Universidade de Brasília

Instituo de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Disertação de Mestrado

Um teorema do tipo Ponto de Sela com aplicação a um problema elíptico semilinear com dupla ressonância

por

Marcelo Fernandes Furtado †

Mestrado em Matemática - Brasília - DF

Orientador: Prof. Dr. Elves Alves de Barros e Silva

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

À minha querida mãe e à Luciana

AGRADECIMENTOS

- Aos meus pais que, de forma ímpar, proporcionaram um ambiente de carinho, amor e apoio necessários para o meu alicerçamento como ser humano.
- À Luciana, pela cumplicidade, carinho e por ter sido ela, durante todo o transcorrer dos meus estudos, a principal responsável pelos momentos de alegria.
- Ao Prof. Elves pela paciência, confiança e pela forma competente com que me conduziu nessa insólita e fascinante viagem ao universo da Matemática.
- Ao Prof. Celius pelos valorosos conselhos e por ter-se mostrado, nestes cinco anos de convivência, não só um excelente professor, mas também um grande amigo.
- Aos amigos, pelos momentos de descontração proporcionados.
- Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática, em especial à Tânia pela presteza com que administra os assuntos burocráticos da pós-graduação .

RESUMO

No presente trabalho, apresentamos uma versão de um teorema do tipo Ponto de Sela que nos fornece pontos críticos para uma classe de funcionais definidos em espaços de Hilbert. O teorema baseia-se em um resultado de Lazer & Solimini e utiliza fundamentalmente Teoria de Morse em dimensão infinita. O resultado abstrato é aplicado na obtenção de multiplicidade de solução para um problema elíptico semilinear com dupla ressonância. Obtemos também alguns resultados de existência para problemas relacionados.

ABSTRACT

In this work, we present a version of a Saddle Point theorem that provide us with critical points for a class of functionals defined in Hilbert spaces. The theorem is based in a result of Lazer & Solimini and uses mainly Morse Theory in infinite dimension. The abstract result is applied to obtain multiplicity of solution for a semilinear elliptic problem at double resonance. We have also obtained some existences results for related problems.

CONTEÚDO

CAPÍTULO 1

Introdução

Neste trabalho obtemos uma generalização de um resultado de Lazer & Solimini, o Teorema 1.1 em [11], que assegura a multiplicidade de pontos críticos para o funcional $I : H \to \mathbb{R}$ definido em um espaço de Hilbert H, sob as hipóteses do Teorema do Ponto de Sela devido a Rabinowitz [15]. Essa generalização permite obter novos resultados de multiplicidade de solução para os problemas elípticos semilineares duplamente ressonantes em que estamos interessados. Estudamos também o problema de existência de solução para problemas do mesmo tipo.

A existência de pontos críticos está usualmente relacionada a alguma condição de compacidade satisfeita pelo funcional I, como as bem conhecidas condições de Palais-Smale (PS) e de Cerami (Ce). Usamos aqui aquela utilizada por Silva em [18], a condição de Cerami Forte (SCe) (ver Definição 3.0.1), que exige mais do que a condição (Ce), mas é mais geral do que (PS).

Denotando por $m(I,0)$ [$\overline{m}(I,0)$] o índice de Morse [índice de Morse aumentado] de um funcional $I \in C^2(H,\mathbb{R})$ no ponto 0, podemos enunciar o resultado principal como se segue

Teorema A. *Seja $H = V \oplus W$ um espaço de Hilbert com $W = V^{\perp}$ e V de dimensão finita. Suponha que $I \in C^2(H,\mathbb{R})$ satisfaz* (SCe)*, 0 é um ponto crítico isolado de I, $I''(0)$ é um operador de Fredholm e $\dim V < m(I,0)$ ou $\overline{m}(I,0) < \dim V$. Se, além disso,*

(I_1) *Existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que*

$$I(v) \leq \beta, \quad \forall\, v \in V,$$

(I_2) *Existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que*

$$I(w) \geq \gamma, \quad \forall\, w \in W,$$

então I possui pelo menos um ponto crítico não nulo.

Este resultado generaliza o de Lazer & Solimini [11], desde que a condição (I_1) não implica na anticoercividade do funcional I em V, e a condição (SCe) é mais geral do que a condição (PS), exigida em [11].

A demonstração do Teorema **A** baseia-se no estudo da estrutura topológica dos conjuntos de nível do funcional I, feito por meio dos grupos de homologia. A falta de anticoercividade em V é compensada por um lema de deformação , devido a Silva [18], que leva $V \cap \partial B(0, R)$, para R suficientemente grande, para baixo do nível γ, dado por (I_2), preservando a estrutura de enlace entre $V \cap \partial B(0, R)$ e o espaço W (cf. [17]).

O resultado abstrato é aplicado ao problema elíptico

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(x, u), \quad x \in \Omega, \\ u &= 0, \qquad\qquad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, e $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz $f(x, 0) = 0$ e

(f_1) Existe $2 < \sigma < \frac{2N}{N-2}$ $(2 < \sigma < \infty,$ se $N = 1$ ou $2)$ e constantes $a_1,\ a_2 > 0$ tais que

$$|f_s(x, s)| \leq a_1|s|^{\sigma-2} + a_2, \quad \forall\, x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}.$$

Observamos que essa regularidade é necessária devido ao uso da Teoria de Morse. Além disso, como estamos interessados em multiplicidade de solução , e tendo em vista que (P) possui a solução trivial $u \equiv 0$, necessitamos de estimativas do índice de Morse da solução trivial, e assumimos que

$$(f_2) \qquad f_s(x, 0) \not\leq \lambda_j \ \text{ ou } \ \lambda_{j+1} \not\leq f_s(x, 0),$$

onde λ_j é o j-ésimo autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, e usamos a notação $f_s(x, 0) \not\leq \lambda_j$ para indicar que $f_s(x, 0) \leq \lambda_j$ para todo $x \in \Omega$, com desigualdade estrita ocorrendo em um conjunto de medida positiva.

O problema (P) é dito ressonante (resp. duplamente ressonante) se

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(x, s)}{s} = \lambda_j \quad \left[\text{resp. } \lambda_j \leq \liminf_{|s|\to\infty} \frac{f(x, s)}{s} \leq \limsup_{|s|\to\infty} \frac{f(x, s)}{s} \leq \lambda_{j+1}\right],$$

uniformemente para q.t.p. $x \in \Omega$. Problemas ressonantes foram inicialmente tratados por Landesman & Lazer [10], que consideraram a ressonância no primeiro autovalor. A partir deste trabalho, surgiram uma série de outros resultados que consideravam vários tipos de ressonância, e nos quais a técnica fundamental era a Teoria do Grau.

A partir de um resultado de Ahmad, Lazer & Paul [1], que estudam o caso em que $f(x,s) = \lambda_j a(x)s + g(x,s)$ e $\int_0^s g(x,t)\,dt \to \infty$, quando $|s| \to \infty$, Rabinowitz [15] obteve existência de solução para o problema (P) essencialmente com as mesmas hipótese em [1], mas por meio do Teorema do Ponto de Sela, demonstrado por ele no mesmo artigo, e que se mostrou útil em uma classe extremamente variada de problemas de equações diferenciais. Este celebrado artigo impulsionou uma série de trabalhos, em que problemas ressonantes são abordados via métodos variacionais.

Os primeiros autores a tratar problemas de dupla ressonância foram Figueiredo & Berestycki [7]. Em 1988, Costa & Oliveira [4] introduziram uma condição de dupla ressonância associada ao potencial $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt$, semelhante à que usamos neste trabalho, impondo condições nos limites

$$L(x) = \liminf_{|s|\to\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} \quad \text{e} \quad K(x) = \limsup_{|s|\to\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2}, \tag{1.0.1}$$

que são tomados aqui no sentido pontual:

(F_1) $\lambda_j \le L(x) \le K(x) \le \lambda_{j+1},$ q.t.p. em Ω. Se $L(x) \equiv \lambda_j$, existe $D_+ \in L^1(\Omega)$ tal que

$$F(x,s) \ge \frac{\lambda_j}{2}s^2 - D_+(x), \quad \forall\, s \in \mathbb{R}, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Em [4] foi considerada apenas a primeira parte da hipótese acima, não permitindo que $L(x) \equiv \lambda_j$. Além disto, aqueles autores consideram os limites em (1.0.1) de maneira uniforme em Ω, e exigem também uma condição de ressonância do mesmo tipo para a função $f(x,s)$. Aqui, a uniformidade em (1.0.1), é substituída pela condição de crescimento

(F_2) Existem $A \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ e $B \in L^1(\Omega)$ tais que

$$|F(x,s)| \le A(x)s^2 + B(x), \quad \forall\, s \in \mathbb{R}, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

As condições (F_1) e (F_2) estão essencialmente relacionadas à geometria do funcional associado ao problema (P). No que diz respeito à condição de compacidade (SCe), motivados pelo trabalho de Costa & Magalhães [3], consideramos uma condição de não-quadraticidade local, que envolve a função $f(x,s)$ e o potencial $F(x,s)$. Mais especificamente, admitimos a existência de um subconjunto $\Omega_0 \subset \Omega$ e uma função $C_+ \in L^1(\Omega)$ tais que

$$(NQ)_+ \qquad \begin{cases} \lim\limits_{|s|\to\infty} [f(x,s)s - 2F(x,s)] = +\infty, & \text{q.t.p. em } \Omega_0, \\ f(x,s)s - 2F(x,s) \ge -C_+(x), & \forall\, s \in \mathbb{R}, \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{cases}$$

Como consequência do Teorema **A**, demonstramos o seguinte resultado:

Teorema B. *Existe* $0 < \alpha < |\Omega|$ *tal que, se* $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *satisfaz* $f(x,0) = 0$, (f_1), (f_2), (F_1), (F_2) *e* $(NQ)_+$ *com* $|\Omega_0| > \alpha$, *então o problema* (P) *possui pelo menos uma solução não trivial.*

Tratamos também o problema (P) com condições de não-quadraticidade e ressonância duais às condições $(NQ)_+$ e (F_1). Considerando então a existência de um subconjunto $\Omega_0 \subset \Omega$ e uma função $C_- \in L^1(\Omega)$ tais que

$$(NQ)_- \qquad \begin{cases} \lim\limits_{|s|\to\infty} [f(x,s)s - 2F(x,s)] = -\infty, & \text{q.t.p. em } \Omega_0, \\ f(x,s)s - 2F(x,s) \le C_-(x), & \forall\, s \in \mathbb{R}, \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{cases}$$

e

$(\hat{F}_1)$ $\lambda_j \le L(x) \le K(x) \le \lambda_{j+1}$, q.t.p. em Ω. Se $K(x) \equiv \lambda_{j+1}$, existe $D_- \in L^1(\Omega)$ tal que

$$F(x,s) \le \frac{\lambda_{j+1}}{2} s^2 + D_-(x), \quad \forall\, s \in \mathbb{R}, \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

provamos o seguinte resultado

Teorema B'. *Existe* $0 < \alpha < |\Omega|$ *tal que, se* $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *satisfaz* $f(x,0) = 0$, (f_1), (f_2), $(\hat{F}_1)$, (F_2) *e* $(NQ)_-$ *com* $|\Omega_0| > \alpha$, *então o problema* (P) *possui pelo menos uma solução não trivial.*

Como última aplicação do Teorema **A**, estudamos o caso em que a ressonância ocorre no primeiro autovalor. Nesta situação , substituímos a condição (F_2) por

$(\hat{F}_2)$ Existem $A \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ e $B \in L^1(\Omega)$ tais que

$$F(x,s) \le A(x)s^2 + B(x), \quad \forall\, s \in \mathbb{R}, \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

estabelecendo o seguinte resultado

Teorema C. *Se* $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *satisfaz* $f(x,0) = 0$, (f_1), $(\hat{F}_2)$, $K(x) \le \lambda_1$, $\lambda_1 \not\le f_s(x,0)$ *e* $(NQ)_+$ *com* $|\Omega_0| > 0$, *então o problema* (P) *possui pelo menos uma solução não trivial.*

Observe que, no resultado acima, exigimos somente que $|\Omega_0| > 0$. Porém, aparentemente, as hipóteses que temos não são suficientes para tratar o problema de ressonância no primeiro autovalor com a condição $(NQ)_-$.

Finalmente, observamos que os argumentos utilizados para demonstrar os resultados acima nos permitem obter solução para (P) mesmo quando não se conhece, a priori, nenhuma solução de (P). De fato, utilizando um teorema de Ponto de Sela, devido a Silva [18], estabelecemos a existência de uma solução para (P), e supondo apenas que $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e satisfaz

$(\hat{f}_1)$ Existe $1 < \sigma < \frac{2N}{N-2}$ $(1 < \sigma < \infty,$ se $N = 1$ ou $2)$ e constantes $a_3,\, a_4 > 0$ tais que

$$|f(x,s)| \leq a_3|s|^{\sigma-1} + a_4, \quad \forall\, x \in \Omega,\; s \in \mathbb{R},$$

obtemos os seguintes resultados

Teorema D. *Existe* $0 < \alpha < |\Omega|$ *tal que, se* $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *satisfaz* $(\hat{f}_1)$, (F_1), (F_2) *e* $(NQ)_+$ *com* $|\Omega_0| > \alpha$*, então o problema* (P) *possui pelo menos uma solução .*

Teorema D'. *Existe* $0 < \alpha < |\Omega|$ *tal que, se* $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *satisfaz* $(\hat{f}_1)$, $(\hat{F}_1)$, (F_2) *e* $(NQ)_-$ *com* $|\Omega_0| > \alpha$*, então o problema* (P) *possui pelo menos uma solução .*

Teorema E. *Se* $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *satisfaz* $(\hat{f}_1)$, $(\hat{F}_2)$, $K(x) \leq \lambda_1$, $\lambda_1 \not\leq f_s(x,0)$ *e* $(NQ)_+$ *com* $|\Omega_0| > 0$*, então o problema* (P) *possui pelo menos uma solução .*

Estes três ultimos teoremas generalizam o trabalho de Costa & Magalhães [3], desde que estes autores consideram limites uniformes em (1.0.1) e as condições $(NQ)_\pm$ com $\Omega_0 = \Omega$. A condição de não-quadraticidade local também complementa o resultado de Gonçalves, Pádua & Carrião [8].

CAPÍTULO 2

Resultados Preliminares

Este capítulo é dividido em três seções. Na primeira, apresentamos dois lemas de deformação. A segunda trata da Teoria de Morse, bem como de sua relação com a teoria de pontos críticos. Finalmente, na terceira, apresentamos um resultado de aproximação que permite trabalhar com pontos críticos degenerados.

Primeiramente, fixamos as notações que serão utilizadas em todo o trabalho. Espaços de Banach são denotados por E, enquanto H denota um espaço de Hilbert. Dado um funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ e $\gamma,\ \beta,\ c \in \mathbb{R}$, definimos

$$
\begin{aligned}
I^\beta &= \{u \in E \mid I(u) \leq \beta\},\\
I_\gamma &= \{u \in E \mid I(u) \geq \gamma\},\\
K &= \{u \in E \mid I'(u) = 0\},\\
K_c &= \{u \in K \mid I(u) = c\}.
\end{aligned}
$$

Dado $u \in E$, $A \subset E$ e $d > 0$, denotamos por $\|u - A\|$ a distância de u até o conjunto A,

$$\|u - A\| = \inf_{v \in A} \|u - v\|\,,$$

e por $(A)_d$ a d-vizinhança de A,

$$(A)_d = \{u \in E \mid \ \|u - A\| < d\}$$

Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a relação de dualidade entre E e E' e, no caso de espaço de Hilbert, esta notação indica o produto interno. Finalmente, se $I \in C^2(H, \mathbb{R})$, denotamos por $I''(u)$ o único operador linear limitado $T : H \to H$ tal que $D^2I(u)(v)(w) = \langle Tv, w\rangle$, para $u,\ v,\ w \in H$.

2.1 Lemas de Deformação

O objetivo desta seção é estudar a variação , em relação a deformações contínuas, da estrutura topológica dos conjuntos de nível de um funcional $I : E \to \mathbb{R}$. Com o intuito de realizar deformações destes conjuntos, vamos introduzir o seguinte conceito.

Definição 2.1.1. *Seja $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional diferenciável a Fréchet em $u \in E$. Um vetor $v \in E$ é chamado um* vetor pseudo-gradiente *para I em u se*

$$\|v\| \leq 2\,\|I'(u)\|\,, \tag{2.1.2}$$

$$\langle I'(u), v\rangle \geq \|I'(u)\|^2\,. \tag{2.1.3}$$

Naturalmente, se $u \in E$ é um ponto crítico de I, então o vetor nulo é um vetor pseudo-gradiente para I em u. Caso seja $I'(u) \neq 0$ então, por definição , existe $w \in E$ tal que $\|w\| = 1$ e

$$\langle I'(u), w\rangle > \frac{2}{3}\,\|I'(u)\|\,.$$

Definindo então $v = \dfrac{3}{2}\,\|I'(u)\|\,w$, temos as condições (2.1.2) e (2.1.3) trivialmente satisfeitas. Se a escolha de w puder ser feita de modo que a função $w = w(u)$ seja localmente Lipschitz, obtemos um campo pseudo-gradiente, conforme a definição a seguir.

Definição 2.1.4. *Seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ e $\tilde{E} = \{u \in E \mid I'(u) \neq 0\}$. Um* campo pseudo-gradiente *para I é uma aplicação $V : \tilde{E} \to E$ localmente Lipscthitz tal que, para todo $u \in \tilde{E}$, $V(u)$ é um vetor pseudo-gradiente para I em u.*

O seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [16], nos será útil no futuro.

Lema 2.1.5. *Suponha que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Então existe um campo pseudo-gradiente para I.*

Necessitamos ainda do conceito de retrato de deformação forte, conforme abaixo.

Definição 2.1.6. *Sejam A e A' dois conjuntos tais que $A' \subset A \subset E$. Dizemos que A' é* retrato de deformação forte *de A, se existe uma função contínua $\eta : [0,1] \times A \to A$ tal que*

1. $\eta(0, u) = u, \;\; \forall\, u \in A$,

2. $\eta(t, u) = u, \;\; \forall\, u \in A', \; \forall\, t \in [0,1]$,

3. $\eta(1, u) \in A', \;\; \forall\, u \in A$.

Dado um funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, seja V um campo pseudo-gradiente para I, dado pelo Lema 2.1.5. Como V é localmente Lipchitz, a equação diferencial ordinária

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) & = & -V(\sigma(t)), \\ \sigma(0) & = & u \in \tilde{E}. \end{cases}$$

possui solução única. Se I não possui pontos críticos ao longo do fluxo σ, então a função $t \mapsto I(\sigma(t))$ é decrescente. De fato, temos

$$\frac{d}{dt} I(\sigma(t)) = \langle I'(\sigma(t)), \dot{\sigma}(t) \rangle = - \langle I'(\sigma(t)), V(\sigma(t)) \rangle \leq - \|I'(\sigma(t))\|^2 < 0,$$

em que usamos, na penúltima desigualdade, a propriedade (2.1.3) da definição de pseudo-gradiente.

Vamos utilizar este fato para para mostrar que, sob certas condições , I^a é retrato de deformação forte de I^b. A idéia é realizar a deformação ao longo de um fluxo parecido com aquele definido acima. A primeira dificuldade surge devido ao caráter local da definição de fluxo pseudo-gradiente. Afim de superar esta dificuldade, vamos exigir que o funcional I satisfaça uma condição de compacidade, conhecida como a condição de Palais-Smale Generalizada – (GPS) . Explicitamos essa condição a seguir, em que Λ é a família das funções $\phi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ que são não-crescentes, localmente Lipschitz e satisfazem $\int_0^\infty \phi(\tau)\, d\tau = \infty$.

Definição 2.1.7. *O funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz* (GPS)$_c$ *com respeito a $\phi \in \Lambda$ e $c \in \mathbb{R}$, se toda sequência $(u_n) \subset E$ tal que $I(u_n) \to c$ e $\frac{\|I'(u_n)\|}{\phi(\|u_n\|)} \to 0$ possui subsequência convergente. Se I satisfaz* (GPS)$_c$ *para todo $c \in [a, b]$ ou todo $c \in \mathbb{R}$, dizemos simplesmente que I satisfaz* (GPS) *em $[a, b]$ ou* (GPS)*, respectivamente.*

Afim de simplificar a redação , sempre que dissermos que I satisfaz (GPS)$_c$, estaremos assumindo que tal condição é satisfeita para alguma $\phi \in \Lambda$.

Observação 2.1.8. Note que, quando $\phi(t) \equiv 1$ e $\phi(t) = (1 + t)^{-1}$ temos, respectivamente, a condição usual de Palais-Smale e a de Cerami, que vamos denotar, nesta ordem, por (PS) e (Ce).

Observação 2.1.9. Se I satisfaz (GPS)$_c$, então K_c é compacto. De fato, para toda sequência $(u_n) \subset K_c$, temos $I(u_n) = c$ e $I'(u_n) = 0$. Desta forma, por (GPS)$_c$, (u_n) possui subsequência convergente, o que mostra que K_c é sequencialmente compacto ou, equivalentemente, compacto.

O lema seguinte, apesar de simples, será importante para a demonstração do nosso primeiro resultado de deformação .

Lema 2.1.10. *Suponha que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ satisfaz* (GPS) *em $[a,b]$ e $K \cap I^{-1}([a,b]) = \varnothing$. Então, existem constantes δ, $\alpha > 0$ tais que*

$$\frac{\|I'(u)\|}{\phi(\|u\|)} \geq \alpha, \quad \forall\, u \in I^{-1}([a-\delta, b+\delta]).$$

Demonstração. Suponha, por absurdo, que não existam tais constantes. Então existe $(u_n) \subset E$ tal que $u_n \in I^{-1}\left(\left[a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\right]\right)$ e $\dfrac{\|I'(u_n)\|}{\phi(\|u_n\|)} \to 0$. Como I satisfaz (GPS) em $[a,b]$ e a sequência $(I(u_n))$ é limitada, existe uma subsequência (u_{n_j}) tal que $u_{n_j} \to u \in I^{-1}([a,b])$. Uma vez que I é de classe C^1 e ϕ é contínua, $\dfrac{I'(u)}{\phi(\|u\|)} = 0$. Desta forma, concluímos que $u \in K \cap I^{-1}([a,b]) = \varnothing$, o que é um absurdo. ■

De maneira semelhante demonstra-se o lema abaixo,

Lema 2.1.11. *Suponha que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ satisfaz* (GPS) *em $[a,b]$ e $K \cap I^{-1}((a,b)) = \varnothing$. Então, dado $d > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que*

$$\frac{\|I'(u)\|}{\phi(\|u\|)} \geq \alpha, \quad \forall\, u \in I^{-1}([a,b]) \setminus (K_a \cup K_b)_d\,.$$

Estamos prontos para enunciar e provar nosso primeiro lema de deformação .

Lema 2.1.12. *Suponha que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ satisfaz* (GPS)$_c$ *para algum $\phi \in \Lambda$ e todo $c \in [a,b]$. Se $K \cap I^{-1}([a,b]) = \varnothing$, então I^a é retrato de deformação forte de I^b.*

Demonstração. Seja V um campo pseudo-gradiente associado a I. Defina, para $u \in \tilde{E}$, $\Phi(u) = \frac{V(u)}{\|V(u)\|^2}$. A definição de pseudo-gradiente e um cálculo simples mostram que

$$\|\Phi(u)\| \leq \frac{1}{\|I'(u)\|}, \quad \forall\, u \in \tilde{E}, \tag{2.1.13}$$

$$\langle I'(u), \Phi(u)\rangle \geq \frac{1}{4}, \quad \forall\, u \in \tilde{E}. \tag{2.1.14}$$

Com essa notação , o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t,u) &= -\Phi(\sigma(t,u))\phi(\|\sigma(t,u)\|), \\ \sigma(0,u) &= u \in I^{-1}\left((a-\delta, b+\delta)\right), \end{cases} \tag{2.1.15}$$

em que $\delta > 0$ é dado pelo Lema 2.1.10, possui solução única $\sigma(\cdot, u)$, definida em um intervalo maximal (T_u^-, T_u^+). Vamos definir, para $u \in \overline{I^b \setminus I^a}$, o *tempo de chegada* T_u por

$$T_u = \begin{cases} \sup\left\{t \in (T_u^-, T_u^+) \mid I(\sigma(t,u)) > a\right\}, & \text{se } u \in I^b \setminus I^a, \\ 0, & \text{se } I(u) = a. \end{cases}$$

Vamos mostrar que T_u é finito e que $\lim\limits_{t \nearrow T_u} I(\sigma(t)) = a$, em que $t \nearrow T_u$ significa que t tende a T_u pela esquerda.

O caso em que $I(u) = a$ é trivial pois, nesta situação , temos $T_u = 0$ e $I(\sigma(0,u)) = I(u) = a$. Para o caso geral, utilizamos (2.1.15), (2.1.13) e o Lema 2.1.10 para obter

$$\|\dot{\sigma}(t,u)\| \le \frac{1}{\alpha}, \quad \forall\, t \in [0, T_u),$$

donde segue que

$$\|\sigma(t,u)\| \le \|u\| + \frac{t}{\alpha}, \quad \forall\, t \in [0, T_u).$$

Utilizando (2.1.14), a expressão acima e o fato de ϕ ser não-crescente obtemos

$$\begin{aligned} I(\sigma(t,u)) - I(u) &= \int_0^t \frac{d}{d\tau} I(\sigma(\tau,u))\, d\tau \\ &= -\int_0^t \langle I'(\sigma(\tau,u)), \Phi(\sigma(\tau,u))\phi(\|\sigma(\tau,u)\|)\rangle\; d\tau \\ &\le -\frac{1}{4}\int_0^t \phi\left(\|u\| + \frac{\tau}{\alpha}\right)\, d\tau, \quad \forall\, t \in [0, T_u). \end{aligned}$$

A definição de T_u nos permite reescrever a desigualdade acima como

$$\int_0^t \phi\left(\|u\| + \frac{\tau}{\alpha}\right)\, d\tau \le 4\left(I(u) - a\right), \quad \forall\, t \in [0, T_u),$$

e portanto $T_u < \infty$, visto que $\int_0^\infty \phi(\tau)\, d\tau = \infty$.

Considere agora uma sequência $t_n \nearrow T_u$. Utilizando (2.1.13) e novamente o Lema 2.1.10, obtemos

$$\begin{aligned} \|\sigma(t_k,u) - \sigma(t_j,u)\| &\le \int_{t_j}^{t_k} \|\dot{\sigma}(\tau,u)\|\; d\tau \\ &\le \int_{t_j}^{t_k} \frac{\phi(\|\sigma(\tau,u)\|)}{\|I'(\sigma(\tau,u))\|}\, d\tau \le \frac{|t_k - t_j|}{\alpha}, \end{aligned}$$

o que mostra que $(\sigma(t_n,u))$ é uma sequência de Cauchy em E, e portanto converge. Como a sequência (t_n) foi escolhida de maneira arbitrária, concluímos que existe $\sigma_u^* = \lim\limits_{t \nearrow T_u} \sigma(t,u)$. Além disso, $\sigma_u^* \in I^a$. De fato, se $I(\sigma_u^*) > a$, então, como T_u é finito, poderíamos prolongar o fluxo $\sigma(\cdot, u)$ além de T_u, permanecendo acima do nível a, contrariando assim a maximalidade de T_u.

Obtemos então, para cada $u \in I^{-1}([a,b])$ fixado, um fluxo $\sigma(t,u)$ definido em um intervalo maximal (T_u^-, T_u^+) e um tempo de chegada finito T_u. Um argumento semelhante ao utilizado no final do parágrafo anterior nos permite concluir que $T_u < T_u^+$. Defina

$$\mathcal{O} = \{(t,u) \mid u \in I^{-1}\left((a-\delta, b+\delta)\right) \text{ e } t \in (T_u^-, T_u^+)\}.$$

A teoria das equações diferencias ordinárias nos garante que $\mathcal{O}$ é aberto em $\mathbb{R} \times E$. Afim de mostrar a continuidade de T_u, vamos definir $\psi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ por $\psi(t,u) = I(\sigma(t,u))$. Observe que T_u é solução da equação $\psi(t,u) = a$ e que

$$\psi_t(T_u, u) = \langle I'(\sigma(T_u,u)), \dot{\sigma}(T_u,u)\rangle \leq -\frac{1}{4}\phi(\|\sigma(T_u,u)\|) < 0.$$

Podemos então aplicar o Teorema da Função Implícita para concluir que T_u é uma função contínua de u.

Vamos finalmente definir uma deformação $\eta : [0,1] \times I^b \to I^b$ como segue:

$$\eta(t,u) = \begin{cases} u, & \text{se } u \in I^a, \\ \sigma\left(tT_u, u\right), & \text{se } u \in \overline{I^b \setminus I^a}. \end{cases}$$

Observe que, se $u \in I^a \cap \overline{I^b \setminus I^a} = I^{-1}(\{a\})$, então, por definição , temos $T_u = 0$, o que mostra que η está bem definida. Naturalmente, temos

$$\begin{aligned} &\eta(0,\cdot) = \text{id}, \\ &\eta(1, I^b) \subset I^a, \\ &\eta(t,\cdot)|_{I^a} = \text{id}|_{I^a}, \quad \forall\, t \in [0,1], \end{aligned}$$

e resta somente verificar a continuidade de η. Para tanto, observe que $\eta = \text{id}$ em $[0,1] \times I^a$ e, no conjunto $[0,1] \times \overline{I^b \setminus I^a}$, a continuidade segue da teoria das equações difereciais ordinárias. Assim, η é contínua nestes dois conjuntos fechados e coincide na interseção dos dois conjuntos, que é exatamente $I^{-1}(\{a\})$. Isto estabelece a continuidade de η. ∎

O próximo resultado será útil na demonstração do teorema central desta seção .

Lema 2.1.16 (Lema de Separação). *Seja K um espaço métrico compacto e F_1, F_2 dois subconjuntos compactos de K. Então uma das situações abaixo ocorre:*

(1) *Existe uma componente conexa de K interceptando F_1 e F_2,*

(2) *Podemos separar F_1 e F_2, isto é, existem compactos disjuntos K_1 e K_2 tais que $K_1 \cup K_2 = K$ e $F_i \subset K_i$, $i = 1, 2$.*

Demonstração . Suponha, por absurdo, que (1) e (2) não ocorrem. Considere $\mathcal{B}$ a família de todos os subconjuntos compactos de K que interceptam F_1 e F_2. Podemos introduzir em $\mathcal{B}$ uma ordem parcial da seguinte maneira: dados dois subconjuntos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, dizemos que B_1 é maior que B_2 se $B_2 \supset B_1$. Esta é a dual da ordem natural de inclusão.

Uma vez que (1) não se verifica, devemos ter K desconexo. Desta forma, existem subconjuntos não-vazios $J_1, \tilde{J}_1 \subset K$ abertos e fechados em K (e portanto compactos) tais que

$$K = J_1 \cup \tilde{J}_1.$$

Como $F_1 \subset K$ podemos supor, sem perda de generalidade, que $J_1 \cap F_1 \neq \varnothing$. Se tivermos $J_1 \cap F_2 = \varnothing$ então $\tilde{J}_1 \cap F_2 \neq \varnothing$ e $\tilde{J}_1 \cap F_1 \neq \varnothing$. De fato, se tivéssemos $\tilde{J}_1 \cap F_1 = \varnothing$, teríamos separado F_1 e F_2 pelos compactos J_1 e $\tilde{J}_1$. Assim, uma das situações abaixo ocorre

$$[\, J_1 \cap F_1 \neq \varnothing \;\text{ e }\; J_1 \cap F_2 \neq \varnothing \,] \quad \text{ou} \quad [\, \tilde{J}_1 \cap F_1 \neq \varnothing \;\text{ e }\; \tilde{J}_1 \cap F_2 \neq \varnothing \,].$$

Invertendo J_1 e $\tilde{J}_1$ se necessário, podemos supor que ocorre a primeira opção . Como (1) é falso, J_1 não pode ser conexo, e portanto existem subconjuntos não-vazios $J_2, \tilde{J}_2 \subset J_1$ abertos e fechados em J_1 (e portanto compactos) tais que

$$J_1 = J_2 \cup \tilde{J}_2.$$

Novamente, podemos supor que $J_2 \cap F_1 \neq \varnothing$ e $J_2 \cap F_2 \neq \varnothing$ pois, caso contrário, poderíamos separar F_1 e F_2 pelos compactos J_2 e $\tilde{J}_2 \cup \tilde{J}_1$. Continuando este processo, obtemos um conjunto de compactos $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ que, por construção , é totalmente ordenada segundo a relação de ordem de $\mathcal{B}$. O princípio do máximo (cf. [14], pág. 69) nos garante que existe um subconjunto maximal $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ totalmente ordenado contendo $\mathcal{C}$. Considere agora

$$J = \bigcap_{D \in \mathcal{D}} D,$$

que é um compacto não vazio que intercepta F_1 e F_2. Como (1) não ocorre, J não pode ser conexo e portanto, usando o mesmo raciocínio anterior, existe um compacto não-vazio $\tilde{J}$ propriamente contido em J, tal que $\tilde{J} \cap F_1 \neq \varnothing$ e $\tilde{J} \cap F_2 \neq \varnothing$. Desta forma $\mathcal{D} \cup \tilde{J}$ é totalmente ordenado e contém $\mathcal{C}$, o que contraria a maximalidade de $\mathcal{D}$, visto que $\tilde{J} \notin \mathcal{D}$. ■

O teorema seguinte é uma versão, para a condição (GPS), de um lema de deformação devido a Chang [2]. A demonstração apresentada aqui é uma variação da original, e foi inspirada em [19].

Teorema 2.1.17. *Suponha que* $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ *satisfaz* $(\mathrm{GPS})_c$ *para algum* $\phi \in \Lambda$ *e todo* $c \in [a, b]$. *Suponha ainda que* $\underline{a}$ *é o único valor crítico de* I *em* $[a, b)$ *e que as componentes conexas de* K_a *são pontuais. Então* I^a *é retrato de deformação forte de* $I^b \setminus K_b$.

Demonstração . Com as mesmas notações do Lema anterior, considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t, u) & = & -\Phi(\sigma(t, u))\phi(\|\sigma(t, u)\|), \\ \sigma(0, u) & = & u \in I^{-1}([a, b]) \setminus (K_a \cup K_b)\,. \end{cases} \tag{2.1.18}$$

Para cada $u \in I^{-1}([a, b]) \setminus (K_a \cup K_b)$ fixado, temos uma solução $\sigma(\cdot, u)$ definida em um intervalo maximal (T_u^-, T_u^+) e um tempo de chegada T_u. O mesmo raciocínio feito no lema anterior mostra que $T_u < \infty$.

A definição de T_u e o fato da função $t \mapsto I(\sigma(t, u))$ ser decrescente, nos permite concluir que $\lim\limits_{t \nearrow T_u} I(\sigma(t, u)) = \tilde{a} \in [a, b)$. Suponha que $\tilde{a} \in (a, b)$. Então, como I satisfaz (GPS) em $[a, b]$ e $K \cap I^{-1}\left(\left[\tilde{a}, \frac{b+\tilde{a}}{2}\right]\right) = \varnothing$, da demonstração do lema anterior obtemos que existe $\sigma_u^* = \lim\limits_{t \nearrow T_u} \sigma(t, u)$ e que $I(\sigma_u^*) = \tilde{a} > a$. Considerando um problema de Cauchy análogo a (2.1.18), com condição inicial $\sigma(0, u) = \sigma_u^*$, concluímos que $\sigma(\cdot, u)$ está definido em $[0, s]$, $s > T_u$ e $I(\sigma(t, u)) > a$, para todo $t \in [0, s]$, contrariando a definição de T_u. Desta forma, $\lim\limits_{t \nearrow T_u} I(\sigma(t, u)) = a$.

Vamos mostrar que $\sigma_u^* = \lim\limits_{t \nearrow T_u} \sigma(t, u)$ existe, e portanto $I(\sigma_u^*) = a$. A condição $(\mathrm{GPS})_a$ nos garante que K_a é compacto. Logo, faz sentido denotar por $\|u - K_a\|$ a distância de $u \in E$ até o conjunto K_a, isto é,

$$\|u - K_a\| = \inf_{v \in K_a} \|u - v\|\,.$$

Temos dois casos distintos a considerar:

Caso 1. $\inf\limits_{t \in [0, T_u)} \|\sigma(t, u) - K_a\| > 0$. Neste caso, podemos utilizar o Lema 2.1.11 para obter $\alpha > 0$ tal que

$$\inf_{t \in [0, T_u)} \frac{\|I'(\sigma(t, u))\|}{\phi(\|\sigma(t, u)\|)} \geq \alpha.$$

Desta forma temos, para $t_1, t_2 \in [0, T_u)$,

$$\|\sigma(t_2, u) - \sigma(t_1, u)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\sigma}(\tau, u)\|\, d\tau \leq \int_{t_1}^{t_2} \frac{\phi\,\|\sigma(\tau, u)\|}{\|I'(\sigma(\tau, u))\|}\, d\tau \leq \frac{|t_2 - t_1|}{\alpha}.$$

A desigualdade acima e o fato de T_u ser finito, nos permite concluir que existe $\lim\limits_{t \nearrow T_u} \sigma(t, u)$.

Caso 2. $\inf\limits_{t \in [0, T_u)} \|\sigma(t, u) - K_a\| = 0$. O que vamos fazer é mostrar que, neste caso mais delicado, temos $\lim\limits_{t \nearrow T_u} \sigma(t, u) = \sigma_u^* \in K_a$. O primeiro passo é verificar que

$$\lim_{t \nearrow T_u} \|\sigma(t, u) - K_a\| = 0. \tag{2.1.19}$$

Se não fosse assim, teríamos uma sequência $t_n \nearrow T_u$ e $d > 0$ tais que

$$\|\sigma(t_n, u) - K_a\| \geq d. \tag{2.1.20}$$

Porém, a hipótese do caso 2 implica que existe uma outra sequência $s_n \nearrow T_u$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma(s_n, u) - K_a\| = 0. \tag{2.1.21}$$

A continuidade do fluxo σ e a existência das sequências (t_n) e (s_n) satisfazendo (2.1.20) e (2.1.21), respectivamente, nos permite construir duas novas sequências (s'_n) e (t'_n), convergindo para T_u pela esquerda, tais que $s'_n < t'_n$ e que cumprem

$$\|\sigma(s'_n, u) - K_a\| = \frac{d}{2}, \tag{2.1.22}$$

$$\|\sigma(t'_n, u) - K_a\| = d, \tag{2.1.23}$$

e ainda

$$\sigma(t, u) \in \overline{(K_a)_d} \setminus (K_a)_{\frac{d}{2}}, \quad \forall\, t \in [s'_n, t'_n], \tag{2.1.24}$$

As expressões (2.1.22) e (2.1.23) nos permitem escrever

$$\|\sigma(t'_n, u) - \sigma(s'_n, u)\| \geq \|\sigma(t'_n, u) - K_a\| - \|\sigma(s'_n, u) - K_a\| = \frac{d}{2}. \tag{2.1.25}$$

Diminuindo d se necessário, podemos supor que $d < \frac{1}{2}\text{dist}(K_a, K_b)$. Esta observação , (2.1.24) e o Lema 2.1.11 nos fornece $\alpha > 0$ tal que

$$\inf_{t\in[s'_n, t'_n]} \frac{\|I'(\sigma(t, u))\|}{\phi(\|\sigma(t, u)\|)} \geq \alpha, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

A expressão acima e (2.1.25) implicam em que

$$\frac{d}{2} \leq \|\sigma(t'_n, u) - \sigma(s'_n, u)\| \leq \int_{s'_n}^{t'_n} \|\dot{\sigma}(\tau, u)\|\, d\tau \leq \frac{|t'_n - s'_n|}{\alpha} \to 0, \tag{2.1.26}$$

o que é um absurdo. Desta forma temos $\lim\limits_{t\nearrow T_u} \|\sigma(t, u) - K_a\| = 0$.

A veracidade de (2.1.19) e a compacidade de K_a nos permite concluir que

$$\lim_{t\nearrow T_u} I'(\sigma(t, u)) = 0.$$

Vamos mostrar que a expressão acima e (2.1.19) implicam em que, para cada sequência $t_n \nearrow T_u$, existe uma subseqência (t_{n_j}) tal que $\sigma(t_{n_j}, u)$ é convergente. Para tanto, basta mostrar que existe $M > 0$ tal que $\sup\limits_{t\in[0,T_u)} \|\sigma(t, u)\| \leq M$ pois, neste caso, teremos $I(\sigma(t_n, u)) \to a$ e

$$0 \leq \frac{\|I'(\sigma(t_n, u))\|}{\phi(\|\sigma(t_n, u)\|)} \leq \frac{1}{\phi(M)} \|I'(\sigma(t_n, u))\| \to 0,$$

e portanto podemos nos valer de (GPS)$_a$ para extrair a subsequência desejada. Vamos então verificar que existe M satisfazendo a propriedade acima mencionada. Dado $\varepsilon > 0$, podemos utilizar (2.1.19) para obter $\delta > 0$ tal que

$$\|\sigma(t,u) - K_a\| < \varepsilon, \quad \forall\, t \in [T_u - \delta, T_u).$$

Como K_a é compacto, existe $M_1 > 0$ tal que $K_a \subset B(0, M_1)$. Existe também, para cada $t \in [T_u - \delta, T_u)$, $v_t \in K_a$ tal que $\|\sigma(t,u) - v_t\| < \varepsilon$. Desta forma,

$$\|\sigma(t,u)\| \leq \|\sigma(t,u) - v_t\| + \|v_t\| < \varepsilon + M_1, \quad \forall\, t \in [T_u - \delta, T_u). \tag{2.1.27}$$

A função $t \mapsto \|\sigma(t,u)\|$ é contínua no compacto $[0, T_u - \delta]$. Logo, existe $M_2 > 0$ tal que

$$\|\sigma(t,u)\| \leq M_2, \quad \forall\, t \in [0, T_u - \delta].$$

Tendo em vista a expressão acima e (2.1.27), basta fazermos $M = \max\{\varepsilon + M_1,\, M_2\}$ para obter a limitação da órbita.

Lembre que estamos interessados em mostrar que $\lim\limits_{t \nearrow T_u} \sigma(t,u) = \sigma_u^* \in K_a$. Seja então $\mathcal{A}$ o conjunto limite da órbita $\{\sigma(t,u) \mid t \in [0, T_u)\}$ que, por (2.1.19), é um subconjunto não vazio de K_a. Se conseguirmos mostrar que $\mathcal{A}$ é conexo, então podemos utilizar a hipótese sobre as componentes conexas de K_a para concluir que $\mathcal{A}$ é composto por um único ponto σ_u^*. Suponha então, por absurdo, que $\mathcal{A}$ não é conexo. Então existem $A',\ A'' \subset \mathcal{A}$ abertos e fechados em $\mathcal{A}$, tais que

$$A' \neq \varnothing, \;\; A'' \neq \varnothing, \;\; A' \cap A'' = \varnothing \;\; \text{ e } \;\; \mathcal{A} = A' \cup A''.$$

Sejam $z' \in A'$ e $z'' \in A''$. Existem sequências (t'_n) e (t''_n) convergindo para T_u pela esquerda e tais que $\sigma(t'_n, u) \to z'$ e $\sigma(t''_n, u) \to z''$. Podemos supor que $t'_n < t''_n$. Para n suficientemente grande temos

$$\sigma(t'_n, u) \in A', \;\; \sigma(t''_n, u) \in A''.$$

Como A' e A'' são compactos (porque são fechados em $\mathcal{A}$, que é compacto) disjuntos, temos $d\,(A', A'') = \delta > 0$. Isto, a continuidade do fluxo e a expressão acima, nos permite construir uma sequência $(\tilde{t}_n)$ tal que $\tilde{t}_n \in (t'_n, t''_n)$ e

$$\left\|\sigma(\tilde{t}_n, u) - A'\right\| \geq \frac{\delta}{2} \;\; \text{ e } \;\; \left\|\sigma(\tilde{t}_n, u) - A''\right\| \geq \frac{\delta}{2}. \tag{2.1.28}$$

Como $I'(\sigma(\tilde{t}_n, u)) \to 0$ e I satisfaz (GPS)$_a$ podemos supor, sem perda de generalidade, que $\sigma(\tilde{t}_n, u) \to \tilde{z} \in \mathcal{A}$, o que contraria (2.1.28) e mostra que $\mathcal{A}$ é conexo. Conforme explicado anteriormente, isto implica que existe um único $\sigma_u^* \in K_a$ tal que $\lim\limits_{t \nearrow T_u} \sigma(t,u) = \sigma_u^*$.

O próximo passo será provar a continuidade de T_u. Se $\sigma^*_{u_0} \notin K_a$, a continuidade de T_u em u_0 segue de um argumento semelhante ao utilizado no Lema 2.1.12. Vamos então considerar o caso em que $\sigma^*_{u_0} \in K_a$. Se T_u não é contínua em u_0, então existe $u_n \to u_0$ e $\gamma > 0$ tal que

$$|T_{u_n} - T_{u_0}| \geq \gamma.$$

A expressão acima nos permite extrair uma subsequência, que vamos denotar ainda por (u_n), tal que

$$T_{u_n} \leq T_{u_0} - \gamma \quad \text{ou} \quad T_{u_n} \geq T_{u_0} + \gamma.$$

Vamos mostrar que nenhuma das opções acima pode ocorrer.

Suponha que $T_{u_n} \leq T_{u_0} - \gamma$. Uma vez que $I\left(\sigma\left(T_{u_0} - \frac{\gamma}{2}, u_0\right)\right) > a$ e $\sigma\left(T_{u_0} - \frac{\gamma}{2}, \cdot\right)$ é contínua em u_0, temos que, para n suficientemente grande, $T^+_{u_n} \geq T_{u_0} - \frac{\gamma}{2}$ e

$$I\left(\sigma\left(T_{u_0} - \frac{\gamma}{2}, u_n\right)\right) > a.$$

A expressão acima e a definição de T_u nos permite concluir que $T_{u_n} \geq T_{u_0} - \frac{\gamma}{2}$, o que é um absurdo.

Suponha agora que $T_{u_n} \geq T_{u_0} + \gamma$. Afim de obter uma contradição , basta verificar que existem $0 < \tilde{\gamma} < \gamma$ e $M_3 > 0$ tais que

$$\|\sigma(t, u_n)\| \leq M_3, \quad \forall\, t \in [0, T_{u_0} + \tilde{\gamma}),\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.1.29}$$

De fato, caso isso ocorra, dado $0 < \varepsilon < T_{u_0} + \tilde{\gamma}$ temos, para todo $0 \leq t \leq T_{u_0} + \tilde{\gamma} - \varepsilon$,

$$\begin{aligned} I(\sigma(T_{u_0} + \tilde{\gamma} - \varepsilon, u_n)) - I(\sigma(t, u_n)) &= \int_t^{T_{u_0}+\tilde{\gamma}-\varepsilon} \frac{d}{d\tau} I(\sigma(\tau, u_n))\, d\tau \\ &\leq -\frac{1}{4} \int_t^{T_{u_0}+\tilde{\gamma}-\varepsilon} \phi(\|\sigma(\tau, u_n)\|)\, d\tau \\ &\leq -\frac{\phi(M_3)}{4}(T_{u_0} + \tilde{\gamma} - \varepsilon - t), \end{aligned}$$

em que usamos, na última desigualdade, a expressão (2.1.29) e o fato de ϕ ser não-crescente. Uma vez que $T_{u_n} \geq T_{u_0} + \tilde{\gamma}$, temos $I(\sigma(T_{u_0} + \tilde{\gamma} - \varepsilon, u_n)) \geq a$. Desta forma, podemos reescrever a expressão acima da seguinte maneira

$$I(\sigma(t, u_n)) \geq a + \frac{\phi(M_3)}{4}(T_{u_0} + \tilde{\gamma} - \varepsilon - t), \quad \forall\, t \in [0, T_{u_0} + \tilde{\gamma} - \varepsilon],\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Tomando o limite quando $\varepsilon \to 0$, temos

$$I(\sigma(t, u_n)) \geq a + \frac{\phi(M_3)}{4}(T_{u_0} + \tilde{\gamma} - t), \quad \forall\, t \in [0, T_{u_0} + \tilde{\gamma}),\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.1.30}$$

Fixado $\delta > 0$, a dependência contínua em relação aos dados iniciais nos fornece

$$\|\sigma(T_{u_0} - \delta, u_n) - \sigma(T_{u_0} - \delta, u_0)\| \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Utilizando isto e (2.1.30), obtemos

$$I(\sigma(T_{u_0} - \delta, u_0)) = \lim_{n\to\infty} I(\sigma(T_{u_0} - \delta, u_n)) \geq \lim_{n\to\infty} \left[a + \frac{\phi(M_3)}{4}(\tilde{\gamma} + \delta)\right],$$

isto é,

$$I(\sigma(T_{u_0} - \delta, u_0)) \geq a + \frac{\phi(M_3)}{4}(\tilde{\gamma} + \delta).$$

Tomando o limite quando $\delta \to 0$, obtemos $a \geq a + \dfrac{\phi(M_3)}{4}\tilde{\gamma}$, o que é absurdo.

Portanto, para concluir que T_u é contínua, basta mostrar que existem $0 < \tilde{\gamma} < \gamma$ e $M_3 > 0$ satisfazendo (2.1.29). Seja então $0 < \tilde{\gamma} < \gamma$, a ser escolhido posteriormente. Suponha, por absurdo, que (2.1.29) não se verifica para nenhuma constante $M_3 > 0$. Então, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $n_j \in \mathbb{N}$ e $\tau_j \in [0, T_{u_0} + \tilde{\gamma})$ tais que

$$\left\|\sigma(\tau_j, u_{n_j})\right\| > j. \tag{2.1.31}$$

Como K_a é compacto, existe $R > 0$ tal que $K_a \subset B(R, 0)$. Uma vez que $\sigma(t, u_0) \to \sigma^*_{u_0}$ quando $t \nearrow T_{u_0}$, existe j suficientemente grande tal que

$$j > \max\left\{\|\sigma(t, u_0)\| \ \mid 0 \leq t < T_{u_0}\right\}. \tag{2.1.32}$$

Podemos assumir que $j > R$ e utilizar (2.1.31) para obter

$$\left\|\sigma(\tau_j, u_{n_j}) - K_a\right\| \geq j - R.$$

Considere então

$$0 < d < \min\left\{\frac{j - R}{2},\ \frac{1}{2}\text{dist}(K_a,\ K_b)\right\}.$$

Considerando esta escolha de d, temos

$$\left\|\sigma(\tau_j, u_{n_j}) - K_a\right\| \geq d. \tag{2.1.33}$$

Como $u_{n_j} \to u_0$, a dependência contínua em relação aos dados iniciais nos fornece $0 < \delta < T_{u_0}$ tal que

$$\left\|\sigma(t, u_{n_j})\right\| < j, \quad \forall\, t \in [0, T_{u_0} - \delta).$$

A expressão acima e (2.1.31) permitem concluir que $\tau_j > T_{u_0} - \delta$. Além disso, diminuindo δ se necessário, podemos supor que

$$\left\|\sigma(T_{u_0} - \delta, u_{n_j}) - K_a\right\| \leq \frac{d}{2}.$$

A continuidade do fluxo, (2.1.33) e a expressão acima implicam na existência de s_j e t_j tais que $T_{u_0} - \delta \leq s_j < t_j < \tau_j < T_{u_0} + \tilde{\gamma}$,

$$\left\|\sigma(s_j, u_{n_j}) - K_a\right\| = \frac{d}{2}, \tag{2.1.34}$$

e

$$\left\|\sigma(t_j, u_{n_j}) - K_a\right\| = d. \tag{2.1.35}$$

Além disso, a escolha de d e o Lema 2.1.11 nos fornece $\alpha > 0$ tal que

$$\frac{\|I'(u)\|}{\phi(\|u\|)} \geq \alpha \quad \forall\, u \in \overline{(K_a)_d} \setminus (K_a)_{\frac{d}{2}}.$$

Utilizando (2.1.34), (2.1.35) e a expressão acima, concluímos que

$$\frac{d}{2} \leq \left\|\sigma(t_j, u_{n_j}) - \sigma(s_j, u_{n_j})\right\| \leq \frac{t_j - s_j}{\alpha},$$

donde segue que

$$\frac{d\alpha}{2} \leq t_j - s_j \leq \delta + \tilde{\gamma}.$$

Escolhendo $\tilde{\gamma} < \dfrac{d\alpha}{4}$, obtemos uma contradição , desde que δ é arbitrariamente pequeno. Esta contradição conclui a demonstração da continuidade de $u \mapsto T_u$.

Definindo $\eta : [0,1] \times (I^b \setminus K_b) \to (I^b \setminus K_b)$ por

$$\eta(t,u) = \begin{cases} u, & \text{se } (t,u) \in [0,1] \times I^a, \\ \sigma(tT_u, u), & \text{se } (t,u) \in [0,1) \times (I^b \setminus (I^a \cup K_b)), \\ \lim\limits_{t \nearrow T_u} \sigma(t,u), & \text{se } (t,u) \in \{1\} \times (I^b \setminus (I^a \cup K_b)), \end{cases}$$

da mesma forma que no Lema 2.1.12, temos

$$\begin{aligned} &\eta(0,\cdot) = \text{id}, \\ &\eta\left(1, \left(I^b \setminus K_b\right)\right) \subset I^a, \\ &\eta(t,\cdot)|_{I^a} = \text{id}|_{I^a} \ \ \forall\, t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Para estabelecer a continuidade de η, devemos considerar as seguintes possibilidades:

(1) $(t, u) \in [0, 1] \times \text{int}(I^a)$,

(2) $(t, u) \in [0, 1) \times (I^{-1}((a, b]) \setminus K_b)$,

(3) $(t, u) \in \{1\} \times (I^{-1}((a, b]) \setminus K_b)$,

(4) $(t, u) \in [0, 1] \times I^{-1}(\{a\})$.

Os casos (1) e (2) utilizam o mesmo argumento do Lema 2.1.12. As demonstrações de (3) e (4) são semelhantes, de maneira que vamos tratar somente o caso (3).

Para provar a continuidade de η em $(1, u)$, podemos assumir que $\sigma_u^* \in K_a$ pois, caso contrário, temos $T_u < T_u^+$ e a continuidade segue da teoria de equações diferenciais ordinárias. Suponha então que η é descontínua em $(1, u)$. Então, existe $\varepsilon > 0$, $t_n \nearrow T_u$ e $u_n \to u$ tais que

$$\|\sigma(t_n, u_n) - \sigma_u^*\| \geq \varepsilon. \tag{2.1.36}$$

Vamos considerar dois casos distintos.

Caso 1. $\inf\limits_n \|\sigma(t_n, u_n) - K_a\| = 0$. Neste caso, denotando por $\mathcal{A}$ o conjunto dos pontos limites de $\sigma(t_n, u_n)$, temos $F_2 = \mathcal{A} \cap K_a \neq \varnothing$ e F_2 compacto, visto que $\mathcal{A}$ é fechado. Como as componentes conexas de K_a são pontuais, podemos utilizar o Lema de Separação com $F_1 = \{\sigma_u^*\}$ e obter subconjuntos compactos $K_1,\ K_2 \subset K_a$ tais que

$$K_1 \cap K_2 = \varnothing, \ \ K_1 \cup K_2 = K_a, \ \ F_1 \subset K_1, \ \ F_2 \subset K_2.$$

Afirmamos que existe $d_0 > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sigma(t_n, u_n) \notin (K_1)_{d_0}, \quad \forall\, n \geq n_0. \tag{2.1.37}$$

Se não fosse assim, poderíamos escolher, para cada $k \in \mathbb{N}$, um índice $n_k > k$ satisfazendo

$$\|\sigma(t_{n_k}, u_{n_k}) - K_1\| < \frac{1}{k}.$$

Fazendo $n_k \to \infty$ na expressão acima e lembrando que K_1 é compacto, concluiríamos que $(\mathcal{A} \cap K_a) \cap K_1 \neq \varnothing$, o que é absurdo visto que $(\mathcal{A} \cap K_a) \subset K_2$ e $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. As hipóteses sobre K_1 e K_2 implicam que dist$(K_1, K_2) > 0$. Defina então

$$d = \min\left\{d_0, \frac{1}{2}\text{dist}(K_1, K_2)\right\}.$$

Como T_u é contínua temos que, para n suficientemente grande, $T_u - \frac{1}{k} < T_{u_n}$, para um $k \in \mathbb{N}$ fixado. A continuidade em relação aos dados iniciais nos assegura que

$$\sigma\left(T_u - \frac{1}{k}, u_n\right) \to \sigma\left(T_u - \frac{1}{k}, u\right), \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{2.1.38}$$

Uma vez que $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma\left(T_u - \frac{1}{k}, u\right) = \sigma_u^* \in K_1$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sigma\left(T_u - \frac{1}{k}, u\right) \in (K_1)_{\frac{d}{4}}, \quad \forall\, k \geq k_1.$$

A expressão acima e (2.1.38) nos permite construir, por meio de um processo diagonal, uma sequência $s_k = T_u - \frac{1}{k}$ tal que $s_k \nearrow T_u$ e

$$\sigma(s_k, u_{n_k}) \in (K_1)_{\frac{d}{2}}.$$

Isto, (2.1.37) e uma mudança de índice apropriada nos permite obter duas sequências (t_{n_k}), (s_{n_k}) satisfazendo

$$\begin{cases} s_{n_k},\, t_{n_k} \nearrow T_{u_0} \\ \sigma(s_{n_k}, u_{n_k}) \in (K_1)_{\frac{d}{2}} \\ \sigma(t_{n_k}, u_{n_k}) \notin (K_1)_d. \end{cases}$$

Podemos assumir que $s_{n_k} < t_{n_k}$. As informações acima nos permitem obter duas novas sequências (s'_{n_k}), (t'_{n_k}) tais que $s_{n_k} \leq s'_{n_k} < t'_{n_k} \leq t_{n_k}$ e que cumprem

$$\begin{cases} \left\|\sigma(s'_{n_k}, u_{n_k}) - K_1\right\| = \dfrac{d}{2}, \\ \left\|\sigma(t'_{n_k}, u_{n_k}) - K_1\right\| = d, \\ \sigma(t, u_{n_k}) \in \overline{(K_1)_d} \setminus (K_1)_{\frac{d}{2}}, \quad \forall\, t \in [s'_{n_k}, t'_{n_k}]. \end{cases} \tag{2.1.39}$$

Como $K_1 \cup K_2 = K_a$ e $d \leq \frac{1}{2}\text{dist}(K_1, K_2)$, o Lema 2.1.11 nos fornece $\alpha > 0$ tal que

$$\frac{\|I'(v)\|}{\phi(\|v\|)} > \alpha \quad \forall\, v \in I^{-1}([a,b]) \cap \left(\overline{(K_1)_d} \setminus (K_1)_{\frac{d}{2}}\right).$$

A informação acima e (2.1.39) nos conduz a uma contradição , bastando para que isso que argumentemos como em (2.1.26).

Caso 2. $\inf\limits_n \|\sigma(t_n, u_n) - K_a\| = d > 0$. Uma vez que $\sigma_u^* \in K_a$, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\|\sigma(t, u) - K_a\| \leq \frac{d}{4}, \quad \forall\, t \in [T_u - \gamma, T_u). \tag{2.1.40}$$

A continuidade de T_u nos fornece $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$T_{u_n} \geq T_u - \frac{\gamma}{2}, \quad \forall\, n \geq n_0. \tag{2.1.41}$$

Por continuidade em relação aos dados iniciais temos

$$\sigma(T_u - \gamma, u_n) \to \sigma(T_u - \gamma, u), \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{2.1.42}$$

Diminuindo d se necessário e utilizando a hipótese do caso 2, (2.1.40), (2.1.41) e (2.1.42), podemos construir duas sequências (s_n'), (t_n') tais que $T_u - \gamma < s_n' < t_n' < T_{u_n}$ e que cumprem, para n suficientemente grande, as condições (2.1.22), (2.1.23) e (2.1.24). O Lema 2.1.11 nos fornece $\alpha > 0$ tal que

$$\frac{\|I'(u)\|}{\phi(\|u\|)} \geq \alpha, \quad \forall\, u \in \tilde{A} = \big(I^{-1}([a,b]) \setminus K_b\big) \setminus (K)_{\frac{d}{2}}.$$

A expressão acima e o fato de σ ser solução de (2.1.18), nos permite concluir que, para todo $u \in \tilde{A}$, temos

$$\|\dot{\sigma}(t,u)\| \leq \frac{1}{\alpha}, \quad \forall\, t \in [s_n', t_n'].$$

Utilizando isto e (2.1.25), obtemos, para n suficientemente grande

$$\frac{d}{2} \leq \|\sigma(t_n', u_n) - \sigma(s_n', u_n)\| \leq \frac{1}{\alpha}(t_n' - s_n'),$$

e portanto

$$\frac{\alpha d}{2} \leq (t_n' - s_n') \leq T_{u_n} - T_u + \gamma,$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$, e utilizando a continuidade de T_u, concluímos que $\frac{\alpha d}{2} \leq \gamma$, o que é absurdo visto que γ pode ser tomado arbitrariamente pequeno. Esta contradição mostra que η é contínua em $(1, u)$, e portanto I^a é retrato de deformação forte de $I^b \setminus K_b$. ■

Observação 2.1.43. Podemos ter $b = \infty$ no Teorema 2.1.17. Em outras palavras, se I não possui valores críticos acima do nível a, então I^a é retrato de deformação forte de E.

2.2 Teoria de Morse

O objetivo desta seção é apresentar alguns resultados da Teoria de Morse, que serão úteis no estudo de pontos críticos de certos funcionais. Temos dois aspectos básicos a considerar: um global, que trata do estudo da estrutura topológica dos conjuntos de nível via grupos de homologia e, outro local, que se concentra no estudo do comportamento do funcional nas proximidades de um ponto crítico isolado. Este último será feito por meio dos grupos críticos do funcional.

A exposição está dividida em duas subseções . A primeira traz uma exposição axiomática acerca dos grupos de homologia, bem como algumas de suas principais propriedades. Para um estudo mais detalhado, ver [9]. A segunda parte trata dos grupos críticos, cujas propriedades, juntamente com os teoremas de deformação da seção anterior, nos permitirão demonstrar alguns resultados que serão utilizados no Capítulo 2.

2.2.1 Homologia Relativa

Seja B um subespaço de um espaço topológico A. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $H_n(A, B)$ o *n-ésimo grupo de homologia singular* sobre um corpo F. Uma aplicação $I : (A, B) \to (A', B')$ é uma função contínua $I : A \to A'$ tal que $I(B) \subset B'$. Denotamos por $\mathcal{R}(I)$ a imagem de I, isto é,

$$\mathcal{R}(I) = \{I(u) \mid u \in A\}.$$

Para cada aplicação I nessas condições , existe um homomorfismo

$$I_{n^*} : H_n(A, B) \to H_n(A', B')$$

chamado *homomorfismo induzido*. Dado um subespaço $C \subset B$, existe um homomorfismo

$$\partial_n : H_n(A, B) \to H_{n-1}(B, C)$$

chamado *homomorfismo de fronteira*. Afim de não carregar a notação vamos omitir, sempre que possível, os sub-índices e escrever apenas I_* e ∂. Pode-se mostrar (cf. [9]) que os grupos de homologia singular satisfazem os *axiomas de Eilenberg-Steenrod*. São eles

(A1) $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}$.

(A2) $(J \circ I)_* = J_* \circ I_*$.

(A3) O diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_n(A, B) & \xrightarrow{I_*} & H_n(A', B') \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ H_{n-1}(A, B) & \xrightarrow{(I|_B)_*} & H_{n-1}(B', C'). \end{array}$$

é comutativo.

(A4) **(Exatidão)** Sejam $i : (B, C) \to (A, C)$ e $j : (A, C) \to (A, B)$ as funções de inclusão. A sequência de homologias

$$\cdots \to H_{n+1}(A, B) \xrightarrow{\partial} H_n(B, C) \xrightarrow{i_*} H_n(A, C) \xrightarrow{j_*} H_n(A, B) \to \cdots \tag{2.2.1}$$

é exata, isto é, a imagem de um homomorfismo é igual ao núcleo do próximo homomorfismo.

(A5) **(Invariância por Homotopia)** Se I e J são homotópicos, isto é, $I = G(0, \cdot)$, $J = G(1, \cdot)$, para alguma função contínua $G : [0, 1] \times A \to A'$ tal que $G([0, 1] \times B) \subset B'$, então $I_* = J_*$.

(A6) **(Excisão)** Suponha que C é um subconjunto aberto de A tal que o fecho de C está contido no interior de B. Seja $i : (A \setminus C, B \setminus C) \to (A, B)$ a função de inclusão. Então i_* é um isomorfismo.

(A7) Se $u \in A$, então $H_n(\{u\}, \varnothing) = \delta_{n,0}F$, onde $\delta_{n,0}$ é o símbolo de Kronecker.

Usaremos também os seguintes resultados, cujas demonstrações podem ser encontradas em [9].

Teorema 2.2.2 (Teorema de Decomposição). *Se* $(A, B) = \bigcup_{i=1}^{j} (A_i, B_i)$, *onde os* A_i *são fechados e disjuntos, então*

$$H_n(A, B) = \bigoplus_{i=1}^{j} H_n(A_i, B_i).$$

Teorema 2.2.3 (Sequência de Mayer-Vietoris). *Suponha que* X_1, X_2 *são abertos em* $X = X_1 \cup X_2$ *e que* $Y_1 \subset X_1$, $Y_2 \subset X_2$ *são abertos em* $Y = Y_1 \cup Y_2$. *Se* $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$. *Então existe uma sequência exata*

$$\cdots \to H_n(X_1, Y_1) \oplus H_n(X_2, Y_2) \to H_n(X, Y) \to H_{n-1}(X_1 \cap X_2, Y_1 \cap Y_2)$$

$$\to H_{n-1}(X_1, Y_1) \oplus H_{n-1}(X_2, Y_2) \to \cdots ,$$

chamada sequência de Mayer-Vietoris do par $\{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)\}$.

O resultado seguinte relaciona o conceito de homologia com o de retrato de deformação forte, definido na seção anterior.

Lema 2.2.4. *Sejam* $C \subset A' \subset A$ *espaços topológicos. Se* A' *é retrato de deformação forte de* A, *então* $H_n(A, C)$ *é isomorfo a* $H_n(A', C)$.

Demonstração . Seja $\eta \in C([0,1] \times A, A)$ conforme a Definição 2.1.6, $r : (A, C) \to (A', C)$ dada por

$$r(u) = \eta(1, u)$$

e

$$i : (A', C) \to (A, C)$$

a inclusão de A' em A. Naturalmente, η é uma homotopia entre as funções id e $i \circ r$. Assim,

$$i_* \circ r_* = (i \circ r)_* = \text{id}_* = \text{id},$$

em que usamos, na segunda igualdade, a propriedade de invariância por homotopia (A5). Por outro lado, pela definição de r, temos

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = \text{id}_* = \text{id}.$$

Concluímos assim que r_* possui inversa à esquerda e à direita, isto é, r_* é um isomorfismo entre $H_n(A, C)$ e $H_n(A', C)$. ■

O lema a seguir nos permitirá calcular a homologia da esfera.

Lema 2.2.5. *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^p$ contendo 0 e B^k a bola unitária fechada de $\mathbb{R}^k$. Então, para $k \geq 1$,*

$$H_n\left(A \times B^k, \left(A \times B^k\right) \setminus \{0\}\right) \cong H_{n-k}(A, A \setminus \{0\}). \tag{2.2.6}$$

Demonstração . Considere incialmente o caso $k = 1$. Fazendo $C = A \times \left(\left[-1, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ e utilizando a propriedade de excisão (A6), obtemos

$$H_n\left(A \times [-1,1], (A \times [-1,1]) \setminus \{0\}\right) \cong H_n\left(A \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \left(A \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) \setminus \{0\}\right).$$

Identificando o par de conjuntos $(A \times \{-1\}, A \times \{1\})$ com o par de pontos (w_-, w_+) obtemos, via topologia quociente, a suspensão de A, que vamos denotar por ΣA. Novamente por excisão, temos

$$H_n\left(\Sigma A, \Sigma A \setminus \{0\}\right) \cong H_n\left(A \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \left(A \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) \setminus \{0\}\right).$$

e portanto

$$H_n\left(A \times [-1,1], (A \times [-1,1]) \setminus \{0\}\right) \cong H_n\left(\Sigma A, \Sigma A \setminus \{0\}\right).$$

Definindo os conjuntos

$$X_+ = \Sigma A \setminus \{w_-\}, \quad X_- = \Sigma A \setminus \{w_+\},$$

$$Y_+ = X_+ \setminus (\{0\} \times (-1,0]) \quad \text{e} \quad Y_- = X_- \setminus (\{0\} \times [0,1)),$$

temos

$$X_+ \cup X_- = \Sigma A, \qquad X_+ \cap X_- = A \times (-1,1),$$

$$Y_+ \cup Y_- = \Sigma A \setminus \{0\} \quad \text{e} \quad Y_+ \cap Y_- = (A \setminus \{0\}) \times (-1,1).$$

Uma vez que X_+ e Y_+ (resp. X_- e Y_-) são contráteis a w_+ (resp. w_-), temos, por (A5),

$$H_n\left(X_\pm, Y_\pm\right) \cong H_n\left(w_\pm, w_\pm\right).$$

A exatidão da sequência

$$H_{n+1}\left(w_\pm, w_\pm\right) \to H_n(w_\pm) \to H_n\left(w_\pm, w_\pm\right) \to H_{n-1}(w_\pm)$$

e (A7) implicam em que $H_n\left(w_\pm, w_\pm\right) \cong \{0\}$, e portanto

$$H_n\left(X_\pm, Y_\pm\right) \cong \{0\}.$$

Utilizando o Teorema 2.2.3 para o par $\{(X_+, Y_+), (X_-, Y_-)\}$, obtemos

$$H_n\left(X_+ \cup X_-, Y_+ \cup Y_-\right) \cong H_{n-1}\left(X_+ \cap X_-, Y_+ \cap Y_-\right),$$

isto é,

$$H_n\left(\Sigma A, \Sigma A \setminus \{0\}\right) \cong H_{n-1}\left(A \times (-1,1), (A \setminus \{0\}) \times (-1,1)\right) \cong H_{n-1}\left(A, A \setminus \{0\}\right),$$

e portanto o lema vale para $k = 1$.

Se $k \geq 2$, então, como B^k é retrato de deformação forte de $[-1,1] \times B^{k-1}$, temos

$$H_n\left(A \times B^k, \left(A \times B^k\right) \setminus \{0\}\right) \cong H_n\left(A \times [-1,1] \times B^{k-1}, \left(A \times [-1,1] \times B^{k-1}\right) \setminus \{0\}\right).$$

Este fato, e um argumento semelhante ao utilizado para o caso $k = 1$, nos permite escrever

$$H_n\left(A \times B^k, \left(A \times B^k\right) \setminus \{0\}\right) \cong H_{n-1}\left(A \times B^{k-1}, \left(A \times B^{k-1}\right) \setminus \{0\}\right).$$

Repetindo-se o raciocínio acima outras $k - 1$ vezes obtemos

$$H_n\left(A \times B^k, \left(A \times B^k\right) \setminus \{0\}\right) \cong H_{n-k}\left(A, A \setminus \{0\}\right),$$

o que finaliza a demonstração do lema. ∎

Corolário 2.2.7. *Sob as mesmas hipóteses do Lema 2.2.5, temos*

$$H_n\left(B^k, S^{k-1}\right) = \delta_{n,k}F,$$

em que $S^{k-1} = \partial B^k$ é a esfera unitária.

Demonstração. Utilizando o Lema 2.2.5 com $A = \{0\}$ obtemos

$$H_n\left(\{0\} \times B^k, \left(\{0\} \times B^k\right) \setminus \{0\}\right) \cong H_{n-k}\left(\{0\}, \varnothing\right) = \delta_{n-k,0}F = \delta_{n,k}F. \tag{2.2.8}$$

Como $\{0\} \times B^k$ é homeomorfo a B^k e S^{k-1} é retrato de deformação forte de $B^k \setminus \{0\}$, obtemos

$$H_n\left(\{0\} \times B^k, \left(\{0\} \times B^k\right) \setminus \{0\}\right) \cong H_n\left(B^k, B^k \setminus \{0\}\right) \cong H_n(B^k, S^{k-1}).$$

A expressão acima e (2.2.8) nos fornecem o resultado desejado. ∎

Nosso objetivo agora é utilizar este último resultado para calcular a homologia da esfera S^{k-1}. Para o caso $n \geq 1$ considere a sequência exata

$$H_{n+1}(B^k) \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(B^k, S^{k-1}) \xrightarrow{\partial} H_n(S^{k-1}) \xrightarrow{i_*} H_n(B^k) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \{0\}. \tag{2.2.9}$$

Como $n \geq 1$ e B^k é homotópico a um ponto, temos $H_{n+1}(B^k) \cong H_n(B^k) \cong \{0\}$. Desta forma, o Corolário 2.2.7 nos permite reescrever a sequência (2.2.9) como

$$\{0\} \xrightarrow{j_*} \delta_{n,k-1}F \xrightarrow{\partial} H_n(S^{k-1}) \xrightarrow{i_*} \{0\},$$

isto é,

$$\begin{cases} \{0\} \xrightarrow{j_*} \{0\} \xrightarrow{\partial} H_n(S^{k-1}) \xrightarrow{i_*} \{0\} & \text{se } n \neq k-1, \\ \{0\} \xrightarrow{j_*} F \xrightarrow{\partial} H_n(S^{k-1}) \xrightarrow{i_*} \{0\} & \text{se } n = k-1. \end{cases}$$

No primeiro caso, temos $\{0\} = \mathcal{R}(\partial) = \ker i_* = H_n(S^{k-1})$. No segundo caso

$$\{0\} = \mathcal{R}(j_*) = \ker \partial \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}(\partial) = \ker i_* = H_n(S^{k-1}).$$

Desta forma, para $n \geq 1$,

$$H_n(S^{k-1}) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq k-1, \\ F, & \text{se } n = k-1. \end{cases}$$

Vamos agora tratar o caso $n = 0$. Se $k \geq 2$, então a sequência (2.2.9) se escreve como

$$\{0\} \xrightarrow{j_{1*}} \{0\} \xrightarrow{\partial_1} H_0(S^{k-1}) \xrightarrow{i_{1*}} F \xrightarrow{j_{0*}} \{0\},$$

o que implica que $H_0(S^{k-1}) \cong F$. Resta então calcular $H_0(S^0)$. Para tanto observe que, pelo Teorema 2.2.2 e por (A7), temos

$$H_0(S^0) = H_0(\{-1\}) \oplus H_0(\{1\}) = F \oplus F.$$

Sumarizando as observações feitas após o Corolário 2.2.7, temos o seguinte

Teorema 2.2.10 (Homologia da Esfera). *Seja $B^k \subset \mathbb{R}^k$ a bola unitária fechada e $S^{k-1} = \partial B^k$ a esfera unitária. Então*

$$H_n(S^{k-1}) = \begin{cases} 0, & \textit{se } [n \geq 1,\, k \geq 2,\, n \neq k-1], \\ F, & \textit{se } [k-1 = n,\, n \geq 1] \textit{ ou } [n = 0,\, k \geq 2], \\ F \oplus F, & \textit{se } [n = 0,\, k = 1]. \end{cases}$$

2.2.2 Grupos Críticos

Nesta subseção definimos o conceito de grupo crítico de um funcional I, e verificamos que este conceito nos permite avaliar o comportamento do funcional próximo a um ponto crítico isolado. Introduzimos também a noção de índice de Morse, que será importante no resultado abstrato do Capítulo 2.

Definição 2.2.11. *Seja u um ponto crítico isolado de $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. O n-*ésimo grupo crítico *(sobre um corpo F) de I em u é definido por*

$$C_n(I, u) = H_n\left(I^c \cap U, (I^c \setminus \{u\}) \cap U\right), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

onde $c = I(u)$ e U é uma vizinhança fechada e suficientemente pequena de u.

Pela propriedade de excisão, o grupo crítico independe da escolha da vizinhança U. Vamos destacar aqui um caso trivial, porém importante, que é aquele em que u é um ponto de mínimo isolado. Então existe uma vizinhança fechada U de u tal que

$$I(v) > c = I(u), \quad \forall\, v \in U \setminus \{u\}.$$

Neste caso temos

$$C_n(I, u) = H_n(\{u\}, \varnothing) = \delta_{n,0} F, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Vamos agora fixar um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e supor que os pontos críticos de I em $I^{-1}([a, b])$ são todos isolados. Vamos supor também que I satisfaz (GPS) em $[a, b]$. Sob estas condições

, $I^{-1}([a,b])$ contém no máximo um número finito de pontos críticos. De fato, suponha que I possui infinitos pontos críticos em $I^{-1}([a,b])$. Poderíamos então construir uma sequência $(v_n) \subset I^{-1}([a,b])$ tal que $I'(v_n) = 0$ e daí, por (GPS), extrair uma subsequência $v_{n_k} \to v \in I^{-1}([a,b])$. Como $I \in C^1$, deveríamos ter $I'(v) = 0$, o que é absurdo, visto que os pontos críticos de I em $I^{-1}([a,b])$ são isolados. Uma vez que temos um número finito $u_1, \ldots, u_m$ de pontos críticos, faz sentido definir o *número de Morse* do par $(I^b,\ I^a)$ por

$$M_n(I^b, I^a) = \sum_{i=1}^{m} \dim C_n(I, u_i). \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Como na seção anterior supomos que F é um corpo, os grupos de homologia $H_n(I^b, I^a)$ são espaços vetoriais. O próximo resultado utiliza os lemas de deformação para relacionar os números de Morse com a dimensão dos espaços vetoriais $H_n(I^b, I^a)$.

Teorema 2.2.12. *Seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo* (GPS). *Se os pontos críticos de I em $I^{-1}([a,b])$ são isolados e correspondem a um mesmo valor crítico $c \in (a,b)$, então*

$$M_n(I^b, I^a) = \dim H_n(I^b, I^a), \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{2.2.13}$$

Demonstração . Utilizando o Teorema 2.1.17 concluímos que I^c e I^a são retratos de deformação forte de I^b e $I^c \setminus K_c$, respectivamente. Desta forma

$$H_n(I^b, I^a) \cong H_n(I^c, I^a) \cong H_n(I^c, I^c \setminus K_c). \tag{2.2.14}$$

Denotemos $K_c = \{u_1, \ldots, u_m\}$ e sejam $U_1, \ldots, U_m$ vizinhanças disjuntas e fechadas de $u_1, \ldots, u_m$ tais que

$$U = \bigcup_{i=1}^{m} U_i \subset I^{-1}\left([a,b]\right).$$

Uma vez que $C = I^c \setminus U$ é aberto em I^c e $\overline{C}$ está contido no interior de $I^c \setminus K_c$, podemos utilizar a propriedade de excisão para concluir que

$$H_n\left(I^c, I^c \setminus K_c\right) \cong H_n\left(I^c \setminus C, (I^c \setminus K_c) \setminus C\right) = H_n\left(I^c \cap U, (I^c \setminus K_c) \cap U\right) \tag{2.2.15}$$

Como as vizinhanças U_i são fechadas, disjuntas e sua união é o conjunto U, podemos aplicar o Teorema 2.2.2 para obter

$$\begin{aligned} H_n\left(I^c \cap U, (I^c \setminus K_c) \cap U\right) &= \bigoplus_{i=1}^{m} H_n\left(I^c \cap U_i, (I^c \cap U_i) \setminus \{u_i\}\right) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{m} C_n\left(I, u_i\right). \end{aligned}$$

Daqui e de (2.2.15) e (2.2.14), obtemos

$$H_n(I^b, I^a) \cong H_n\left(I^c, I^c \setminus K_c\right) \cong \bigoplus_{i=1}^{m} C_n\left(I, u_i\right),$$

e portanto,

$$\dim H_n(I^b, I^a) = \sum_{i=1}^{m} \dim C_n\left(I, u_i\right) = M_n(I^b, I^a),$$

conforme afirmamos. ∎

Este nos parece o momento oportuno para introduzir o conceito de índice de Morse.

Definição 2.2.16. *Seja $u \in H$ um ponto crítico de $I \in C^2(H, \mathbb{R})$. O* índice de Morse [índice de Morse aumentado] *de I em u, denotado por $m(I, u)$* [$\overline{m}(I, u)$], *é o supremo dos valores* $\dim V \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ *considerando-se os subespaços $V \subset H$ nos quais $I''(u)$ é negativa definida* [*seminegativa definida*].

O nosso objetivo agora é calcular efetivamente os grupos críticos de I em um ponto crítico u e relacioná-los com o índice de Morse deste ponto. O lema seguinte será útil para estudarmos o comportamento de um funcional I próximo a um ponto crítico não degenerado.

Lema 2.2.17. *Suponha que $I \in C^2(H, \mathbb{R})$ e u_0 é um ponto crítico não degenerado de I. Então existem vizinhanças abertas V_0 e U_{u_0}, de 0 e u_0, respectivamente, e um homeomorfismo $\psi : V_0 \to U_{u_0}$ tal que $\psi(0) = u_0$ e*

$$I(\psi(u)) = I(u_0) + \frac{1}{2}\left\langle I''(u_0)u, u\right\rangle, \quad \forall\, u \in V_0.$$

Demonstração. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $u_0 = 0$ e $I(u_0) = 0$. Seja então $T = I''(0)$ e considere, para cada $u \in H$, o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t, u) &= -\dfrac{T\sigma(t, u)}{\|T\sigma(t, u))\|}, \\ \sigma(0, u) &= u. \end{cases}$$

Uma vez que

$$\|\sigma(t, u) - u\| = \left\| \int_0^t \dot{\sigma}(s, u)\, ds \right\| \leq |t|, \tag{2.2.18}$$

devemos ter

$$\|\sigma(t, u)\| \geq \|u\| - |t|. \tag{2.2.19}$$

Como 0 é ponto crítico não degenerado, T é um isomorfismo. Assim, a expressão (2.2.19) mostra que $\|T\sigma(t,u)\| \neq 0$ sempre que $|t| < \|u\|$ e portanto o fluxo σ está bem definido para tais valores de t. Também, do fato de T ser um isomorfismo, existe $C > 0$ tal que

$$\|T\sigma(t,u)\| \geq C\,\|\sigma(t,u)\|\,. \tag{2.2.20}$$

Seja então $0 < \varepsilon < \frac{C}{2}$ um número fixado. Definindo $J(u) = \frac{1}{2}\langle Tu, u\rangle$, podemos utlilizar a Fórmula de Taylor e o fato de 0 ser ponto crítico de I para obter $\delta_1 > 0$ tal que

$$|I(u) - J(u)| < \varepsilon\,\|u\|^2\,, \quad \forall\, u \in B(0,\delta_1). \tag{2.2.21}$$

Daqui para frente vamos sempre considerar $u \in B(0,\delta_1)$. Temos

$$\begin{aligned} |J(\sigma(t,u)) - J(u)| &= \left|\int_0^t \frac{d}{d\tau} J(\sigma(\tau,u))\,d\tau\right| = \left|\int_0^t \langle J'(\sigma(\tau,u)), \dot{\sigma}(\tau,u)\rangle\ d\tau\right| \\ &= \left|\int_0^t -\|T\sigma(\tau,u)\|\ d\tau\right|. \end{aligned}$$

Esta última expressão, juntamente com (2.2.19) e (2.2.20) implicam em que

$$|J(\sigma(t,u)) - J(u)| \geq C\left(\|u\|\,|t| - \frac{t^2}{2}\right). \tag{2.2.22}$$

Uma vez que $t_0(u) = \left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{2\varepsilon}{C}}\right)\|u\|$ é solução da equação

$$C\left(\|u\|\,|t| - \frac{t^2}{2}\right) = \varepsilon\,\|u\|^2\,,$$

temos, por (2.2.22),

$$|J(\sigma(t_0(u),u)) - J(u)| \geq \varepsilon\,\|u\|^2 \quad \text{e} \quad |J(\sigma(-t_0(u),u)) - J(u)| \geq \varepsilon\,\|u\|^2\,.$$

Estas desigualdades, (2.2.21) e o fato de que $t \mapsto J(\sigma(t,u))$ ser decrescente, implicam em que

$$J(\sigma(t_0(u),u)) < I(u) < J(\sigma(-t_0(u),u)).$$

A expressão acima e o Teorema do Valor Intermediário nos garante que existe $\tilde{t}(u)$, com

$$|\tilde{t}(u)| < \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon}{C}}\right)\|u\|\,, \tag{2.2.23}$$

e tal que $J(\sigma(\tilde{t}(u),u)) = I(u)$, isto é,

$$I(u) = \frac{1}{2}\left\langle I''(0)\sigma(\tilde{t}(u),u), \sigma(\tilde{t}(u),u)\right\rangle. \tag{2.2.24}$$

O fato de $J(\sigma(t,u))$, como função de t, ser decrescente em $(-\|u\|, \|u\|)$ nos garante a unicidade de $\tilde{t}(u)$. Podemos então definir $\Theta : B(0,\delta_1) \to H$ por

$$\Theta(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } u = 0, \\ \sigma(\tilde{t}(u),u), & \text{se } u \neq 0. \end{cases}$$

Vamos verificar que Θ é continua. A continuidade em 0 segue de (2.2.18) e (2.2.23). Para $u \neq 0$ basta observar que

$$\frac{\partial}{\partial t}J(\sigma(\tilde{t}(u),u)) = -\left\|T\sigma(\tilde{t}(u),u)\right\| \neq 0,$$

e portanto a continuidade segue do Teorema da Função Implícita. Obtemos assim uma função contínua $\Theta : B(0,\delta_1) \to H$ que satisfaz

$$I(u) = \frac{1}{2}\left\langle I''(0)\Theta(u), \Theta(u)\right\rangle, \quad \forall\, u \in B(0,\delta_1). \tag{2.2.25}$$

Para cada $u \in H$ fixado, a função $\eta : [-\tilde{t}(u), 0] \to H$ definida por $\eta(t) = \sigma(-t,u)$ é solução de

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t,u) & = & \dfrac{T\eta(t,u)}{\|T\eta(t,u))\|}, \\ \eta(-\tilde{t}(u),u) & = & \sigma(\tilde{t}(u),u). \end{cases}$$

Podemos então, repetindo o raciocínio anterior, obter $\delta_2 > 0$ e uma função contínua $\psi : B(0,\delta_2) \to H$ que satisfazem

$$I(\psi(u)) = \frac{1}{2}\left\langle I''(0)u, u\right\rangle, \quad \forall\, u \in B(0,\delta_2). \tag{2.2.26}$$

Definindo $B = B(0,\delta_1) \cap B(0,\delta_2)$, $U = \Theta^{-1}(B) \cap \psi^{-1}(B) \cap B$ e $V_0 = \psi^{-1}(U) \cap B$, obtemos três conjuntos abertos contendo a origem. A demonstração estará concluída se mostrarmos que $V_0 \subset \Theta(U)$. De fato, sendo isto verdade, podemos definir $U_0 = \Theta^{-1}(V_0)$ e utilizar as expressões (2.2.25) e (2.2.26), bem como a continuidade de ψ e Θ, para concluir que $\psi : V_0 \to U_0$ satisfaz as condições requeridas pelo lema. Provemos então que $V_0 \subset \Theta(U)$. Dado $u \in V_0$, podemos utilizar o fato de que $\psi(u) \in U$, (2.2.25), $u \in B$ e (2.2.26), para obter

$$\frac{1}{2}\left\langle I''(0)\Theta(\psi(u)), \Theta(\psi(u))\right\rangle = I(\psi(u)) = \frac{1}{2}\left\langle I''(0)u, u\right\rangle.$$

A expressão acima e a maneira como foram contruídas as funções Θ e ψ, nos permitem concluir que $\Theta(\psi(u)) = u$, isto é, $u \in \Theta(U)$, o que finaliza a demonstração . ■

Observação 2.2.27. Pode-se mostrar que a função ψ definida acima é de fato um difeomorfismo local (cf. [2]). Este resultado é conhecido como Lema de Morse.

O teorema seguinte mostra que os grupos críticos em um ponto crítico não degenerado dependem somente do seu índice de Morse.

Teorema 2.2.28. *Seja $I \in C^2(H,\mathbb{R})$ e u_0 um ponto crítico não degenerado de I, tal que $m(I,u_0) = k < \infty$. Então*

$$C_n(I,u_0) = \delta_{n,k}F, \quad n = 0,\, 1, \ldots. \tag{2.2.29}$$

Demonstração. Novamente, podemos supor que $u_0 = 0$ e $I(u_0) = 0$. Utilizando a mudança de variáveis dada pelo lema anterior, podemos supor que

$$I(u) = \frac{1}{2}\langle Tu, u\rangle, \quad \forall\, u \in V_0,$$

em que $T = I''(0)$.

Uma vez que T é inversível podemos escrever $H = H^- \oplus H^+$, em que H^- e H^+ são subespaços fechados, ortogonais e I é negativa (resp. positiva) definida em H^- (resp. H^+). Considerando $u = u^- + u^+$ a correspondente decomposição de cada elemento $u \in H$, temos

$$I(u) = \frac{1}{2}\left\langle Tu^+, u^+\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle -Tu^-, u^-\right\rangle = \left\|u^+\right\|_T^2 - \left\|u^-\right\|_T^2, \quad \forall\, u \in V_0,$$

em que estamos utilizando o fato da aplicação $(u,v) \mapsto \langle Tu, v\rangle$ ser bilinear, simétrica e coerciva, e portanto definir uma norma $\|\cdot\|_T$ em H. Como esta aplicação bilinear é coerciva, a norma $\|\cdot\|_T$ é equivalente à norma do espaço H. Isto, e o fato de ψ ser um homeomorfismo, nos permite concluir que, para uma bola fechada $B = \overline{B(0,\varepsilon)} \subset V_0$, temos

$$B \cap I^0 = \{u \in H \mid \|u\| \le \varepsilon,\ \|u_+\| \le \|u_-\|\}.$$

A expressão acima e a aplicação

$$\eta(t,u) = u^- + (1-t)u^+ \quad \forall\,(t,u) \in [0,1] \times (B \cap I^0),$$

nos permite concluir que $E^- \cap B$ é retrato de deformação forte de $I^0 \cap B$ e que $(E^- \setminus \{0\}) \cap B$ é retrato de deformação forte de $(I^0 \setminus \{0\}) \cap B$. Utilizando isto e o fato de que $\dim E^- = k$, temos

$$C_n(I,0) = H_n(I^0 \cap B, (I^0 \setminus \{0\}) \cap B) \cong H_n(E^- \cap B, (E^- \setminus \{0\}) \cap B) \cong H_n(B^k, S^{k-1}).$$

O resultado segue então do Corolário 2.2.7 e do fato de que $H_n(\{0\}, \varnothing) = \delta_{n,0}F$. ∎

Observação 2.2.30. Se um funcional $I \in C^2(H,\mathbb{R})$ satisfaz as hipóteses do Teorema 2.2.12 e todos os pontos críticos de I em $I^{-1}([a,b])$ são não degenerados, então as expressões (2.2.13) e (2.2.29) mostram que a dimensão de $H_n(I^b, I^a)$ é igual ao número de pontos críticos de I com índice de Morse n em $I^{-1}([a,b])$.

2.3 Método da Pertubação de Marino-Prodi

Nesta seção , sob certas hipóteses e em uma vizinhança de um ponto crítico possivelmente degenerado, apresentamos um resultado que nos permite aproximar o funcional dado por um outro que não possui pontos críticos degenerados naquela vizinhança. Os resultados são baseados no trabalho de Marino & Prodi [12] (cf. também [21]). Primeiro um resultado preliminar, que será útil adiante.

Lema 2.3.1. *Seja $A \subset E$ compacto. Dado $\mu > 0$, existe uma função $\varphi \in C^\infty(E,[0,1])$, com todas as derivadas limitadas, satisfazendo*

$$\varphi(u) = 1, \quad \forall\, u \in (A)_\mu, \tag{2.3.2}$$

$$\varphi(u) = 0, \quad \forall\, u \in E \setminus (A)_{2\mu}. \tag{2.3.3}$$

Demonstração . Naturalmente, temos $A \subset \bigcup\limits_{u\in A} B\left(u, \frac{\mu}{2}\right)$. A compacidade de A nos permite extrair um subconjunto $\{u_1,\ldots,u_m\} \subset A$ tal que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B\left(u_i, \frac{\mu}{2}\right). \tag{2.3.4}$$

Seja $\alpha : \mathbb{R} \to [0,1]$ uma função de classe C^∞, com todas as derivadas limitadas, e tal que

$$\alpha(s) = 1, \quad \text{se } s \le \tfrac{9}{4}, \tag{2.3.5}$$

$$\alpha(s) = 0, \quad \text{se } s \ge 4. \tag{2.3.6}$$

Para cada $i = 1,2,\ldots,m$ defina $\varphi_i : E \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi_i(u) = \alpha\left(\frac{\|u-u_i\|^2}{\mu^2}\right).$$

Uma vez que α e $\|\cdot\|^2$ são de classe C^∞, temos que φ_i é infinitamente diferenciável. Mais ainda, valem as seguintes igualdades

$$\varphi_i(u) = 1, \quad \text{se } u \in B\left(u_i, \tfrac{3}{2}\mu\right), \tag{2.3.7}$$

$$\varphi_i(u) = 0, \quad \text{se } u \notin B\left(u_i, 2\mu\right). \tag{2.3.8}$$

De fato, dado $u \in B\left(u_i, \frac{3}{2}\mu\right)$ temos $\|u - u_i\| < \frac{3}{2}\mu$, donde segue que $\frac{\|u-u_i\|^2}{\mu^2} < \frac{9}{4}$ e portanto, por (2.3.5), $\varphi_i(u) = 1$. Para verificar (2.3.8), considere $u \notin B(u_i, 2\mu)$. Como $\|u - u_i\| \geq 2\mu$, temos que $\frac{\|u-u_i\|^2}{\mu^2} \geq 4$ e, por (2.3.6), $\varphi_i(u) = 0$. Observando agora que $\operatorname{supp}\varphi_i \subset \overline{B(u_i, 2\mu)}$, concluímos que φ_i possui todas as derivadas limitadas.

Seja agora $\beta : \mathbb{R} \to [0,1]$ de classe C^∞, com todas as derivadas limitadas, e tal que

$$\beta(s) = 1, \quad \text{se } s \geq 1, \tag{2.3.9}$$

$$\beta(s) = 0, \quad \text{se } s \leq 0, \tag{2.3.10}$$

e defina $\varphi : E \to [0,1]$ por

$$\varphi(u) = \beta\left(\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(u)\right).$$

Naturalmente, φ é de classe C^∞ e possui todas as derivadas limitadas. Resta então mostrar que φ satisfaz (2.3.2) e (2.3.3). Dado $u \in (A)_\mu$, precisamos encontrar $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $\varphi_i(u) = 1$. Seja $v \in A$ tal que $\|u - v\| < \mu$. De acordo com (2.3.4), existe $u_i \in \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ tal que $\|v - u_i\| < \frac{\mu}{2}$. Desta forma

$$\|u - u_i\| \leq \|u - v\| + \|v - u_i\| < \mu + \frac{\mu}{2} = \frac{3}{2}\mu,$$

e portanto $u \in B\left(u_i, \frac{3}{2}\mu\right)$. Logo, por (2.3.7), concluímos que $\varphi_i(u) = 1$, o que prova a validade de (2.3.2). Dado agora $u \in E \setminus (A)_{2\mu}$, temos $\|u - v\| \geq 2\mu$ qualquer que seja $v \in A$. Em particular, para todo i, $\|u - u_i\| \geq 2\mu$, isto é, $u \notin B(u_i, 2\mu)$. Assim, por (2.3.8), temos que $\varphi_i(u) = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, o que nos mostra que $\varphi(u) = \beta(0) = 0$ e portanto a condição (2.3.3) é satisfeita. ∎

Antes de demonstrar os principais resultados desta seção vamos introduzir o conceito de operador de Fredholm e tecer alguns comentários sobre tais operadores.

Definição 2.3.11. *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ um operador linear e contínuo. Dizemos que T é um* operador de Fredholm *se*

1. $\ker T$ *tem dimensão finita,*

2. $\mathcal{R}(T)$ *é fechado em F e possui codimensão finita.*

Observação 2.3.12. No caso em que $T : H \to H$, H é espaço de Hilbert e T é auto-adjunto, o fecho da imagem de T é o complemento ortogonal do núcleo de T. Como $\mathcal{R}(T)$ é fechado, temos $H = H^0 \oplus H^1$, onde H^0 e H^1 denotam o núcleo e a imagem de T, respectivamente. Como a restrição de T a H^1 é uma bijeção contínua, o Teorema da Aplicação Aberta nos garante que a inversa de T restrita a H^1 é também contínua, e portanto existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|Tu\| \geq \alpha \|u\|, \quad \forall\, u \in H^1,$$

donde segue que 0 não pode ser ponto de acumulação do espectro de T. Utilizando a teoria espectral para operador auto-adjuntos, obtemos $b > 0$ e subespaços fechados H^+ e H^- tais que H^+ e H^- são ortogonais e invariantes por T, $H^1 = H^+ \oplus H^-$ e ainda

$$\langle Tu, u\rangle \geq b\|u\|^2, \ \forall\, u \in H^+ \quad \text{e} \quad \langle Tu, u\rangle \leq -b\|u\|^2, \ \forall\, u \in H^-.$$

Teorema 2.3.13. *Sejam $I \in C^2(H,\mathbb{R})$ e $A \subset K_c$ é um conjunto compacto. Suponha que, para cada $u \in A$, $I''(u)$ é um operador de Fredholm. Então, para todo ε, $\mu > 0$, existe $J \in C^2(H,\mathbb{R})$ tal que*

$$\|J - I\|_{C^2} \leq \varepsilon, \tag{2.3.14}$$

$$J(u) = I(u), \quad \forall\, u \in H \setminus (A)_{2\mu}. \tag{2.3.15}$$

Além disso, os eventuais pontos críticos de J em $(A)_\mu$ são não degenerados e em número finito.

Demonstração. Como A é compacto, o Lema 2.3.1 nos fornece $\varphi \in C^\infty(H,[0,1])$ e uma constante $M_1 > 0$ tais que

$$\left\|\varphi^{(j)}(u)\right\| \leq M_1, \quad \forall\, u \in E,\ j = 0,1,2,$$

em que $\varphi^{(j)}$ é a j-ésima diferencial de φ.

Para $v \in E$, considere $J \in C^2(H,\mathbb{R})$ definido por

$$J(u) = I(u) + \varphi(u)\langle u, v\rangle. \tag{2.3.16}$$

Uma vez que φ satisfaz (2.3.3), a condição (2.3.15) é trivialmente satisfeita. Vamos verificar que, com uma escolha apropriada de v, temos

$$\|J(u) - I(u)\| + \|J'(u) - I'(u)\| + \|J''(u) - I''(u)\| \leq \varepsilon, \quad \forall\, u \in H,$$

e portanto J satisfaz (2.3.14).

Naturalmente, basta considerar o caso em que $u \in (A)_{2\mu}$. A compacidade de A nos fornece $M_2 > 0$ tal que $\|u\| \leq M_2$, para todo $u \in (A)_{2\mu}$. Dado u em $(A)_{2\mu}$, a definição de J nos permite escrever

$$\|J(u) - I(u)\| = \|\varphi(u)\langle u, v\rangle\| \leq |\varphi(u)|\,\|u\|\,\|v\| \leq M_1 M_2 \|v\|. \tag{2.3.17}$$

Para a estimativa da primeira derivada observe que, de acordo com (2.3.16), temos

$$J'(u)(h) = I'(u)(h) + \varphi^{(1)}(u)(h)\left\langle u, v\right\rangle + \varphi(u)\left\langle h, v\right\rangle, \quad \forall\, h \in E.$$

A expressão acima nos permite concluir que, se $u \in (A)_{2\mu}$, então

$$\|J'(u) - I'(u)\| \leq \left\|\varphi^{(1)}(u)\right\| \|u\| \|v\| + |\varphi(u)| \|v\| \leq M_1(M_2 + 1) \|v\| . \tag{2.3.18}$$

De maneira análoga obtemos, para $u \in (A)_{2\mu}$,

$$\|J''(u) - I''(u)\| \leq M_1(M_2 + 2) \|v\| .$$

Esta estimativa, juntamente com (2.3.17) e (2.3.18), nos mostra que J satisfaz (2.3.15), desde que escolhamos v tal que

$$\|v\| < \frac{\varepsilon}{3M_1(M_2 + 2)}. \tag{2.3.19}$$

Vamos agora estudar os eventuais pontos críticos de J em $(A)_\mu$. Observe inicialmente que, neste conjunto, temos $\varphi \equiv 1$, e portanto

$$\nabla J = \nabla I + v \quad \text{e} \quad \nabla^2 J = \nabla^2 I.$$

Desta forma, se $-v$ for valor regular de ∇I, os pontos críticos de J em $(A)_\mu$ são não degenerados. Neste caso, tais pontos serão em número finito, visto que $(A)_\mu$ é limitado e pontos críticos não degenerados são sempre isolados. Precisamos então escolher v de maneira que $-v$ seja valor regular de ∇I e a condição (2.3.19) seja satisfeita. Mas isso segue do Teorema de Sard-Smale (cf. [20]), uma vez que o conjunto dos valores críticos de ∇I é de primeira categoria. ■

O próximo resultado será útil para mostrar que, sob certas condições , a pertubação do funcional I preserva propriedades de compacidade. Antes porém, lembremos que uma aplicação entre dois espaços topológicos é dita *própria* se a imagem inversa de compacto é compacta.

Lema 2.3.20. *Sob as hipóteses do Teorema 2.3.13, existe uma vizinhança N de A e $\varepsilon > 0$ tais que, para todo funcional J satisfazendo $\|J - I\|_{C^2} \leq \varepsilon$, tem-se ∇J própria em N.*

Demonstração. Dados $\varepsilon > 0$ e $\overline{x} \in A$, denotemos por T a aplicação $\nabla^2 I(\overline{x})$. Utilizando a Fórmula de Taylor e o fato de $\overline{x} \in K_c$, podemos obter $\delta_{\overline{x}} > 0$ tal que a aplicação $\nabla I - T$ é de Lipschitz em $N_{\overline{x}} = \overline{B(\overline{x}, \delta_{\overline{x}})}$, com constante de Lipschitz menor ou igual a ε. Dado então um funcional J satisfazendo $\|J - I\|_{C^2} \leq \varepsilon$, definimos $r(x) = \nabla J(x) - Tx$ e obtemos, para

$x,\, y \in N_{\overline{x}}$,

$$
\begin{aligned}
\|r(x) - r(y)\| &= \|\nabla J(x) - \nabla J(y) + Ty - Tx\| \\
&\leq \|(\nabla J(x) - \nabla I(x)) - (\nabla J(y) - \nabla I(y))\| + \\
&\quad\ \|(\nabla I(x) - Tx) - (\nabla I(y) - Ty)\| \\
&\leq \varepsilon \|x - y\| + \varepsilon \|x - y\| = 2\varepsilon \|x - y\|,
\end{aligned}
$$

em que usamos a desigualdade do valor médio, a proximidade de ∇I e ∇J e o fato de $\nabla I - T$ ser de Lipschitz. A expressão acima nos permite concluir que r é de Lipschitz em $N_{\overline{x}}$, com constante de Lipschitz menor ou igual a 2ε.

Como T é um operador de Fredholm, temos a decomposição $H = H^0 \oplus H^1$, conforme a observação 2.3.12. A injetividade de T em H^1 nos permite obter $\alpha_{\overline{x}} > 0$ tal que

$$
\|Tu\| \geq \alpha_{\overline{x}} \|u\|, \quad \forall\, u \in H^1.
$$

Considere agora $(u_n) \subset N_{\overline{x}}$ tal que $\nabla J(u_n)$ seja convergente. Vamos verificar que (u_n) possui subsequência convergente. De fato, temos $u_n = u_n^0 + u_n^1$, com $u_n^0 \in H^0$ e $u_n^1 \in H^1$. Uma vez que $N_{\overline{x}}$ é limitado e H^0 tem dimensão finita podemos supor, passando a uma subsequência se necessário, que (u_n^0) é convergente. Temos então

$$
\begin{aligned}
\|u_n^1 - u_m^1\| &\leq \alpha_{\overline{x}}^{-1} \|Tu_n^1 - Tu_m^1\| \\
&\leq \alpha_{\overline{x}}^{-1} (\|r(u_n) - r(u_m)\| + \|\nabla J(u_n) - \nabla J(u_m)\|) \\
&\leq 2\varepsilon\alpha_{\overline{x}}^{-1} (\|u_n^0 - u_m^0\| + \|u_n^1 - u_m^1\|) + \alpha_{\overline{x}}^{-1} \|\nabla J(u_n) - \nabla J(u_m)\|,
\end{aligned}
$$

donde segue que

$$
\left(1 - \frac{2\varepsilon}{\alpha_{\overline{x}}}\right) \left\|u_n^1 - u_m^1\right\| \leq 2\varepsilon\alpha_{\overline{x}}^{-1} \left\|u_n^0 - u_m^0\right\| + \alpha_{\overline{x}}^{-1} \|\nabla J(u_n) - \nabla J(u_m)\|.
$$

Escolhendo agora $\varepsilon < \dfrac{\alpha_{\overline{x}}}{2}$, como (u_n^0) e $(\nabla J(u_n))$ são sequências de Cauchy, concluímos que (u_n^1) é sequência de Cauchy e portanto converge (porque $N_{\overline{x}}$ é fechado). Desta forma, ∇J é própria em $N_{\overline{x}}$.

Observe agora que, como A é compacto, existem $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m \in A$ tais que

$$
A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B\left(\overline{x}_i, \frac{\delta_{\overline{x}_i}}{2}\right) = N.
$$

Seja agora $(u_n) \subset N$ uma sequência tal que $\nabla J(u_n)$ é convergente. Como N é uma união finita de bolas podemos supor, sem perda de generalidade, que $(u_n) \subset B\left(\overline{x}_i, \dfrac{\delta_{\overline{x}_i}}{2}\right)$ para algum $i \in$

$\{1,\ldots,m\}$. A primeira parte da demonstração nos permite concluir que, se $\|J-I\|_{C^2} < \dfrac{\alpha_{\overline{x}_i}}{2}$, então (u_n) possui subsequência convergente. Tomando então

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{\alpha_{\overline{x}_1}}{2},\ldots,\frac{\alpha_{\overline{x}_m}}{2}\right\}$$

concluímos que ∇J é própria em N. ∎

Observação 2.3.21. Suponha que as hipóteses do Teorema 2.3.13 sejam satisfeitas e que I satisfaça (GPS). Então, para ε, $\mu > 0$ suficientemente pequenos, o último resultado nos garante que o funcional J, dado pelo Teorema 2.3.13, também satisfaz esta propriedade. De fato, considere $(u_n) \subset E$ tal que

$$J(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \frac{\|J'(u_n)\|}{\phi(\|u_n\|)} \to 0.$$

Tendo em vista (2.3.15) e o fato de I satisfazer (GPS), podemos supor que $(u_n) \subset (A)_{2\mu}$. Naturalmente, podemos tomar μ pequeno de forma que $(A)_{2\mu} \subset N$, em que N é a vizinhança de A dada pelo Lema 2.3.20. Temos então

$$0 \leq \frac{\|J'(u_n)\|}{\phi(0)} \leq \frac{\|J'(u_n)\|}{\phi(\|u_n\|)} \to 0,$$

e portanto $J'(u_n) \to 0$. Como ∇J é própria em $(A)_{2\mu}$, concluímos que (u_n) possui subsequência convergente, isto é, J também satisfaz (GPS).

O teorema seguinte é um caso particular das situações tratadas anteriormente e será utilizado no Capítulo 2.

Teorema 2.3.22. *Seja $I \in C^2(H,\mathbb{R})$ e $u_0 \in E$ um ponto crítico isolado de I tal que $I''(u_0)$ é um operador de Fredholm. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $J \in C^2(H,\mathbb{R})$ satisfazendo*

$$\|J-I\|_{C^2} \leq \varepsilon,$$

$$J(u) = I(u), \quad \forall\, u \in H \setminus B(u_0,\varepsilon).$$

Além disso, os eventuais pontos críticos de J em $B(u_0,\varepsilon)$ são não degenerados e em número finito e, se I satisfaz (GPS)*, então J pode ser construído de maneira a satisfazer esta mesma propriedade.*

CAPÍTULO 3

Um Teorema de Ponto de Sela

Neste capítulo utilizamos a teoria desenvolvida no Capítulo 2 para obter um teorema abstrato que nos permite, sob certas hipóteses, obter pontos críticos não nulos para funcionais definidos em espaços de Hilbert. O resultado baseia-se no Teorema do Ponto de Sela de Lazer-Solimini [11], onde acrescentamos um lema de deformação devido a Silva [18].

Antes de enunciar o resultado principal vamos introduzir uma nova condição de compacidade.

Definição 3.0.1. *Dizemos que* $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ *satisfaz a* condição de Cerami Forte *no nível* $c \in \mathbb{R}$, *denotada por* $(\mathrm{SCe})_c$, *se toda sequência* $(u_n) \subset E$ *tal que* $I(u_n) \to c$ *e* $I'(u_n) \to 0$, *quando* $n \to \infty$, *satisfaz as condições abaixo*

(i) *se* (u_n) *é limitada, então* (u_n) *possui uma subsequência convergente*

(ii) *se* $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ *é tal que* $\|u_{n_j}\| \to \infty$, *então* $\lim \|I'(u_{n_j})\| \|u_{n_j}\| = \infty$.

Se I *satisfaz* $(\mathrm{SCe})_c$ *para todo* $c \in [a, b]$ *ou todo* $c \in \mathbb{R}$, *dizemos simplesmente que* I *satisfaz* (SCe) *em* $[a, b]$ *ou* (SCe), *respectivamente.*

Observe que esta condição de compacidade situa-se entre (PS) e (Ce). O resultado principal deste trabalho é o

Teorema 3.0.2. *Seja* $H = V \oplus W$ *um espaço de Hilbert com* $W = V^\perp$ *e* V *de dimensão finita. Suponha que* $I \in C^2(H, \mathbb{R})$ *satisfaz* (SCe), *0 é um ponto crítico isolado de* I, $I''(0)$ *é um operador de Fredholm e* $\dim V < m(I, 0)$ *ou* $\overline{m}(I, 0) < \dim V$. *Se, além disso,*

(I_1) *Existe* $\beta \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$I(v) \leq \beta, \quad \forall\, v \in V,$$

(I_2) *Existe* $\gamma \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$I(w) \geq \gamma, \quad \forall\, w \in W,$$

então, I *possui pelo menos um ponto crítico não nulo.*

Para demonstrar o teorema acima, usamos alguns resultados preliminares. O primeiro é um lema de deformação , devido a Silva [18].

Lema 3.0.3. *Seja* $H = V \oplus W$ *um espaço de Hilbert com* $W = V^{\perp}$*. Se* $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ *satisfaz* (I_1)*,* (I_2) *e* (SCe) *em* $[\gamma, \beta]$ *então, dado* $\overline{\varepsilon} > 0$*, existe* $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})$*,* $R > 0$ *e uma função contínua* $\eta : [0,1] \times H \to H$ *tal que*

(η_1) $\eta(t, u) = u$*, para todo* $u \in W$*,*

(η_2) $\eta(t, \cdot) : H \to H$ *é um homeomorfismo, para todo* $t \in [0, 1]$*,*

(η_3) $\eta(1, u) \in I^{\gamma-\varepsilon}$*, para todo* $u \in V \cap \partial B(0, R)$*,*

(η_4) $I(\eta(t, u)) \leq I(u)$*, para todo* $u \in H$*,* $t \in [0, 1]$.

Demonstração . Tomando $c > \dfrac{8}{\ln(3/2)}(\beta - \gamma + 1)$, afirmamos que existem constantes $\varepsilon_1 > 0$ e $R_1 > 0$ tais que

$$\|I'(u)\|\,\|u\| \geq c > 0, \quad \forall\, u \in \left(I^{\beta+\varepsilon_1} \cap I_{\gamma-\varepsilon_1}\right) \setminus B(0, R_1). \tag{3.0.4}$$

De fato, se não fosse assim, existiria uma sequência $(u_n) \subset H$ tal que $\|u_n\| \to \infty$, $\|I'(u_n)\|\,\|u_n\| < c$, $I'(u_n) \to 0$ e $I(u_n) \to b \in [\gamma, \beta]$, o que é um absurdo, visto que I satisfaz (SCe) em $[\gamma, \beta]$.

Sem perda de generalidade, podemos supor $\varepsilon_1 < \min\{1, \overline{\varepsilon}\}$. Considerando agora $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, definimos os seguintes conjuntos

$$A = I_{\beta+\varepsilon_1} \cup I^{\gamma-\varepsilon_1}, \;\; B = I^{\beta+\varepsilon} \cap I_{\gamma-\varepsilon},$$

$$C = \{u = v + w \mid v \in V,\, w \in W,\, \|v\| \leq R_1\},$$

e

$$D = H \setminus \{u = v + w \mid v \in V,\, w \in W,\, \|v\| < R_1 + 1\}.$$

Uma vez que A e B são fechados e disjuntos, a função $g : H \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(u) = \frac{\|u - A\|}{\|u - A\| + \|u - B\|}$$

é de Lipchitz e satisfaz $g|_A \equiv 0$, $g|_B \equiv 1$ e $0 \leq g \leq 1$. De maneira análoga, definimos $f : H \to \mathbb{R}$ de Lipschitz, satisfazendo $f|_C \equiv 0$, $f|_D \equiv 1$ e $0 \leq f \leq 1$. Seja V um campo vetorial pseudo-gradiente associado a I, e $\Phi(u) = \frac{V(u)}{\|V(u)\|^2}$, para $u \in \tilde{H}$. Considere $X : H \to H$ dado por

$$X(u) = \begin{cases} -f(u)g(u)\Phi(u), & \text{se } u \in \tilde{H}, \\ 0, & \text{se } u \notin \tilde{H}. \end{cases}$$

Naturalmente, X é um campo vetorial localmente Lipschitz. As definições de f e g, e as expressões (2.1.13) e (3.0.4), nos fornece

$$\|X(u)\| \leq \frac{\|u\|}{c}, \quad \forall\, u \in H. \tag{3.0.5}$$

Considere agora o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\eta_1}(t,u) &= X(\eta_1(t,u)), \\ \eta_1(0,u) &= u \in H, \end{cases} \tag{3.0.6}$$

que possui solução única, definida em um intervalo maximal (T_u^-, T_u^+). Afirmamos que $T_u^+ = \infty$. De fato, dado $u \in H$, considere $\varphi(t) = \|\eta_1(t,u)\|^2$. Então, utilizando (3.0.5), obtemos

$$\varphi'(t) = 2\,\langle \eta_1(t,u), \dot{\eta_1}(t,u)\rangle \leq \frac{2}{c}\varphi(t), \quad \forall\, t \in (T_u^-, T_u^+),$$

e multiplicando essa desigualdade por $e^{-2c^{-1}t}$ e integrando em $[0,s] \subset [0, T_u^+)$, segue que

$$\varphi(s) \leq \|u\|^2\, e^{2c^{-1}s}. \tag{3.0.7}$$

Suponha, por absurdo, que $T_u^+ < \infty$. A expressão acima e (3.0.5) nos mostra que $\|X(\eta_1(t,u))\| \leq M_u$, para alguma constante M_u e para todo $t \in [0, T_u^+)$. Desta forma, para $(t_n) \subset [0, T_u^+)$ tal que $t_n \to T_u^+$, temos

$$\|\eta_1(t_{n+1}, u) - \eta_1(t_n, u)\| \leq M_u|t_{n+1} - t_n|,$$

o que mostra que $(\eta_1(t_n, u))$ é uma sequência de Cauchy e, consequentemente, $\eta_1(t_n, u) \to \overline{u} \in H$, quando $t_n \to T_u^+$. A solução de (3.0.6) com valor inicial $\overline{u}$ nos fornece uma continuação de $\eta_1(t,u)$ para valores $t > T_u^+$, contrariando a maximalidade de T_u^+. Esta contradição conclui a verificação de que $T_u^+ = \infty$.

A continuidade das soluções de (3.0.6) com relação aos dados iniciais e o fato de que $T_u^+ = \infty$ implicam que $\eta_1 \in C([0,\infty) \times H, H)$. Considerando $T > 0$ tal que

$$4(\beta - \gamma + \varepsilon) < T < 8(\beta - \gamma + 1),$$

definimos $\eta(t,u) = \eta_1(tT,u)$, para $0 \leq t \leq 1$. Uma vez que $f|_C \equiv 0$, temos que $X(u) = 0$ para todo $u \in W$, e portanto (η_1) se verifica. A condição (η_2) é consequência imediata das propriedades das soluções de (3.0.6).

No caso em que $X(u) = 0$, a condição (η_4) é imediata. Se $X(u) \neq 0$, então $u \in \tilde{H}$ e podemos utilizar (3.0.6), (2.1.14) e a definição de f e g para escrever

$$\frac{d}{dt} I(\eta_1(t,u)) = \langle I'(\eta_1), -f(\eta_1)g(\eta_1)\Phi(\eta_1)\rangle \leq -\frac{1}{4} f(\eta_1)g(\eta_1) \leq 0, \tag{3.0.8}$$

o que prova a veracidade de (η_4) .

Finalizaremos a demonstração verificando que (η_3) ocorre para $R > 2(R_1+1)$. Tome $u \in V \cap \partial B(0,R)$ e defina $\Psi(t) = \|\eta_1(t,u)\|$, que é uma função derivável, visto que $f|_C \equiv 0$. Utilizando (3.0.5) e (3.0.6), obtemos $\Psi'(t) \leq \frac{1}{c}\Psi(t)$, para todo $t \geq 0$, donde segue que

$$0 < \Psi(t) \leq \|u\| \, e^{c^{-1}t}, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{3.0.9}$$

Considere $P : H \to V$ a projeção ortogonal e $\eta_2(t,u) = P\eta_1(t,u)$. Naturalmente $\|\eta_2(s,u)\| \neq 0$, para todo $s \in [0,T]$. Utilizando isto, o fato de V e W serem ortogonais, (3.0.5) e (3.0.9), obtemos

$$\left| \frac{d}{dt} \|\eta_2(t,u)\| \right| = \left| \frac{\langle \eta_2(t,u), \dot{\eta_2}(t,u)\rangle}{\|\eta_2(t,u)\|} \right| \leq \|\dot{\eta_1}(t,u)\| \leq \frac{1}{c} \|u\| \, e^{c^{-1}t}, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Como $u \in V$, $\eta_2(0,u) = u$. Deste fato e da desigualdade acima segue que, para todo $t \in [0,T]$, vale

$$|\|\eta_2(t,u)\| - \|u\|| = \left| \int_0^t \frac{d}{d\tau} \|\eta_2(\tau,u)\| \, d\tau \right| \leq \frac{1}{c} \|u\| \int_0^t e^{c^{-1}\tau} \, d\tau = \|u\| \, (e^{c^{-1}t} - 1). \tag{3.0.10}$$

Utilizando (3.0.10) com $t = T$, o fato de que $c^{-1}T < \ln(3/2)$ e $R > 2(R_1+1)$, obtemos

$$\|\eta_2(t,u)\| \geq \|u\| \left(2 - e^{c^{-1}T}\right) \geq \frac{1}{2} \|u\| \geq R_1 + 1, \quad \forall\, t \in [0,T],$$

e portanto $f(\eta_1(t,u)) = 1$, para todo $t \in [0,T]$. Afirmamos que $\eta_1(T,u) \in I^{\gamma-\varepsilon}$. De fato, se não fosse assim, por (I_1) e (η_4) poderíamos assumir que $\eta_1(t,u) \in I^\beta \cap I_{\gamma-\varepsilon}$, para todo $t \in [0,T]$.

Desta forma, $g(\eta_1(t,u)) = 1$ em $[0,T]$, e portanto $X(\eta_1(t,u)) \neq 0$ neste intervalo. Integrando a expressão (3.0.8) entre 0 e T, utilizando $I(u) \leq \beta$ e a escolha de T, obtemos

$$I(\eta_1(T,u)) \leq \beta - \frac{1}{4}T < \gamma - \varepsilon,$$

contrariando $\eta_1(T,u) \in I_{\gamma-\varepsilon}$. Isto finaliza a demonstração do lema. ■

Observação 3.0.11. Observe que, no lema anterior, não estamos supondo $\dim V < \infty$.

A proposição seguinte é peça fundamental da demonstração do Teorema 3.0.2. Sua demonstração baseia-se na de Lazer & Solimini [11], onde vamos utilizar o lema anterior para compensar a falta de anticoercividade do funcional em V.

Proposição 3.0.12. *Seja $H = V \oplus W$ um espaço de Hilbert com $W = V^{\perp}$ e V de dimensão finita. Suponha que $I \in C^2(H,\mathbb{R})$ satisfaz (I_1), (I_2) e* (SCe). *Suponha ainda que I possui somente um número finito de pontos críticos, todos não degenerados. Então I possui um ponto crítico $u \in H$ tal que $m(I,u) = \dim V$.*

Demonstração. Seja $k = \dim V$. Se $k = 0$, a condição (I_2) implica que I é limitado inferiormente e portanto, por (SCe), I assume mínimo em um ponto $u \in H$. Como u é ponto crítico não degenerado, podemos utilizar o Lema 2.2.17 para concluir que $m(I,u) = 0$.

Vamos então considerar $k \geq 1$. Uma vez que I possui somente um número finito de pontos críticos, podemos escolher $d_0 \in \mathbb{R}$ tal que $d_0 < \gamma$ e I não possui nenhum ponto crítico em I^{d_0}. Como I satisfaz a condição (I_2) com γ substituído por d_0, podemos utilizar o Lema 3.0.3 para obter $\varepsilon \in (0,1)$, $R > 0$ e $\eta \in C([0,1] \times H, H)$ satisfazendo (η_1), (η_2) e

$$\eta(1,u) \in I^{d_0-\varepsilon}, \quad \forall\, u \in S^{k-1} = V \cap \partial B(0,R).$$

A expressão acima e a escolha de d_0 nos permite escrever

$$\tilde{S}^{k-1} \subset I^{d_0} \subset H \setminus W,$$

em que $\tilde{S}^{k-1} = \eta(1, S^{k-1})$.

Considere $i : \tilde{S}^{k-1} \to H \setminus W$ e $l : S^{k-1} \to H \setminus W$ as aplicações de inclusão. Como S^{k-1} é retrato de deformação forte de $H \setminus W$ e $\eta(1,\cdot)$ é um homeomorfismo tal que $\eta\,(1, H \setminus W) = H \setminus W$, podemos utilizar o Lema 2.2.4 e as propriedades (A1) e (A2) dos grupos de homologia, para concluir que

$$i_* : H\left(\tilde{S}^{k-1}\right) \to H\left(H \setminus W\right)$$

é um isomorfismo. Este argumento está ilustrado no diagrama de isomorfismos abaixo, onde $\psi = \eta(1, \cdot)$

$$\begin{array}{ccc} H\left(\tilde{S}^{k-1}\right) & \xrightarrow{i_*} & H\left(H \setminus W\right) \\ \psi_*^{-1} \downarrow & & \uparrow \psi_* \\ H\left(S^{k-1}\right) & \xrightarrow{l_*} & H\left(H \setminus W\right). \end{array}$$

Sejam $j : \tilde{S}^{k-1} \to I^{d_0}$ e $h : I^{d_0} \to H \setminus W$ as aplicações de inclusão. A propriadade (A2) dos grupos de homologia nos fornece $i_* = h_* \circ j_*$. Como i_* é isomorfismo, temos que

$$h_* : H(I^{d_0}) \to H(H \setminus W)$$

é um homomorfismo sobrejetor, donde segue que

$$\dim H(I^{d_0}) = \dim H(H \setminus W) + \dim \ker h_* \geq \dim H(H \setminus W).$$

Como $H(H \setminus W)$ é isomorfo a $H(S^{k-1})$, a expressão acima e o Teorema 2.2.10 nos fornecem

$$\dim H_{k-1}(I^{d_0}) \ \geq \ \dim H_{k-1}(S^{k-1}) = \begin{cases} 1, & \text{se } k > 1, \\ 2, & \text{se } k = 1. \end{cases} \tag{3.0.13}$$

Sejam

$$c_1 < c_2 < \cdots < c_m$$

os possíveis níveis críticos de I e considere $d_1, \ldots, d_m$ números reais escolhidos de forma que $d_{j-1} < c_j < d_j$, para $j = 1, \ldots, m$. Caso I não possua valores críticos, tome $d_1 = d_m > d_0$. Suponha, por absurdo, que I não possui ponto crítico com índice de Morse igual a k. Sendo assim, a observação 2.2.30 nos fornece

$$\dim H_k(I^{d_j}, I^{d_{j-1}}) = 0, \quad \forall\, j = 1, \ldots, m. \tag{3.0.14}$$

Como a sequência

$$H\left(I^{d_{j-1}}, I^{d_{j-2}}\right) \xrightarrow{s_*} H\left(I^{d_j}, I^{d_{j-2}}\right) \xrightarrow{t_*} H\left(I^{d_j}, I^{d_{j-1}}\right)$$

é exata, em que s e t são as aplicações de inclusão, temos

$$\begin{aligned} \dim H\left(I^{d_j}, I^{d_{j-2}}\right) &= \dim \mathcal{R}(t_*) + \dim \ker t_* \leq \dim H\left(I^{d_j}, I^{d_{j-1}}\right) + \dim \mathcal{R}(s_*) \\ &\leq \dim H\left(I^{d_j}, I^{d_{j-1}}\right) + \dim H\left(I^{d_{j-1}}, I^{d_{j-2}}\right), \end{aligned}$$

desde que $\ker t_* = \mathcal{R}(s_*)$. Podemos aplicar esse argumento m vezes para obter, via (3.0.14),

$$\dim H_k(I^{d_m}, I^{d_0}) \leq \sum_{j=1}^{m} \dim H_k(I^{d_j}, I^{d_{j-1}}) = 0.$$

Considerando a sequência exata

$$H_k(I^{d_m}, I^{d_0}) \longrightarrow H_{k-1}(I^{d_0}) \longrightarrow H_{k-1}(I^{d_m}),$$

obtemos

$$\dim H_{k-1}(I^{d_0}) \leq \dim H_k(I^{d_m}, I^{d_0}) + \dim H_{k-1}(I^{d_m}),$$

e portanto

$$\dim H_{k-1}(I^{d_0}) \leq \dim H_{k-1}(I^{d_m}). \tag{3.0.15}$$

Como I não possui ponto crítico em I_{d_m}, a observação 2.1.43 nos garante que I^{d_m} é retrato de deformação forte de H. Naturalmente, se $u \in H$, então $\{u\}$ é retrato de deformação forte de H. Utilizando (3.0.15) e estas considerações , concluímos que

$$\dim H_{k-1}(I^{d_0}) \leq \dim H_{k-1}(I^{d_m}) = \dim H_{k-1}(\{u\}) = \begin{cases} 0, & \text{se } k > 1, \\ 1, & \text{se } k = 1, \end{cases} \tag{3.0.16}$$

o que contraria (3.0.13). A contradição proveio do fato de termos negado a existência de um ponto crítico de I com índice de Morse k, e portanto tal ponto existe. ■

Vamos utilizar a Proposição 3.0.12 e o método da pertubação de Marino-Prodi, desenvolvido na seção 2.3, para demonstrar o Teorema 3.0.2

Demonstração do Teorema 3.0.2 . Sejam H^0, H^-, H^+ e $b > 0$ conforme mencionados na observação 2.3.12. Como $I \in C^2(H, \mathbb{R})$, podemos escolher ε tal que $0 < \varepsilon < \frac{b}{3}$ e

$$\|I''(u) - I''(0)\| < \frac{b}{3}, \quad \forall\, u \in B(0, \varepsilon).$$

O Teorema 2.3.22 nos permite obter $J \in C^2(H, \mathbb{R})$ tal que $I(u) = J(u)$ para $\|u\| \geq \varepsilon$, J possui um número finito de pontos críticos em $B(0, \varepsilon)$, todos não degenerados, e $\|I''(u) - J''(u)\| \leq \varepsilon$, para todo $u \in H$. Um argumento semelhante ao utilizado na obervação 2.3.21 nos permite assumir que J também satisfaz (SCe). De fato, basta observar que para sequências limitadas a condição (SCe) é equivalente à (PS), e portanto a argumentação feita na observação 2.3.21 permanece válida. A definição de J, dada em (2.3.16), nos permite concluir que existem constantes $\beta_1,\ \gamma_1 > 0$, tais que J satisfaz (I_1) e (I_2) com β_1 e γ_1 substituídos por β e γ, respectivamente.

Como I e J coincidem no complementar de $B(0,\varepsilon)$, é suficiente provarmos que J possui um ponto crítico u_1, com $\|u_1\| \geq \varepsilon$. Se tal ponto crítico não existisse, os pontos críticos de J seriam em número finito e todos não degenerados. Assim, pela Proposição 3.0.12, existiria um ponto crítico de J com índice de Morse igual a $\dim V$. Denotando $k = \dim V$, vamos mostrar que, se $\overline{u}$ é um ponto crítico de J com $\|\overline{u}\| < \varepsilon$, então $m(J,\overline{u}) \neq k$.

Seja então $\overline{u} \in B(0,\varepsilon)$ um ponto crítico de J. Uma vez que

$$\|J''(\overline{u}) - I''(0)\| \leq \|J''(\overline{u}) - I''(\overline{u})\| + \|I''(\overline{u}) - I''(0)\| < \varepsilon + \frac{b}{3} < \frac{2b}{3},$$

temos

$$-\frac{2b}{3}\|u\|^2 + \langle I''(0)u,u\rangle \leq \langle J''(\overline{u})u,u\rangle \leq \frac{2b}{3}\|u\|^2 + \langle I''(0)u,u\rangle .$$

A expressão acima e a decomposição espectral do espaço H nos fornece

$$\langle J''(\overline{u})u,u\rangle \leq -\frac{b}{3}\|u\|^2, \quad \forall\, u \in H^-,$$

e

$$\langle J''(\overline{u})u,u\rangle \geq \frac{b}{3}\|u\|^2, \quad \forall\, u \in H^+,$$

Das desigualdades acima segue que

$$\dim H^- \leq m(J,\overline{u}) \leq \dim\left(H^0 \oplus H^-\right). \tag{3.0.17}$$

De acordo com a definição de índice de Morse e índice de Morse aumentado temos

$$m(I,0) = \dim H^- \quad \text{e} \quad \overline{m}(I,0) = \dim H^0 \oplus H^-.$$

Esta observação e as hipóteses do teorema implicam em que

$$k < \dim H^- \quad \text{ou} \quad \dim\left(H^0 \oplus H^-\right) < k.$$

Esta última expressão e (3.0.17) nos permite concluir que $m(J,\overline{u}) \neq k$, o que conclui a demonstração do teorema. ■

Corolário 3.0.18. *Suponha as mesmas hipótese do Teorema 3.0.2 e que $\{u_j\}_{j=1}^m$ são pontos críticos isolados de I tais que $I''(u_j)$ é operador de Fredholm para $j = 1,\ldots,m$. Suponha ainda que, para $j = 1,\ldots,m$, tem-se $\dim V < m(I,u_j)$ ou $\overline{m}(I,u_j) < \dim V$. Então existe um ponto crítico u_0 de I com $u_0 \neq u_j$, $j = 1,\ldots,m$.*

Demonstração. Basta repetir a demonstração do Teorema aplicando repetidas vezes o Corolário 2.3.22. ■

CAPÍTULO 4

Aplicações

Neste capítulo aplicamos o Teorema 3.0.2, obtendo multiplicidade de solução para um problema elíptico semilinear duplamente ressonante, com uma condição de não-quadraticidade local, semelhante à utilizada em Costa & Magalhães [3]. Obtemos também alguns resultados de existência de solução para problemas da mesma natureza.

Considere o seguinte problema elíptico semilinear

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(x,u), \quad x \in \Omega, \\ u &= 0, \qquad\quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz

(f_1) Existe $2 < \sigma < \frac{2N}{N-2}$ $(2 < \sigma < \infty,$ se $N = 1$ ou $2)$ e constantes $a_1,\ a_2 > 0$ tais que

$$|f_s(x,s)| \leq a_1|s|^{\sigma-2} + a_2, \quad \forall\, x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}.$$

Como estamos interessados em multiplicidade de solução no caso em que (P) possui solução trivial, impomos a seguinte condição

$$(f_2) \qquad f_s(x,0) \not\leq \lambda_j \ \text{ ou } \ \lambda_{j+1} \not\leq f_s(x,0),$$

onde λ_j é o j-ésimo autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Esta condição nos permite fazer estimativas do índice de Morse da solução trivial.

Observe que (f_1) implica em que f possui crescimento subcrítico, isto é,

$(\hat{f}_1)$ Existe $1 < \sigma < \frac{2N}{N-2}$ $(1 < \sigma < \infty,$ se $N = 1$ ou $2)$ e constantes $a_3,\ a_4 > 0$ tais que

$$|f(x,s)| \leq a_3|s|^{\sigma-1} + a_4, \quad \forall\, x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}.$$

Denotando por H o espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, com a norma $\|\cdot\|$ induzida pelo produto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx, \quad \forall\, u,\, v \in H,$$

associamos ao problema (P) o funcional I definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(x,u)\, dx, \quad \forall\, u \in H, \tag{4.0.1}$$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\, dt$. A condição (f_1) implica em que $I \in C^2(H,\mathbb{R})$ (cf. [5]), com as derivadas em $u \in H$ dadas por

$$I'(u)\varphi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\, dx - \int_\Omega f(x,u)\varphi\, dx, \quad \forall\, \varphi \in H, \tag{4.0.2}$$

e

$$I''(u)(\varphi,\psi) = \int_\Omega \nabla \varphi \cdot \nabla \psi\, dx - \int_\Omega f_s(x,u)\varphi\psi\, dx, \quad \forall\, \varphi,\, \psi \in H. \tag{4.0.3}$$

Da expressão (4.0.2) segue que as soluções fracas de (P) em H são os pontos críticos do funcional I. Note que, pela regularidade de f, tais soluções fracas são de fato soluções clássicas. Para $p \geq 1$, indicamos por $|u|_p$ a norma de uma função $u \in L^p(\Omega)$,

$$|u|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall\, u \in L^p(\Omega).$$

Agora, observamos que o problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u, \quad x \in \Omega, \\ \quad u &= 0, \qquad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

possui uma sequência de autovalores (contando multiplicidade)

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \ldots,$$

com $\lambda_k \to \infty$, quando $k \to \infty$. Além disso, as autofunções associadas $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots\}$ formam uma base ortonormal dos espaços H e $L^2(\Omega)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotamos por E_k o espaço gerado por $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$.

A caracterização variacional dos autovalores nos fornece as seguintes desigualdades (cf. [6])

$$\begin{cases} \|u\|^2 \leq \lambda_k |u|_2^2, & \forall\, u \in E_k, \\ \|u\|^2 \geq \lambda_{k+1} |u|_2^2, & \forall\, u \in E_k^{\perp}. \end{cases} \tag{4.0.4}$$

Em particular, temos a desigualdade de Poincaré

$$\|u\|^2 \geq \lambda_1 |u|_2^2, \quad \forall\, u \in H. \tag{4.0.5}$$

Para o caso $N \geq 3$, denotamos por S a melhor constante da imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$. Como estamos com a imersão no caso crítico, a constante S só depende da dimensão N e é dada pela seguinte expressão (cf. [22])

$$S = S(N) = \inf_{u \in H,\, u \not\equiv 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla|^2\, dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^{2^*}\, dx \right)^{\frac{2}{2^*}}} > 0.$$

Sejam

$$L(x) = \liminf_{|s| \to \infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} \quad \text{e} \quad K(x) = \limsup_{|s| \to \infty} \frac{2F(x,s)}{s^2}, \tag{4.0.6}$$

onde os limites são tomados no sentido pontual. Consideramos o caso em que (P) é um problema de dupla resonância, no seguinte sentido

(F_1) $\lambda_j \leq L(x) \leq K(x) \leq \lambda_{j+1},$ q.t.p. em Ω. Se $L(x) \equiv \lambda_j$, existe $D_+ \in L^1(\Omega)$ tal que

$$F(x,s) \geq \frac{\lambda_j}{2} s^2 - D_+(x), \quad \forall\, s \in \mathbb{R}, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Como não estamos supondo que os limites em (4.0.6) são uniformes, impomos a condição de crescimento

(F_2) Existem $A \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ e $B \in L^1(\Omega)$ tais que

$$|F(x,s)| \leq A(x)s^2 + B(x), \quad \forall\, s \in \mathbb{R}, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Relacionada com a condição (SCe), supomos também uma condição de não-quadraticidade local em f, a saber

$$(NQ)_+ \qquad \begin{cases} \displaystyle\lim_{|s| \to \infty} [f(x,s)s - 2F(x,s)] = +\infty, & \text{q.t.p. em } \Omega_0, \\ f(x,s)s - 2F(x,s) \geq -C_+(x), & \forall\, s \in \mathbb{R}, \text{ q.t.p. em } \Omega, \end{cases}$$

para algum subconjunto $\Omega_0 \subset \Omega$ e $C_+ \in L^1(\Omega)$. De fato, com uma restrição sobre a medida do conjunto Ω_0, temos o

Lema 4.0.7. *Existe* $0 < \alpha < |\Omega|$ *tal que, se* $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *satisfaz* $(\hat{f}_1)$, (F_2), $K(x) \leq \lambda_{j+1}$ *e* $(NQ)_+$ *com* $|\Omega_0| > \alpha$, *então o funcional* I *satisfaz* (SCe).

Demonstração. Seja $(u_n) \subset H$ tal que $I(u_n) \to c \in \mathbb{R}$ e $I'(u_n) \to 0$. A condição $(\hat{f}_1)$ implica em que $I'(u) = u - T(u)$, com $T : H \to H$ compacto. Assim, se (u_n) é limitada, a existência de subsequência convergente é consequência direta do fato de que $I'(u_n) \to 0$, e portanto (i) da Definição 3.0.1 se verifica.

Afirmamos que, se (u_n) não é limitada, então ocorre (ii) da Definição 3.0.1. De fato, se não fosse assim, existiria uma subsequência, que vamos denotar ainda por (u_n), tal que $\|u_n\| \to \infty$ e $\|I'(u_n)\|\,\|u_n\|$ é limitado. Consideremos primeiro o caso em que $N \geq 3$. As hipóteses sobre a sequência (u_n) nos fornecem $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\liminf \int_\Omega [f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)]\ dx = \liminf\,[2I(u_n) - I'(u_n)u_n] \leq M. \tag{4.0.8}$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, podemos utilizar $K(x) \leq \lambda_{j+1}$ e o Teorema de Egorov para $G_n(x) = \sup\left\{\frac{2F(x,s)}{s^2} \mid |s| \geq n\right\}$, obtendo assim $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ tal que $|\Omega \setminus \tilde{\Omega}| < \varepsilon$ e

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{2F(x, s)}{s^2} \leq \lambda_{j+1}, \quad \text{unif. para q.t.p. em } \tilde{\Omega}.$$

A expressão acima nos fornece $M_1 = M_1(\varepsilon) > 0$ tal que

$$F(x, s) \leq \frac{1}{2}(\varepsilon + \lambda_{j+1})s^2 + M_1, \quad \forall\, s \in \mathbb{R},\ \text{q.t.p em } \tilde{\Omega}. \tag{4.0.9}$$

Uma vez que $I(u_n) \to c$, para n suficientemente grande, temos

$$\frac{1}{2}\,\|u_n\|^2 \leq (\varepsilon + c) + \int_\Omega F(x, u_n)\, dx.$$

Utilizando isto, (4.0.9), Hölder, (F_2) e a imersão de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\,\|u_n\|^2 &\leq (c+\varepsilon) + \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \lambda_{j+1})|u_n|_2^2 + M_1|\Omega| + \int_{\Omega\setminus\tilde{\Omega}} \left[Au_n^2 + B\right]\, dx \\ &\leq (c+\varepsilon) + \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \lambda_{j+1})|u_n|_2^2 + M_1|\Omega| + S^{-1}|A|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega\setminus\tilde{\Omega})}\,\|u_n\|^2 + |B|_1, \end{aligned}$$

Da expressão acima segue que

$$\left(\frac{1}{2} - S^{-1}|A|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega\setminus\tilde{\Omega})}\right)\|u_n\|^2 \leq \frac{1}{2}(\varepsilon + \lambda_{j+1})|u_n|_2^2 + (c + \varepsilon + M_1|\Omega| + |B|_1)\,. \tag{4.0.10}$$

Uma vez que $|\Omega \setminus \tilde{\Omega}| < \varepsilon$, temos que $|A|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega\setminus\tilde{\Omega})} \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$. Considerando $\tilde{u}_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$ podemos supor, sem perda de generalidade, que $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$ fracamente em H, $\tilde{u_n} \to \tilde{u}$

fortemente em $L^2(\Omega)$ e q.t.p. em Ω. Assim, dividindo a expressão (4.0.10) por $\|u_n\|^2$, fazendo $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, concluímos que

$$1 \leq \lambda_{j+1} |\tilde{u}|_2^2. \tag{4.0.11}$$

Para obter uma contradição , basta que verifiquemos a seguinte afirmação

$$\exists\, \Omega_1 \subset \Omega_0 \text{ tal que } |\Omega_1| > 0 \text{ e } \tilde{u}(x) \neq 0 \text{ q.t.p. em } \Omega_1. \tag{4.0.12}$$

De fato, caso a expressão acima se verifique, podemos utilizá-la juntamente com $(NQ)_+$ para concluir que

$$f(x, u_n(x))u_n(x) - 2F(x, u_n(x)) \geq -C_+(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

$$\lim[f(x, u_n(x))u_n(x) - 2F(x, u_n(x))] = \infty, \quad \text{q.t.p. em } \Omega_1.$$

Aplicando o lema de Fatou para $Q_n(x) = f(x, u_n(x))u_n(x) - 2F(x, u_n(x))$ e considerando as expressões acima, obtemos

$$\liminf \int_\Omega Q_n(x)\, dx \geq \int_\Omega [\liminf Q_n(x)]\ dx = \infty,$$

o que contraria (4.0.8) e prova que I satisfaz (SCe)$_c$.

Afirmamos então que (4.0.12) se verifica, desde que

$$|\Omega \setminus \Omega_0| < \left(\frac{S}{\lambda_{j+1}}\right)^{\frac{N}{2}}. \tag{4.0.13}$$

De fato, se (4.0.12) fosse falso, então deveríamos ter $u \equiv 0$ em Ω_0, e portanto, utilizando (4.0.11), a desigualdade de Hölder, a imersão de Sobolev, $\|\tilde{u}\| \leq 1$ e (4.0.13), obteríamos

$$\begin{aligned} 1 &\leq \lambda_{j+1} \int_\Omega |\tilde{u}(x)|^2\, dx \leq \lambda_{j+1} \left[\int_{\Omega\setminus\Omega_0} |\tilde{u}(x)|^{2^*}\, dx\right]^{\frac{2}{2^*}} |\Omega \setminus \Omega_0|^{\frac{2}{N}} \\ &\leq \lambda_{j+1} S^{-1} \|\tilde{u}\|^2 |\Omega \setminus \Omega_0|^{\frac{2}{N}} \leq \lambda_{j+1} S^{-1} |\Omega \setminus \Omega_0|^{\frac{2}{N}} < 1, \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Para que (4.0.13) ocorra, é suficiente que tenhamos $|\Omega_0| > \alpha$, em que α é definido como segue

$$\alpha = |\Omega| - \left(\frac{S}{\lambda_{j+1}}\right)^{\frac{N}{2}}.$$

Note que

$$1 = \lambda_1 \int_\Omega |\varphi_1|^2\, dx \leq \lambda_1 S^{-1} \|\varphi_1\|^2 |\Omega|^{\frac{2}{N}}.$$

A expressão acima, o fato de que $\|\varphi_1\| = 1$ e a caracterização dos autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, nos mostra que

$$\left(\frac{S}{\lambda_{j+1}}\right)^{\frac{N}{2}} < \left(\frac{S}{\lambda_1}\right)^{\frac{N}{2}} \leq |\Omega|,$$

e portanto temos $0 < \alpha < |\Omega|$, o que conclui a demonstração do caso $N \geq 3$.

Para o caso em que $N = 1$ ou 2, basta considerar a constante de Sobolev da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, com $q > \sigma$ suficientemente grande, e argumentar como acima. ■

Observação 4.0.14. Como $\lambda_j \to \infty$ quando $j \to \infty$, temos que $\alpha \to |\Omega|$, quando $j \to \infty$.

Estamos prontos para enunciar o nosso primeiro resultado de existência.

Teorema 4.0.15. *Se $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz $f(x,0) = 0$, (f_1), (f_2), (F_1), (F_2) e $(NQ)_+$ com $|\Omega_0| > \alpha$, em que $\alpha > 0$ é dado pelo Lema 4.0.7, então o problema (P) possui pelo menos uma solução não trivial.*

A demonstração será feita em várias passos, onde vamos obter resultados que nos permitem verificar as hipótese do Teorema 3.0.2.

Lema 4.0.16. *Se f satisfaz $(NQ)_+$ e $K(x) \leq \lambda_{j+1}$, então*

$$F(x,s) - \frac{1}{2}K(x)s^2 \leq \frac{C_+(x)}{2}, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Demonstração . Definindo

$$g(x,s) = f(x,s) - K(x)s \quad \text{e} \quad G(x,s) = F(x,s) - \frac{1}{2}K(x)s^2,$$

temos $g(x,s)s - 2G(x,s) = f(x,s)s - 2F(x,s)$. Supondo $s > 0$ e utilizando $(NQ)_+$, obtemos

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{G(x,s)}{s^2}\right] = \frac{g(x,s)s - 2G(x,s)}{s^3} \geq -\frac{C_+(x)}{s^3}. \tag{4.0.17}$$

Integrando a expressão acima sobre $[s,t] \subset (0,\infty)$, segue que

$$\frac{G(x,s)}{s^2} \leq \frac{G(x,t)}{t^2} + \frac{C_+(x)}{2}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{t^2}\right],$$

Uma vez que $K(x) \leq \lambda_{j+1}$, temos $\limsup_{t\to\infty} t^{-2}G(x,t) \leq 0$, e portanto

$$G(x,s) \leq \frac{C_+(x)}{2}, \quad \forall\, s > 0, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

O caso em que $s < 0$ é similar. ■

Apresentamos agora dois resultados auxiliares, que serão úteis na verificação das hipóteses (I_1), (I_2), bem como para as estimativas do índice de Morse do funcional I. As idéias do lema abaixo foram extraídas de [13].

Lema 4.0.18. *Existem constantes $\delta_1,\ \delta_2 > 0$ tais que*

(a) *Se $\lambda_j \not\leq L(x)$, então*

$$\mu(u) = \|u\|^2 - \int_\Omega L(x)u^2\,dx \leq -\delta_1 \|u\|^2, \quad \forall\, u \in E_j,$$

(b) *Se $K(x) \not\leq \lambda_{j+1}$, então*

$$\nu(u) = \|u\|^2 - \int_\Omega K(x)u^2\,dx \geq \delta_2 \|u\|^2, \quad \forall\, u \in E_j^\perp.$$

<u>**Demonstração**</u>. De acordo com (4.0.4), temos $\|u\|^2 \leq \lambda_j |u|_2^2$, para todo $u \in E_j$. Assim

$$\mu(u) \leq \int_\Omega [\lambda_j - L(x)]\, u^2\,dx \leq 0, \quad \forall\, u \in E_j. \tag{4.0.19}$$

Seja $u \in E_j$, tal que $\mu(u) = 0$. Afirmamos que $u = 0$. De fato, temos

$$0 = \mu(u) = \|u\|^2 - \int_\Omega L(x)u^2\,dx \leq \|u\|^2 - \lambda_j |u|_2^2 \leq 0,$$

e portanto $\|u\|^2 = \lambda_j |u|_2^2$. Utilizando a expressão (4.0.19), concluímos que $u = 0$ em todo o conjunto $\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid \lambda_j < L(x)\}$. Desta forma, u é uma λ_j-autofunção que se anula em um conjunto de medida positiva Ω_1. O princípio de continuação única nos garante que $u = 0$.

Suponha, por contradição , que (a) não ocorra. Então existe uma sequência $(u_n) \subset E_j$ tal que $\|u_n\| = 1$ e $\mu(u_n) \to 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $u_n \to u \in E_j$ em H, visto que E_j tem dimensão finita. Tendo em vista (4.0.5), $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$, donde segue que

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu(u_n) = \lim_{n\to\infty} \left[\|u_n\|^2 - \int_\Omega L(x)u_n^2\,dx \right] = \|u\|^2 - \int_\Omega L(x)u^2\,dx = \mu(v).$$

Conforme observações anteriores, devemos ter $u = 0$. Uma vez que $u_n \to 0$ em $L^2(\Omega)$, devemos ter $\displaystyle\int_\Omega L(x)u_n^2\,dx \to 0$, e portanto

$$\mu(u_n) = 1 - \int_\Omega L(x)u_n^2\,dx \to 1,$$

o que contraria $\mu(u_n) \to 0$ e estabelece a veracidade de (a).

Afim de provar (b) observe que, de acordo com (4.0.4), temos $\|u\|^2 \geq \lambda_{j+1}|u|_2^2$, para todo $u \in E_j^\perp$. Assim

$$\nu(u) \geq \int_\Omega [\lambda_{j+1} - K(x)]\, u^2\, dx \geq 0, \quad \forall\, u \in E_j^\perp. \tag{4.0.20}$$

De maneira análoga ao caso (a), temos que $\nu(u) = 0$ implica $u = 0$. Suponha agora que (b) não ocorre. Então existe uma sequência $(u_n) \subset E_j^\perp$ tal que $\|u_n\| = 1$ e $\nu(u_n) \to 0$. Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $u_n \rightharpoonup u \in E_j^\perp$ fracamente em H e fortemente em $L^2(\Omega)$. O fato de H estar imerso compactamente em $L^2(\Omega)$ e da norma ser fracamente semicontínua inferiormente implica que ν é fracamente semicontínuo inferiormente, donde segue que

$$\nu(u) \leq \liminf \nu(u_n) = 0.$$

Esta expressão e (4.0.20) nos permite concluir que $\nu(u) = 0$, e portanto $u = 0$. Desta maneira $u_n \to 0$ em $L^2(\Omega)$, e o resultado segue de um raciocínio semelhante ao do caso (a). ∎

Corolário 4.0.21. *Existem constantes $\delta_1,\ \delta_2, \varepsilon > 0$ tais que, para todo subconjunto $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ tal que $|\Omega \setminus \tilde{\Omega}| < \varepsilon$, temos*

(a) *Se $\lambda_j \not\leq L(x)$, então*

$$\|u\|^2 - \int_{\tilde{\Omega}} L(x) u^2\, dx \leq -\frac{\delta_1}{2}\, \|u\|^2, \quad \forall\, u \in E_j, \tag{4.0.22}$$

(b) *Se $K(x) \not\leq \lambda_{j+1}$, então*

$$\|u\|^2 - \int_{\tilde{\Omega}} K(x) u^2\, dx \geq \frac{\delta_2}{2}\, \|u\|^2, \quad \forall\, u \in E_j^\perp. \tag{4.0.23}$$

Demonstração. Considere $\delta_1,\ \delta_2 > 0$ dados pelo lema anterior. Dado $u \in E_j$, considere $\tilde{u} = \frac{u}{\|u\|}$ e $\tilde{\Omega} \subset \Omega$. Supondo $N \geq 3$, utilizamos o lema anterior, Hölder e a imersão de Sobolev, para obter

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 - \int_{\tilde{\Omega}} L(x) u^2\, dx &= \|u\|^2 - \int_\Omega L(x) u^2\, dx + \int_{\Omega\setminus\tilde{\Omega}} L(x) u^2\, dx \\
&\leq -\delta_1 \|u\|^2 + |L|_\infty S^{-1} |\Omega \setminus \tilde{\Omega}|^{\frac{2}{N}} \|u\|^2 \\
&= \|u\|^2 \left(-\delta_1 + |L|_\infty S^{-1} |\Omega \setminus \tilde{\Omega}|^{\frac{2}{N}}\right),
\end{aligned}$$

em que $|L|_\infty = \sup\{|L(x)| \mid x \in \Omega\}$. Basta então tomarmos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \left(\dfrac{\delta_1 S}{2|L|_\infty}\right)^{\frac{N}{2}}$. Se tivermos $N = 1$ ou 2, basta considerar a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, com $q > \sigma$ suficientemente grande, e proceder como acima. Fica então estabelecida a veracidade de (a).

Afim de verificar (b), basta notar que, para $u \in E_j^{\perp}$ temos

$$\|u\|^2 - \int_{\tilde{\Omega}} K(x)u^2\,dx \geq \|u\|^2 - \int_{\Omega} K(x)u^2\,dx \geq \delta_2 \|u\|^2 > \frac{\delta_2}{2}\left\|u^2\right\|,$$

o que prova (b) e conclui a demonstração do corolário. ∎

Demonstração do Teorema 4.0.15 . Podemos supor que 0 é ponto crítico isolado de I pois, caso contrário, a existência de solução não trivial para o problema (P) é imediata. A idéia é verificar que, sob as hipóteses do Teorema 4.0.15, o Teorema 3.0.2 se aplica com $V = E_j$ e $W = E_j^{\perp}$.

Uma vez que f satisfaz (f_1), $I''(0)$ é da forma id $+ T$, com T compacto. Assim, $I''(0)$ é um operador de Fredholm.

Utilizando $K(x) \leq \lambda_{j+1}$, (4.0.4) e o Lema 4.0.16, obtemos

$$I(w) = \frac{1}{2}\left(\|w\|^2 - \int_{\Omega} K(x)w^2\,dx\right) - \int_{\Omega}\left[F(x,w) - \frac{K(x)}{2}w^2\right]dx \geq -\frac{|C_+|_1}{2}, \quad \forall\, w \in W,$$

o que mostra que I satisfaz (I_2).

Vamos verificar que I satisfaz (I_1). Se tivermos $L(x) \equiv \lambda_j$ em (F_1), então

$$I(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \int_{\Omega} F(x,v)\,dx \leq \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 - \lambda_j |v|_2^2\right) + |D_+|_1 \leq |D_+|_1,$$

em que usamos a estimativa da função F dada em (F_1) e (4.0.4). A expressão acima mostra que, neste caso mais simples, I é limitado superiormente em V.

Vamos agora considerar a situação em que $L(x) \not\leq \lambda_j$. Supondo inicialmente que $N \geq 3$, considere $\delta_1,\, \varepsilon > 0$ dados pelo Corolário 4.0.18. Podemos utilizar (F_1) e o Teorema de Egorov para obter $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ tal que $|\Omega \setminus \tilde{\Omega}| < \varepsilon$ e

$$\lambda_j \leq L(x) = \liminf_{|s|\to\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2}, \quad \text{unif. q.t.p. em } \tilde{\Omega}.$$

A expressão acima nos fornece $M_1 = M_1(\varepsilon) > 0$ tal que

$$2F(x,s) \geq (L(x) - \varepsilon)s^2 - M_1, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}, \text{ q.t.p. em } \tilde{\Omega}.$$

Isto, (4.0.22), (4.0.5), (F_2), Hölder e a imersão de Sobolev, nos fornece, para todo $v \in V$,

$$\begin{aligned} 2I(v) &\leq \|v\|^2 - \int_{\tilde{\Omega}} L(x)v^2\,dx + \varepsilon |v|_2^2 + M_1|\Omega| + 2\int_{\Omega\setminus\tilde{\Omega}} \left[Av^2 + B\right] dx \\ &\leq \left(-\frac{\delta_1}{2} + \frac{\varepsilon}{\lambda_1} + 2S^{-1}|A|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega\setminus\tilde{\Omega})}\right)\|v\|^2 + M_1|\Omega| + 2|B|_1. \end{aligned} \tag{4.0.24}$$

Observando agora que $|A|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega\setminus\tilde{\Omega})} \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$, e que a expressão (4.0.22) permanece válida se diminuirmos ε, obtemos, para ε suficientemente pequeno,

$$\left(-\frac{\delta_1}{2} + \frac{\varepsilon}{\lambda_1} + 2S^{-1}|A|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega\setminus\tilde{\Omega})}\right) < 0.$$

A expressão acima e (4.0.24) nos fornecem $I(v) \to -\infty$ quando $\|v\| \to \infty$. Uma vez que I é fracamente semicontínuo inferiormente, temos $\sup\limits_{v\in V} I(v) < \infty$, e portanto I satisfaz (I_1) se $N \geq 3$. Como de costume, o caso $N = 1$ ou 2 é tratado de maneira análoga, considerando a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, com $q > \sigma$ suficientemente grande.

A última coisa que resta verificar é que (f_2) implica que $\overline{m}(I,0) < \dim V$ ou $\dim V < m(I,0)$. Suponha então que $f_s(x,0) \not\leq \lambda_j$. De acordo com (4.0.3), temos

$$I''(0)(u,u) = \|u\|^2 - \int_\Omega f_s(x,0)u^2\,dx, \quad \forall\, u \in H.$$

Argumentando como no Lema 4.0.18(b), obtemos $\delta > 0$ tal que

$$I''(0)(u,u) \geq \delta\,\|u\|^2 > 0, \quad \forall\, u \in E_{j-1}^{\perp},$$

donde segue que $I''(0)$ é positiva definida em $E_{j-1}^{\perp}$. Assim,

$$\overline{m}(I,0) \leq j-1 < j = \dim V.$$

De maneira análoga, $\lambda_{j+1} \not\leq f_s(x,0)$ implica que

$$\dim V = j < j+1 \leq m(I,0).$$

Aplicamos agora o Teorema 3.0.2 para obter um ponto crítico não nulo para o funcional I, o que conclui a demonstração do teorema. ∎

Observamos, ainda, que podemos tratar o problema (P) com condições de não-quadraticidade e ressonância duais às condições $(NQ)_+$ e (F_1). Suponha então que existe um subconjunto $\Omega_0 \subset \Omega$ e uma função $C_- \in L^1(\Omega)$ tais que

$$(NQ)_- \qquad \begin{cases} \lim\limits_{|s|\to\infty} [f(x,s)s - 2F(x,s)] = -\infty, & \text{q.t.p. em } \Omega_0, \\ f(x,s)s - 2F(x,s) \leq C_-(x), \quad \forall\, s \in \mathbb{R}, & \text{q.t.p. em } \Omega. \end{cases}$$

e

$(\hat{F}_1)$ $\lambda_j \leq L(x) \leq K(x) \leq \lambda_{j+1}$, q.t.p. em Ω. Se $K(x) \equiv \lambda_{j+1}$, existe $D_- \in L^1(\Omega)$ tal que

$$F(x,s) \leq \frac{\lambda_{j+1}}{2}s^2 + D_-(x), \quad \forall\, s \in \mathbb{R}, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Os dois lemas seguintes têm demonstrações análogas às dos Lemas 4.0.7 e 4.0.16, respectivamente.

Lema 4.0.25. *Existe $0 < \alpha < |\Omega|$ tal que, se $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz $(\hat{f}_1)$, (F_2), $K(x) \leq \lambda_{j+1}$ e $(NQ)_-$ com $|\Omega_0| > \alpha$, então o funcional I satisfaz* (SCe).

Lema 4.0.26. *Se f satisfaz $(NQ)_-$ e $\lambda_j \leq L(x)$, então*

$$F(x,s) - \frac{1}{2}L(x)s^2 \geq -\frac{C_-(x)}{2}, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Utilizando argumentos análogos aos da demonstração do Teorema 4.0.15, com os dois lemas acima no lugar dos Lemas 4.0.7 e 4.0.16, respectivamente, obtemos

Teorema 4.0.27. *Se $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz $f(x,0) = 0$, (f_1), (f_2), $(\hat{F}_1)$, (F_2) e $(NQ)_-$ com $|\Omega_0| > \alpha$, em que $\alpha > 0$ é dado pelo Lema 4.0.25, então o problema (P) possui pelo menos uma solução não trivial.*

Vamos considerar agora o caso em que a ressonância em (P) ocorre no primeiro autovalor. Nesta situação , utilizamos uma hipótese um pouco mais geral que (F_2), a saber

$(\hat{F}_2)$ Existem $A \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ e $B \in L^1(\Omega)$ tais que

$$F(x,s) \leq A(x)s^2 + B(x), \quad \forall\, s \in \mathbb{R}, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

As idéias desenvolvidas até aqui e uma adaptação da demonstração do Lema 4.0.7 nos fornece o seguinte resultado.

Teorema 4.0.28. *Se $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz $f(x,0) = 0$, (f_1), $(\hat{F}_2)$, $K(x) \leq \lambda_1$, $\lambda_1 \not\leq f_s(x,0)$ e $(NQ)_+$ com $|\Omega_0| > 0$, então o problema (P) possui pelo menos uma solução não trivial.*

Demonstração. Novamente podemos supor que 0 é ponto crítico isolado de I. A condição (f_1) nos garante que $I''(0)$ é um operador de Fredholm. Da mesma forma que na demonstração do Teorema 4.0.15, denotamos $V = \{0\}$, $W = H$ e vamos checar as hipóteses do Teorema 3.0.2.

Como $K(x) \leq \lambda_1$, podemos utilizar (4.0.5) e o Lema 4.0.16 para obter

$$I(w) = \frac{1}{2}\left(\|w\|^2 - \int_\Omega K(x)w^2\,dx\right) - \int_\Omega \left[F(x,w) - \frac{K(x)}{2}w^2\right]dx \geq -\frac{|C_+|_1}{2}, \quad \forall\, w \in W,$$

e portanto a condição (I_2) é satisfeita. A condição (I_1) é trivial e, como $\lambda_1 \not\leq f_s(x,0)$, temos

$$m(I,0) \geq 1 > 0 = \dim V.$$

Resta mostrar que, se $|\Omega_0| > 0$, então I satisfaz (SCe). Como (f_1) implica em $(\hat{f}_1)$, podemos proceder como no Lema 4.0.7, necessitando somente verificar que, se (u_n) é ilimitada, ocorre

(ii) da Definição 3.0.1. Supondo, por contradição , que (u_n) não é limitada e (ii) não se verifica, obtemos uma subsequência, que vamos denotar ainda por (u_n), tal que $\|u_n\| \to \infty$ e $\|I'(u_n)\| \, \|u_n\|$ é limitado. Considerando $N \geq 3$, existe $M > 0$ tal que

$$\liminf \int_\Omega [f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)] \, dx = \liminf [2I(u_n) - I'(u_n)u_n] \leq M.$$

Definindo $\tilde{u}_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$ podemos supor, sem perda de generalidade, que $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$ fracamente em H, $\tilde{u_n} \to \tilde{u}$ fortemente em $L^2(\Omega)$ e q.t.p. em Ω. Observando que o argumento utilizado na primeira parte da demonstração do Lema 4.0.7 permanece válido com a condição (F_2) substituída por $(\hat{F}_2)$, obtemos

$$1 \leq \lambda_1 |\tilde{u}|_2^2,$$

donde segue que

$$1 \leq \lambda_1 |\tilde{u}|_2^2 \leq \|\tilde{u}\|^2 \leq 1,$$

e portanto $\tilde{u}$ é uma λ_1-autofunção . Como $|\Omega_0| > 0$, o princípio de continuação única nos garante que $\tilde{u}(x) \neq 0$ q.t.p. em Ω_0, e portando $|u_n(x)| \to \infty$ q.t.p. em Ω_0. Utilizando isto e $(NQ)_+$, obtemos

$$f(x, u_n(x))u_n(x) - 2F(x, u_n(x)) \geq -C_+(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

$$\lim [f(x, u_n(x))u_n(x) - 2F(x, u_n(x))] = \infty, \quad \text{q.t.p. em } \Omega_0.$$

A expressão acima e o Lema de Fatou nos leva a uma contradição . O caso em que N =1 ou 2 é análogo. ■

4.1 Outros Resultados

Até este ponto estamos interessados em obter multiplicidade de solução no caso em que se sabe que 0 é solução de (P). Porém, a geometria do nosso funcional e a condição de não-quadraticidade local nos permitem obter solução para (P) mesmo no caso em que não se conhece, a priori, nenhuma outra solução . Afim de obter tal solução , lançamos mão do seguinte resultado, cuja demonstração segue os mesmos passos daquela utilizada no Teorema 2.13 em [18].

Teorema 4.1.1. *Seja $H = V \oplus W$ um espaço de Hilbert com $W = V^\perp$ e V de dimensão finita. Se $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisfaz (I_1), (I_2) e* (SCe)$_b$ *para todo $b \geq \gamma$, então I possui um valor crítico $b \in [\gamma, \beta]$.*

Utilizando o teorema acima, os Lemas 4.0.7, 4.0.16, 4.0.25 e 4.0.26, o Corolário 4.0.21 e os mesmos argumentos utilizados na demonstração dos Teoremas 4.0.15, 4.0.27 e 4.0.28, obtemos os seguintes resultados

Teorema 4.1.2. *Se* $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *satisfaz* $(\hat{f}_1)$, (F_1), (F_2) *e* $(NQ)_+$ *com* $|\Omega_0| > \alpha$, *em que* $\alpha > 0$ *é dado pelo Lema 4.0.7, então o problema* (P) *possui pelo menos uma solução .*

Teorema 4.1.3. *Se* $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *satisfaz* $(\hat{f}_1)$, $(\hat{F}_1)$, (F_2) *e* $(NQ)_-$ *com* $|\Omega_0| > \alpha$, *em que* $\alpha > 0$ *é dado pelo Lema 4.0.25, então o problema* (P) *possui pelo menos uma solução .*

Teorema 4.1.4. *Se* $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *satisfaz* $(\hat{f}_1)$, $(\hat{F}_2)$, $K(x) \leq \lambda_1$, $\lambda_1 \not\leq f_s(x, 0)$ *e* $(NQ)_+$ *com* $|\Omega_0| > 0$, *então o problema* (P) *possui pelo menos uma solução .*

Os resultados acima generalizam o trabalho de Costa & Magalhães [3], onde os autores consideram limites uniformes em (4.0.6) e as condições $(NQ)_\pm$ com $\Omega_0 = \Omega$. A condição de não-quadraticidade local utilizada neste trabalho também complementa o resultado de Gonçalves, Pádua & Carrião [8].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] S. Ahmad & A.C. Lazer & J. Paul – *Elementary critical point theory and pertubations of elliptic boundary value problems at resonance*, Inidiana Univ. Math. J., **25** (1976), pp. 933-944.

[2] K.C. Chang – *Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems*, Birkhãser, Boston, 1993.

[3] D.G. Costa & C.A. Magalhães – *Variational elliptic problems wich are nonquadratic at infinity*, Nonlinear Analysis, **23** (1994), pp. 1401-1412.

[4] D.G. Costa & A.S. Oliveira – *Existence of solution for a class of semilinear elliptic problems at double resonance*, Bol. Soc. Bras. Matemática, **19** (1988), pp. 21-37.

[5] D.G. Figueiredo – *The Ekeland variational principle with applications and detours*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[6] D.G. Figueiredo – *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Lectures Notes in Mathematics, **957**, pp. 34-87.

[7] H. Berestycky & D.G. Figueiredo – *Double resonance and semilinear elliptic problems*, Comm. PDE, **6** (1981), pp. 91-120.

[8] J.V. Gonçalves, J.C. Pádua & P.C. Carrião – *Variational elliptic problems at double resonance*, Differential and Integral Equations, **9** (1996), pp. 295-303.

[9] M.J. Greenberg & J.R. Harper – *Algebraic Topology - A first course*, Benjamim/Commings, Massachusetts, 1981.

[10] E.M. Landesman & A.C. Lazer – *Nonlinear pertubations of linear elliptic boundary value problems at resonance*, J. Math. Mech, **19** (1970), pp. 609-623.

[11] A.C. Lazer & S. Solimini – *Nontrivial solutions of operators equations and Morse indices of critical points of min-max type*, Nonlinear Analysis, **12** (1988), pp. 761-775.

[12] A. Marino & G. Prodi – *Metodi pertubativi nella teoria di Morse*, Boll. Un. Mat. ital., **11** (1975), pp. 1-32.

[13] J. Mawhin, J. Ward Jr. & M. Willem – *Variational methods and semilinear elliptic equations*, Arch. Rat. Mech. Anal., **95** (1986), pp. 269-277.

[14] J.R. Munkres – *Topology - A fisrt course*, Prentice-Hall, New Jersey, 1975.

[15] P.H. Rabinowitz – *Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations*, Nonlinear Analisys: A collection of papers in honor of Eric Röthe, Academic Press, 1978, pp. 161-177.

[16] P.H. Rabinowitz – *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, C. B. M. S. Regional Conference Series in Mathemathics No. 65, 1986.

[17] E.A.B. Silva – *Linking theorems and applications to semilinear elliptic problems at resonance*, Nonlinear Analysis, **16** (1991), pp. 455-477.

[18] E.A.B. Silva – *Subharmonic solutions of subquadratic Hamiltonian systems*, J. Differential Equations, **1** (1995), pp. 120-145.

[19] E.A.B. Silva & M.A. Teixeira – *A version of Rolle's theorem and applications*, Bol. Soc. Bras. Matemática, **29** (1998), pp. 301-327.

[20] S. Smale – *An infinite dimensional version of Sard's theorem*, Amer. J. Math., **87** (1965), pp. 861-866.

[21] S. Solimini – *Morse index estimates im min-max theorems*, manuscripta Mathematical, **63** (1989), pp. 412-453.

[22] M. Struwe – *Variational methods - Aplications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.