

## O Teorema de Jordan



Trabalho realizado por

- Carlos Renato de Melo Castro
- Claud Wagner G. D. Júnior
- Lucas Conque Seco Ferreira
- Luciano Cordeiro Sasaki
- Marcelo Fernandes Furtado
- Renato Bianchini

## O Teorema de Jordan

Com orientação de Ketí Tenenblat

# Sumário

---

<b>Lista de Figuras</b>	<b>iii</b>
<b>Prefácio</b>	<b>iv</b>
<b>1 Limites e Sequências</b>	<b>1</b>
1.1 Limites e valores de aderência . . . . .	1
1.2 Critério de Cauchy . . . . .	3
1.3 Aproximação do número $\pi$ . . . . .	4
<b>2 Curva de Peano</b>	<b>7</b>
2.1 Sequências de funções . . . . .	7
2.2 Série de funções . . . . .	8
2.3 A curva de Peano . . . . .	9
<b>3 Noções Topológicas</b>	<b>15</b>
3.1 Espaços Métricos . . . . .	15
3.2 Conjuntos Abertos e Fechados . . . . .	15
3.3 Conjuntos Compactos . . . . .	17
3.4 Funções . . . . .	18
3.5 Conjuntos Conexos . . . . .	19
3.6 Conexidade por caminhos . . . . .	20
3.7 Componentes Conexas . . . . .	22
<b>4 Índice de Rotação</b>	<b>23</b>
4.1 Função Angular . . . . .	23
4.2 Determinação Gráfica do Índice . . . . .	27
4.3 Dependência do Índice em Relação à Localização do Pólo . . . . .	31
4.4 Índice e Deformação de Curvas . . . . .	32
4.5 Funções Contínuas do Disco no Plano . . . . .	39
<b>5 O Teorema de Jordan</b>	<b>42</b>
5.1 Função Argumento . . . . .	42
5.2 Demonstração do Teorema de Jordan . . . . .	47
5.3 Teorema de Jordan para Curvas Regulares . . . . .	52

# Lista de Figuras

---

1.1	.....	5
2.1	.....	10
2.2	Aproximações da Curva de Peano .....	14
3.1	Bolas em diferentes métricas .....	16
4.1	.....	23
4.2	.....	25
4.3	.....	26
4.4	.....	27
4.5	.....	28
4.6	.....	30
4.7	.....	32
4.8	Homotopia como deformação do quadrado $Q$ . .....	34
4.9	.....	37
4.10	.....	38
5.1	Reticulação do plano. ....	44
5.2	.....	46
5.3	.....	48
5.4	.....	49
5.5	.....	54

# Prefácio

---

Estas notas tiveram origem no seminário do PET do primeiro semestre de 1996. Nesse período os alunos realizaram, sob a minha orientação, uma série de exposições tendo por objetivo estudar o Teorema de Jordan para curvas do plano. Esse teorema afirma que uma curva de Jordan separa o plano em duas regiões, uma limitada e a outra ilimitada, sendo o traço da curva a fronteira comum das duas regiões. Esse resultado, que é bastante intuitivo, tem uma demonstração matemática elaborada.

O livro texto utilizado foi “Topologia e Geometria das Curvas Planas” (13o. Colóquio de Matemática, IMPA, 1981) de Antônio Carlos Asperti e Francesco Mercuri.

O nível de conhecimento dos alunos era bastante variado e o livro bastante compacto, o que resultou na necessidade do grupo estudar alguns pré-requisitos e detalhar diversas passagens do texto.

Além de estudar os resultados teóricos do livro os alunos tiveram a oportunidade de fazer pequenos programas em PASCAL, para visualizar certos conceitos matemáticos. O primeiro programa obtém uma aproximação numérica do número  $\Pi$  como limite das áreas dos polígonos regulares inscritos em uma circunferência de raio unitário. O segundo permite visualizar a curva de Peano, cujo traço cobre todo um quadrado do plano. Finalmente, o conceito de índice de rotação de uma curva foi ilustrado através de diversos exemplos escolhidos pelos alunos e traçados utilizando o *software* ACOGEO.

As atividades do seminário foram desenvolvidas com bastante entusiasmo e resultaram nessas notas, que foram revisadas cuidadosamente pelo professor Celius A. Magalhães, coordenador do PET.

Keti Tenenblat

## Limites e Sequências

Neste capítulo estaremos interessados em enunciar alguns resultados de Análise referentes a sequências. Começaremos explorando tópicos simples, de modo a criar uma estrutura de fácil entendimento e posterior utilização em conclusões mais elaboradas. Passemos para a discussão formal.

**Definição 1.1.** *Uma sequência  $(x_n)$  é uma função  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  definida nos naturais que toma valores nos reais.*

A notação  $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$  é conveniente pois explicita o caráter de ordenação da sequência. Representaremos o conjunto dos termos da sequência por  $x(\mathbb{N})$ .

Será de grande importância para o nosso estudo o conceito de conjunto limitado aplicado a sequências:

**Definição 1.2.** *Uma sequência é limitada se existirem números reais  $a, b$  tais que  $a \leq x_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$ . Ou seja, quando o conjunto  $(x_n)$  de seus termos é limitado.*

É natural, quando lidamos com funções, pensar sobre os efeitos que diferentes restrições do domínio causam na função. No caso de sequências, certas restrições nos levam ao conceito de subsequências.

Uma subsequência de  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é a restrição de  $x$  a um conjunto infinito  $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_i < \dots\} \subset \mathbb{N}$ . Usaremos  $x' = x|_{\mathbb{N}'} = (x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  para indicar uma subsequência de  $(x_n)$ .

Diremos que uma sequência é *não decrescente* se  $x_n \leq x_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se tivermos a desigualdade estrita diremos que a sequência é *crecente*. Analogamente se define sequência *decrescentes* e *não crescentes*. Tais sequências são ditas *monótonas*.

### 1.1 Limites e valores de aderência

O fato de um número real  $a$  ser limite de uma sequência  $(x_n)$  intuitivamente nos diz que para valores muito grandes de  $n$  a imagem da aplicação que define a sequência se mantém tão próxima de  $a$  quanto se deseje. Passemos então para a definição formal.

**Definição 1.3.** *Diz-se que o número real  $a$  é limite da sequência  $(x_n)$  de números reais, e escreve-se  $a = \lim x_n$  ou  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , quando para cada número real  $\varepsilon > 0$ , dado arbitrariamente, for possível obter um inteiro  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|x_n - a\| < \varepsilon$ , sempre que  $n > n_0$ . Em linguagem simbólica:*

$$\lim x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Um exercício interessante seria o de mostrar que a definição acima equivale a seguinte afirmação:  $a = \lim x_n \iff$  qualquer intervalo  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , de centro  $a$  e raio  $\varepsilon > 0$ , contém

todos os termos  $x_n$  da sequência, com exceção no máximo de um número finito de índices  $n$ .

**Teorema 1.4.** *Toda sequência não decrescente (não crescente) e limitada superiormente (inferiormente) é convergente.*

**Demonstração.** Seja  $(x_n)$  uma sequência não decrescente e limitada superiormente. Seja  $a = \sup\{x_n; n = 1, 2, 3, 4, \dots\}$ . Então,  $a = \lim x_n$ . De fato, dado  $\varepsilon > 0$ , como  $a - \varepsilon < a$ , o número  $a - \varepsilon$  não é cota superior do conjunto dos  $x_n$ . Logo, existe algum  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a - \varepsilon < x_{n_0}$ . Como a sequência é monótona,  $n > n_0$  implica que  $x_{n_0} \leq x_n$  e, portanto,  $a - \varepsilon < x_n$ . Como  $x_n \leq a$  para todo  $n$ , vemos que  $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$  para todo  $n > n_0$ . Assim, temos de fato  $\lim x_n = a$ . O outro caso é análogo. ■

Assim como as sequências, as subsequências podem ter ou não limite. Iniciaremos esta discussão através do próximo teorema.

**Teorema 1.5.** *A fim de que  $a \in \mathbb{R}$  seja limite de alguma subsequência de  $x_n$  é necessário e suficiente que, para todo  $\varepsilon > 0$ , exista uma infinidade de índices  $n$  tais que  $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .*

**Demonstração.** Tratemos primeiramente da condição necessária. Seja  $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots\} \subset \mathbb{N}$  tal que  $a = \lim_{n \in \mathbb{N}'} x_n$ . Logo, existe um  $i_0 \in \mathbb{N}$  tal que, se  $i > i_0$  então  $x_{n_i} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Como existe uma infinidade de  $i > i_0$ , temos que existe uma infinidade de  $n_i \in \mathbb{N}$  tais que  $x_{n_i} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Reciprocamente, suponha que o conjunto  $\{n; x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\}$  seja infinito para todo  $\varepsilon > 0$ . Então, podemos obter um conjunto  $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots\} \subset \mathbb{N}$  tal que  $a = \lim_{n \in \mathbb{N}'} x_n$ . De fato, tomando sucessivos  $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ , definimos  $n_1$  de modo que  $x_{n_1} \in (a - 1, a + 1)$ . Como existe uma infinidade de índices  $n$  tais que  $x_n \in (a - \frac{1}{i}, a + \frac{1}{i})$  podemos sempre escolher  $n_i$  tal que  $x_{n_i} \in (a - \frac{1}{i}, a + \frac{1}{i})$  e  $n_i > n_{i-1}$ . Assim contruímos uma subsequência  $x_{n_i}$  tal que  $|x_{n_i} - a| < \frac{1}{i}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , e portanto converge para  $a$ . ■

Um número real  $a$  chama-se *valor de aderência* de uma sequência  $(x_n)$  quando  $a$  é o limite de alguma subsequência de  $(x_n)$ . Assim, o teorema anterior pode ser re enunciado da seguinte maneira:  $a \in \mathbb{R}$  é um valor de aderência de  $(x_n)$  se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$  e todo  $n_0 \in \mathbb{N}$  existir  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0$  e  $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

Passemos agora para a elaboração de um resultado de alta relevância. Estaremos interessados em investigar o conjunto de valores de aderência de uma sequência *limitada*. Mostraremos que este conjunto não é vazio provando que entre eles existe o maior e o menor, e que a sequência converge se, e somente se, possui apenas um valor de aderência.

Seja  $(x_n)$  uma sequência limitada, digamos  $\alpha \leq x_n \leq \beta \forall n \in \mathbb{N}$ . Definindo  $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ , temos  $[\alpha, \beta] \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$ . Logo, pondo  $a_n = \inf X_n$  e  $b_n = \sup X_n$ , vem

$$\alpha \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq \beta.$$

Segundo o Teorema (1.4), existem os limites

$$a = \lim a_n = \sup a_n = \sup_n \inf X_n$$

e

$$b = \lim b_n = \inf b_n = \inf_n \sup X_n.$$

Definimos  $a = \liminf x_n$  e  $b = \limsup x_n$ , e diremos que  $a$  é o *limite inferior* e que  $b$  é o *limite superior* da sequência  $(x_n)$ . Tem-se evidentemente  $\liminf x_n \leq \limsup x_n$ .

**Teorema 1.6.** *Seja  $(x_n)$  uma sequência limitada. Então  $\liminf x_n$  é o menor valor de aderência e  $\limsup x_n$  é o maior valor de aderência de  $(x_n)$ .*

**Demonstração.** Provemos inicialmente que  $a = \liminf x_n$  é valor de aderência de  $(x_n)$ . Para isso, provaremos que dados arbitrariamente  $\varepsilon > 0$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0$  e  $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Como  $a = \lim a_n$ , existe  $n_1 > n_0$  tal que  $a - \varepsilon < a_{n_1} < a + \varepsilon$ . Como  $a_{n_1} = \inf X_{n_1}$ , segue-se da última desigualdade que  $a + \varepsilon$  não é cota inferior de  $X_{n_1}$ . Logo existe  $n \geq n_1$  tal que  $a_{n_1} \leq x_n < a + \varepsilon$ . Isto nos dá  $n > n_0$  com  $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  como queríamos e, pelo Teorema (1.5),  $a$  é valor de aderência de  $(x_n)$ .

Mostremos agora que nenhum número  $c < a$  pode ser valor de aderência de  $(x_n)$ . Ora, como  $a = \lim a_n$ , segue-se de  $c < a$  que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $c < a_{n_0} \leq a$ . Como  $a_{n_0} = \inf X_{n_0}$ , concluímos que, se  $n \geq n_0$  então  $c < a_{n_0} \leq x_n$ . Pondo  $\varepsilon = a_{n_0} - c$ , vemos que  $c + \varepsilon = a_{n_0}$ , logo o intervalo  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$  não contém termo algum com  $n \geq n_0$ , de onde segue que  $c$  não é valor de aderência de  $(x_n)$ . Para o  $\limsup x_n$  o tratamento é análogo. ■

**Corolário 1.7.** *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Com efeito, sendo  $a = \limsup x_n$  um valor de aderência, alguma subsequência de  $(x_n)$  converge para  $a$ .

## 1.2 Critério de Cauchy

**Definição 1.8.** *Seja  $(x_n)$  uma sequência de números reais. Diremos que  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy se, dado arbitrariamente um número real  $\varepsilon > 0$ , existir  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m > n_0$  e  $n > n_0$  implicam  $|x_m - x_n| < \varepsilon$ .*

Assim, dizer que uma sequência é de Cauchy é dizer que, para valores suficientemente grandes dos índices  $m$  e  $n$ , os termos da sequência se aproximam arbitrariamente uns dos outros.

**Lema 1.9.** *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

**Demonstração.** Tomando  $\varepsilon = 1$  na definição, obtemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n \geq n_0$  implicam  $|x_m - x_n| < 1$ . Em particular,  $n \geq n_0$  implica  $|x_n - x_{n_0}| < 1$ , isto é, para  $n \geq n_0$  temos  $x_n \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1)$ . Segue-se que, se  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1\}$  e  $a$  é o menor e  $b$  o maior elemento de  $X$ , então  $a \leq x_n \leq b$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , o que conclui a demonstração.



**Lema 1.10.** *Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy. Se  $(x_n)$  possui uma subsequência convergente então  $(x_n)$  é convergente.*

**Demonstração.** Seja  $(x_{n_j})$  a subsequência de  $(x_n)$  que converge para  $a \in \mathbb{R}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0$  implicam  $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Como  $x_{n_j}$  converge para  $a$ , existe também um  $n_1 > n_0$  tal que  $|x_{n_1} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Assim,  $n > n_0$  implica  $|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - a| < \varepsilon$ . Desta forma  $x_n$  converge para  $a$ .

Estamos prontos para enunciar e provar um importante teorema que caracteriza as sequências reais convergentes.

**Teorema 1.11.** *Uma sequência de números reais  $(x_n)$  é convergente se, e somente se, é de Cauchy.*

**Demonstração.** Seja  $a = \lim x_n$ . Dado arbitrariamente  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0$  implica  $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Assim, se  $m, n > n_0$ , temos que  $|x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \varepsilon$ . Logo  $(x_n)$  é sequência de Cauchy.

Reciprocamente, suponha que  $(x_n)$  é de Cauchy. Desta forma,  $(x_n)$  é limitada, possuindo portanto subsequência convergente. Uma vez que  $(x_n)$  admite subsequência convergente segue que  $(x_n)$  é convergente e fica demonstrado o teorema.

Observe que, na segunda parte da demonstração, utilizamos o fato de que toda sequência limitada possui subsequência convergente. Lembremos que estamos tratando somente sequências de números reais, visto que, em espaços mais gerais, podem existir sequências de Cauchy que não são convergentes. Quando um espaço tem a propriedade de que toda sequência de Cauchy é convergente dizemos que esse espaço é *completo*.

### 1.3 Aproximação do número $\pi$

Como uma aplicação do Teorema (1.4) procuraremos resolver o seguinte problema:

*Construir uma função recursiva  $(x_n)$  cujo limite é o número  $\pi$ .*

Desenvolveremos também um programa em PASCAL que fornece uma aproximação numérica de  $\pi$  calculando  $x_n$  para qualquer valor de  $n$ .

Utilizaremos o fato de que a área da circunferência de raio unitário é exatamente o valor de  $\pi$ . Aproximaremos, então, esse valor pelo das áreas dos polígonos regulares inscritos nessa circunferência, tomando-se sucessivamente os polígonos de  $2^n$  lados. Seja  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $x(n) = F(2^n)$ , onde  $F(2^n)$  é a área do polígono regular de  $2^n$  lados inscrito na circunferência de raio unitário.

Como primeira aproximação, temos  $x_2 = F(2^2) = 2$ , isto é, a área do quadrado inscrito de lado  $l = \sqrt{2}$ . Como segunda aproximação, tomamos a área do polígono regular inscrito de 8 lados, como ilustra a Figura (1.1).

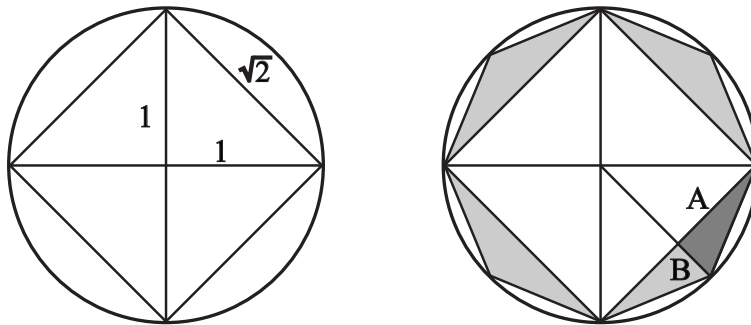


Figura 1.1.

Por construção geométrica podemos concluir que:

$$x_3 = F(2^3) = F(2^2) + 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 2(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}.$$

Em geral, temos que  $x_n = F(2^n)$  é dado por  $x_{n-1} = F(2^{n-1})$  adicionado à área dos  $2^{n+1}$  triângulos retângulos formados pelos catetos de comprimento  $A(2^n)$  e  $B(2^n)$ , onde (ver Figura (1.1))  $A(2^2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $B(2^2) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$  e, para  $n \geq 3$ ,

$$A(2^n) = \frac{1}{2}\sqrt{[A(2^{n-1})]^2 + [B(2^{n-1})]^2}$$

$$B(2^n) = 1 - \sqrt{1 - [A(2^n)]^2}$$

e

$$F(2^n) = F(2^{n-1}) + 2^{n-1}A(2^{n-1})B(2^{n-1}).$$

Segue o programa, em PASCAL, que calcula o valor de  $F(2^n)$ , para um valor dado de  $n$ .

```

program aprox_pi;
var i,n:integer;
var a,b,f:real;
begin
  writeln('Digite um numero inteiro maior que ZERO. ');
  read(n);
  f:=2;
  a:=(sqrt(2))/2;
  b:=1-(sqrt(2))/2;
  writeln('O valor de F(4)=2.0');

```

```
for i:=3 to n do begin
  f:=f+exp((i-1)*ln(2))*(a*b);
  a:=(sqrt(a*a+b*b))/2;
  b:=1-sqrt(1-a*a);
  writeln('O valor de F(',exp(i*ln(2)),')=',f:1:12);
end;
writeln('Pressione ENTER para fechar.');
```

read(n);

end.

Note que  $x_n$  é uma sequência crescente e limitada superiormente, logo convergente, pelo Teorema (1.4).

Executando o programa acima obtemos as seguintes aproximações para  $\pi$ :

$F(2^3)$	=	2.82842712474619	$F(2^4)$	=	3.06146745892072
$F(2^5)$	=	3.12144515225805	$F(2^6)$	=	3.13654849054594
$F(2^7)$	=	3.14033115695475	$F(2^8)$	=	3.14127725093277
$F(2^9)$	=	3.14151380114430	$F(2^{10})$	=	3.14157294036709
$F(2^{11})$	=	3.14158772527716	$F(2^{12})$	=	3.14159142151120
$F(2^{13})$	=	3.14159234557012	$F(2^{14})$	=	3.14159257658487

## Curva de Peano

Neste capítulo vamos exibir um exemplo de uma curva contínua  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  cujo traço é todo o quadrado  $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ .

Faremos inicialmente uma abordagem acerca de seqüências e séries de funções nos aspectos que serão utilizados nesse texto.

### 2.1 Sequências de funções

**Definição 2.1.** *Uma seqüência de funções  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma correspondência que associa a cada  $n \in \mathbb{N}$  uma função  $f_n$ , definida em  $A$  e tomando valores reais.*

Seja  $(f_n)$  uma seqüência de funções definidas em  $A$ . Para cada  $x \in A$ , podemos considerar a seqüência numérica de termo geral  $f_n(x)$ . Seja  $B$  o conjunto de todos os  $x \in A$  para os quais a seqüência numérica  $f_n(x)$  converge. Podemos, então, considerar a função  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Desta forma, diremos que  $(f_n)$  converge a  $f$  em  $B$ .

**Exemplo 2.2.** Seja a seqüência  $f_n(x) = n \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right)$ ,  $n \geq 1$ , isto é,

$$(f_n(x)) = \left( \operatorname{sen}(x), 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right), 3 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right), \dots, n \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right), \dots \right)$$

onde cada uma das  $f_n$  está definida em  $\mathbb{R}$ . Então  $f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{0}{n}\right) = 0$  e, para  $x \neq 0$ ,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \right) x = x.$$

Segue que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ . Desta forma,  $(f_n) \rightarrow f$  em  $\mathbb{R}$ , sendo  $f$  a identidade.

Seja  $(f_n)$  uma seqüência de funções definidas em  $A$  e  $B \subset A$ . Dizemos que  $f_n$  converge uniformemente para uma função  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  quando, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  para todo  $n > n_0$  e todo  $x \in B$ .

O leitor está convidado a mostrar que a seqüência  $(f_n)$  do exemplo acima *não* converge uniformemente à função  $f(x) = x$  em  $\mathbb{R}$ . Mostre ainda que tal seqüência converge uniformemente a  $f(x) = x$  em qualquer subintervalo fechado  $B = [-r, r] \subset \mathbb{R}$  com  $r > 0$ .

**Teorema 2.3.** *Seja  $(f_n)$  uma seqüência de funções que converge uniformemente a  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ . Se cada  $f_n$  for contínua em  $x_0 \in B$ , então  $f$  é contínua em  $x_0$ .*

**Demonstração.** Precisamos mostrar que, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  sempre que  $|x - x_0| < \delta$ .

De fato, como  $f_n$  converge uniformemente a  $f$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $|f_p(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$  para todo  $x \in B$  e, em particular, para  $x = x_0$ . Como  $f_p$  é contínua em

$x_0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f_p(x) - f_p(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$  sempre que  $|x - x_0| < \delta$ . Logo, se  $|x - x_0| < \delta$ , vale

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f_p(x) - f(x)| + |f_p(x) - f_p(x_0)| + \\ &+ |f_p(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

de onde segue que  $f$  é contínua em  $x_0$ . ■

Uma condição necessária e suficiente para que uma sequência de funções  $f_n: B \rightarrow \mathbb{R}$  seja uniformemente convergente é que esta seja uma sequência de Cauchy, isto é, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, se  $m, n > n_0$ , então  $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$  para todo  $x \in B$ . Deixamos para o leitor a demonstração deste fato.

## 2.2 Série de funções

Dada uma sequência de funções  $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ , seja  $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$  a soma parcial de ordem  $n \in \mathbb{N}$ . Se a sequência  $(S_n(x))$  é convergente, dizemos que a *série*  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$  é *convergente* e que

$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim S_n(x) = S(x)$ . Se  $B \subset A$  é o conjunto dos pontos  $x \in A$  tais que  $(S_n(x))$  converge, dizemos que a série  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$  converge em  $B$  à função  $S: B \rightarrow \mathbb{R}$ .

A série de funções  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$  converge uniformemente em  $B$  à função  $S: B \rightarrow \mathbb{R}$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existir um natural  $n_0$  tal que, para todo  $x \in B$ ,  $|\sum_{k=0}^n f_k(x) - S(x)| < \varepsilon$  para todo  $n > n_0$ .

Pelo critério de Cauchy, temos que  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$  converge uniformemente em  $B$  se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existir um número natural  $n_0$  tal que, se  $m > n > n_0$ , então

$$|S_m(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=0}^m f_k(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in B.$$

**Teorema 2.4.** *Seja  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  uma série de funções e suponhamos que existe uma série numérica  $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$  tal que, para todo  $x \in B$  e para todo natural  $k$ , temos  $|f_k(x)| \leq M_k$ . Se a série  $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$  converge, então a série  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  converge uniformemente em  $B$ .*

**Demonstração.** Como  $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$  é convergente, pelo critério de Cauchy para série numérica, dado  $\varepsilon > 0$  existe um natural  $n_0$  tal que  $\left| \sum_{k=n+1}^m M_k \right| < \varepsilon$  quaisquer que sejam  $m > n > n_0$ .

Como  $|f_k(x)| \leq M_k \forall x \in B$ , segue-se que, se  $m > n > n_0$ , então

$$\left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^m M_k \right| < \varepsilon \quad \forall x \in B.$$

Logo, pelo critério de Cauchy para convergência uniforme de uma série de funções, resulta que a série  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  converge uniformemente em  $B$ . ■

**Teorema 2.5.** *Se a série de funções  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  convergir uniformemente a  $S$  em  $B$ , e se cada  $f_k$  for contínua em  $x_0 \in B$ , então  $S$  será contínua em  $x_0$ .*

**Demonstração.** Como cada  $f_k$  é uma função contínua, segue-se que a soma parcial  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$  é também uma função contínua em  $x_0$ . Além disso, uma vez que  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  converge uniformemente a  $S$ , temos que a sequência  $(S_n(x))$  é uniformemente convergente em  $B$ . Pelo Teorema (2.3), segue-se que  $S$  é contínua em  $x_0$ . ■

Os resultados acima são suficientes para que possamos inicializar a exibição de uma curva contínua  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  cujo traço é todo o quadrado  $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ .

## 2.3 A curva de Peano

Consideremos a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e periódica de período 2, isto é,  $f(t + 2k) = f(t)$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , e tal que, em  $[0, 2]$ ,  $f$  é definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \text{ ou } \frac{5}{3} \leq t \leq 2; \\ 1, & \text{se } \frac{2}{3} \leq t \leq \frac{4}{3}; \\ \text{é linear para os demais valores de } t & \text{em } [0, 2]. \end{cases}$$

Observemos que  $0 \leq f(t) \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$ . ( ver Figura (2.1))

Considere agora as funções  $x(t)$  e  $y(t)$  definidas pelas séries

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(i+1)} f(3^{2i}t) \quad \text{e} \quad y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(i+1)} f(3^{2i+1}t).$$

A respeito dessas funções observemos que:

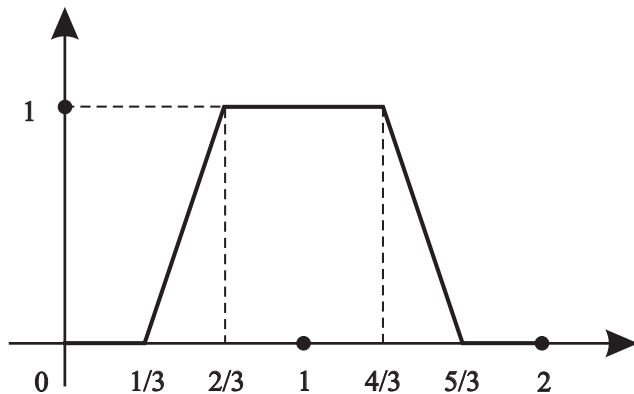


Figura 2.1.

1 Ambas as séries são uniformemente convergentes em  $\mathbb{R}$ . Com efeito, para a primeira temos que  $|2^{-(i+1)} f(3^{2i}t)| \leq 2^{-(i+1)}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  e  $\forall i \in \mathbb{N}$ . Uma vez que a série numérica  $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(i+1)}$  é convergente (série geométrica) temos pelo Teorema (2.4) que  $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(i+1)} f(3^{2i}t)$  é uniformemente convergente. O mesmo raciocínio se aplica à série de funções  $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(i+1)} f(3^{2i+1}t)$ .

2 As funções  $x(t)$  e  $y(t)$  são contínuas em  $\mathbb{R}$ . De fato, uma vez que as séries correspondentes são uniformemente convergente e  $f(t)$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , segue-se que  $x(t)$  e  $y(t)$  são funções contínuas. Temos ainda que, para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $0 \leq x(t), y(t) \leq 1$ .

Queremos mostrar que a curva  $c(t) = (x(t), y(t))$  tem como traço todo o quadrado  $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ . Seja então  $(x_1, y_1)$  um ponto fixado em  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Usando a expressão binária de  $x_1$  e  $y_1$  achamos constantes  $a_i, i \in \mathbb{N}$ , onde  $a_i \in \{0, 1\}$ , tais que

$$\begin{cases} x_1 = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(i+1)} a_{2i} \implies x_1 = 0, a_0 a_2 a_4 \dots \\ y_1 = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(i+1)} a_{2i+1} \implies y_1 = 0, a_1 a_3 a_5 \dots \end{cases}$$

**Exemplo 2.6.** Se  $(x_1, y_1) = (1, 1)$ , temos que

$$\begin{cases} x_1 = 0, 111\dots \implies a_0 = a_2 = \dots = 1 \\ y_1 = 0, 111\dots \implies a_1 = a_3 = \dots = 1 \end{cases}$$

Consideremos  $t_0 = \sum_{i=0}^{\infty} (2a_i)3^{-(i+1)}$ , cuja representação em base 3 é  $t_0 = 0, (2a_0)(2a_1)(2a_3)\dots$

Observemos que  $t_0$  não contém, nessa representação, o dígito 1, pois  $2a_i \in \{0, 2\}$ .

Mostremos que, para todo  $k = 0, 1, \dots$ , tem-se  $f(3^k t_0) = a_k$ . De fato, temos que:

$$\begin{aligned} 3^k t_0 &= 3^k \sum_{i=0}^{\infty} (2a_i) 3^{-(i+1)} = \sum_{i=0}^{\infty} (2a_i) 3^{k-i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (2a_i) 3^{k-1-i} + \frac{2a_k}{3} + \sum_{i=k+1}^{\infty} (2a_i) 3^{k-1-i} \end{aligned}$$

onde  $\sum_{i=0}^{k-1} (2a_i) 3^{k-1-i}$  é algum inteiro  $p$ , uma vez que  $k-1-i \geq 0$  e  $a_i \in \{0, 1\}$ . Assim, como  $f$  é periódica de período 2, segue-se que

$$\begin{aligned} f(3^k t_0) &= f\left(2p + \frac{2a_k}{3} + \sum_{i=k+1}^{\infty} (2a_i) 3^{k-1-i}\right) \\ &= f\left(\frac{2a_k}{3} + \sum_{i=k+1}^{\infty} (2a_i) 3^{k-1-i}\right). \end{aligned}$$

Temos agora duas possibilidades:

1 Se  $a_k = 0$ , o número  $\alpha = \frac{2a_k}{3} + \sum_{i=k+1}^{\infty} (2a_i) 3^{k-1-i}$  se reduz a

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} (2a_i) 3^{k-1-i} = \frac{2a_{k+1}}{3^2} + \frac{2a_{k+2}}{3^3} + \dots$$

Como  $a_i \in \{0, 1\} \forall i$ , segue-se que

$$0 \leq \alpha \leq \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3}$$

Assim,  $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{3}$ , e portanto

$$f(3^k t_0) = f\left(\frac{2a_k}{3} + \sum_{i=k+1}^{\infty} (2a_i) 3^{k-1-i}\right) = 0 = a_k.$$

2 Por uma análise análoga, se  $a_k = 1$ , então o número  $\alpha$  é tal que  $\frac{2}{3} \leq \alpha \leq 1$ , e portanto

$$f(3^k t_0) = f\left(\frac{2a_k}{3} + \sum_{i=k+1}^{\infty} (2a_i) 3^{k-1-i}\right) = 1 = a_k.$$

Assim, em qualquer caso, tem-se  $f(3^k t_0) = a_k$ , como afirmamos. Segue-se daí que

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(i+1)} f(3^{2i} t_0) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(i+1)} a_{2i} = x_1 \\ y(t_0) &= \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(i+1)} f(3^{2i+1} t_0) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(i+1)} a_{2i+1} = y_1. \end{aligned}$$



Concluimos então que, qualquer que seja o ponto  $(x_1, y_1) \in [0, 1] \times [0, 1]$ , existe  $t_0$  no domínio da curva  $c$  tal que  $x(t_0) = x_1$  e  $y(t_0) = y_1$ , ou seja, esse ponto pertence ao traço da curva  $c(t) = (x(t), y(t))$ .

A curva  $c$  aparece, nessa construção, como limite das curvas  $c_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dadas por

$$c_n(t) = \left( \sum_{i=0}^n 2^{-(i+1)} f(3^{2i}t), \sum_{i=0}^n 2^{-(i+1)} f(3^{2i+1}t) \right).$$

A seguir apresentamos, em PASCAL, a definição das funções coordenadas de  $x(t)$  e  $y(t)$  da Curva de Peano.

```
function f(t:real):real;
  Var mod2: real;
  Begin
    (* reduz t ao intervalo [0,2) pois f tem periodo 2 *)
    mod2 := t - 2 * Int(t/2.0);
    if (mod2 <= 1/3.0) or (mod2 >= 5/3.0)
      then f := 0
    else if mod2 <= 2/3.0
      then f := 3 * mod2 - 1
    else if mod2 <= 4/3.0
      then f := 1
    else
      f := -3 * mod2 + 5;
  End;

function x(t:real):real;
  Var i: integer;
  Begin
    sy := 0;
    meio := 0.5;
    tres := 1.0;
    for i := 0 to nsup do
      Begin
        sx := sx + meio * f( tres*t );
        meio := meio + 0.5;
        tres := tres * 9;
      End;
    x := sx ;
  End
```

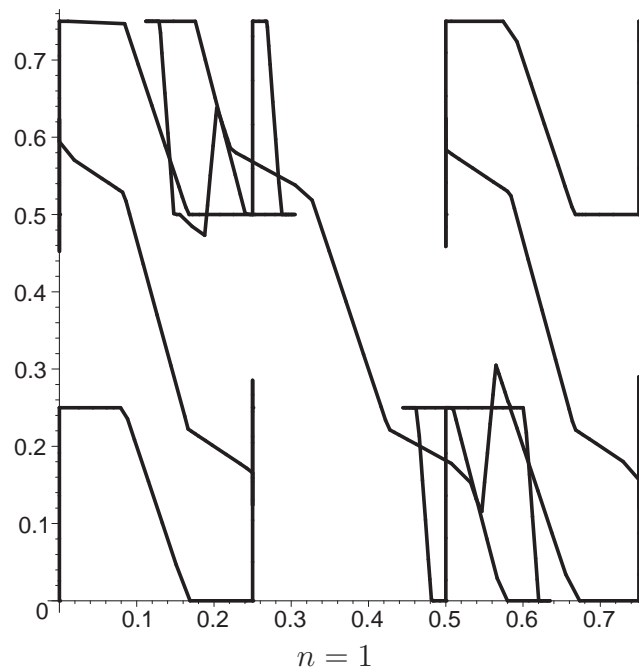
```
function y(t:real):real;
  Var i: integer;
  Begin
```

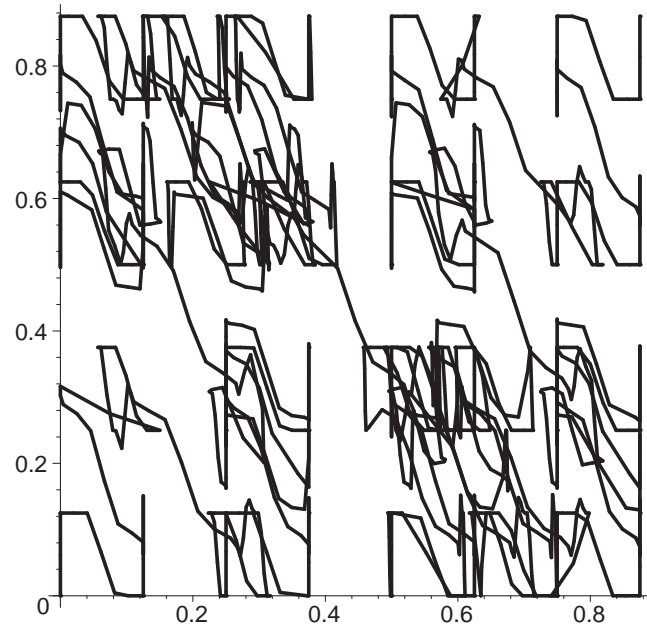
```

sy := 0;
meio := 0.5;
tres := 1.0;
for i := 0 to nsup do
  Begin
    sy := sy + meio * f( tres*t );
    meio := meio + 0.5;
    tres := tres * 9;
  End;
y := sy ;
End

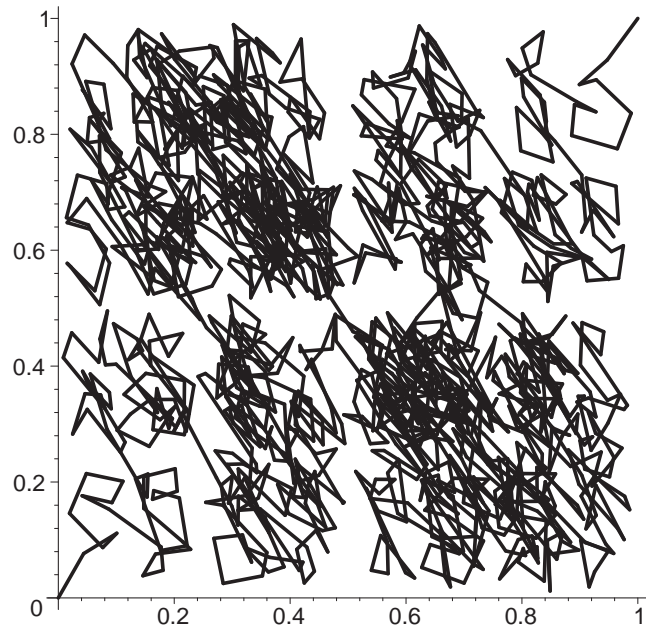
```

Introduzindo estas funções em um programa análogo ao MCURVAS2 do ACOGEO, e escolhendo  $n = 1, 2$  e  $37$  como exemplos, obtemos os traços ilustrados na Figura (2.2).





$n = 2$



$n = 37$

Figura 2.2. Aproximações da Curva de Peano

## Noções Topológicas

### 3.1 Espaços Métricos

Uma métrica em um conjunto  $M$  é uma função  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  que, para quaisquer  $x, y$  e  $z$  em  $M$ , satisfaz às seguintes condições:

- i)*  $d(x, x) = 0$
- ii)*  $d(x, y) > 0$  se  $x \neq y$
- iii)*  $d(x, y) = d(y, x)$
- iv)*  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

**Exemplo 3.7.** Existem três métricas usuais no conjunto  $M = \mathbb{R}^n$ . Indicando por  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  pontos genéricos de  $\mathbb{R}^n$ , essas métricas são dadas por

$$\begin{aligned}d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\d_1(x, y) &= |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \\d_2(x, y) &= \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}\end{aligned}$$

Um *espaço métrico* é um par  $(M, d)$ , onde  $M$  é um conjunto e  $d$  uma métrica em  $M$ . Assim,  $\mathbb{R}^n$  com qualquer uma das métricas definidas no último exemplo é um espaço métrico. Um *subespaço métrico* de  $(M, d)$  é um espaço métrico formado por um conjunto  $X \subset M$ , considerando-se em  $X$  a mesma métrica de  $M$ .

### 3.2 Conjuntos Abertos e Fechados

O conceito de conjunto aberto é fundamental quando se estuda a topologia dos espaços métricos, conceito intimamente ligados à noção de bola.

#### 3.2.1 Bolas

**Definição 3.8.** Seja  $a$  um ponto de um espaço métrico  $M$  e  $r > 0$  um número real. Definimos a bola aberta  $B(a, r)$  e a bola fechada  $B[a, r]$  de centro em  $a$  e de raio  $r$  como sendo, respectivamente, os conjuntos  $B(a, r) = \{x \in M ; d(x, a) < r\}$  e  $B[a, r] = \{x \in M ; d(x, a) \leq r\}$ .

É importante notar que a noção de bola nem sempre coincide com a intuição geométrica que temos. De fato tais bolas podem ter as formas mais estranhas possíveis. A título de exemplo, consideremos o plano  $\mathbb{R}^2$  com as métricas definidas no Exemplo (3.7). O leitor não terá dificuldades em constatar que as bolas, nestes espaços, terão as formas ilustradas na Figura (3.1).

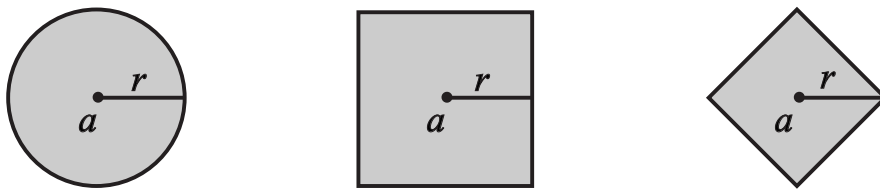


Figura 3.1. Bolas em diferentes métricas

### 3.2.2 Conjuntos Abertos

**Definição 3.9.** *Seja  $a$  um ponto de um espaço métrico  $(M, d)$  e  $X \subset M$ . Diremos que  $a$  é um ponto interior de  $X$  quando existir uma bola aberta de centro em  $a$  contida em  $X$ .*

Após esses preliminares, podemos definir conjuntos abertos como segue.

**Definição 3.10.** *Seja  $A$  um subconjunto de um espaço métrico. Dizemos que  $A$  é aberto em  $M$  quando todo ponto de  $A$  é ponto interior de  $A$ .*

**Exemplo 3.11.** Toda bola aberta é um conjunto aberto. De fato, seja  $B = B(a, r)$  uma bola aberta. Devemos mostrar que, para todo  $x \in B$ , existe uma bola  $B(x, \varepsilon)$  contida em  $B$ . Para tanto, tome  $\varepsilon = r - d(a, x)$ . O leitor poderá constatar que tal escolha é apropriada. Assim, por exemplo, todo intervalo aberto limitado  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  é um subconjunto aberto da reta.

### 3.2.3 Conjuntos Fechados

**Definição 3.12.** *Seja  $X$  um subconjunto do espaço métrico  $M$  e  $a \in M$ . Dizemos que  $a$  é um ponto aderente a  $X$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , tem-se que  $B(a, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$ .*

**Exemplo 3.13.** O conjunto dos pontos de aderência do conjunto  $X = (0, 1] \subset \mathbb{R}$  é o intervalo  $[0, 1]$ . De fato, é claro que todo ponto do conjunto é aderente ao próprio conjunto. Além disso, para todo  $\varepsilon > 0$ , tem-se que  $B(0, \varepsilon) \cap X = (-\varepsilon, \varepsilon) \cap (0, 1] \neq \emptyset$ , e portanto 0 é um ponto aderente a  $X$ .

**Definição 3.14.** *Um subconjunto  $X$  de um espaço métrico  $M$  é dito fechado se ele contém todos os seus pontos aderentes.*

**Exemplo 3.15.** Tomando novamente o exemplo anterior, vemos que  $(0, 1]$  não é um conjunto fechado em  $\mathbb{R}$ . Já o intervalo  $[0, 1]$  é um conjunto fechado em  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 3.16.** *Seja  $X$  um subconjunto de um espaço métrico  $M$ . Então  $X$  é aberto em  $M$  se e somente se  $M - X$  é fechado.*

**Demonstração.** Suponha inicialmente que  $X$  é aberto. Assim para todo  $x \in X$  existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset X$ . Assim  $x$  não é ponto aderente a  $M - X$ , ou seja, todo ponto aderente a  $M - X$  pertence a  $M - X$ . Logo  $M - X$  é fechado. Reciprocamente, suponha  $M - X$  fechado. Então, dado  $x \in X$ , temos que  $x$  não é ponto aderente a  $M - X$  pois  $M - X$

é fechado. Desta forma existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset X$ . Logo, todo ponto de  $X$  é ponto interior, e portanto  $X$  é aberto. ■

**Teorema 3.17.** *Seja  $\Omega$  a coleção de todos os subconjuntos abertos de um espaço métrico  $M$ . Indicando por  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  uma família com um número e por  $\{A_\lambda ; \lambda \in L\}$  uma família com um número qualquer de termos, então*

- 1)  $M \in \Omega$  e  $\emptyset \in \Omega$ .
- 2) Se  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Omega$  então  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \Omega$ .
- 3) Se  $A_\lambda \in \Omega$  para todo  $\lambda \in L$  então  $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \Omega$ .

**Demonstração.**

- 1) Segue imediatamente da definição de conjunto aberto.
- 2) Seja  $a \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ . Como cada  $A_i$  é aberto, existe  $r_i > 0$  tal que  $B(a, r_i) \subset A_i$  qualquer que seja  $1 \leq i \leq n$ . Escolhendo  $r$  o menor dos números  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , tem-se  $r > 0$  e  $B(a, r) \subset A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ , de onde segue que esse conjunto é aberto.
- 3) Se  $a \in A$ , então  $a \in A_\lambda$  para algum  $\lambda \in L$ . Uma vez que  $A_\lambda$  é aberto, existe uma  $B(a, r) \subset A_\lambda \subset A$ , de onde segue-se que  $A$  é aberto. ■

Dos dois últimos teoremas, obtemos o

**Teorema 3.18.** *Seja  $\Gamma$  a coleção de todos os subconjuntos fechados de um espaço métrico  $M$ . Indicando por  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  uma família com um número finito e por  $\{F_\lambda ; \lambda \in L\}$  uma família com um número qualquer de termos, então:*

- 1)  $M \in \Gamma$  e  $\emptyset \in \Gamma$ .
- 2) Se  $F_1, F_2, \dots, F_n \in \Gamma$  então  $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n \in \Gamma$ .
- 3) Se  $F_\lambda \in \Gamma$  para todo  $\lambda \in L$  então  $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \in \Gamma$ .

### 3.3 Conjuntos Compactos

**Definição 3.19.** *Seja  $X$  um subconjunto de um espaço métrico  $M$ . Uma cobertura de  $X$  é uma família  $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$  de subconjuntos de  $M$  tal que  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ . Se existe um subconjunto  $L' \subset L$  tal que  $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$  diremos que  $(C_\lambda)_{\lambda \in L'}$  é uma subcobertura de  $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ . Se  $L'$  é finito dizemos que a cobertura é finita.*

**Definição 3.20.** *Seja  $X$  um subconjunto de um espaço métrico  $M$ . Dizemos que  $X$  é compacto se toda cobertura de  $X$  por abertos admite uma subcobertura finita.*

Cabe aqui uma observação importante. Em  $\mathbb{R}^n$  esta definição é equivalente a dizer que o conjunto  $X$  é fechado e limitado (ver [3]).

## 3.4 Funções

Nesta seção recordaremos a noção de *função*, que é fundamental para o estudo de topologia. Uma função  $f: A \rightarrow B$  é uma relação que associa elementos do conjunto  $A$  com elementos do conjunto  $B$ . Afim de que tal relação esteja bem definida vamos exigir que, para qualquer elemento  $a \in A$ , exista um único elemento  $b \in B$  associado a  $a$ . Neste caso usaremos a notação  $f(a) = b$ . Outra exigência natural é que todo elemento de  $A$  se relacione com algum elemento de  $B$ .

Note que, da forma como foi definido, podem existir elementos de  $B$  que não estão relacionados com nenhum elemento de  $A$ . Quando isto não acontecer diremos que a função é *sobrejetiva*. Diremos que a função é *injetiva* quando  $f(x_1) = f(x_2)$  implicar  $x_1 = x_2$ . Uma função é *bijetiva* quando for injetiva e sobrejetiva.

No caso em que a função é injetiva é legítimo fazermos a “volta”, isto é, definirmos uma função  $f^{-1}: f(B) \rightarrow A$  que tenha a seguinte propriedade:

$$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b.$$

Diremos que  $f^{-1}$  é a *inversa* de  $f$ .

**Definição 3.21.** *Sejam  $M$  e  $N$  dois espaços métricos. Dizemos que a função  $f: M \rightarrow N$  é aberta se, para todo aberto  $X \subset M$ , tivermos  $f(X)$  aberto em  $N$ . Por  $f(X)$  entenda-se o conjunto formado pela imagem de todos os elementos de  $X$ .*

**Definição 3.22.** *Sejam  $M$  e  $N$  dois espaços métricos. Dizemos que a função  $f: M \rightarrow N$  é contínua em  $a \in M$  quando, para todo  $\varepsilon > 0$  dado arbitrariamente, pudermos achar um  $\delta > 0$  tal que  $x \in B(a, \delta)$  implique  $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$ . Diremos que  $f$  é contínua em  $M$  se ela for contínua em todos os pontos de  $M$ .*

**Definição 3.23.** *Um homeomorfismo entre dois espaços métricos  $M$  e  $N$  é uma função contínua  $f: M \rightarrow N$  com inversa  $f^{-1}: N \rightarrow M$  também contínua.*

Quando existe um homeomorfismo entre  $M$  e  $N$  dizemos que  $M$  e  $N$  são *homeomorfos*.

**Exemplo 3.24.** Sejam  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $M = (t_0, t_0 + 2\pi)$ ,  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$  e  $p = (\cos(t_0), \sin(t_0)) \in S^1$ . Então a função  $\exp: M \rightarrow S^1 - p$  definida por  $\exp(t) = (\cos(t), \sin(t))$  é um homeomorfismo entre  $M$  e  $S^1 - p$ .

### 3.4.1 Funções Contínuas

**Teorema 3.25.** *Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos. Afim de que uma função  $f: M \rightarrow N$  seja contínua é necessário e suficiente que a imagem inversa de qualquer aberto em  $N$  seja aberta*

em  $M$ .

**Demonstração.** Suponha inicialmente que  $f$  seja contínua. Seja  $A' \subset N$  um conjunto aberto. Queremos mostrar que  $A = f^{-1}(A')$  é aberto em  $M$ . Seja  $a \in A$  um ponto qualquer da imagem inversa. Então  $f(a) \in A'$ . Como  $A'$  é aberto em  $N$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(f(a), \varepsilon) \subset A'$ . Pela continuidade de  $f$  temos que existe  $\delta > 0$  tal que  $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon) \subset A'$ . Desta forma,  $B(a, \delta) \subset f^{-1}(A') = A$ . Como  $a$  é um ponto arbitrário de  $A$ , concluímos que  $A$  é aberto em  $M$ . Para a recíproca do Teorema basta observar que qualquer aberto contém uma bola aberta. ■

**Corolário 3.26.** Se  $f: M \rightarrow N$  é injetiva e aberta, então  $f^{-1}: f(N) \rightarrow M$  é contínua.

## 3.5 Conjuntos Conexos

Uma *cisão* de um espaço métrico  $M$  é uma decomposição  $M = A \cup B$ , com  $A$  e  $B$  abertos em  $M$  e  $A \cap B = \emptyset$ . No caso em que  $A = M$  ou  $B = M$  diremos que a cisão é *trivial*. Um espaço métrico é *conexo* quando só admitir a cisão trivial. Diremos que um conjunto  $X \subset M$  é um conjunto conexo se  $X$ , visto como subespaço de  $M$ , for um espaço métrico conexo.

**Lema 3.27.** Seja  $X$  um subconjunto conexo de um espaço métrico  $M$ . Se  $X \subset Y \subset \bar{X}$  então  $Y$  é conexo.

**Demonstração.** Para todo conjunto  $A \neq \emptyset$  e aberto em  $Y$ , temos  $A \cap X \neq \emptyset$ , pois todo ponto de  $Y$  é aderente a  $X$ . Seja agora  $Y = A \cup B$  uma cisão de  $Y$ . Então

$$X = Y \cap X = (A \cup B) \cap X = (A \cap X) \cup (B \cap X).$$

Como  $X$  é conexo, temos  $(A \cap X) = \emptyset$  ou  $(B \cap X) = \emptyset$ . Em qualquer um dos casos teríamos  $A = \emptyset$  ou  $B = \emptyset$ . Portanto  $Y$  é conexo. ■

**Teorema 3.28.** Se  $f: M \rightarrow N$  é contínua e  $X \subset M$  é conexo em  $M$ , então  $f(X)$  é conexo em  $N$ .

**Demonstração.** Suponha, inicialmente, que  $f$  seja sobrejetiva e que  $X = M$ . Nesse caso, devemos mostrar que  $N = f(M)$  é conexo. Para isso, seja  $N = A \cup B$  uma cisão de  $N$ . Então  $M = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$  é uma cisão de  $M$  pois, sendo  $f$  contínua, os conjuntos  $f^{-1}(A)$  e  $f^{-1}(B)$  são abertos em  $M$ . Como  $M$  é conexo por hipótese, devemos ter  $f^{-1}(A) = \emptyset$  ou  $f^{-1}(B) = \emptyset$ . Se  $f^{-1}(A) = \emptyset$ , como  $f$  é sobrejetiva, isto implica que  $A = \emptyset$ . Analogamente, se  $f^{-1}(B) = \emptyset$ , então  $B = \emptyset$ . Portanto, concluímos que  $A = \emptyset$  ou  $B = \emptyset$ , isto é,  $N$  é conexo.

Para o caso em que a função  $f$  não é sobrejetiva basta considerar  $f: X \rightarrow f(X)$  e utilizar o resultado anterior. ■



**Corolário 3.29.** *Se  $M$  é conexo e  $N$  é homeomorfo a  $M$ , então  $N$  é conexo.*

**Teorema 3.30.** *Seja  $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$  uma família de conjuntos conexos tal que  $\bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda \neq \emptyset$ . Então*

*$X = \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$  é um conjunto conexo.*

**Demonstração.** Como  $\bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda \neq \emptyset$ , existe  $a \in X_\lambda, \forall \lambda \in L$  e, em particular,  $a \in X$ .

Seja agora  $X = A \cup B$  uma cisão de  $X$ . Então  $a \in A$  ou  $a \in B$ . Vamos supor que  $a \in A$ . Nesse caso, para cada  $\lambda \in L$ , temos  $a \in X_\lambda \cap A$  e

$$X_\lambda = X_\lambda \cap X = X_\lambda \cap (A \cup B) = (X_\lambda \cap A) \cup (X_\lambda \cap B).$$

é uma cisão de  $X_\lambda$ . Como  $X_\lambda$  é conexo e  $a \in X_\lambda \cap A$  segue que  $X_\lambda \cap B = \emptyset$  para todos  $\lambda \in L$ . Observamos agora que

$$B = B \cap X = B \cap \left( \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in L} (B \cap X_\lambda) = \emptyset.$$

Assim,  $B = \emptyset$ , o que mostra que  $X$  só admite a cisão trivial, isto é,  $X$  é conexo. ■

**Corolário 3.31.** *Um espaço métrico  $M$  é conexo se, e somente se, dados dois pontos quaisquer  $a, b \in M$ , existe um conexo  $X_{ab} \subset M$  tal que  $\{a, b\} \subset X_{ab}$ .*

**Demonstração.** Se  $M$  é conexo então basta tomar  $X_{ab} = M$ . Reciprocamente, suponha que, dados dois pontos quaisquer  $a, b \in M$ , existe um conexo  $X_{ab} \subset M$  com  $\{a, b\} \subset X_{ab}$ . Fixe  $a$  e note que  $M = \bigcup_{b \in M} X_{ab}$ . Pelo teorema anterior, vemos que  $M$  é conexo. ■

## 3.6 Conexidade por caminhos

Um *caminho* em um espaço métrico  $M$  é uma função contínua  $f : [0, 1] \rightarrow M$ . Os pontos  $a = f(0)$  e  $b = f(1)$  são chamados os *extremos do caminho*. Quando  $f(0) = f(1)$  diremos que o caminho é *fechado*. Dados dois caminhos  $f, g : [0, 1] \rightarrow M$ , com  $f(1) = g(0)$ , podemos definir o *caminho justaposto*  $f \vee g : [0, 1] \rightarrow M$  pondo  $(f \vee g)(t) = f(2t)$ , se  $t \in [0, \frac{1}{2}]$  e  $(f \vee g)(t) = g(2t - 1)$ , se  $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ . O caminho justaposto consiste em primeiro percorrer o caminho  $f$  e depois percorrer o caminho  $g$ , sempre com velocidade dobrada.

Um espaço métrico diz-se *conexo por caminhos* quando quaisquer  $x, y \in M$  podem ser unidos por um caminho contido em  $M$ . Um conjunto  $X \subset M$  diz-se conexo por caminhos quando o subespaço  $X$  tem essa mesma propriedade.

Em um espaço vetorial normado  $E$  denotaremos por  $[a, b] = \{(1 - t)a + tb; 0 \leq t \leq 1\}$  o *segmento de reta* que liga os pontos  $a$  e  $b$ . Um caminho cuja imagem seja um segmento de reta será denotado *caminho retilíneo*. Um *caminho poligonal* é a justaposição de um número

finito de caminhos retilíneos. Um conjunto  $X \subset E$  é conexo por poligonais quando quaisquer  $x, y \in X$  podem ser unidos por um caminho poligonal totalmente contido em  $X$ .

Diremos que um conjunto  $B$  é *convexo* quando, para quaisquer  $a, b \in B$ , tivermos  $[a, b] \subset B$ .

A noção de conexidade por caminhos ou por poligonais é um conceito mais intuitivo do que o de conjunto conexo. Porém os dois primeiros conceitos são um caso particular do último. Vamos agora concentrar nossos esforços na formalização dessa última afirmação. Começemos pelo

**Teorema 3.32.** *Todo espaço métrico  $M$  conexo por caminhos é conexo.*

**Demonstração.** Sejam  $a, b \in M$  dois pontos quaisquer. Pela hipótese existe um caminho  $f : [0, 1] \rightarrow M$  ligando  $a$  e  $b$ . Como  $f$  é contínuo, segue que  $f([0, 1])$  é conexo, isto é, dados dois pontos quaisquer de  $M$  existe um subconjunto conexo de  $M$  contendo  $a$  e  $b$ . Isto demonstra a conexidade de  $M$ . ■

**Corolário 3.33.** *Todo espaço vetorial normado conexo por poligonais é conexo.*

A recíproca deste teorema nem sempre é verdadeira. De fato, existem exemplos de conjuntos que são conexos e não são conexos por caminhos. No entanto para uma classe especial de conjuntos conexos a recíproca é verdadeira. Antes de conhecermos tais conjuntos vamos a um resultado auxiliar.

**Lema 3.34.** *Toda bola num espaço vetorial normado é convexa.*

**Demonstração.** Seja  $B = B(a, r)$ , a bola aberta de centro em  $a$  e de raio  $r$  no espaço vetorial normado  $E$ . Sejam dados  $x, y \in B$ . Queremos provar que  $[x, y] \subset B$ . Ora, como  $x, y \in B$  temos que  $|x - a| < r$  e  $|y - a| < r$ . Assim, qualquer que seja  $t \in [0, 1]$ , temos:

$$\begin{aligned} |(1-t)x + ty - a| &= |(1-t)x + ty - ta - a + ta| \\ &= |(1-t)(x - a) + t(y - a)| \\ &< (1-t)r + tr = r \end{aligned}$$

Para o caso em que a bola é fechada o procedimento é análogo. ■

Estamos agora prontos para enunciar e provar o

**Teorema 3.35.** *Seja  $E$  um espaço vetorial normado e  $A \subset E$  um conjunto aberto e conexo. Então  $A$  é conexo por caminhos.*

**Demonstração.** Seja  $a \in A$  um ponto fixado. Denotemos por  $S$  o conjunto de todos os pontos de  $A$  que podem ser ligados a  $a$  por um caminho poligonal contido em  $A$ . Vamos provar que  $S$  é aberto em  $A$ . Para isso, tome  $x \in S$ . Com  $A$  é aberto, existe  $B = B(x, r)$  tal que  $x \in B \subset A$ . Como a bola  $B$  é convexa segue que todo ponto de  $B$  pode ser ligado a  $x$  por um segmento de reta contido em  $B$ . Justapondo este segmento retilíneo com o caminho

poligonal que liga  $x$  a  $a$  teremos um caminho poligonal ligando  $a$  ao ponto  $x \in B$ . Assim, todo ponto de  $B$  pertence a  $S$ .

Analogamente,  $N = A - S$  é um conjunto aberto em  $A$ . De fato, seja  $v \in N$ . Sendo  $A$  aberto existe  $B' = B(v, r')$  tal que  $v \in B' \subset A$ . Se algum ponto  $y \in B'$  não pertencesse a  $N$  teríamos que, justapondo o caminho que liga  $y$  a  $a$  com o segmento retilíneo que liga  $y$  a  $v$ , existiria um caminho poligonal ligando  $v$  e  $a$ , o que é um absurdo pois  $v \in N = A - S$ . Assim  $A = N \cup S$  é uma cisão de  $A$ . Como  $A$  é conexo e  $a \in S$  devemos ter  $N = \emptyset$ , isto é,  $A = S$ . Assim  $A$  é conexo por caminhos. ■

**Corolário 3.36.** *Seja  $E$  um espaço vetorial normado e  $A \subset E$  um conjunto aberto e conexo. Então  $A$  é conexo por poligonais.*

Note que, na demonstração dada acima, o fato de  $A$  ser um conjunto aberto foi usado para garantirmos a existência das bolas  $B$  e  $B'$ . Uma exigência mais fraca para as hipóteses do teorema acima envolveria a noção de conjunto localmente conexo por caminhos. Diremos que um espaço métrico  $M$  é *localmente conexo por caminhos* quando, para todo  $x \in M$  e toda vizinhança  $V$  tal que  $x \in V$  existir uma vizinhança  $U \subset V$  tal que  $x \in U$  e  $U$  é conexo por caminhos. O leitor atento notará que todo espaço vetorial normado é um conjunto localmente conexo por caminhos, uma vez que, nesse espaço, toda bola é um conjunto conexo por caminhos. Feitas estas definições vale agora o

**Teorema 3.37.** *Seja  $M$  um espaço métrico localmente conexo por caminhos. Então, se  $M$  é conexo,  $M$  é conexo por caminhos.*

**Demonstração.** A demonstração é semelhante à dada no Teorema (3.35). ■

## 3.7 Componentes Conexas

Seja  $M$  um espaço métrico e  $x \in M$  um ponto qualquer. A *componente conexa de  $x$  em  $M$*  é a reunião  $C_x$  de todos os subconjuntos conexos de  $M$  que contém  $x$ . Dessa forma  $C_x$  é o maior subconjunto conexo de  $M$  que contém  $x$ . Observe que  $C_x$  nunca é vazio pois  $\{x\} \subset C_x$ .

Vamos agora estabelecer uma relação de equivalência  $\sim$  em  $M$  pondo

$$x \sim y \iff \text{existe um subconjunto conexo contendo } x \text{ e } y.$$

A primeira observação cabível é que  $\sim$  é uma relação de equivalência em  $M$ . De fato, as propriedades reflexiva e simétrica são evidentes. Para a transitividade suponha que  $x \sim y$  e  $y \sim z$ . Então existem dois conjuntos conexos  $C_{xy}$  e  $C_{yz}$  tais que  $x, y \in C_{xy}$  e  $y, z \in C_{yz}$ . Logo temos que  $C = C_{xy} \cup C_{yz}$  é um conjunto conexo tal que  $x, z \in C$ , isto é,  $x \sim z$ .

Às classes de equivalência de  $M$  segundo a relação  $\sim$  daremos o nome de *componentes conexas de  $M$* . Assim se  $C_1$  e  $C_2$  são componentes conexas de  $M$  tais que  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$  então  $C_1 = C_2$ .

## Índice de Rotação

Neste capítulo teremos como meta principal definir o índice de rotação de uma curva fechada: o número de voltas que a curva dá ao redor de um dado ponto. Estudaremos suas propriedades básicas e algumas de suas aplicações. Apesar de ser um conceito simples, o índice revela resultados importantes, por exemplo o que diz que objetos topológicos de mesmo índice são topologicamente equivalentes. Este será um dos bonitos resultados que iremos demonstrar.

### 4.1 Função Angular

Iniciaremos com a apresentação da terminologia e definições básicas que serão usadas durante todo o capítulo.

Seja  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva contínua tal que o ponto  $\underline{o}$  não pertença ao traço de  $c$ . Seja  $\underline{a}$  uma semi-reta de origem  $\underline{o}$ . Chamaremos  $\underline{o}$  de *polo* e  $\underline{a}$  de *eixo polar*.

**Definição 4.1.** *Uma função angular para  $c$  com respeito a  $(\underline{o}, \underline{a})$  é uma função contínua  $\phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para cada  $t \in [0, 1]$ ,  $\phi(t)$  é uma das determinações do ângulo orientado, medido em radianos, formado pela semi-reta  $\underline{a}$  e pela semi-reta de origem  $\underline{o}$  passando por  $c(t)$ .*

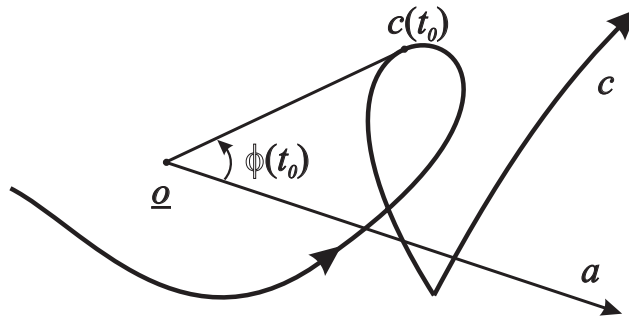


Figura 4.1.

Cabe aqui uma observação. Se  $\underline{o} = (0, 0)$ ,  $\underline{a} = \{(x, 0) ; x \geq 0\}$  e  $\phi$  é uma função angular para  $c$  com respeito a  $(\underline{o}, \underline{a})$ , a curva  $c$  pode ser expressa em coordenadas polares

$$c(t) = \|c(t)\|e^{i\phi(t)} = \|c(t)\|(\cos \phi(t), \sin \phi(t)).$$

onde  $(\cos \phi(t), \sin \phi(t))$  pertence à esfera unitária  $S^1$ .

É de nosso interesse então a seguinte

**Proposição 4.2.** *Para cada curva  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  cujo traço não contém o ponto  $\underline{o}$  e para qualquer semi-reta  $\underline{a}$  de origem  $\underline{o}$ , existe uma função angular para  $c$  com respeito a  $(\underline{o}, \underline{a})$ .*

**Demonstração.** Observe que sempre podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $\underline{0} = (0, 0)$  e  $\underline{a} = \{(x, 0) ; x \geq 0\}$ . Consideremos a curva normalizada  $\bar{c}: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dada por

$$\bar{c}(t) = \frac{c(t)}{\|c(t)\|}.$$

Observe que  $\phi$  é uma função angular para  $c$  se, e somente se,  $\phi$  é uma função angular para  $\bar{c}$ .

Considere a aplicação contínua  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dada por  $\exp(t) = e^{it} = (\cos(t), \sin(t))$  e façamos restrições á  $\exp$  para que possamos tomar sua inversa.

**Afirmção 4.3.** *Para qualquer  $t_0 \in \mathbb{R}$ , a restrição da função  $\exp$  ao intervalo aberto  $(t_0, t_0 + 2\pi)$  é um homeomorfismo deste intervalo sobre  $S^1 - \{\exp(t_0)\}$ .*

**Demonstração.** Sejam  $L = (t_0, t_0 + 2\pi)$  e  $S = S^1 - \exp(t_0)$ . Basta mostrarmos que  $\exp$  restrita a  $L$  é uma bijeção contínua de  $L$  em  $S$  e que sua inversa é também contínua. A continuidade de  $\exp$  restrita a  $L$  é trivial. Provemos então a bijetividade.

Provaremos primeiro a injetividade. Para tanto sejam  $t_1, t_0 \in L$ . Suponha que  $e^{it_1} = e^{it_0}$ . Então  $1 = e^{i(t_1-t_0)}$ . Logo,  $t_1 - t_0 = 2k\pi$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Mas  $|t_1 - t_0| < 2\pi$  para todo  $t_1, t_0 \in L$ . Logo,  $k = 0$ , e portanto  $t_1 = t_0$ .

Para a sobretividade considere  $p \in S$  e o conjunto  $T = \{t > t_0 ; \exp(t) = p\} \subset \mathbb{R}$ , que é obviamente não-vazio. Como  $T$  é limitado inferiormente, existe  $s_0 = \inf T$ . Naturalmente  $t \geq s_0$  para todo  $t \in T$ . Logo,  $s_0 \geq t_0$ . Mas  $s_0$  é claramente diferente de  $t_0$  pois  $\exp(t_0)$  não pertence a  $S$ . Logo,  $s_0 \in L$  pois, caso contrário, existiria  $s_1 = s_0 - 2\pi$  tal que  $s_1 \in T$ , ou seja, existiria um elemento de  $T$  menor que  $s_0$  o que seria um absurdo, pois  $s_0$  é cota inferior de  $T$ .

Resta-nos mostrar a continuidade da inversa. Para tanto, mostraremos que  $\exp(t)$  restrita a  $L$  é um aplicação aberta. Seja  $J$  um intervalo do tipo  $(t_1, t_2) \subseteq (t_0, t_0 + 2\pi)$ . Os abertos de  $S^1 - \{\exp(t_0)\}$  são, por definição, as intersecções dele com os abertos do  $\mathbb{R}^2$ . Sabemos que

$$\exp(J) = \{(\cos(t), \sin(t)) ; t_1 < t < t_2\}$$

coincide com a intersecção de  $S^1 - \{\exp(t_0)\}$  com o cone aberto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x = r \cos(t), y = r \sin(t), r > 0, t_1 < t < t_2\}$$

Concluimos, então, que  $\exp(J)$  é um aberto em  $S^1 - \{\exp(t_0)\}$ , logo  $\exp$  restrita a  $(t_0, t_0 + 2\pi)$  é aberta. ■

No que segue, denotaremos por  $-p \in S^1$  o antípoda de  $p \in S^1$ .

**Afirmção 4.4.** *Para cada  $p = \exp(t) \in S^1$ , considere  $V = S^1 - \{-p\}$ . A imagem inversa de  $V$  é a reunião de intervalos abertos do tipo*

$$J_n = (t + (2n + 1)\pi, t + (2n + 3)\pi),$$

onde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\exp|_{J_n}: J_n \rightarrow V$  é um homeomorfismo.

**Demonstração.** É consequência imediata da Afirmação (4.3). ■

Voltando agora à função  $\bar{c}$ , temos que  $\bar{c}$  é contínua no compacto  $[0,1]$ , logo é uniformemente contínua. Existe então  $\delta > 0$  tal que  $\|\bar{c}(t_1) - \bar{c}(t_2)\| < 1$  para todos  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  com  $|t_1 - t_2| < \delta$ . Fixemos uma subdivisão de  $[0,1]$  em intervalos  $I_i = [t_i, t_{i+1}]$ , onde  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  tais que  $|t_i - t_{i+1}| < \delta$ . Em particular, temos

$$\bar{c}(I_i) \subseteq S^1 - \{-\bar{c}(t_i)\},$$

pois a distância de  $\bar{c}(t_i)$  ao seu antípoda,  $-\bar{c}(t_i)$  é igual a 2, enquanto a distância entre  $\bar{c}(t_i)$  e  $\bar{c}(t_{i+1})$  é menor do que 1 (vide Figura (4.2)).

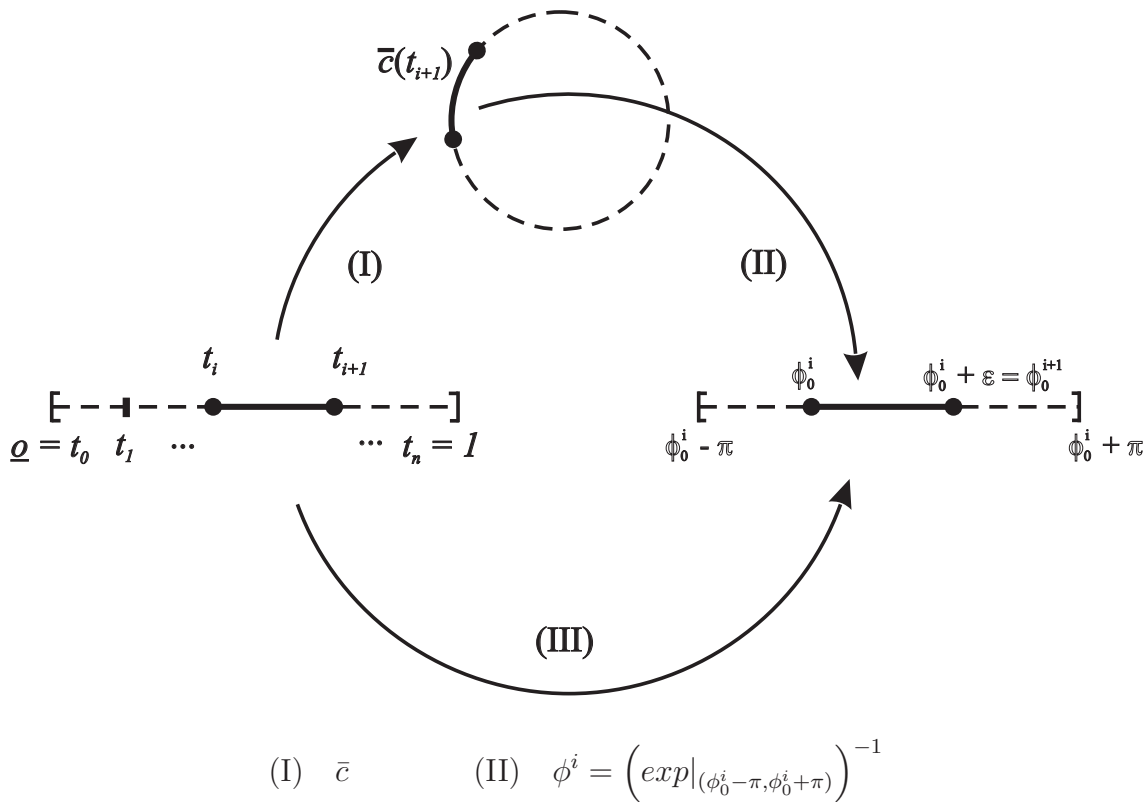


Figura 4.2.

Pela Afirmação (4.4), dado  $\phi_0^i \in (\exp)^{-1}(\bar{c}(t_i))$ , a função  $\exp|_{(\phi_0^i - \pi, \phi_0^i + \pi)}: (\phi_0^i - \pi, \phi_0^i + \pi) \rightarrow S^1 - \{-\bar{c}(t_i)\}$  é um homeomorfismo. Portanto, podemos definir uma função contínua  $\phi^i: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$  na qual  $\phi^i(t_i) = \phi_0^i$  e tal que  $\bar{c}(t) = \exp(\phi^i(t))$  se  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ .

Para isto, basta tomar (ver Figura (4.2))

$$(III) \quad \phi^i = \left( \exp|_{(\phi_0^i - \pi, \phi_0^i + \pi)} \right)^{-1} \circ \bar{c}.$$

Definimos agora  $\phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  da seguinte maneira: seja  $\phi_0^0 \in \exp^{-1}(\bar{c}(0))$  escolhido de acordo com a determinação desejada do ângulo inicial. Se  $0 \leq t \leq t_1$ , onde  $\|t_1 - 0\| < \delta$ , então  $\phi(t)$  será definida como uma função contínua em  $[0, t_1]$  tal que  $\phi(t) = \phi^0(t)$ , onde  $\phi^0(0) = \phi_0^0$ . Agora, se  $t \in [t_1, t_2]$ , então  $\phi(t)$  será definida de tal forma que  $\phi(t) = \phi^1(t)$ , onde  $\phi^1(t_1) = \phi^0(t_1)$ . Assim, definimos  $\phi(t)$  como uma função contínua em  $[t_i, t_{i+1}]$  de forma que  $\phi(t) = \phi^i(t)$ , onde  $\phi^i(t_i) = \phi^{i-1}(t_i)$ . Assim,

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_0^0, & \text{para } t = 0; \\ \phi^i(t), & \text{para } t_i < t < t_{i+1}; \\ \phi^i(t_i) = \phi^{i-1}(t_i), & \text{para } t = t_i > 0. \end{cases}$$

Segue que  $\phi$  é uma função angular para  $\bar{c}$ , e portanto para  $c$ . Fica assim demonstrada a proposição. ■

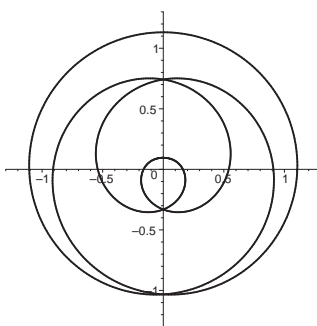
**Definição 4.5.** *Seja  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva e seja  $\underline{o} \in \mathbb{R}^2$  um ponto que não pertence ao rtaço da curva. Seja também  $\underline{a}$  uma semi-reta qualquer do  $\mathbb{R}^2$  de origem  $\underline{o}$  e seja  $\phi$  uma função angular de  $c$  com respeito a  $(\underline{o}, \underline{a})$ . O número inteiro*

$$i = i(\underline{o}, c) = \frac{\phi(1) - \phi(0)}{2\pi}$$

é o índice de rotação de  $c$  com respeito a  $\underline{o}$ .

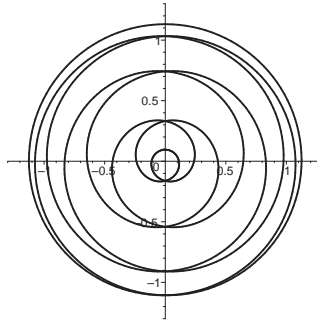
O leitor está convidado a mostrar que o índice de rotação está bem definido, não dependendo nem de  $\phi$  nem de  $\underline{a}$ .

As figuras (4.3) e (4.4) ilustram exemplos do índice de rotação para algumas curvas.



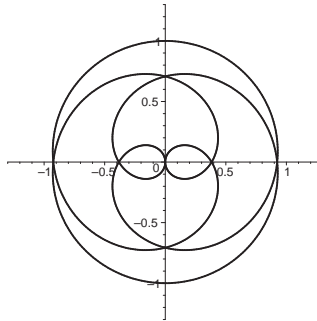
$$\begin{aligned} x(t) &= \ln(2.1 + \sin(2\pi t)) \sin(8\pi t) \\ y(t) &= \ln(2.1 + \sin(2\pi t)) \cos(8\pi t) \end{aligned}$$

Figura 4.3.



$$x(t) = \ln(2.1 + \text{sen}(2\pi t)) \text{sen}(16\pi t)$$

$$y(t) = \ln(2.1 + \text{sen}(2\pi t)) \text{cos}(16\pi t)$$



$$x(t) = \text{sen}(2\pi t) \text{sen}(8\pi t)$$

$$y(t) = \text{sen}(2\pi t) \text{cos}(8\pi t)$$

Figura 4.4.

## 4.2 Determinação Gráfica do Índice

Para iniciar essa seção, faremos a hipótese adicional de que dada uma curva fechada  $c$ , existe uma semi-reta  $\underline{a}$  com origem  $\underline{o}$  tal que  $c(t) \in \underline{a}$  para um número finito de valores de  $t$ .

Tomemos, então, tal reta  $\underline{a}$  como eixo polar com  $\underline{o} \notin c(t)$  e  $c(t) \in \underline{a}$  para  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Uma vez que  $\underline{o} \notin c(t)$ , existe uma função angular  $\phi(t)$  com respeito ao eixo polar  $\underline{a}$  e ao polo  $\underline{o}$  para a curva  $c$ . Mais ainda, temos que  $\phi(t)$  é contínua para todo  $t$  no domínio de  $c$ . Desta forma, para qualquer  $\varepsilon_i > 0$  dado, existe  $\delta_i > 0$  tal que, se  $|t - t_i| < \delta_i$ , então  $|\phi(t) - \phi(t_i)| < \varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Tomemos  $\varepsilon_i = 2\pi$ . Assim, existem números  $\delta_i$  tais que se  $t \neq t_i$  e  $|t - t_i| < \delta_i$ , então  $|\phi(t) - \phi(t_i)| < 2\pi$ , ou seja  $\phi(t) - \phi(t_i)$  não é múltiplo inteiro de  $2\pi$ .

Observe que  $\phi(t_i) = 2\pi k$  para algum inteiro  $k$ . Logo, para valores de  $t$  no intervalo



$t \in [t_i - \frac{\delta_i}{2}, t_i + \frac{\delta_i}{2}]$ , temos  $|\phi(t) - \phi(t_i)| = |\phi(t) - 2\pi k| < 2\pi$ , e portanto

$$(4.1) \quad -2\pi < \phi(t) - 2\pi k < 2\pi \implies k - 1 < \frac{\phi(t)}{2\pi} < k + 1 \quad \forall t \in \left[ t_i - \frac{\delta_i}{2}, t_i + \frac{\delta_i}{2} \right]$$

Em relação à essa equação, temos agora quatro possíveis casos a serem analisadas.

Caso 1.  $\phi(t) < \phi(t_i)$  para  $t \neq t_i$ , de acordo com o item 1) da Figura (4.5).

Caso 2.  $\phi(t) > \phi(t_i)$  para  $t \neq t_i$ , de acordo com o item 2) da figura 4.5.

Caso 3.  $\phi(t) > \phi(t_i)$  para  $t > t_i$  e  $\phi(t) < \phi(t_i)$  para  $t < t_i$ , de acordo com o item 3) da Figura (4.5).

Caso 4.  $\phi(t) > \phi(t_i)$  para  $t < t_i$  e  $\phi(t) < \phi(t_i)$  para  $t > t_i$ , de acordo com o item 4) da Figura (4.5).

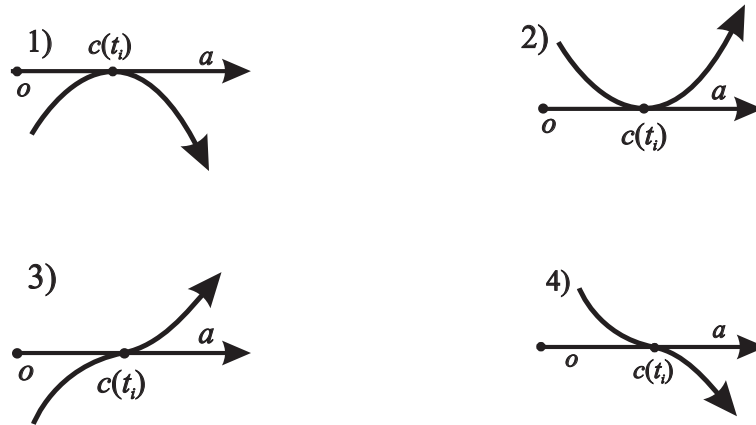


Figura 4.5.

Consideremos a função  $\Lambda(t) = \left[ \frac{\phi(t)}{2\pi} \right]$  que a cada  $t$  associa a parte inteira de  $\frac{\phi(t)}{2\pi}$  e seja  $0 < r(t) < 1$  tal que  $\frac{\phi(t)}{2\pi} = \Lambda(t) + r(t)$ . Vamos analisar, nos vários casos acima, o comportamento de  $\Lambda(t)$  quando  $t$  percorre o intervalo  $[t_i - \frac{\delta_i}{2}, t_i + \frac{\delta_i}{2}]$ .

Caso 1. Nesse caso, para  $t \neq t_i$ , temos

$$\phi(t) < \phi(t_i) \implies \phi(t) < 2\pi k \implies \frac{\phi(t)}{2\pi} < k.$$

Por (4.1), temos que  $k - 1 < \frac{\phi(t)}{2\pi} < k$ , e portanto  $\Lambda(t) = k - 1$ . Logo,

$$(4.2) \quad \Lambda\left(t_i - \frac{\delta_i}{2}\right) = \Lambda\left(t_i + \frac{\delta_i}{2}\right)$$

Caso 2. Para  $t \neq t_i$ , temos

$$\phi(t) > \phi(t_i) \implies \phi(t) > 2\pi k \implies \frac{\phi(t)}{2\pi} > k$$

Por (4.1), temos que  $k < \frac{\phi(t)}{2\pi} < k + 1$ , e portanto  $\Lambda(t) = k$ . Logo,

$$(4.3) \quad \Lambda\left(t_i - \frac{\delta_i}{2}\right) = \Lambda\left(t_i + \frac{\delta_i}{2}\right)$$

Caso 3. Temos aqui dois outros sub-casos.

i) Para  $t_i - \frac{\delta_i}{2} \leq t < t_i$ , temos que:

$$\phi(t) < \phi(t_i) \implies \phi(t) < 2\pi k \implies \frac{\phi(t)}{2\pi} < k$$

Por (4.1), temos que  $k - 1 < \frac{\phi(t)}{2\pi} < k$ , e portanto  $\Lambda(t) = k - 1$ . Logo,

$$\Lambda\left(t_i - \frac{\delta_i}{2}\right) = k - 1.$$

ii) Para  $t_i < t \leq t_i + \frac{\delta_i}{2}$ , temos que

$$\phi(t) > \phi(t_i) \implies \phi(t) > 2\pi k \implies \frac{\phi(t)}{2\pi} > k.$$

Por (4.1), temos que  $k < \frac{\phi(t)}{2\pi} < k + 1$ , e portanto  $\Lambda(t) = k$ . Logo,

$$\Lambda\left(t_i + \frac{\delta_i}{2}\right) = k.$$

Dessas observações segue que

$$(4.4) \quad \Lambda\left(t_i - \frac{\delta_i}{2}\right) = \Lambda\left(t_i + \frac{\delta_i}{2}\right) - 1.$$

Caso 3. Temos novamente dois outros sub-casos.

i) Para  $t_i - \frac{\delta_i}{2} \leq t < t_i$  temos que

$$\phi(t) > \phi(t_i) \implies \phi(t) > 2\pi k \implies \frac{\phi(t)}{2\pi} > k$$

Por (4.1), temos que  $k < \frac{\phi(t)}{2\pi} < k + 1$ , e portanto  $\Lambda(t) = k$ . Logo,

$$\Lambda\left(t_i - \frac{\delta_i}{2}\right) = k.$$

ii) Para  $t_i < t \leq t_i + \frac{\delta_i}{2}$ , temos que

$$\phi(t) < \phi(t_i) \implies \phi(t) < 2\pi k \implies \frac{\phi(t)}{2\pi} < k$$

Por (4.1), temos que  $k - 1 < \frac{\phi(t)}{2\pi} < k$ , e portanto  $\Lambda(t) = k - 1$ . Logo,

$$\Lambda\left(t_i + \frac{\delta_i}{2}\right) = k - 1.$$

Daí podemos concluir que

$$(4.5) \quad \Lambda\left(t_i - \frac{\delta_i}{2}\right) = \Lambda\left(t_i + \frac{\delta_i}{2}\right) + 1.$$

Para  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  fechada, temos que  $c(0) = c(1)$ , e portanto

$$\phi(1) = \phi(0) + 2\pi k \implies \frac{\phi(1)}{2\pi} - \frac{\phi(0)}{2\pi} = k \in \mathbb{Z} \implies r(1) = r(0).$$

Uma vez que  $r(t) = \frac{\phi(t)}{2\pi} - \Lambda(t)$ , segue que

$$\begin{aligned} \frac{\phi(1)}{2\pi} - \Lambda(1) &= \frac{\phi(0)}{2\pi} - \Lambda(0) \implies \frac{\phi(1) - \phi(0)}{2\pi} = \Lambda(1) - \Lambda(0) \\ &\implies i(c, c) = \Lambda(1) - \Lambda(0). \end{aligned}$$

De acordo com esses resultados e da conclusão acima, e denotando  $\Delta\Lambda_i = \Lambda(t_i + \delta_i) - \Lambda(t_i - \delta_i)$ , segue que

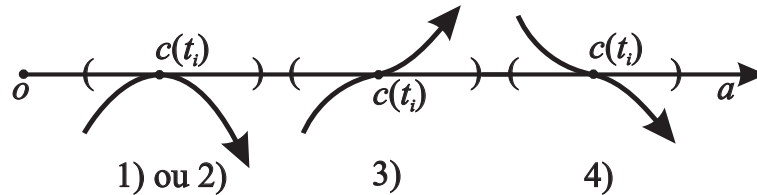


Figura 4.6.

- Se a curva  $c$  tem a configuração (1) ou (2) da Figura (4.6) em  $(t_i - \delta_i, t_i + \delta_i)$ , de acordo com as equações (4.2) e (4.3), temos que  $\Delta\Lambda_i = 0$ .
- Se a curva  $c$  tem a configuração (3) em  $(t_j - \delta_j, t_j + \delta_j)$ , de acordo com a equação (4.4), temos que  $\Delta\Lambda_j = +1$ .
- Se a curva  $c$  tem a configuração (4) em  $(t_k - \delta_k, t_k + \delta_k)$ , de acordo com a equação (4.5), temos que  $\Delta\Lambda_k = -1$ .

Assim, se  $n^+$  é o número de intervalos onde temos a configuração (3) e  $n^-$  é o número de intervalos onde ocorre a configuração (4), teremos

$$\Lambda(1) - \Lambda(0) = n^+ - n^-.$$

### 4.3 Dependência do Índice em Relação à Localização do Pólo

Iremos analisar como se comporta o Índice de Rotação de uma curva fechada ao se variar a localização do pólo.

**Proposição 4.1.** *Sejam  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada e  $C_c = \mathbb{R}^2 - c([0, 1])$ . Então  $C_c$  é um aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Além disso, as componentes conexas  $G_\alpha$  de  $C_c$  são subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}^2$  e apenas uma delas é ilimitada.*

**Demonstração.** Como  $c$  é fechada e contínua em  $[0, 1]$ , temos que  $c([0, 1])$  é fechado, logo seu complementar é aberto.

Seja  $G_\alpha$  uma componente conexa de  $C_c$  e  $p \in G_\alpha$ . Como  $C_c$  é aberto, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(p, \varepsilon) \subseteq C_c$ , sendo que  $B(p, \varepsilon)$  é conexo e  $B(p, \varepsilon) \cap G_\alpha \neq \emptyset$ . Assim,  $G_\alpha \cup B(p, \varepsilon)$  é um conjunto conexo contido em  $C_c$  e contendo  $G_\alpha$ . Sendo  $G_\alpha$  um conexo maximal,  $G_\alpha \cup B(p, \varepsilon) \subseteq G_\alpha$ , e portanto  $B(p, \varepsilon) \subseteq G_\alpha$ . Segue que  $G_\alpha$  é aberto.

Resta mostrar que uma componente conexa é limitada. Como  $c([0, 1])$  é limitado, existe  $r > 0$  tal que  $c([0, 1]) \subset B[0, r]$ . Seja  $B_c$  o complementar de  $B[0, r]$ . Então  $B_c$  é aberto, conexo e está contido em  $C_c$ , portanto em alguma componente  $G_\alpha$ , digamos  $G_{\alpha_0}$ . Mas  $B_c$  é ilimitado e  $B_c \subset G_{\alpha_0}$ , logo  $G_{\alpha_0}$  também é ilimitado. ■

**Proposição 4.2.** *Sejam  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada,  $C_c$  o complementar de  $c([0, 1])$  e  $\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2 \in C_c$ . Se o segmento de reta  $[\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2]$  não corta o traço de  $c$ , então  $i(\mathfrak{o}_1, c) = i(\mathfrak{o}_2, c)$ .*

**Demonstração.** Sejam  $\mathfrak{a}_1$  e  $\mathfrak{a}_2$  semi-retas paralelas de origem  $\mathfrak{o}_1$  e  $\mathfrak{o}_2$  respectivamente, e concordantes, isto é, a translação em  $\mathbb{R}^2$  que leva  $\mathfrak{o}_1$  a  $\mathfrak{o}_2$  também leva  $\mathfrak{a}_1$  a  $\mathfrak{a}_2$ . Sejam  $\phi_1$  e  $\phi_2$  funções angulares para  $c$  em relação a  $(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{a}_1)$  e  $(\mathfrak{o}_2, \mathfrak{a}_2)$ , respectivamente, e denotemos  $i_1 = i(\mathfrak{o}_1, c)$  e  $i_2 = i(\mathfrak{o}_2, c)$ .

Definindo  $\Delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\Delta(t) = \frac{\phi_1(t) - \phi_2(t)}{\pi},$$

temos que  $\Delta(1) = 2 \frac{\phi_1(1) - \phi_2(1)}{2\pi}$  e  $\Delta(0) = 2 \frac{\phi_1(0) - \phi_2(0)}{2\pi}$ . Dessa maneira

$$\begin{aligned} \pi(\Delta(1) - \Delta(0)) &= \phi_1(1) - \phi_2(1) - \phi_1(0) - \phi_2(0) \\ &= \phi_1(1) - \phi_1(0) - \phi_2(1) - \phi_2(0) \\ &= 2(i_1 - i_2). \end{aligned}$$

Suponha por absurdo  $i_1 \neq i_2$ . Como  $i_1$  e  $i_2 \in \mathbb{Z}$ , temos que  $|i_1 - i_2| \geq 1$  e portanto  $|\Delta(1) - \Delta(0)| \geq 2$ . Como  $\Delta$  foi definido em termos de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , que são contínuas, segue  $\Delta$  é também contínua. Portanto, se a variação de  $\Delta$  nos extremos de seu domínio é maior ou igual a 2, ela tem que assumir pelo menos um valor ímpar, isto é,  $\Delta(t^*) = 2k + 1$  para algum  $t^* \in [0, 1]$ , e portanto  $\phi_1(t^*) - \phi_2(t^*) = (2k + 1)\pi$  (ver Figura (4.7)).

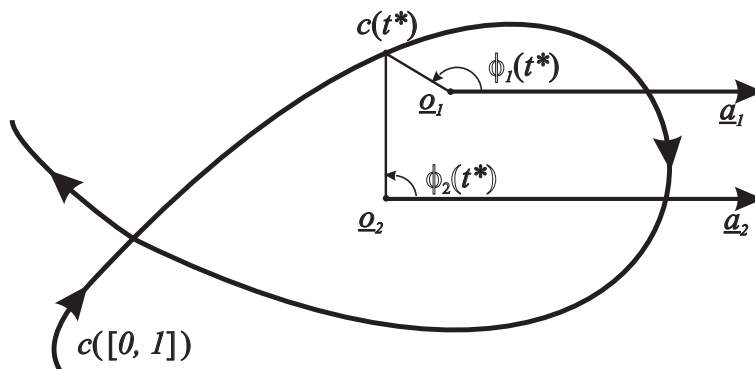


Figura 4.7.

Sendo  $\theta = \phi_1 - \phi_2$ , a menor determinação de  $\theta$  é  $\pi$  ou  $-\pi$ , o que implica que  $c(t^*) \in [q_1, q_2]$ , o que é uma contradição. Assim, necessariamente,  $i_1 = i_2$ . ■

Estamos agora prontos para demonstrar o

**Teorema 4.3.** *Seja  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada. Se  $q_1$  e  $q_2$  pertencem à mesma componente conexa de  $C_c$ , então  $i(q_1, c) = i(q_2, c)$ .*

**Demonstração.** Seja  $G$  a componente conexa de  $C_c$  à qual pertencem  $q_1$  e  $q_2$ . Sendo  $G$  um aberto conexo, então, pelo Corolário (3.36), existe uma poligonal  $[p_0, p_1, \dots, p_k]$ , com  $p_0 = q_1$  e  $p_k = q_2$  contida em  $G$ . Por sucessivas aplicações da Proposição (4.2) temos:

$$i(q_1, c) = i(p_1, c) = i(p_2, c) = \dots = i(p_{k-1}, c) = i(q_2, c)$$

o que conclui a demonstração. ■

Podemos então falar no *índice da região conexa*. O índice de componentes conexas limitadas pode ser determinado pelo Método Gráfico, e sabemos que a componente conexa ilimitada tem índice de rotação nulo.

## 4.4 Índice e Deformação de Curvas

Vamos estudar agora como varia o índice de uma curva com respeito a um ponto fixo ao “variarmos a curva”.

Dedicaremos este capítulo à demonstração do incrível resultado que nos diz que “duas curvas são deformáveis entre si em um conjunto que não contém o ponto  $q$ , se e só se seus índices de rotação com respeito a  $q$  são os mesmos”. Numa análise posterior ao estabelecimento do Teorema, veremos que este resultado é de todo intuitivo e de grande aplicabilidade.

O fato de que o índice “classifica” os laços, isto é, as curvas fechadas, de um espaço métrico conexo por caminhos é um resultado profundo que iremos demonstrar para o plano real, nosso objeto de estudo.

Primeiramente, formalizemos o conceito de “deformação de curvas” que é justamente uma das aplicações do conceito de homotopia.

#### 4.4.1 Homotopia

**Definição 4.4.** *Seja  $E$  um espaço métrico,  $X \subset E$  conexo por caminhos,  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  e  $Q = \mathbf{I} \times \mathbf{I}$  o quadrado unitário. Diremos que  $\ell_0, \ell_1 : \mathbf{I} \rightarrow X$  são homotópicos em  $X$  se existe uma função contínua  $H : Q \rightarrow X$  tal que*

$$i) \quad H(t, 0) = \ell_0(t), \quad H(t, 1) = \ell_1(t) \quad \text{para todo } t \in \mathbf{I};$$

$$ii) \quad H(0, s) = H(1, s) \quad \text{para todo } s \in \mathbf{I}.$$

Seja  $H : Q \rightarrow X$  uma homotopia entre os laços  $\ell_0$  e  $\ell_1$ . Para cada  $s \in \mathbf{I}$  defina o laço  $h_s : \mathbf{I} \rightarrow X$  por  $h_s(t) = H(s, t)$ . Note que  $h_0 = \ell_0$  e  $h_1 = \ell_1$ , pois isto nos é garantido pela 1ª condição da definição acima.

Podemos pensar na imagem  $H(Q) \subset X$  da homotopia como a família de laços  $(h_s)_{s \in \mathbf{I}}$ , todos contidos em  $X$ , tal que  $h_0 = \ell_0$  é o primeiro laço da família e  $h_1 = \ell_1$  o último. Esse conjunto nos leva *continuamente* dentro de  $X$  de  $\ell_0$  à  $\ell_1$  quando variamos  $s$  de 0 à 1, ou seja, ele “deforma”  $\ell_0$  em  $\ell_1$  dentro de  $X$ .

A segunda condição da definição garante que os laços intermediários  $h_s$  da homotopia sejam todos fechados:  $h_s(0) = h_s(1)$  para todo  $s \in \mathbf{I}$ .

No caso em que  $E = \mathbb{R}^2$ , podemos ver a homotopia  $H : Q \rightarrow X$  como uma deformação do quadrado  $Q$  (Figura (4.8)), que deverá juntar seus lados (2ª condição), deformando as arestas superiores e inferiores para tomar forma dos laços  $\ell_0$  e  $\ell_1$  respectivamente (1ª condição).

Quando dois laços  $\ell_0, \ell_1$  de  $X$  são homotópicos em  $X$  escrevemos:

$$\ell_0 \sim \ell_1(X)$$

Note e não se esqueça que a homotopia, apesar de ser uma relação entre laços, é característica do espaço que contém estes laços. Portanto dizer que o laço  $\ell_0$  é homotópico à  $\ell_1$  está errado: o espaço onde existe esta homotopia é de extrema importância.

O leitor mais atento já deve ter notado que a homotopia divide os laços de  $X$  em classes de laços que são ou não deformáveis entre si. Na verdade,

**Afirmção.** *Seja  $X \subset E$  conexo por caminhos e  $\mathcal{L}(X)$  o conjunto dos laços de  $X$ , isto é,*

$$\mathcal{L}(X) = \{\ell : \mathbf{I} \rightarrow X ; \ell \text{ é contínua e } \ell(0) = \ell(1)\}$$

Então  $\sim$  é uma relação de equivalência em  $\mathcal{L}(X)$ .

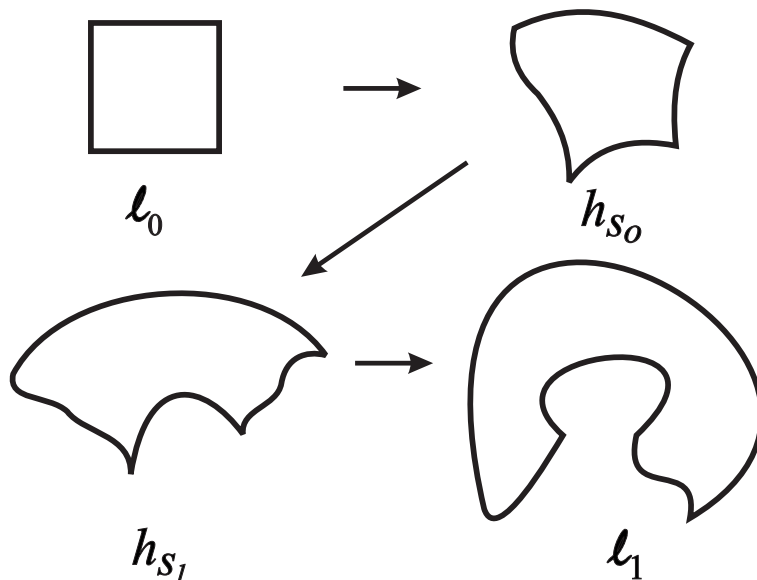


Figura 4.8. Homotopia como deformação do quadrado  $Q$ .

**Demonstração.** De fato, para que isso aconteça a homotopia em  $\mathcal{L}$  tem de ser *reflexiva*, *simétrica* e *transitiva*.

- i) **reflexiva:** dado  $l \in \mathcal{L}(X)$ , tomando a homotopia  $H(t, s) = l(t) \forall s \in \mathbf{I}$ , concluímos que  $l \sim l(X)$ . Afinal todo laço é defomável em si mesmo;
- ii) **simétrica:** se  $l_0 \sim l_1(X)$ , então existe uma homotopia  $H: Q \rightarrow X$  entre eles satisfazendo todas as condições da definição. Se tomarmos  $H': Q \rightarrow X$  com  $H'(t, s) = H(t, 1 - s)$  teremos ainda uma homotopia (verifique!), mas com  $H'(t, 0) = l_1(t)$  e  $H'(t, 1) = l_0(t)$ . Segue que  $H'$  é uma homotopia em  $X$  de  $l_1$  à  $l_0$ :

$$l_0 \sim l_1(X) \iff l_1 \sim l_0(X).$$

- iii) **transitiva:** se  $l_0 \sim l_1(X)$  e  $l_1 \sim l_2(X)$  então existem homotopias  $H_1, H_2: Q \rightarrow X$  em  $X$  entre  $l_0$  e  $l_1$  e entre  $l_1$  e  $l_2$  respectivamente, satisfazendo todas as condições da definição. Se construirmos  $G: Q \rightarrow X$  tal que

$$G(t, s) = \begin{cases} H_1(t, 2s) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ H_2(t, 2s - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

então  $G$  é uma homotopia entre  $l_0$  e  $l_2$  em  $X$  (percorremos  $H_1$  seguido de  $H_2$ , cada um com o “dobro da velocidade”). De fato, fazemos esta construção para que  $G(t, 0) = H_1(t, 0) = l_0(t)$  e  $G(t, 1) = H_2(t, 1) = l_2(t)$ , ou seja, para que  $G$  comece em  $l_0$  terminando em  $l_2$ .

Vemos também que  $G(0, s) = G(1, s)$  para todo  $s \in \mathbf{I}$ , pois para  $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$  essa igualdade se torna  $H_1(0, s) = H_1(1, s)$ , que é verdade para a homotopia  $H_1$ . Para  $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$  temos a mesma igualdade válida para  $H_2$ .

Para que  $G$  seja uma homotopia resta então provar sua *continuidade*, que é óbvia nos intervalos  $0 \leq s < \frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2} < s \leq 1$ , dado a continuidade de cada  $H_1$  e  $H_2$ ; o problema reside no ponto  $s = \frac{1}{2}$ . Primeiro notemos que, neste ponto,  $H_1(t, 2s) = H_1(t, 1) = \ell_1(t) = H_2(t, 0) = H_2(t, 2s - 1)$ , logo a primeira condição para continuidade é obedecida. Vejamos agora a segunda condição: para  $s < \frac{1}{2}$  temos  $\|G(t, s) - G(t, \frac{1}{2})\| = \|H_1(t, 2s) - H_1(t, 1)\|$ . Pela continuidade de  $H_1$  podemos afirmar que, dado qualquer  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, se  $0 < \frac{1}{2} - s < \delta$ , então  $\|H_1(t, 2s) - H_1(t, 1)\| < \varepsilon$ , e portanto  $\|G(t, s) - G(t, \frac{1}{2})\| < \varepsilon$ .

Para  $s > \frac{1}{2}$  basta desenvolver o mesmo argumento com  $H_2$ , mostrando assim que  $G$  é contínua em  $s = \frac{1}{2}$ , logo ela é contínua em todo seu domínio.

Como  $G(t, 0) = \ell_0$  e  $G(t, 1) = \ell_2$ ,  $G$  é contínua e sua imagem está em  $X$ , segue que

$$\ell_0 \sim \ell_1(X) \quad \text{e} \quad \ell_1 \sim \ell_2(X) \Rightarrow \ell_0 \sim \ell_2(X).$$

■

Este é um resultado forte pois nos diz que a homotopia divide o conjunto  $\mathcal{L}(X)$  em classes de equivalência, ou seja, em conjuntos disjuntos de laços de  $X$  que são deformáveis entre si. Apesar de serem infinitos em quantidade, estes laços estão bem organizados e bem separados, qualquer que seja  $X$  conexo por caminhos.

### 4.4.2 A Relação entre Índice e Homotopia

Antes de chegar ao resultado principal ainda temos de passar por alguns preliminares. O Teorema abaixo será de extrema importância.

**Teorema 4.5.** *Sejam  $\ell_0, \ell_1: \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{\underline{o}\}$  dois laços. Se o segmento de reta que liga  $\ell_0(t)$  a  $\ell_1(t)$  não intercepta  $\underline{o}$  para todo  $t \in \mathbf{I}$ , então os índices de  $\ell_0$  e  $\ell_1$  com respeito a  $\underline{o}$  são os mesmos.*

**Demonstração.** Seja  $(\underline{o}, \underline{a})$  uma semi-reta do plano de origem  $\underline{o}$  e  $\phi_0, \phi_1: \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}$  funções angulares de  $\ell_0$  e  $\ell_1$  com respeito à semi-reta. Se o segmento de reta que liga  $\ell_0(t^*)$  a  $\ell_1(t^*)$  corta  $\underline{o}$  para algum  $t^*$ , então a menor *determinação* entre a diferença das respectivas  $\phi$ 's é de  $\pi$  radianos. De fato, se existe  $t^* \in \mathbf{I}$  tal que  $\underline{o} \in [\ell_0(t^*), \ell_1(t^*)]$ , então  $\phi_0(t^*) - \phi_1(t^*) = (2k + 1)\pi$ , em que  $k$  é um inteiro. Tomamos aqui a subtração devido à natureza de *ângulo orientado* das  $\phi$ 's.

Considere agora a função contínua  $\Delta: \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\Delta(t) = \frac{\phi_1(t) - \phi_0(t)}{\pi}.$$

Argumentando como na demonstração da Proposição (4.2), obtemos que  $\Delta(1) - \Delta(0) = 2(i_1 - i_0)$ .



Por hipótese não existe  $t^* \in \mathbf{I}$  tal que o segmento  $[\ell_0(t^*), \ell_1(t^*)]$  intercepte  $\underline{o}$ . Suponhamos então que, dadas estas condições, ainda assim tenhamos  $i_1 \neq i_0$ . Como  $i_1$  e  $i_0$  são números inteiros, segue que  $|i_1 - i_0| \geq 1$ .

Voltando à função  $\Delta$ , vemos que  $|\Delta(0) - \Delta(1)| = 2|i_1 - i_0| \geq 2$ , o que significa que a variação da função  $\Delta$  no intervalo  $\mathbf{I}$  é de, no mínimo, duas unidades. Pela continuidade de  $\Delta$  podemos concluir que neste intervalo ela assume *peelo menos um valor ímpar*, ou seja:  $\exists t^* \in \mathbf{I}$  tal que  $\Delta(t^*) = 2k + 1$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Isso implica, pela definição de  $\Delta$ , que  $\phi_0(t^*) - \phi_1(t^*) = \pi(2k + 1)$ .

Mas já vimos que esta última afirmação implica que o segmento  $[\ell_0(t^*), \ell_1(t^*)]$  intercepta  $\underline{o}$ , o que por hipótese não acontece; logo, nossa suposição de que  $i_1 \neq i_0$  é falsa. Dessa maneira, nas condições do Teorema, temos  $i_1 = i_0$ . ■

Deste importante Teorema segue o Corolário que usaremos no Teorema central.

**Corolário 4.6.** *Sejam  $\ell_0, \ell_1: \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{\underline{o}\}$  laços do plano. Se  $\ell_0, \ell_1$  são tais que  $\|\ell_0(t) - \ell_1(t)\| < \|\ell_0(t) - \underline{o}\| \forall t \in \mathbf{I}$ , então os índices de  $\ell_0$  e  $\ell_1$  com respeito à  $\underline{o}$  são os mesmos.*

**Demonstração.** Vamos mostrar que a condição imposta à  $\ell_0$  e  $\ell_1$  implica que  $\underline{o}$  não está em nenhum segmento que liga os dois laços. Para isso, tomemos a representação paramétrica do segmento de reta  $v_t: \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  que liga os laços  $\ell_0$  e  $\ell_1$  no instante  $t \in \mathbf{I}$ :

$$v_t(s) = \ell_0(t) + s(\ell_1(t) - \ell_0(t)).$$

Suponhamos então que  $v_t$  intercepte  $\underline{o}$  para algum  $t_0 \in \mathbf{I}$ , i.e. existe  $s_0 \in \mathbf{I}$  tal que  $v_{t_0}(s_0) = \underline{o}$ . Pela definição de  $v_t$  isso implica que  $\ell_0(t_0) + s_0(\ell_1(t_0) - \ell_0(t_0)) = \underline{o}$ . Mas então, das por hipóteses do corolário, segue que

$$s_0 = \frac{\|\ell_0(t_0) - \underline{o}\|}{\|\ell_0(t_0) - \ell_1(t_0)\|} > 1,$$

o que é um absurdo.

Logo, nas condições do Corolário, nenhum segmento  $v_t$  que liga os dois laços intercepta  $\underline{o}$ , e pelo Teorema (4.5) os laços  $\ell_0$  e  $\ell_1$  são homotópicos em  $\mathbb{R}^2 - \{\underline{o}\}$ . ■

**Teorema 4.7.** *Sejam  $\ell_0, \ell_1: \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{\underline{o}\}$  laços do plano. Então  $\ell_0$  e  $\ell_1$  são homotópicos em  $\mathbb{R}^2 - \{\underline{o}\}$  se, e somente, se seus índices com respeito à  $\underline{o}$  são os mesmos.*

**Demonstração.** Se  $\ell_0, \ell_1$  são homotópicos em  $\mathbb{R}^2 - \{\underline{o}\}$ , existe uma homotopia  $H: Q \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{\underline{o}\}$  satisfazendo as condições da Definição (4.4). Como  $Q$  é compacto e  $H$  contínua, segue que  $H$  é uniformemente contínua, ou seja, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta(\varepsilon) > 0$  que depende somente de  $\varepsilon$  tal que, se  $((s_1, t_1), (s_2, t_2)) \in Q$  são tais que  $\|(s_1, t_1) - (s_2, t_2)\| < \delta(\varepsilon)$ , então  $\|H(s_1, t_1) - H(s_2, t_2)\| < \varepsilon$  (ver Figura (4.9)).

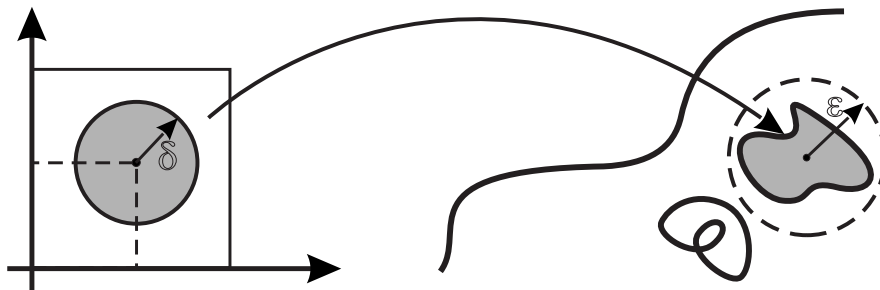


Figura 4.9.

Note que, pela compacidade de  $Q$ , a imagem  $H(Q) \subset \mathbb{R}^2 - \{\underline{o}\}$  da homotopia é compacta, logo limitada e fechada. Além disso,  $\underline{o} \notin H(Q)$ . Mas  $H(Q)$  é fechado, logo seu complemento é aberto, e portanto existe  $R > 0$  tal que a bola aberta  $B(\underline{o}, R)$  está contida em  $\mathbb{R}^2 - H(Q)$ .

Fixado esse  $R > 0$ , tomemos um  $\varepsilon_1 < R$  positivo. Existe então  $\delta_1 = \delta(\varepsilon_1)$  correspondente, tal que

$$\|H(s_1, t) - H(s_2, t)\| < \varepsilon_1 < R < \|H(s_1, t) - \underline{o}\|$$

para todo  $s_1, s_2, t \in \mathbf{I}$  tais que  $\|(s_1, t) - (s_2, t)\| = |s_1 - s_2| < \delta_1$ . Como, para cada  $s_1, s_2$  a homotopia nos dá um laço, podemos reescrever

$$\|h_{s_1}(t) - h_{s_2}(t)\| < \|h_{s_1}(t) - \underline{o}\| ,$$

que significa que, se tomarmos laços  $h_s$  da homotopia suficientemente próximos, a distância entre cada um deles será menor que a distância de entre um deles e o pólo  $\underline{o}$ . Logo, se fixarmos uma partição de  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$  de  $\mathbf{I}$ , com  $|s_{i+1} - s_i| < \delta_1$  para  $i = 0, 1, \dots, k$  teremos

$$\|h_{s_i}(t) - h_{s_{i+1}}(t)\| < \|h_{s_i}(t) - \underline{o}\|$$

para todo  $t \in \mathbf{I}$  e para todo  $i$ . Pelo Corolário acima,  $i(\underline{o}, h_{s_i}) = i(\underline{o}, h_{s_{i+1}})$  para todo  $i$ , e portanto  $i(\underline{o}, h_0) = i(\underline{o}, h_1)$ .

Dessa maneira, se os laços  $\ell_0, \ell_1$  são homotópicos em  $\mathbb{R}^2 - \{\underline{o}\}$ , seus índices com respeito à um ponto  $\underline{o}$  são os mesmos.

Reciprocamente, mostraremos que qualquer laço com índice de rotação  $n \in \mathbb{Z}$  com respeito a  $\underline{o}$  é homotópico ao círculo  $\ell^n$  que dá  $n$  voltas ao redor de  $\underline{o}$  em  $\mathbb{R} - \{\underline{o}\}$ . Dessa maneira se  $i(\underline{o}, \ell_0) = i(\underline{o}, \ell_1) = n$ , ambos os laços serão homotópicos à  $\ell^n$  e, pela transitividade da homotopia, homotópicos entre si.

Seja  $\ell^n : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{\underline{o}\}$  o laço definido por  $\ell^n(t) = e^{i2\pi nt} + \underline{o}$ . Seja ainda  $(\underline{o}, \underline{a})$  uma semi-reta do plano de origem  $\underline{o}$  e  $\phi : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}$  a função angular de  $\ell$  com respeito à semi-reta. Definimos uma homotopia  $H' : Q \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{\underline{o}\}$  entre  $\ell$  e  $\ell^n$  por

$$H'(s, t) = ((1 - s)\|\ell(t)\| + s) \cdot e^{i \cdot ((1-s)\phi(t) + 2\pi nst)} + \underline{o}.$$

Verifiquemos se ela obedece às condições da Definição (4.4):

- i)  $H'(0, t) \neq \underline{o} \quad \forall s, t \in \mathbf{I}$ , pois a exponencial nunca se anula;

ii)  $H'(0, t) = \|\ell(t)\|e^{i\phi(t)} + \underline{o} = \ell(t)$ , pois essa é sua representação polar. Além disso,  $H'(1, t) = e^{i2\pi nt} + \underline{o} = \ell^n(t)$ , pela própria definição de  $\ell^n$ .

iii) Observe que

$$H'(s, 0) = ((1 - s)\|\ell(0)\| + s) e^{i(1-s)\phi(0)} + \underline{o}$$

e

$$H'(s, 1) = ((1 - s)\|\ell(1)\| + s) e^{i((1-s)\phi(1)+2\pi ns)} + \underline{o},$$

onde  $\|\ell(0)\| = \|\ell(1)\|$ , pois  $\ell$  é um laço. Além disso,

$$[(1 - s)\phi(1) + 2\pi ns] - [(1 - s)\phi(0)] = (1 - s)(\phi(1) - \phi(0)) + 2\pi ns,$$

onde, pela definição de índice,  $\phi(1) - \phi(0) = 2\pi n$ . Logo,

$$[(1 - s)\phi(1) + 2\pi ns] - [(1 - s)\phi(0)] = (1 - s)(2\pi n) + 2\pi ns = 2\pi n.$$

e portanto os dois argumentos das exponencias diferem por um múltiplo inteiro de  $2\pi$ , de onde segue que  $H'(s, 0) = H'(s, 1)$ .

Dessa maneira,  $H'$  é uma homotopia entre o laço  $\ell$ , de índice  $n$ , e o círculo que dá  $n$  voltas em torno de  $\underline{o}$ . Como  $\ell_0 \sim \ell^n (\mathbb{R}^2 - \{\underline{o}\})$  e  $\ell_1 \sim \ell^n (\mathbb{R}^2 - \{\underline{o}\})$ . Pela transitividade,  $\ell_0 \sim \ell_1 (\mathbb{R}^2 - \{\underline{o}\})$  e fica completa a demonstração. ■

O que significa este resultado? Para ilustração, pense numa tábua onde estendemos dois laços de lã  $\ell_0$  e  $\ell_1$ .

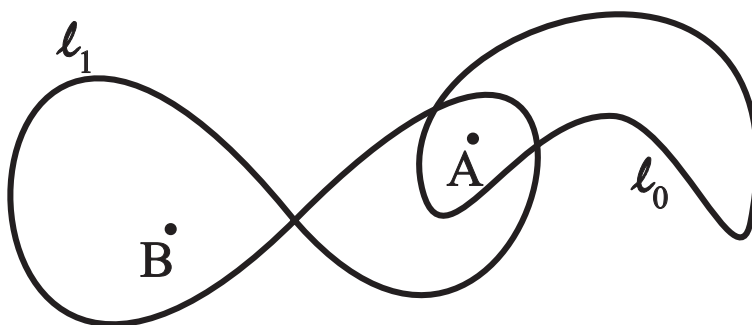


Figura 4.10.

Agora bata um prego no ponto  $A$  (ver Figura (4.10)). Ao fazermos isso estamos na verdade “retirando” o ponto  $A$  da tábua. Veja que mesmo com o prego aí, poderemos deformar um laço no outro, i.e., os laços  $\ell_0$  e  $\ell_1$  são homotópicos na tábua menos o ponto  $A$ . Tire o prego de  $A$  e bata-o agora no ponto  $B$ . Tente deformar  $\ell_0$  em  $\ell_1$  (ou vice-versa) sem tirá-los da

tábua. Se você não conseguir, não se preocupe, não é possível fazê-lo à não ser que o prego seja retirado. Por quê?

Quando batemos o prego em  $A$ , podemos tomá-lo como o pólo do qual calculamos o índice de rotação dos dois laços. Podemos ver pelo *método gráfico* que o índice das duas com respeito ao pólo  $A$  é o mesmo, digamos  $n$ , logo o Teorema nos garante que  $\ell_0$  é deformável em  $\ell_1$  na tábua mesmo ao tirarmos o ponto. Isso acontece pois, nessas circunstâncias, poderemos deformar ambos os laços de lã em círculos que dão  $n$  voltas ao redor do prego, e nessa deformação nenhum dos laços ficarão presos no prego.

Já o índice dos dois laços com respeito ao pólo  $B$  não são os mesmos, e o Teorema nos garante que *de modo algum* poderemos deformar um no outro. Isso acontece pois cada laço dá um número distinto de voltas ao redor do prego, dessa maneira não há como deformá-los no mesmo círculo sem tirá-los da tábua.

Atente para o que já foi dito no Capítulo anterior: “a homotopia é característica do espaço que contém os laços”. Por exemplo, se estivéssemos considerando não o plano da tábua mas o  $\mathbb{R}^3$ , os laços de lã acima seriam todos homotópicos, com pregos ou sem pregos. A situação acima só se repetiria em  $\mathbb{R}^3$  se considerássemos os pregos como retas *infinitas*. Esta talvez seria uma das dificuldades de se tentar generalizar esse Teorema para além do plano.

Este é outro incrível resultado da Topologia Algébrica. Afinal, estamos relacionando índices – estruturas algébricas – à laços – estruturas topológicas –, e estes índices nos informam de características topológicas dos laços que não poderíamos obter de outra maneira. Bonito, não?

## 4.5 Funções Contínuas do Disco no Plano

Considere  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal  $f(0) = a$  e  $f(1) = b$ . O Teorema do Valor Intermediário nos diz que, se  $c$  é tal que  $a \leq c \leq b$ , existe um ponto  $d \in [0, 1]$  tal que  $f(d) = c$ . Em particular, se  $a < 0 < b$ , concluímos que a equação  $f(x) = 0$  possui uma solução  $x \in [0, 1]$ . Nossa intenção neste seção é apresentar um teorema análogo para funções  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $D \subset \mathbb{R}^2$  é um disco. Para tanto, como no caso da reta, é necessário impor condições na fronteira do domínio  $D$ .

Inicialmente fixemos a notação. Denotaremos por  $D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \|(x, y)\| \leq r\}$  o disco fechado de centro em  $(0, 0)$  e raio  $r$ , e por  $S_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \|(x, y)\| = r\}$  a esfera de centro em  $(0, 0)$  e raio  $r$ .

Considere também o pólo  $\underline{o} = (0, 0)$  e a curva  $c_r: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{ \underline{o} \}$  definida por  $c_r(t) = r(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ .

Seja  $f: D_R \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função contínua. Note que, se restringirmos  $f$  a  $S_R$ , obteremos um laço  $f \circ c_R: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Analogamente ao que foi feito no caso de funções reais vamos estabelecer condições sobre  $f$  no bordo de  $D_R$ . Esta restrição será feita em termos do índice  $i(\underline{o}, f \circ c_R)$ . Note que, para que esse índice esteja bem definido, é necessário que  $f \circ c_R(t) \neq (0, 0) \forall t \in [0, 1]$ .

**Teorema 4.8.** *Se  $i(\underline{o}, f \circ c_r) \neq 0$ , então existe  $p \in D_R$  tal que  $f(p) = 0$ .*

**Demonstração.** Suponha, por absurdo, que  $(0, 0) = \underline{o} \notin f(D_R)$ . Neste caso, a função

$$H(t, s) = \begin{cases} (f \circ c_{Rs})(t) & , \text{ se } s \neq 0 \\ f(0, 0) & , \text{ se } s = 0 \end{cases}$$

define uma homotopia entre  $f \circ c_R$  e o laço constante  $c_0(t) = f(0, 0)$ . De fato, como todos os laços envolvidos são contínuos temos que  $H$  é também contínua. As outras condições necessária para que  $H$  seja uma homotopia são claramente verdadeiras. Assim, temos que  $i(\underline{o}, f \circ c_r) = i(\underline{o}, c_0) = 0$ , o que contraria a hipótese do teorema. ■

Vamos agora, a partir do Teorema (4.8), fazer uma demonstração extremamente simples do Teorema Fundamental da Álgebra.

**Teorema 4.9.** *Seja  $p(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n$  um polinômio de grau não nulo e coeficiente em  $\mathbb{C}$ . Então existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $p(z_0) = 0$ .*

**Demonstração.** Seja  $r = 2 + \sum_{i=1}^n |a_i|$  e tome  $f$  restrita ao disco  $D_r$ . Considere também a função  $g : D_r \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $g(z) = z^n$ . Observe inicialmente que  $g \circ c_r(t) = r^n e^{2\pi int}$ , e portanto  $i(\underline{o}, g \circ c_r) = n$ . Para todo  $z \in D_r$  temos  $z = re^{it}$ , desta forma:

$$\begin{aligned} \|f \circ c_r(t) - g \circ c_r(t)\| &= \|f(z) - g(z)\| = \\ &= \|a_1z^{n-1} + \dots + a_n\| \leq \\ &\leq \|a_1\| \|z^{n-1}\| + \dots + \|a_n\| = \\ &= \|a_1\| r^{n-1} + \dots + \|a_n\| \leq \\ &\leq r^{n-1} (\|a_1\| + \dots + \|a_n\|) < \\ &< r^n = \|g \circ c_r(t)\|. \end{aligned}$$

Esta desigualdade vale para todo  $t \in [0, 1]$ . Assim, pelo Corolário (4.6) temos que  $i(\underline{o}, f \circ c_r) = i(\underline{o}, g \circ c_r) = n \neq 0$ . Aplicando o teorema (4.8), concluímos que existe  $z_0 \in D_r$  tal que  $p(z_0) = 0$ . ■

Afim de obter novos resultados vamos agora introduzir um novo conceito. Estamos acostumados com as funções ímpares. A idéia agora é introduzir os laços ímpares. Veremos posteriormente que tais laços têm características bem particulares. Para cada laço  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  existe uma única função contínua  $\bar{c} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $c = \bar{c} \circ c_1$ . Afim de verificar tal afirmação, inicialmente observe que, para todo  $p \in S^1 \neq (1, 0)$ , existe um único  $t \in (0, 1)$  tal que  $p = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ . Portanto, basta que definamos  $\bar{c}$  da seguinte maneira:

$$\bar{c}(p) = \begin{cases} c(t), & \text{se } p = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \text{ e } t \in (0, 1) \\ c(0) = c(1), & \text{se } p = (1, 0). \end{cases}$$

Não há grandes dificuldades em verificar que  $\bar{c}$  está bem definida e é contínua. Diremos que o laço  $c$  é ímpar quando esta função  $\bar{c}$  for ímpar.

**Lema 4.10.** *Se  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um laço ímpar, então  $i(\underline{o}, c)$  é um número ímpar.*

**Demonstração.** Considere  $\phi$  uma função angular para  $c$  com respeito a  $(\underline{o}, \underline{a})$ , onde  $\underline{a}$  é a semi-reta dos  $x$  positivos. Como  $c$  é ímpar existe um  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $0 \leq t \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \phi(t) = \phi(t + \frac{1}{2}) + (2k + 1)\pi$ . Temos então:

$$i(\underline{o}, c) = \frac{\phi(1) - \phi(0)}{2\pi} = \frac{\phi(1) - \phi(\frac{1}{2}) - (2k + 1)\pi}{2\pi} = 2k + 1.$$

■

Se denotarmos por  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 ; \|x\| = 1\}$  a esfera unitária do  $\mathbb{R}^3$ , não teremos dificuldade em concluir que toda função contínua e ímpar  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , se anula em algum ponto da esfera. De fato, se  $f(p) = 0$  para todo  $p \in S^2$  nada se deve fazer. Para o caso em que  $f$  não é identicamente nula é só observarmos que, como  $S^2$  é um conjunto conexo devemos ter  $f(S^2)$  também conexo. Ora, os conexos da reta são intervalos e, como a função é ímpar, devemos ter valor positivos e negativos em tal intervalo. Desta forma devemos ter  $0 \in f(S^2)$ .

O teorema abaixo nos dará um resultado mais geral do que este.

**Teorema 4.11.** *Sejam  $f, g: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  funções ímpares e contínuas. Então existe  $p \in S^2$  tal que  $f(p) = g(p) = 0$ .*

**Demonstração.** Defina  $\phi: D_1 \rightarrow S^2$  por  $\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ . Considere agora a aplicação  $F: D_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $F(x, y) = (f(\phi(x, y)), g(\phi(x, y)))$ . A idéia é encontrar uma raiz para  $F$ . No caso em que  $\underline{o} = (0, 0) \in F(S^1)$  não há nada para provar. Suponha então que tal caso não ocorra. Deste modo fica bem definido  $i(\underline{o}, F \circ c_1)$ . Como  $f$  e  $g$  são ímpares segue que o laço  $F \circ c_1$  é ímpar. Deste fato, e pelo Teorema (4.8), podemos concluir que  $F$  se anula em algum ponto  $p \in D_1$ . Desta forma  $f(\phi(p)) = 0 = g(\phi(p))$  e a demonstração está concluída.

■

## O Teorema de Jordan

“Uma curva fechada do  $\mathbb{R}^2$ , sem auto-intersecções, divide o plano em exatamente duas componentes conexas  $G_0$  e  $G_1$  e seu traço é a fronteira de  $G_0$  e  $G_1$ .” Esse é o teorema de Jordan, que apesar de intuitivo, apresenta uma prova bastante complexa. Ele é o nosso objeto de estudo a partir de agora; desenvolveremos os pré-requisitos necessários para sua demonstração e depois apresentaremos duas demonstrações, uma para uma curva fechada qualquer e posteriormente para curvas fechadas regulares. O nome do teorema é devido a Jordan pois foi ele quem deu a primeira “prova” do resultado, isso em 1877. Ela não era satisfatória pois admitia o teorema verdadeiro no caso das curvas serem poligonais. A primeira prova satisfatória foi dada por O. Veblen ( “Theory of plane curves in non-metrical analysis situs”, Transactions A.M.S., 6 (1905), pp 83-98). Muitas outras provas foram publicadas posteriormente e, pela bibliografia consultada, uma das mais recentes foi apresentada em 1980 por H. Tverberg. Passemos então aos pré-requisitos:

**Definição 5.1.** *Uma curva  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um arco de Jordan se  $c$  for uma aplicação injetora.*

**Definição 5.2.** *Uma curva fechada  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva de Jordan se, para cada  $t_1 < t_2$ ,  $(t_1, t_2) \neq (0, 1)$ , então  $c(t_1) \neq c(t_2)$ .*

**Exercício 5.3.** Seja  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  um arco (respectivamente curva) de Jordan. Mostre que  $c$  é um homeomorfismo de  $[0, 1]$  (respectivamente de  $S^1$ ) sobre  $c([0, 1])$ . Em particular, uma curva de Jordan pode sempre ser pensada como um homeomorfismo de  $S^1$  sobre um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ .

Daremos agora um conceito parecido com o de função angular.

### 5.1 Função Argumento

A utilidade *essencial* da função argumento é a de caracterizar conexos do plano.

**Definição 5.4.** *Sejam  $M \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\underline{o} \in \mathbb{R}^2 - M$  e  $\underline{a}$  uma semi-reta de origem  $\underline{o}$ . Uma função argumento para  $M$  com respeito a  $(\underline{o}, \underline{a})$  é uma função contínua  $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para qualquer  $p \in M$ ,  $\psi(p)$  é uma das determinações do ângulo (orientado) formado por  $\underline{a}$  e a semi-reta de origem  $\underline{o}$  passando por  $p$ , medido em radianos.*

Apesar de se parecer com a função angular, a função argumento apresenta diferenças básicas. Primeiro, que é possível defini-la para alguns conjuntos que não são traços de curvas. Ainda, ao contrário da função angular, estas funções nem sempre existem. E finalmente, enquanto a função angular é definida em função do parâmetro  $t$ , a função argumento é definida em função do ponto  $p \in M$ . Os exemplos a seguir tentarão ilustrar melhor essas diferenças.

**Exemplo 5.5.** Seja  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  um arco de Jordan. Se  $\phi$  for uma função angular para  $c$  com respeito a  $(\underline{o}, \underline{a})$ , então  $\psi = \phi \circ c^{-1}$  é uma função argumento para o traço de  $c$ .

**Exemplo 5.6.** Seja  $c: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de Jordan e  $\underline{o} \notin M = c([0, 1])$ . Se  $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função argumento para  $M$ , então  $\phi = \psi \circ c$  é uma função angular para  $c$ . Mas  $c(0) = c(1)$  e  $i(\underline{o}, \underline{c}) = 0$ . Reciprocamente, se  $i(\underline{o}, \underline{c}) = 0$ , então  $\phi(0) = \phi(1)$ , donde fica bem definida e é contínua a função argumento  $\psi = \phi \circ c^{-1}: c([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ . Assim,  $M = c([0, 1])$  possui função argumento com respeito a  $(\underline{o}, \underline{a})$ , se e somente se,  $i(\underline{o}, \underline{c}) = 0$ .

**Teorema 5.7.** *Sejam  $M \subset \mathbb{R}^2$  compacto e  $\underline{o} \notin M$ . Se  $M$  possui uma função argumento com respeito a  $\underline{o}$  e uma semi-reta  $\underline{a}$  de origem  $\underline{o}$ , então existe  $\varepsilon > 0$  tal que a  $\varepsilon$ -vizinhança  $B_\varepsilon(M)$  de  $M$ , onde  $B_\varepsilon(M) = \{p \in \mathbb{R}^2; \inf \|p - q\| < \varepsilon\}$ , também possui uma função argumento com respeito a  $(\underline{o}, \underline{a})$ .*

**Demonstração.** Seja  $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função argumento com respeito a  $(\underline{o}, \underline{a})$ . Como  $M$  é compacto e  $\underline{o} \notin M$ , existe  $r > 0$  tal que  $\inf \|\underline{o} - q\| = r$ , onde  $q$  percorre  $M$ . Como  $M$  é compacto,  $\psi$  é uniformemente contínua, logo existe  $\delta > 0$  tal que  $q_1, q_2 \in M$  e  $\|q_1 - q_2\| < \delta$ , então  $|\psi(q_1) - \psi(q_2)| < \pi/3$ . Seja agora  $\varepsilon > 0$  tal que  $\varepsilon < r/2$  e  $\varepsilon < \delta/3$ . Para cada  $p \in B_\varepsilon(M)$ , escolhamos um ponto  $p' \in M$  tal que  $\|p - p'\| < \varepsilon$ . Para o ângulo  $\theta$  entre  $[\underline{o}, p]$  e  $[\underline{o}, p']$  temos:

$$|\cos \theta| = \frac{\|\underline{o} - p\|^2 + \|\underline{o} - p'\|^2 - \|p - p'\|^2}{2 \|\underline{o} - p\| \|\underline{o} - p'\|} \geq \frac{(r^2 - \varepsilon^2)}{r^2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

donde  $\theta$  tem uma determinação menor do que  $\frac{\pi}{3}$ .

Definimos então  $\bar{\psi}: B_\varepsilon(M) \rightarrow \mathbb{R}$  escolhendo  $\bar{\psi}(p)$  = determinação do ângulo entre  $\underline{a}$  e  $[\underline{o}, p]$  tal que  $|\bar{\psi}(p) - \psi(p')| < \frac{\pi}{3}$ .

Basta mostrar agora que  $\bar{\psi}$  é contínua. Dados  $p \in B_\varepsilon(M)$  e uma sequência  $p_n \in B_\varepsilon(M)$  convergente a  $p$ , existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\bar{\psi}(p_n) - \bar{\psi}(p)| = 2k\pi$ . Mas, de  $\|p - p_n\| < \varepsilon$ , obtemos

$$\|p' - p_n\| \leq \|p' - p\| + \|p - p_n\| + \|p_n - p'_n\| < 3\varepsilon < \delta,$$

e portanto

$$\begin{aligned} |\bar{\psi}(p_n) - \bar{\psi}(p)| &\leq |\bar{\psi}(p_n) - \bar{\psi}(p'_n)| + |\bar{\psi}(p'_n) - \bar{\psi}(p')| + \\ &\quad + |\bar{\psi}(p') - \bar{\psi}(p)| \\ &< \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi. \end{aligned}$$

Logo, deve ser  $k = 0$ , e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\psi}(p_n) = \bar{\psi}(p)$ , o que prova a continuidade de  $\bar{\psi}$  e termina a demonstração. ■



Mostraremos agora um resultado que nos permitirá indentificar subconjuntos do  $\mathbb{R}^2$  que não possuem função argumento relativa a pontos no seu interior.

**Lema 5.8.** *Seja  $Q \subset \mathbb{R}^2$  um subconjunto compacto e conexo constituído de um reunião finita de quadrados provenientes de uma reticulação do plano. Seja  $M = \partial Q$  a fronteira de  $Q$  e  $\underline{o}$  um ponto interior a  $Q$ . Então não existe função argumento  $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$  relativa a  $\underline{o}$ .*

**Demonstração.** Diremos que um ponto  $p$  é um *vértice* de  $M$  quando  $p$  for um vértice de um dos quadrados da reticulação e os lados dos quadrados de  $Q$  concorrentes em  $p$  não estão todos sobre a mesma reta. Na Figura (5.1),  $p$  é vértice e  $q$  não é. Assim, se  $p$  é vértice, é sempre possível percorrer uma poligonal simples e fechada contida em  $M$  tendo  $p$  como ponto de partida e de chegada. Logo,  $M$  pode ser escrito como a reunião de um número finito de poligonais simples e fechadas

$$M = \pi_1 \cup \dots \cup \pi_k,$$

tais que a intersecção das poligonais ou é vazia ou é igual a um vértice de  $M$ . Além disso, cada  $\pi_i$  é o traço de uma curva de Jordan  $c_i: [0, 1] \rightarrow \pi_i \subset \mathbb{R}^2$ .

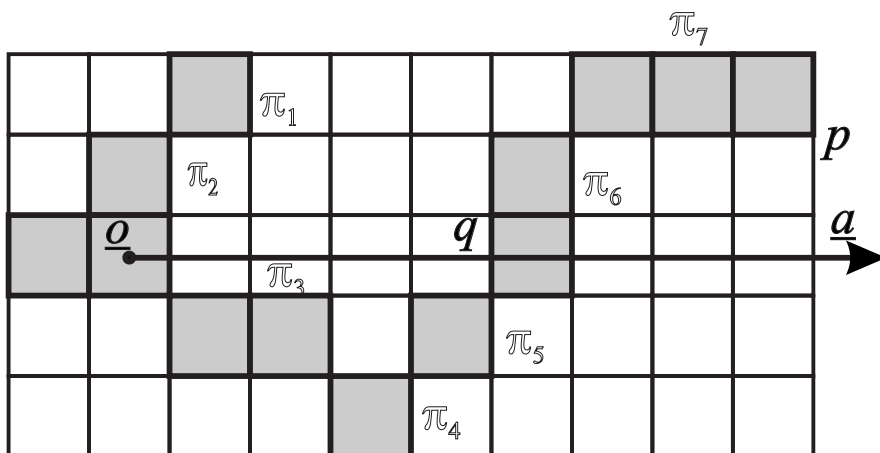


Figura 5.1. Reticulação do plano.

Seja agora  $\underline{a}$  uma semi-reta de origem  $\underline{o}$  paralela a uma das direções da reticulação. Sendo  $\underline{o}$  interior a  $Q$ , o número de pontos de intersecção de  $\underline{a}$  com  $M$  é ímpar, e portanto é ímpar o número de intersecções de  $\underline{a}$  com uma das curvas  $c_i$ , digamos  $c_{i_0}$ . Usando então o *Método gráfico* para o cálculo do índice, segue-se que  $i(\underline{o}, c_{i_0}) \neq 0$ .

Agora, se existisse uma função argumento  $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$  com respeito a  $\underline{o}$ , então

$$\psi_{i_0} = \psi|_{\pi_{i_0}}: \pi_{i_0} \rightarrow \mathbb{R}$$

seria uma função argumento para  $\pi_{i_0}$  com respeito a  $\underline{o}$ . Como  $c_{i_0}$  é uma curva de Jordan, temos que  $c_{i_0}(0) = c_{i_0}(1)$  e, do Exemplo (5.6), teríamos necessariamente  $i(\underline{o}, c_{i_0}) = 0$ , uma contradição, o que conclui a demonstração do Lema. ■

**Corolário 5.9.** *Sejam  $M \subset \mathbb{R}^2$  compacto e  $\{G_\alpha\}$  as componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 - M$ . Suponha que uma delas, digamos  $G_1$ , seja limitada. Então não existe função argumento de  $M$  relativamente a um ponto  $\underline{a} \in G_1$ .*

**Demonstração.** Suponha que existem  $\underline{a} \in G_1$  e uma função argumento  $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$  relativa a  $\underline{a}$ . Então, pelo Teorema (5.7), existe  $\varepsilon > 0$  tal que a  $\varepsilon$ -vizinhança  $B_\varepsilon(M)$  possui uma função argumento  $\psi_\varepsilon: B_\varepsilon(M) \rightarrow \mathbb{R}$  relativa a  $\underline{a}$ .

Escolhamos agora uma reticulação do  $\mathbb{R}^2$  com quadrados de lados tão pequenos tais que, chamando de  $Q$  a reunião dos quadrados contidos em  $G_1$ , tem-se

$$M' = \partial Q \subset B_\varepsilon(M) \text{ e } \underline{a} \in \text{interior a } Q.$$

Então,  $\psi' = \psi_\varepsilon|_{M'}: M' \rightarrow \mathbb{R}$  seria uma função argumento para  $M'$  com respeito a  $\underline{a}$ . Mas isso contraria o resultado do lema anterior, e essa contradição demonstra o Corolário. ■

O que vamos fazer agora é caracterizar os compactos conexas do plano que admitem uma função argumento relativa a qualquer ponto do seu complementar.

**Teorema 5.10.** *Seja  $K \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto compacto e conexo. Então  $K$  admite função argumento em relação a qualquer ponto do seu complementar  $\mathbb{R}^2 - K$  se, e somente se,  $\mathbb{R}^2 - K$  for conexo.*

**Demonstração.** Mostraremos inicialmente a afirmação:

**Afirmação 5.11.** *Se  $\mathbb{R}^2 - K$  não é conexo, então uma de suas componentes conexas é limitada.*

**Demonstração.** Como  $K$  é compacto, podemos escolher  $p_0 \in K$  e  $r > 0$  suficientemente grande de modo que  $K \subset B(p_0, r) = B$ . Como  $\mathbb{R}^2 - B$  é conexo, ele está contido em uma das *componentes conexas* de  $\mathbb{R}^2 - K$ . Uma vez que  $\mathbb{R}^2 - K$  não é conexo, quaisquer outras componentes conexas terão de estar no interior de  $B$ , sendo portanto limitadas. ■

Dessa maneira, conforme o Corolário (5.9),  $K$  não possui função argumento em relação a nenhum ponto desta componente limitada. Segue que, se  $K$  admite função argumento para todo  $p \in \mathbb{R}^2 - K$ , então necessariamente  $\mathbb{R}^2 - K$  é conexo.

Mostremos agora que a recíproca do Teorema é também verdadeira. Para isso usaremos o seguinte resultado:

**Afirmação 5.12.** *Se  $K$  possui função argumento com respeito a  $(\underline{a}, \underline{a})$  e  $\underline{a} \in \mathbb{R}^2 - K$ , e se  $\underline{a}' \in \mathbb{R}^2 - K$  é tal que  $[\underline{a}, \underline{a}'] \cap K = \emptyset$ , então  $K$  possui função argumento com respeito a  $(\underline{a}', \underline{b})$ , onde  $\underline{b} = \underline{a} - [\underline{a}, \underline{a}']$ .*

**Demonstração.** Por hipótese,  $[\underline{a}, \underline{a}'] \cap K = \emptyset$ , e portanto  $[\underline{a}, \underline{a}'] \subset \mathbb{R}^2 - K$ . Como  $\mathbb{R}^2 - K$  é aberto e  $[\underline{a}, \underline{a}']$  é compacto, existe uma  $\varepsilon$ -vizinhança deste segmento contida em  $\mathbb{R}^2 - K$ .

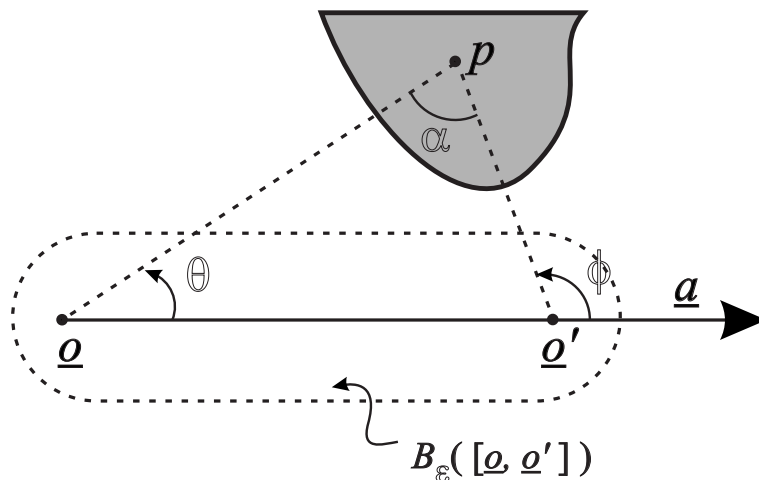


Figura 5.2.

Partindo do ângulo  $\theta$  relativo a  $\underline{o}$ , queremos com isso caracterizar o ângulo  $\phi$  relativo à  $\underline{o}'$  (ver Figura (5.2)). Vemos que  $\phi = \theta + \alpha$ , e portanto  $|\phi - \theta| = |\alpha|$ . Como, por hipótese,  $p \notin [\underline{o}, \underline{o}']$ , podemos afirmar que  $|\alpha| < \pi$ . Como o complementar é aberto, podemos tomar uma  $\varepsilon$ -vizinhança do segmento como margem de segurança para afirmar que  $|\alpha|$  assume valor menor que  $\pi$ , i.e.,  $|\alpha| < \pi - \eta$  com  $\eta > 0$ . Pondo  $\underline{b} = \underline{a} - [\underline{o}, \underline{o}']$ , existe uma determinação de  $\phi$  relativo à  $\underline{o}'$  e  $\underline{b}$  que tem esta propriedade.

Seja  $\psi: K \rightarrow \mathbb{R}$  função argumento para  $K$  relativa à  $(\underline{o}, \underline{a})$ . Definimos  $\bar{\psi}: K \rightarrow \mathbb{R}$  de maneira a fornecer a determinação do ângulo entre  $\underline{b}$  e a semi-reta de origem  $\underline{o}'$  passando por  $p$  tal que  $|\bar{\psi}(p) - \psi(p)| < \pi - \eta$ . Sabemos que tal determinação existe.

Para mostrar a continuidade de  $\bar{\psi}$ , tomemos uma sequência  $p_n$  de  $K$  tal que  $p_n \rightarrow p$ . Então  $\lim |\bar{\psi}(p_n) - \bar{\psi}(p)| = 2k\pi$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ . Por outro lado,

$$|\bar{\psi}(p_n) - \bar{\psi}(p)| \leq |\bar{\psi}(p_n) - \psi(p_n)| + |\psi(p_n) - \psi(p)| + |\psi(p) - \bar{\psi}(p)|,$$

e portanto

$$|\bar{\psi}(p_n) - \bar{\psi}(p)| \leq 2(\pi - \eta) + |\psi(p_n) - \psi(p)|.$$

Como  $\psi$  é contínua, temos  $\lim |\bar{\psi}(p_n) - \bar{\psi}(p)| \leq 2(\pi - \eta)$ , donde  $k = 0$  e  $\lim |\bar{\psi}(p_n) - \bar{\psi}(p)| = 0$ . ■

Note a importância da verificação de que realmente existe uma determinação com aquela propriedade.

Voltando ao Teorema, como  $\mathbb{R}^2 - K$  é conexo e aberto, basta mostrar que existe uma  $\psi$  com relação à algum ponto  $\underline{o}$  de  $\mathbb{R}^2 - K$ . De fato, para obter uma função argumento para qualquer outro ponto, tomamos a poligonal que os liga e aplicamos a afirmação anterior para cada segmento da poligonal.

Para mostrar que existe uma  $\psi$  com relação à um ponto  $\underline{o}$ , notamos que  $K$  é compacto, logo podemos tomar  $\underline{o}$  longe de  $K$  o bastante para que a variação de  $\psi$  em  $K$  seja menor que

$\pi/2$ . Por argumentos semelhantes aos anteriores, concluímos que  $\psi$  é contínua, o que conclui o Teorema. ■

Este teorema é importante na medida em que caracteriza os compactos do plano que admitem função argumento. A partir dele temos os

**Corolário 5.13.** *O complementar do traço de um arco de Jordan é conexo.*

**Demonstração.** Já foi demonstrado que um arco de Jordan possui função argumento. Dessa maneira, seu complementar é conexo. ■

**Corolário 5.14.** *Sejam  $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^2$  compactos conexos do plano tais que  $\mathbb{R}^2 - K_1$  e  $\mathbb{R}^2 - K_2$  são conexos. Se  $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$  é conexo, então  $\mathbb{R}^2 - (K_1 \cup K_2)$  é conexo.*

**Demonstração.** Sejam  $\underline{o} \in \mathbb{R}^2 - (K_1 \cup K_2)$  e  $\underline{a}$  uma semi-reta de origem  $\underline{o}$ . Como cada  $\mathbb{R}^2 - K_i$  é conexo, pelo Teorema (5.10) existem  $\psi_i: K_i \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ , funções argumento para  $K_i$  com respeito à  $(\underline{o}, \underline{a})$ .

Seja então  $K = K_1 \cap K_2$  e  $p \in K$ . Em  $K$ ,  $\psi_1$  e  $\psi_2$  diferem por um múltiplo inteiro de  $2\pi$ , dada a natureza de determinação de ângulo das  $\psi_i$ , mas como  $\psi_1 - \psi_2$  deve ser contínua, este inteiro é constante em  $K$ . Assim, sem perda de generalidade, podemos supor  $\psi_1|_K = \psi_2|_K$ . Dessa maneira, a função  $\psi: K_1 \cup K_2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\psi(p) = \begin{cases} \psi_1(p), & \text{se } p \in K_1 \\ \psi_2(p), & \text{se } p \in K_2 \end{cases}$$

está bem determinada e é função argumento para  $K_1 \cup K_2$  relativa à  $(\underline{o}, \underline{a})$ . Segue novamente pelo Teorema (5.10) que  $\mathbb{R}^2 - (K_1 \cup K_2)$  é conexo, o que prova o corolário. ■

## 5.2 Demonstração do Teorema de Jordan

De posse dos estudos obtidos nas seções anteriores, vamos finalmente cumprir nossa meta, que é a demonstração de um dos mais significativos exemplos da diferença entre intuição e demonstração matemática: o teorema da curva de Jordan. Vamos iniciar nossos trabalhos enunciando o

**Teorema 5.15.** *Sejam  $c: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de Jordan e  $M \subset \mathbb{R}^2$  o seu traço. Então  $\mathbb{R}^2 - M$  tem exatamente duas componentes conexas  $G_0$  e  $G_1$ , onde uma delas é limitada, uma é ilimitada, e  $M$  é fronteira comum das duas.*

A demonstração desse resultado será dividida em três etapas, sendo que cada uma delas constitui uma afirmação para a qual apresentaremos uma demonstração.

**Afirmação 5.16.** *Para qualquer componente conexa  $G$  de  $\mathbb{R}^2 - M$ , temos que  $M = \partial G$ .*

**Demonstração.** Em primeiro lugar vamos verificar que  $G$  é aberto. Com efeito, sendo  $\mathbb{R}^2 - M$  aberto e  $G \subset \mathbb{R}^2 - M$ , dado  $a \in \mathbb{R}^2 - M$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(a, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 - M$ . Mas  $B(a, \varepsilon)$  é um conexo que contém  $a$ , logo  $B(a, \varepsilon) \subset G$ . Sendo assim,  $\partial G = \overline{G} \cap (\mathbb{R}^2 - G)$ . Uma vez que  $G \neq \mathbb{R}^2$ ,  $G$  não pode ser fechado (lembramos o leitor que os únicos abertos-fechados em  $\mathbb{R}^2$  são o  $\emptyset$  e o próprio  $\mathbb{R}^2$ ). Assim sendo  $\partial G \neq \emptyset$ . Logo, dado  $p \in \partial G \Rightarrow p \notin G \Rightarrow p \in M$  (claro, se  $p$  não pertence a nenhuma componente conexas de  $\mathbb{R}^2 - M$ , por definição  $p \notin \mathbb{R}^2 - M$ ). Desta forma, a primeira parte dessa afirmação está demonstrada, ou seja  $\partial G \subset M$ .

Seja agora  $p \in M$ . Vamos considerar a bola aberta de centro  $p$  e raio  $\varepsilon > 0$  arbitrário e mostrar que  $B(p, \varepsilon) \cap G \neq \emptyset$ , ou seja  $p \in \overline{G}$ . Com esse resultado e de posse do fato de que  $p \in \mathbb{R}^2 - G$ , temos que  $p \in \overline{G} \cap (\mathbb{R}^2 - G) = \partial G$ , de onde segue que  $M \subset \partial G$ , estando então demonstrada a afirmação.

Escolhemos  $\varepsilon > 0$  de forma tal que  $M \subset B(p, \varepsilon)$ . Seja  $S$  uma circunferência de raio  $r < \varepsilon$  e centro  $p$ . Sejam ainda  $A$  e  $B$  os primeiros pontos de intersecção de  $S$  com  $M$  quando se percorre  $M$ , a partir de  $p$ , nas duas direções possíveis (pedimos ao leitor que não deixe de verificar que  $A$  e  $B$  assim descritos estão bem definidos).

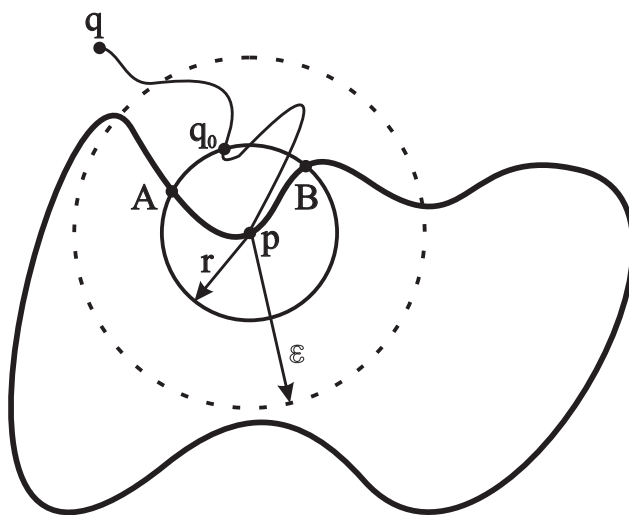


Figura 5.3.

Suponhamos, para melhor fixar as idéias, que  $p = c(0, 1)$ ,  $A = c(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$  e  $B = c(\cos \theta_1, \sin \theta_1)$  com  $0 < \theta_0 < \theta_1 < 2\pi$ .

Consideremos  $N = \{c(\cos \theta, \sin \theta) ; \theta_0 < \theta < \theta_1\}$ , sendo evidentemente o traço de um arco de Jordan. Seja  $q \in G$ . Suponhamos que  $q \notin B(p, \varepsilon)$ , do contrário teríamos que  $B(p, \varepsilon) \cap G \neq \emptyset$  e nada mais nos restaria a fazer.

Uma vez que  $N$  é o traço de um arco de Jordan,  $\mathbb{R}^2 - N$  é convexo. Assim podemos achar uma curva  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 - N$  tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(1) = q$ . Sejam  $t_0 = \sup\{t \in [0, 1] ; \gamma(t) \in S\}$  e  $q_0 = \gamma(t_0)$ . Observemos que:

- $t_0 \neq 1$  pois, se  $t_0 = 1$ , então  $q_0 = \gamma(1) = q \notin S$ , uma contradição;

- $q_0 \notin M$  pois, caso contrário,  $q_0 \in (M \cap S) \subset N$ , o que contraria o fato de que  $q_0 \notin N$ .

Façamos a restrição  $\gamma|_{[t_0, 1]}: [t_0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 - N$ . Desta forma,  $\gamma([t_0, 1]) \subset \mathbb{R}^2 - M$ , pois se  $\gamma([t_0, 1]) \cap M \neq \emptyset$ , existiria um  $t_1 \in (t_0, 1)$  tal que  $\gamma(t_1) \in M - N$  e  $\gamma(t_1)$  pertenceria ao disco que tem  $S$  como fronteira. Consequentemente existiria um  $t_2 > t_0$  tal que  $\gamma(t_2) \in S$  o que se traduz em um absurdo em vista da definição de  $t_0$ .

Assim,  $\gamma([t_0, 1])$  é um caminho todo contido em  $\mathbb{R}^2 - M$ , estando portanto contido em uma mesma componente conexa, ou seja  $G$ . Concluímos desta forma que  $q_0 \in B(p, \varepsilon) \cap G$ , ficando encerrada a demonstração. ■

**Afirmção 5.17.** Existe  $q_0 \in \mathbb{R}^2 - M$  tal que  $i(q_0, c) = \pm 1$ .

**Demonstração.** Como  $M$  é um conjunto compacto, existe uma semi-reta  $r \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $M$  está contido em um dos dois semi-planos abertos determinados por  $r$ .

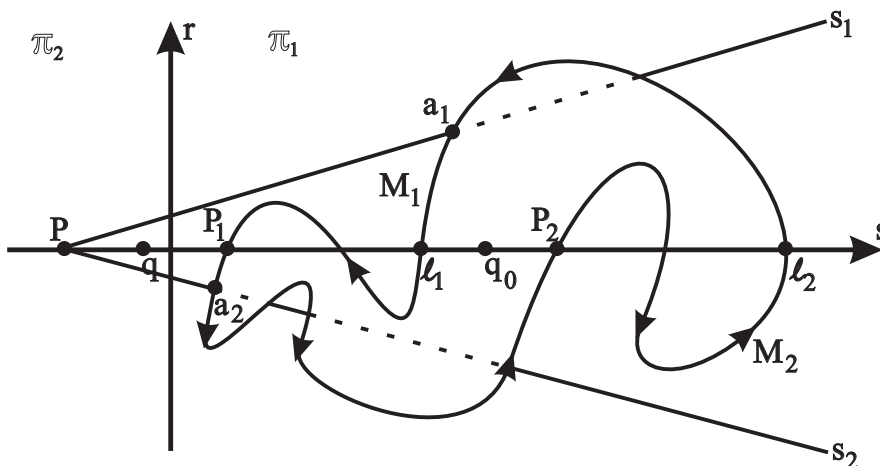


Figura 5.4.

Denotemos por  $\pi_1$  e  $\pi_2$  tais semi-planos de forma que  $M \subset \pi_1$ . Sejam  $P \in \pi_2$  e  $s_1$  uma semi-reta de origem  $P$  que intercepta  $M$ .

Mostremos que  $M \not\subset s_1$ . De fato, suponhamos que  $M$  seja uma curva fechada toda contida em  $s_1$ . Desta forma,  $M$  seria um segmento  $I = [c(\cos \theta_0, \text{sen } \theta_0), c(\cos \theta_1, \text{sen } \theta_1)]$  com  $0 < \theta_0 < \theta_1 < 2\pi$ . Neste caso,  $S^1$  ficaria dividido em dois arcos  $\Gamma_1 = \{(\cos \theta, \text{sen } \theta) ; \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1\}$  e  $\Gamma_2 = \{(\cos \theta, \text{sen } \theta) ; 0 \leq \theta < \theta_0 \text{ ou } \theta_1 < \theta \leq 2\pi\}$  com  $c(\Gamma_1) = c(\Gamma_2) = I$ , o que contradiz a injetividade de  $c$ .

Assim sendo existe uma outra semi-reta  $s_2$  de origem  $P$  que encontra  $M$ . Uma vez que  $s_1 \cap M \neq \emptyset$  e  $s_2 \cap M \neq \emptyset$ , consideremos  $a_i \in M \cap s_i$  tais que a distância  $d(P, a_i)$  seja mínima, ( $i = 1, 2$ ). Desta forma,  $a_1$  e  $a_2$  são os primeiros pontos de intersecção, a contar de  $P$ , de  $s_1$  e  $s_2$  com  $M$ .

Sejam  $\theta_1 < \theta_2$  tais que  $c(\cos \theta_i, \sin \theta_i) = a_i$ ,  $i = 1, 2$ . Temos então que os pontos  $(\cos \theta_i, \sin \theta_i)$  dividem  $S^1$  em dois arcos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . Sejam  $M_i = c(\Gamma_i)$ , onde cada  $M_i$  é o traço de um arco de Jordan  $\gamma_i$ . Consideremos os conjuntos

$$N_1 = M_1 \cup [a_2, P] \cup [P, a_1] \quad \text{e} \quad N_2 = M_2 \cup [a_1, P] \cup [P, a_2],$$

que evidentemente são traços de duas curvas de Jordan  $c_1$  e  $c_2$ . Afirmamos agora que, dado  $q \notin N_1 \cup N_2$ , tem-se

$$(5.1) \quad i(q, c) = i(q, c_1) + i(q, c_2).$$

De fato, oriente  $N_1$  de modo que  $a_2$  preceda  $P$  e  $N_2$  de modo que  $a_1$  preceda  $P$ . Nesse caso, sendo  $\phi_1$  e  $\phi_2$  funções angulares para  $c_1$  e  $c_2$  com respeito a  $q$  e a uma semi-reta  $\underline{a}$  de origem  $q$ , temos que os incrementos de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  ao longo de  $[a_2, P] \cup [P, a_1]$  e  $[a_1, P] \cup [P, a_2]$  são opostos. Desta forma obtemos a igualdade em (5.1).

Escolhemos agora  $q \in \pi_2$  no interior do triângulo  $a_1Pa_2$ . Afirmamos que  $i(q, c_i) = \pm 1$ ,  $i = 1, 2$ . Com efeito, dada a semi-reta  $s$  de origem  $q$  passando por  $P$ , esta intercepta  $c_i$  em  $P$ . Assim, de acordo com o método de determinação gráfica do índice de rotação de uma curva plana, segue que  $i(q, c_1) = \pm 1$ , dependendo da orientação escolhida.

A semi-reta oposta a  $s$ , denotada por  $s'$  intercepta  $N_i$ . Do contrário, se  $s' \cap N_i = \emptyset$ , existiria  $a \in s'$  tal que  $a \notin N_i$ . Nesse caso, se  $a \in s'$  e  $s_1 \cap s_2 \cap s' = \emptyset$ , então  $a \notin [a_2, P] \cup [P, a_1]$ . Como  $N_i = M_i \cup [a_2, P] \cup [P, a_1]$ , segue que  $a \notin M_i$ . Uma vez que  $s_1 \cap M_i \neq \emptyset$  e  $M_i$  é o traço de uma arco contínuo, segue que  $s_2 \cap M = \emptyset$ , pois  $s'$  está contida na região delimitada pelas retas  $s_1$ ,  $s_2$  e  $r$ , sem no entanto coincidir com nenhuma delas. Assim sendo, é impossível obtermos uma curva contínua ligando  $s_1$  a  $s_2$  sem interceptar  $s'$ . Chegamos então a um absurdo, pois já havíamos mostrado que  $s_2 \cap M \neq \emptyset$ . Assim  $s' \cap N_i \neq \emptyset$  e  $s' \cap M_i \neq \emptyset$ .

Sejam  $P_i$  e  $\ell_i$ ,  $i = 1, 2$ , os pontos da intersecção de  $s'$  com  $M_i$ , respectivamente o mais próximo e o mais distante de  $q$ . Admitamos ainda que  $P_1$  seja o primeiro ponto em que  $s'$  encontra  $M$  (observe que apesar de  $P_1$  ser o ponto da intersecção de  $s'$  com  $M_1$  mais próxima de  $q$ , isto não significa que ele é o primeiro ponto em que  $s'$  encontra  $M$ ). Tendo em vista que  $s' \cap N_i \subset M_i$  (pois dado  $a \in s'$  e  $a \in N_i$ , como  $N_i = M_i \cup [a_2, P] \cup [P, a_1]$  segue que  $a \in M_i$ ), podemos escolher  $q_0 \in \pi_1 \cap s'$ , com  $q_0 \notin (N_1 \cup N_2)$  e tal que  $\ell_1 \in [q_0, P_1]$ , ou seja  $q_0$  pode ser escolhido de forma a estar na reta  $s'$  à direita de  $\ell_1$ . Além disso,  $q_0$  pode ser escolhido de modo que  $[\ell_1, q_0] \cap M_2 = \emptyset$ , o que garante que  $q_0$  está entre  $\ell_1$  e  $P_2$ , ou seja, o ponto mais distante de  $q$  na intersecção de  $s'$  com  $M_1$  e o ponto mais próximo de  $q$  na intersecção com  $M_2$ .

Desta forma, temos que  $i(q_0, c_1) = 0$ , pois a semi-reta de origem  $q_0$  contida em  $s'$  não intercepta  $N_1$ .

Mostremos que  $i(q_0, c_2) = i(q, c_2) = \pm 1$ . Para isso, consideremos o conjunto reunião do segmento  $[q_0, \ell_1]$ , do arco de  $M_1$  entre  $\ell_1$  e  $P_1$  e do segmento  $[P_1, q]$ . Esse conjunto é o traço de uma curva  $\omega: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  com  $\omega(0) = q_0$  e  $\omega(1) = q$ . Observemos que  $\omega([0, 1]) \cap N_2 = \emptyset$ , uma vez que:

- $[q_0, \ell_1] \cap N_2 = \emptyset$ , pois  $q_0$  foi escolhido de forma que  $[q_0, \ell_1] \cap M_2 = \emptyset$  e  $[q_0, \ell_1] \subset s' \cap \pi$ .
- $M_1 \cap N_2 = \{a_1, a_2\}$ .

- $[P_1, q] \cap N_2 = \emptyset$ , pois  $P_1$  é o primeiro ponto onde a reta  $s'$  intercepta  $M$  e é o ponto mais próximo de  $q$  em relação a todos os outros pontos onde  $s'$  intercepta  $M_1$ .

Visto que  $q$  e  $q_0$  podem ser ligados por um caminho contido em  $\mathbb{R}^2 - N_2$ , segue que  $q$  e  $q_0$  estão na mesma componente conexa de  $\mathbb{R}^2 - N_2$ , donde  $i(q_0, c_2) = i(q, c_2) = \pm 1$ .

Como  $i(q_0, c) = i(q_0, c_1) + i(q_0, c_2)$  segue que  $i(q_0, c) = \pm 1$ . Portanto, existe um ponto  $q_0 \in \mathbb{R}^2 - M$  tal que  $i(q_0, c_2) = \pm 1$ . ■

**Afirmção 5.18.**  $\mathbb{R}^2 - M$  tem exatamente duas componentes conexas, uma ilimitada de índice zero e uma limitada de índice  $\pm 1$ .

**Demonstração.** Consideremos inicialmente o caso particular em que o traço  $M$  contém um segmento de reta que denotaremos por  $[a, b]$ . Já sabemos que  $\mathbb{R}^2 - M$  tem pelo menos duas componentes conexas com fronteira comum  $M$ . Seja  $p \in [a, b]$  tal que  $p \neq a$  e  $p \neq b$ . Considere também o conjunto

$$A = \{ \|p - x\| ; x \in M - [a, b] \}$$

e seja  $\varepsilon = \inf A$ . Vamos mostrar que  $\varepsilon \neq 0$ . De fato, como  $\varepsilon$  é o  $\inf A$ , existe uma sequência  $x_n \in M - [a, b]$  tal que  $\|p - x_n\| \rightarrow \varepsilon$ . Considere  $t_1 \in S^1$  tal que  $c(t_1) = p$  e suponhamos, por absurdo, que  $\varepsilon = 0$ . Desta forma, pela continuidade da função norma, deveríamos ter  $x_n = c(t_n) \rightarrow p$ , onde  $t_n \notin (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e algum  $\delta > 0$ . Como  $S^1$  é compacto, existe  $t_{n_j}$  tal que  $t_{n_j} \rightarrow t_0 \notin (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$ . Desta forma, teríamos que  $t_{n_j} \rightarrow t_0 \Rightarrow c(t_{n_j}) \rightarrow c(t_0)$ . Porém  $c(t_{n_j}) = x_{n_j} \rightarrow p$ , donde concluímos que  $c(t_0) = p = c(t_1)$  o que fere a injetividade de  $c$ . O absurdo proveio do fato de termos considerado  $\varepsilon = 0$  e portanto devemos ter  $\varepsilon > 0$ . Desta forma teremos

$$B(p, \varepsilon) \cap \{M - [a, b]\} = \emptyset,$$

Logo,  $B(p, \varepsilon)$  tem exatamente duas componentes conexas, digamos  $U_1$  e  $U_2$ .

Neste ponto já podemos afirmar que  $\mathbb{R}^2 - M$  tem pelo menos duas componentes conexas  $G_0$  e  $G_1$  tais que  $U_0 \subset G_0$  e  $U_1 \subset G_1$ . Seja agora  $G$  uma outra componente conexa de  $\mathbb{R}^2 - M$ . Como  $p \in \partial G$  devemos ter  $B(p, \varepsilon) \cap G \neq \emptyset$ . Portanto  $G = G_0$  ou  $G = G_1$ . Desta forma, concluímos que  $\mathbb{R}^2 - M$  tem exatamente duas componentes conexas.

Tratemos agora o caso geral. Seja  $G_1$  uma componente limitada de índice  $\pm 1$ . Seja  $p \in G_1$  e  $r$  uma reta passando por  $p$ . As duas semi-retas determinadas por  $p$  e  $r$  interceptam  $M$  pois, caso contrário, o índice seria nulo. Sejam  $a$  e  $b$  os primeiros pontos, ao longo das semi-retas, onde a reta intercepta  $M$ . Denotemos tais pontos por  $a = c(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$  e  $b = c(\cos \theta_1, \sin \theta_1)$  com  $0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 < 2\pi$ .

Consideremos agora os dois arcos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  de  $S^1$  dados por

$$\Gamma_1 = \{(\cos \theta, \sin \theta) ; \theta_0 \leq \theta \leq \theta_2\}$$

e

$$\Gamma_2 = \{(\cos \theta, \sin \theta) ; 0 \leq \theta \leq \theta_0 \text{ ou } \theta_1 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$



Sejam  $M_i = c(\Gamma_i)$  os traços de arcos de Jordan correspondentes. Consideremos também os conjuntos  $N_1 = M_1 \cup [b, a]$  e  $N_2 = M_2 \cup [a, b]$ . Observemos que  $N_1$  e  $N_2$  são traços de curvas de Jordan  $c_i: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Cada  $N_i$  contém um segmento, logo  $\mathbb{R}^2 - N_i$  tem exatamente duas componentes conexas, uma limitada  $L_i$  de índice  $\pm 1$ , e outra ilimitada  $I_i$  de índice 0. Lembremos agora que, para todo  $q \notin N_1 \cup N_2$ , tem-se  $i(q, c) = i(q, c_1) + i(q, c_2)$ .

Nossa intenção é mostrar que  $I = \mathbb{R}^2 - (\overline{L_1} \cup \overline{L_2})$  e  $L = L_1 \cup L_2 \cup (a, b)$  são as duas componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 - M$ . Notemos inicialmente que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(p, \varepsilon) \cap M = \emptyset$  e  $B(p, \varepsilon)$  contém pontos de  $L_1$  e  $L_2$  e está contida em  $L$ . Temos também  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$  pois, se existisse  $q \in L_1 \cap L_2$  teríamos

$$i(q, c) = i(q, c_1) + i(q, c_2) = i(q_1, c_1) + i(q_2, c_2),$$

onde  $q_i \in L_i$  são escolhidos de forma que  $q_i \in B(p, \varepsilon)$ . Como  $i(q_i, c_i) = \pm 1$ , concluiríamos que  $i(q, c) \in \{-2, 0, 2\}$ , o que é absurdo, visto que, como a bola é convexa,  $i(q, c) = i(p, c) = \pm 1$ . Portanto, podemos afirmar que  $L_1 \subset I_2$  e  $L_2 \subset I_1$ .

Vamos agora provar que  $L$  é conexo. Como  $L_1, L_2$  e  $(a, b)$  são conjuntos abertos,  $L$  é aberto e portanto é suficiente mostrarmos que  $L$  é conexo por caminhos. Devemos mostrar que, dados  $x \in L$  e  $y \in L$  quaisquer, existe sempre um caminho contido em  $L$  ligando  $x$  a  $y$ . Vamos supor  $x \in L_1$  e  $y \in L_2$  pois os outros casos são triviais. Conforme visto anteriormente existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(p, \varepsilon) \cap M = \emptyset$  e  $B(p, \varepsilon)$  contém pontos de  $L_1$  e  $L_2$  e está contida em  $L$ . Sejam  $x_0 \in B(p, \varepsilon) \cap L_1$  e  $y_0 \in B(p, \varepsilon) \cap L_2$ . Como  $L_1$  é conexo por caminhos existe um caminho  $l_1$  contido em  $L_1 \subset L$  ligando  $x$  a  $x_0$ . Analogamente existe  $l_3$  ligando  $y$  a  $y_0$ . Como a bola é conexa por caminhos existe  $l_2$  contido em  $B(p, \varepsilon) \subset L$  ligando  $x_0$  a  $y_0$ . Portanto o caminho  $l$  que concatena  $l_1, l_2$  e  $l_3$  está contido em  $L$  e liga  $x$  a  $y$ . Claramente  $L_1 \cup L_2 \cup (a, b) = L \subset \mathbb{R}^2 - M$ .

Mostremos agora que  $I = \mathbb{R}^2 - (\overline{L_1} \cup \overline{L_2})$  é conexo. Para tanto observemos que  $\mathbb{R}^2 - \overline{L_i}$  é conexo porque  $\overline{L_i}$  é compacto e conexo. Também  $\overline{L_1} \cap \overline{L_2} = [a, b]$  é conexo. Essas observações nos permitem concluir que  $I$  é conexo. Temos então que  $\mathbb{R}^2 - M = I \cup L$ , com  $I$  e  $L$  conexos e  $I \cap L = \emptyset$ .

Assim,  $\mathbb{R}^2 - M$  tem exatamente duas componentes conexas, uma ilimitada  $I$  de índice zero e outra limitada  $L$  de índice  $\pm 1$ . Em vista das três últimas afirmações, fica então demonstrado o Teorema de Jordan. ■

### 5.3 Teorema de Jordan para Curvas Regulares

Trabalharemos agora considerando a hipótese de regularidade da curva e veremos como pouparemos trabalho. Para tanto precisamos de alguns conceitos de que ainda não dispomos.

**Definição 5.19.** Uma curva  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^k$  é  $C^k$ -fechada se, para cada  $i = 0, 1, \dots, k$ , vale

$$\left( \frac{d^i(c)}{dt^i} \right)_{t=0} = \left( \frac{d^i(c)}{dt^i} \right)_{t=1}$$

**Observações.**

- i) uma curva  $C^0$ -fechada é uma curva fechada no sentido em que temos trabalhado até aqui, ou seja,  $c(0) = c(1)$ ;
- ii) uma curva  $C^k$ -fechada  $c: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  estende-se por periodicidade a uma função  $\tilde{c}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definindo-se  $\tilde{c}(t + n) = c(t)$ , para  $n \in \mathbb{Z}$

**Teorema 5.20.** (da Vizinhança Tubular) *Seja  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e  $C^2$ -fechada. Então existe uma vizinhança aberta  $U$  do traço de  $c$  e um homeomorfismo  $f: S^1 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  tal que  $f(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0) = c(t)$ .*

**Demonstração.** Já sabemos que toda curva de Jordan é homeomorfa a  $S^1$ . Portanto, basta mostrar que o Teorema tem validade para  $S^1$ . Nesse sentido, sejam

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 1 - \varepsilon < x^2 + y^2 < 1 + \varepsilon\}$$

e  $B = S^1 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Seja ainda  $f: A \rightarrow B$  a função dada por

$$f(x, y) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, x^2 + y^2 - 1 \right)$$

É claro que  $f$  é uma bijeção com inversa  $f^{-1}: B \rightarrow A$  dada por  $f^{-1}(x, y, z) = ((1 + z)x, (1 + z)y)$ . Calculando as derivadas parciais de  $f$ , obtemos que

$$f_x(x, y) = \left( \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, 2x \right)$$

e

$$f_y(x, y) = \left( \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, 2y \right)$$

e portanto

$$\| f_x(x, y) \times f_y(x, y) \| = 2 \sqrt{\frac{3x^4y^2 + 3x^2y^4 + x^6 + y^6}{(x^2 + y^2)^3}}$$

é claramente diferente de zero para todo ponto do domínio de  $f$ . Dessas observações e do Teorema da Função Inversa (ver [2]), segue que a função  $f$  é de fato um difeomorfismo, o que encerra a demonstração do Teorema da Vizinhança Tubular. ■

O último conceito de que necessitaremos tratar antes de entrar no cerne do problema proposto é o de *reparametrização*.

**Definição 5.21.** *Uma reparametrização de  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um par constituído de uma função  $\psi: [0, 1] \rightarrow I \subset \mathbb{R}$  e uma curva  $c_1: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de tal forma que  $c(t) = c_1 \circ \psi$ .*

Pode-se mostrar que, se  $c: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  é regular e  $t_0 \in (a, b)$ , então existe  $\varepsilon > 0$  e uma mudança de parâmetro  $\psi: (c, d) \rightarrow (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$  tal que a função  $c_1 = c \circ \psi^{-1}: (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfaz  $c(t) = (c_1 \circ \psi)(t) = (t, \psi(t))$ . Isto é, localmente, o traço da curva  $c$  coincide com o gráfico da  $\psi$ .

Vamos agora ao resultado prometido, o Teorema de Jordan para curvas regulares.

**Teorema 5.22.** (*Jordan Regular*) *Seja  $M$  o traço de uma curva  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  de Jordan  $C^2$  regular e  $C^2$ -fechada. Então  $\mathbb{R}^2 - M$  tem exatamente duas componentes conexas, as quais têm  $M$  como fronteira comum.*

**Demonstração.** Seja  $U$  uma vizinhança tubular de  $c$ . Então  $U - M$  tem duas componentes conexas,  $T_1$  e  $T_2$ , e  $M$  é fronteira dessas.

**Afirmção 5.23.**  $\mathbb{R}^2 - M$  tem no máximo duas componentes conexas e  $M$  é fronteira comum destas componentes.

**Demonstração.** Seja  $G$  componente conexa de  $\mathbb{R}^2 - M$ . Como  $G$  é aberta,  $\partial G \neq \emptyset$ . Seja  $p \in \partial G$ . Então  $p \in M = \partial T_1 = \partial T_2$ . Consideremos uma vizinhança  $V$  de  $p$ ,  $V \subset U$ , tal que  $V \cap T_1 \neq \emptyset$ ,  $V \cap T_2 \neq \emptyset$  e  $V \cap G \neq \emptyset$ .

Claramente,  $V - (M \cap V)$  é união disjunta de  $V \cap T_1$  e  $V \cap T_2$ , portanto temos duas possibilidades:  $(V \cap T_1) \cap G \neq \emptyset$  e portanto  $T_1 \subset G$ , ou  $(V \cap T_2) \cap G \neq \emptyset$  e portanto  $T_2 \subset G$ . Isto comprova que existem no máximo duas componentes conexas  $G_1$  e  $G_2$  de  $M$ , com  $T_1 \subset G_1$  e  $T_2 \subset G_2$ . ■

**Afirmção 5.24.**  $\mathbb{R}^2 - M$  tem, pelo menos, duas componentes.

**Demonstração.** Basta mostrar que existe  $p \in \mathbb{R}^2 - M$  tal que  $i(p, c) = \pm 1$ . Sendo  $[0, 1]$  compacto, a função  $g(t) = \|c(t)\|^2 = \langle c(t), c(t) \rangle$  assume um máximo para algum  $t \in [0, 1]$ , digamos  $t_0$ . Então  $\dot{g}(t_0) = 0$ .

Mas  $\dot{g}(t_0) = 2 \langle c(t_0), \dot{c}(t_0) \rangle = 0 \Rightarrow \dot{c}(t_0) \perp c(t_0)$ . Seja  $r$  a semi-reta de origem  $(0, 0)$  passando por  $c(t_0)$ . Então  $r$  é perpendicular à tangente a  $c(t)$  em  $c(t_0)$ .

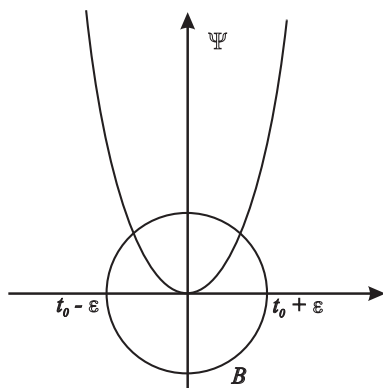


Figura 5.5.

Tomemos um novo referencial de origem em  $c(t_0)$ , tendo como base  $\left( \frac{\dot{c}(t_0)}{\|\dot{c}(t_0)\|}, N(t_0) \right)$ .

Então numa vizinhança de  $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$  de  $t_0$  podemos tomar uma reparametrização  $\psi$  de maneira que  $c(t) = (t, \psi(t))$ .

Seja  $B$  uma bola aberta de centro  $t_0$  e raio  $\varepsilon/2$ . Tomemos um ponto  $p$  pertencente a  $B$  e sobre a semi-reta  $r$ , e seja  $s$  a semi-reta de origem em  $p$  passando por  $t_0$ . Pelo fato de ser  $\psi$  uma função e de seu gráfico coincidir, na vizinhança de  $t_0$  considerada, com o traço de  $c(t)$ , podemos concluir que  $s$  intercepta tal gráfico em somente um ponto,  $c(t_0)$ , e portanto, pelo Método Gráfico de Determinação do Índice de Rotação,  $i(p, c) = \pm 1$ . ■

Juntando as Afirmações (5.23) e (5.24) tem-se o Teorema. ■

# Bibliografia

---

- [1] E. L. LIMA. *Curso de Análise - Vol. 1*. IMPA, Rio de Janeiro, 1976.
- [2] E. L. LIMA. *Curso de Análise - Vol. 2*. IMPA, Rio de Janeiro, 1976. 53
- [3] E. L. LIMA. *Topologia do Espaços Métricos*. IMPA, Rio de Janeiro, 1976. 18
- [4] A. C. Asperti, F. MERCURI *Topologia e Geometria das Curvas Planas* IMPA, Rio de Janeiro, 1981.