2\lambda}{hv} - u^2\right)\psi(u) = 0, \qquad (4.2.10)$$

onde devemos impor que

$$\int |\psi|^2 du = 2\pi\sqrt{\frac{vm}{h}} \quad \text{e} \quad \psi \to 0, \text{ quando } |u| \to \infty. \qquad (4.2.11)$$

A seguir vamos desenvolver ferramentas matemáticas que nos permitirão resolver a equação (4.2.10).

4.3 A Equação de Hermite

Nesta seção concentraremos nossa atenção na seguinte equação :

$$\frac{d^2}{dx^2}w + (2p + 1 - x^2)w = 0, \tag{4.3.1}$$

onde p é uma constante.

Conforme já foi visto estamos interessados em soluções que se aproximem de 0 quando $|x| \to \infty$. Afim de facilitar a resolução de (4.3.1) vamos fazer uma substituição conveniente. Inicialmente observe que, quando x é muito grande, a parcela $(2p + 1)$ é desprezível quando comparada com x^2. Logo (4.3.1) pode ser aproximada por:

$$\frac{d^2}{dx^2}w = x^2 w.$$

Se tentarmos $w = e^{\pm \frac{x^2}{2}}$ teremos:

$$w' = \pm\, x e^{\pm \frac{x^2}{2}}$$
$$w'' = x^2 e^{\pm \frac{x^2}{2}} \ \pm \ e^{\pm \frac{x^2}{2}}$$

Novamente, para x grande, podemos desconsiderar o fator isolado $e^{\pm \frac{x^2}{2}}$ de w''.

Assim podemos dizer que, de certa maneira, $w = e^{\pm \frac{x^2}{2}}$ seriam soluções aproximadas de (4.3.1). Como $e^{\frac{x^2}{2}}$ não tende a zero quando $|x| \to \infty$ vamos considerar apenas $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Como esta é uma aproximação da solução de (4.3.1) tentaremos soluções na forma:

$$w = y(x)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

A função de correção $y(x)$ nos garantirá que a solução encontrada é a correta e não uma simples aproximação . Com base nisso temos:

$$w' = y' e^{-\frac{x^2}{2}} - yx e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$w'' = y'' e^{-\frac{x^2}{2}} - 2y' x e^{-\frac{x^2}{2}} - y(e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}})$$

Substituindo estas expressões em (4.3.1) nosso problema resume-se em determinar soluções para:

$$y'' - 2xy' + 2py = 0, \tag{4.3.2}$$

que é a chamada **Equação de Hermite**.

Para resolver esta equação diferencial usaremos o método de resolução em séries para equações diferenciais. Ao leitor não familiarizado com a utilização de tal método recomendamos a leitura de [7].

Vamos então supor que (4.3.2) tem uma solução y da forma

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Tomando as derivadas primeira e segunda de y, substituindo tais expressões em (4.3.2) e fazendo as devidas simplificações temos a seguinte relação de recorrência para os coeficientes do desenvolvimento de y:

$$a_{n+2} = \frac{2(n-p)}{(n+1)(n+2)} a_n \tag{4.3.3}$$

Note que esta relação nos fornecerá os coeficientes de ordem par em função de a_0 e os de ordem ímpar em função de a_1. Afim de não carregar por demais a notação consideraremos $a_0 = a_1 = 1$. Teremos duas soluções de (4.3.2), uma com expoentes pares e outra com expoentes ímpares. Vamos a elas:

$$y_1(x) = 1 - \frac{2p}{2!}x^2 + \frac{2^2 p(p-2)}{4!}x^4 - \frac{2^3 p(p-2)(p-4)}{6!}x^6 + \cdots$$

$$y_2(x) = x - \frac{2(p-1)}{3!}x^3 + \frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}x^5 - \frac{2^3(p-1)(p-3)(p-5)}{7!}x^7 + \cdots$$

Analisemos a convergência de $y_1(x)$ utilizando o Teste da Razão.

$$\left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right| = \left|\frac{2(p-2n)}{(2n+1)(2n+2)}\right| < 2\left|\frac{(2n-p)}{n^2}\right| < 2\left|\frac{2}{n} - \frac{p}{n^2}\right|$$

Logo temos:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right| \leq 2\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2}{n} - \frac{p}{n^2}\right| = 0,$$

donde se conclui que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right| = 0 < 1.$$

Isto nos diz que $y_1(x)$ converge para qualquer valor de x. De maneira análoga podemos concluir que $y_2(x)$ converge em toda a reta real.

Uma vez que estamos interessados em funções w tais que $w \to 0$ quando $|x| \to \infty$, devemos estabelecer condições para que $\dfrac{y_1}{e^{\frac{x^2}{2}}}$ tenda a zero quando $|x| \to \infty$. Vamos a seguir mostrar que isto acontece se, e somente se, p é um número par. Isto é equivalente a mostrar que, nessas condições , $y_1(x)$ deve ser um polinômio.

É fácil notar que se p é um número par então a série de y_1 quebra a partir de um certo momento e então y_1 nada mais é do que um polinômio com coeficientes reais. Nesse caso, ao tomarmos o limite de $\frac{y_1}{e^{\frac{x^2}{2}}}$ teremos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando então a regra de l'Hospital seguidas vezes obtemos que $w \to 0$ quando $|x| \to \infty$.

Suponha agora que p não é um número par. Vamos mostrar que, nestas condições w não tende a zero. Com efeito temos:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}x^{2n} \quad \text{, com } a_{2n} \text{ determinado por (4.3.3) ;} \\ e^{\frac{x^2}{2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}x^{2n} \quad \text{, com } b_{2n} = \tfrac{1}{2^n n!} \text{ .} \end{aligned}$$

Estas duas relações nos permitem escrever:

$$\frac{y_1(x)}{e^{\frac{x^2}{2}}} = \frac{a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_{2n}x^{2n} + \cdots}{b_0 + b_2x^2 + b_4x^4 + \cdots + b_{2n}x^{2n} + \cdots}$$

A idéia é mostrarmos que, para n suficientemente grande, teremos $a_{2n} > b_{2n}$. Façamos isto:

$$\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = -\frac{2(p-2n)}{(2n+1)(2n_2)} \qquad \text{e} \qquad \frac{b_{2n+2}}{b_{2n}} = \frac{2^n n!}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{1}{2(n+1)}$$

Das duas expressões acima segue:

$$\frac{\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}}{\frac{b_{2n+2}}{b_{2n}}} = -\frac{2(p-2n)2(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{8n^2+8n-4p-4pn}{4n^2+6n+2} \to 2$$

Logo existe um N tal que

$$\frac{a_{2n+2}}{b_{2n+2}} > \frac{3}{2}\frac{a_{2n}}{b_{2n}} \text{ , para todo } n \geq N.$$

Aplicando a desigualdade acima sucessivas vezes teremos :

$$\frac{a_{2N+k}}{b_{2N+k}} > \left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{a_{2N}}{b_{2N}} > 1 \text{ , para todo } k \text{ suficientemente grande.}$$

Assim, a partir de um certo j, teremos $\frac{a_{2j}}{b_{2j}} > 1$, isto é, $a_{2j} > b_{2j}$. Logo podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{y_1(x)}{e^{\frac{x^2}{2}}} &= \frac{a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_{2n}x^{2n} + \cdots}{b_0 + b_2x^2 + b_4x^4 + \cdots + b_{2n}x^{2n} + \cdots} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}x^{2n}}{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}x^{2n}} > \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{j} a_{2n}x^{2n} + \sum_{n=j+1}^{\infty} b_{2n}x^{2n}}{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}x^{2n}} \\
&> \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{j} a_{2n}x^{2n} + \sum_{n=j+1}^{\infty} b_{2n}x^{2n} + \sum_{n=1}^{j} b_{2n}x^{2n} - \sum_{n=1}^{j} b_{2n}x^{2n}}{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}x^{2n}} = \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{j} (a_{2n} - b_{2n})x^{2n}}{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}x^{2n}} + 1 = \frac{q(x)}{e^{\frac{x^2}{2}}} + 1,
\end{aligned}$$

onde $q(x)$ é um polinômio. A partir disto podemos escrever:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_1(x)}{e^{\frac{x^2}{2}}} \geq \lim_{x\to\infty} \frac{q(x)}{e^{\frac{x^2}{2}}} + 1 = 1$$

Portanto, para que w tenda a zero quando $|x|$ tende para infinito é necessário e suficiente que p seja número par.

Tudo o que fizemos para $y_1(x)$ pode também ser feito para $y_2(x)$. Neste caso a imposição é que p seja um número ímpar.

4.3.1 A quantização da energia

Observe agora que, quando a posição é máxima, a velocidade é mínima e portanto a energia cinética da partícula é nula. Como, pela Conservação de Energia, a energial total E é constante, devemos ter:

$$E = \frac{1}{2}kx_0^2 \tag{4.3.4}$$

Agora, fixado o instante t_0 em que a partícula atinge a posição x_0, devemos ter $\eta(x_0, t_0) = 1$. Olhando agora para (4.2.5) e (4.2.6) podemos escrever:

$$\eta(x_0, t_0) = e^{-\lambda \frac{2\pi i}{h} t_0} \psi(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(x_0) \neq 0. \tag{4.3.5}$$

Pode-se provar que $\psi_{xx}(x_0) = 0$. A demonstração deste fato é muito extensa, de modo que preferimos não apresentá-la aqui. O leitor interessado pode consultar [2] onde este trabalho é feito com todos os detalhes.

Recordemos agora a expressão (4.2.7):

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x_0) + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(\lambda - \frac{1}{2}kx_0^2\right)\psi(x_0) = 0.$$

Olhando para (4.3.5) e lembrando que $\psi_{xx}(x_0) = 0$ e $\frac{8\pi^2 m}{h^2} \neq 0$ podemos concluir que

$$\left(\lambda - \frac{1}{2}kx_0^2\right) = 0.$$

Agora note que, em virtude da relação (4.3.4), a equação acima será satisfeita se, e somente se, $\lambda = E$.

Os estudos feitos na seção anterior tinham como objetivo a resolução de (4.2.10). Uma vez que já sabemos o valor de λ podemos reescrever aquela equação na seguinte forma:

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi + \left(\frac{2E}{hv} - u^2\right)\psi = 0.$$

Compare esta equação com (4.3.1). A menos da variável e de algumas constantes elas são iguais. Esta igualdade nos dá:

$$\frac{2E}{hv} = 2p + 1 \quad \Rightarrow \quad E = hv\left(p + \frac{1}{2}\right), \tag{4.3.6}$$

onde p é um inteiro não negativo.

A imposição feita sobre p é a garantia de que nossas funções cumprirão as condições (4.2.11), sendo assim soluções válidas para o problema.

A relação (4.3.6) nos mostra que a energia total do sistema E assume valores dentro de um conjunto discreto. A este fenômeno dá-se o nome de quantização de energia. A energia de um sistema se apresenta portanto como múltiplo de uma unidade fundamental, o *quantum*. Este fenômeno fora postulado por Max Planck em 1900, para explicar as leis da radiações térmicas; ela permitiu a N. Bohr estabelecer, em 1913, seu modelo de átomo.

As soluções de (4.3.2) são, conforme já foi observado, polinômios. Na próxima seção veremos uma série de propriedades de tais polinômios. Observe que a equação originou-se de um problema relacionado à mecânica quântica. Outro trabalho devido à Hermite, o das formas Hermitianas (ver Cap. 2), também foi crucial para a formulação das bases desta nova mecânica, dada por Heinsenberg[5] em 1925.

4.3.2 Propriedades dos Polinômios de Hermite

Lembre que quando escrevemos as soluções y_1 e y_2 havíamos assumido que $a_0 = a_1 = 1$. Mas nossas soluções gerais são da forma $C \cdot y_1(x)$, onde C é uma constante arbitrária. Suponha agora que p é um número par, h seja uma solução de (4.3.2) e o grau do polinômio h seja n. Considere C tal que $C \cdot a_n = 2^n$. Nessas condições $C \cdot h(x)$ é chamado o **polinômio de Hermite de grau n**.

Para exemplificar isto faça $p = 4$ em $h(x)$. Temos então:

$$h(x) = 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4.$$

Tome $C = \frac{2^4}{\frac{4}{3}} = 2^4\frac{3}{4} = 12$. Logo:

$$C \cdot h(x) = H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$

Afim de justificar a escolha de C desta forma encontremos uma expressão geral para o n-ésimo polinômio de Hermite. Para isso vamos escrever h com todos os seus coeficientes em função do último coeficiente a_n. Lembremos a relação de recorrência que determina os coeficientes:

$$a_{k+2} = \frac{2(k-n)}{(k+1)(k+2)}a_k$$

Substituindo k por $k-2$ na expressão acima teremos:

$$a_k = \frac{2(k-2-n)}{k(k-1)}a_{k-2} \quad \Rightarrow \quad a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{2(k-2-n)}a_k$$

Com esta última relação podemos escrever:

$$\frac{h_n(x)}{a_n} = x^n - \frac{n(n-1)}{2\cdot 2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2\cdot 2\cdot 4}x^{n-4} + \cdots +$$

$$+ (-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-2k+1)}{2^k\cdot 2\cdot 4\cdots(2k)}x^{n-2k} + \cdots + T(x),$$

[5]Werner Heinsenberg: físico alemão (Würzburg 1901 - Munique 1976). Foi o autor da teoria da estrutura do núcleo do átomo, formado unicamente de prótons e nêutrons. A aplicação da mecânica quântica ao átomo levou-o a concebê-lo como um quadro de números, destituido de imagem material mas explicável pelo cálculo matricial (1925). Foi o criador das relações de indeterminação (1927), que renovaram todos os conceitos da micromecânica (Premio Nobel de física, 1932).

onde $T(x)$ é um monômio de grau 0 ou 1, dependendo de n ser par ou ímpar. Escrevendo sob forma de somatório temos:

$$h_n(x) = a_n \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n!}{2^{2k} k!(n-2k)!} x^{n-2k},$$

onde $[n/2]$ simboliza o maior inteiro menor ou igual a $\frac{n}{2}$. A partir dessa expressão, afim de obtermos o n-ésimo polinômio de Hermite é suficiente que façamos $a_n = 2^n$. Com isso obtemos:

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}. \tag{4.3.7}$$

Observe que a escolha de $a_n = 2^n$ foi uma forma de simplificar a expressão do n-ésimo polinômio. Esta maneira compacta de se escrever o somatório justifica a escolha.

Vamos agora deduzir a função de geração dos polinômios de Hermite. Esfa função é da forma:

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = H_0(x) + H_1(x)t + \frac{H_2(x)}{2!} t^2 + \cdots . \tag{4.3.8}$$

Inicialmente vamos estabelecer o seguinte resultado:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{[n/2]} a_k b_{n-2k} \right) t^n. \tag{4.3.9}$$

De fato a expansão do lado esquerdo da expressão (4.3.9) nos dará produtos da forma $a_k t^{2k} b_j t^j$. Portanto, para agruparmos as n-ésimas potência de t devemos considerar todos os produtos tais que $2k + j = n$. Estes termos são da forma $a_k t^{2k} b_{n-2k} t^{n-2k}$. Devemos ter também $k \geq 0$ e $n - 2k \geq 0$. Logo a restrição que deve ser imposta é $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$. Como k deve também ser um número inteiro temos finalmente $0 \leq k \leq [n/2]$. Estas considerações provam a validade de (4.3.9).

Vamos agora provar que vale a relação (4.3.8). Em virtude de (4.3.7) e (4.3.9) temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!} \right) t^n \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} t^n \right] \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2xt)^n}{n!} \right] \\
&= e^{-t^2} e^{2xt} = e^{2xt-t^2}.
\end{aligned}$$

A função de geração dos polinômios de Hermite nos permite demonstrar a fórmula de Rodrigues para polinômios de Hermite. Vamos a ela:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \tag{4.3.10}$$

Da relação (4.3.8) segue:

$$H_n(x) = \left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{2xt - t^2} \right)_{t=0} = e^{x^2} \left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2} \right)_{t=0}.$$

Agora fazendo $z = x - t$ e usando o fato de que $\frac{d}{dt} = -\frac{d}{dz}$ podemos escrever:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{\partial^n}{\partial z^n} e^{-z^2} \right)_{z=x} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

o que completa a demonstração de (4.3.10).

4.3.3 Ortogonalidade

Uma das mais importantes propriedades dos polinômios de Hermite é que eles são ortogonais. Dizer isso, no nosso contexto, é equivalente a dizer que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 0 \text{ , se } m \neq n$$

De uma maneira geral, duas funções f e g são ortogonais quando existe um produto interno segundo o qual $< f, g >= 0$. No nosso caso o produto interno que tomamos é a integral com peso e^{-x^2}. Observe que a integral é feita sobre toda a reta, o que significa que os polinômios de Hermite são ortogonais em todo o intervalo $(-\infty, \infty)$.

Quando tomamos o produto interno de um polinômio de Hermite por ele mesmo estamos de fato medindo o quadrado da norma do polinômio. Este valor é exatamente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [H_n(x)]^2 e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

Vamos então formalizar tudo o que foi dito acima provando a seguinte afirmação :

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0 & \text{, se } m \neq n \\ \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{, se } m = n. \end{cases}$$

Para provarmos este resultado lembremos inicialmente que

$$w_m = e^{\frac{-x^2}{2}} H_m(x)$$

é solução de:

$$w_m'' + (2m + 1 - x^2)w_m = 0 \tag{4.3.11}$$

Da mesma forma que

$$w_n = e^{\frac{-x^2}{2}} H_n(x)$$

é solução de:

$$w_n'' + (2n + 1 - x^2)w_n = 0 \tag{4.3.12}$$

Multiplicando (4.3.11) por w_n e (4.3.12) por w_m e subtraindo estes dois resultados obtemos:

$$(w_m'' w_n - w_m w_n'') + 2(m - n)w_m w_n = 0$$

ou,

$$\frac{d}{dx}(w_m' w_n - w_m w_n') + 2(m - n)w_m w_n = 0 \tag{4.3.13}$$

Integrando a expressão acima de $-\infty$ a ∞ obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dx}(w_m' w_n - w_m w_n') + 2(m - n)w_m w_n \right] dx = 0.$$

Mas a integral do primeiro termo tem a forma $\frac{T(x)}{e^{x^2}}$, onde $T(x)$ é um polinômio, e portanto se anula nos extremos. Deste fato segue que

$$2(m - n) \int_{-\infty}^{\infty} w_m w_n dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} w_m w_n dx = 0.$$

Isto estabelece a primeira parte. Para calcularmos o quadrado da norma procedamos como se segue.

Queremos mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} [H_n(x)]^2 e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

Usando a fórmula de Rodrigues temos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_n(x) e^{-x^2} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} e^{-x^2} dx \\
&= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx
\end{aligned}$$

Calculemos esta última integral por partes.

$$
\begin{array}{ll}
u = H_n(x) & du = H_n^{'}(x)dx \\
dv = \frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}dx & v = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}.
\end{array}
$$

Observe que $u \cdot v$ é o produto de e^{-x^2} por um polinômio e claramente se anulará nos extremos. Após esta observação obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [H_n(x)]^2 e^{-x^2} dx = (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{'}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} dx$$

Procedendo como acima $(n-1)$ vezes obtemos :

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} [H_n(x)]^2 e^{-x^2} dx &= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{'}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} dx \\
&= (-1)^{n+2} \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{''}(x) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} e^{-x^2} dx \\
&= \cdots = (-1)^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(n)}(x) e^{-x^2} dx
\end{aligned}
$$

Calculemos agora este último termo. Como $H_n(x)$ é um polinômio de grau n devemos ter $H_n^{(n)}(x) = n!a_n = n!2^n$. Resta agora mostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Para isto observe incialmente que

$$\lambda = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Usando coordenadas polares nesta última integral temos:

$$\lambda = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta$$

Fazendo $u = r^2$ e substituido na expressão acima temos:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \int_{u=0}^{\infty} e^{-u} du \right] d\theta \\
&= \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \tfrac{2\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right]^2 = \pi \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Com isto podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{\infty} [H_n(x)]^2 e^{-x^2} dx = a_n n! \sqrt{\pi} = 2^n n! \sqrt{\pi},$$

o que completa a nossa demonstração .

4.4 Séries de Hermite

Conforme mencionado na seção anterior, a ortogonalidade dos polinômios de Hermite é uma propriedade muito importante. Isto porque, em virtude da ortogonalidade, podemos dizer que, de certa forma, o conjunto de todos os polinômios de Hermite formam uma base de um espaço vetorial de dimensão infinita. Assim, faz sentido pensarmos em uma função f como sendo dada da pela seguinte expressão.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x). \tag{4.4.1}$$

Dizemos que a expressão (4.4.1) é uma expansão de f em série de Hermite. Afim de encontrarmos os a_n basta que multipliquemos a expressão (4.4.1) por $e^{-x^2} H_m(x)$ e integrarmos termo a termo de $-\infty$ a ∞. Assim, em virtude da ortogonalidade de dois polinômios distintos e do valor já calculado para a norma de $H_m(x)$ teremos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) f(x) e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = a_m 2^m m! \sqrt{\pi}.$$

Assim a expressão para um a_n arbitrário é:

$$a_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) f(x) e^{-x^2} dx. \tag{4.4.2}$$

Supondo que se sabe *a priori* que a expressão (4.4.1), com os coeficientes dados por (4.4.2) é válida, chamaremos as funções do tipo $a_n H_n(x) e^{\frac{-x^2}{2}}$ de autofunções do problema

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi + \left(\frac{2E}{hv} - u^2\right)\psi = 0,$$

onde

$$\int |\psi|^2 du = 2\pi\sqrt{\frac{vm}{h}} \quad \text{e} \quad \psi \to 0, \text{ quando } |u| \to \infty.$$

Conforme visto as suas soluções são da forma:

$$\psi = ce^{\frac{-u^2}{2}} H_n(u),$$

onde c é uma constante que, em virtude das condições de contorno e do valor da norma de $H_n(u)$ tem a seguinte expressão:

$$c = \left[\frac{4\pi vm}{2^{2n}(n!)^2 h}\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Lembrando agora que E era dado por:

$$E = hv\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

concluimos que a autofunção correspondente ao autovalor dado por E é:

$$\psi = \left[\frac{4\pi vm}{2^{2n}(n!)^2 h}\right]^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-u^2}{2}} H_n(u),$$

onde u é dado em termos de x por (4.2.9).

A teoria das funções ortogonais é o ramo da matemática que estuda condições para que uma dada função f possa ser escrita como uma série de Hermite. De fato, esta teoria é bem mais geral e pode ser aplicada não só para os polinômios de Hermite, mas para uma série de outras funções que, como os polinômios de Hermite, constituem bases de espaços vetoriais de dimensão infinita. Alguns exemplos de aplicações desta teoria podem ser encontrados em [7].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] E. T. BELL. *Men of Mathematics*. Simon and Schuster, New York, 1937.

[2] C. COHEN-TANNOUDJI. *Quantum Mechanics*. Hermann, Paris, 1977.

[3] D. G. FIGUEIREDO. *Números Irracionais e Transcendentes*. S.B.M., R.J, 1967.

[4] I. HERSTEIN. *Topics in Algebra*. Blaisdell Publishing Company, Waltham, 1964.

[5] I. NIVEN. *Números Racionais e Irracionais*. S.B.M., R.J, 1984.

[6] C. L. SIEGEL. *Transcendental Numbers*. Princenton University Press, Princenton, 1949.

[7] G. F. SIMMONS. *Differential Equations with Applications ans Historical Notes*. McGraw-Hill, 1972.