Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Notas de Aula
Métodos Variacionais

por

Marcelo Furtado

Brasília
2018

Sumário

1 Preliminares **2**

1.1 Problema de autovalor 2

1.2 Funcionais diferenciáveis 9

1.3 Exercícios 16

2 Problemas de minimização **18**

2.1 Teorema do Multiplicador de Lagrange 20

2.2 Um problema de minimização com vínculo 22

2.3 Exercícios 27

3 Lema de deformação e a condição de Palais-Smale **31**

3.1 EDO's em espaços de Banach 35

3.2 O Lema de Deformação 39

3.3 A condição de Palais-Smale 42

3.4 Exercícios 45

4 Teorema do Passo da Montanha **49**

4.1 Um problema superlinear 51

4.2 Um problema de autovalor não linear 56

4.3 Um problema em $\mathbb{R}^N$ 58
4.4 Exercícios 69

5 Teorema do Ponto de Sela **72**
5.1 Problema assintoticamente linear não ressonate 77
5.2 Problema resonante 81
5.3 Exercícios 84

6 Teorema de Linking **87**
6.1 Um problema superlinear 90
6.2 Exercícios 93

7 Funcionais com simetria **94**
7.1 Gênero e o Teorema de Ljusternik-Schnirelmann 94
7.2 Infinitas soluções para um problema de autovalor não linear 105
7.3 Teorema do Passo da Montanha com simetria 107
7.4 Infinitas soluções para um problema superlinear 114
7.5 Exercícios 117

8 Espaços de Sobolev **119**
8.1 Derivadas fracas 123
8.2 Espaços de Sobolev 126
8.3 Aproximação por funções suaves 131
8.4 Imersões de Sobolev 135
8.4.1 Imersões Compactas 151
8.5 Exercícios 155

Bibliografia **158**

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1 Problema de autovalor

Nessa seção vamos estudar o problema de autovalor

$$(PA) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma aberto limitado. Vamos usar em $H_0^1(\Omega)$ a seguinte norma

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Note que a formulação fraca do problema acima é: encontrar $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega uv, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Lembre que estamos interessados em soluções $u \neq 0$, visto que autovetores são sempre vetores não nulos. Fazendo $v = u$ na expressão acima obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \lambda \int_\Omega u^2,$$

de onde se conclui que $\lambda > 0$.

Para resolver o problema note que, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, fixado a aplicação

$$\begin{aligned} T_u : \ & H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & v \mapsto T_u(v) := \int_\Omega uv \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

é um funcional linear e contínuo em $H_0^1(\Omega)$. Logo, existe $Tu \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\langle Tu, v\rangle = \int_\Omega uv$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Variando u, podemos construir uma aplicação $T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle Tu, v\rangle = \int_\Omega uv, \quad \forall\, u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.1}$$

Dado $u_1, u_2, v \in H_0^1(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que

$$\langle T(u_1 + \lambda u_2), v\rangle = \int_\Omega (u_1 + \lambda u_2)v = \langle Tu_1 + \alpha Tu_2, v\rangle,$$

e

$$\langle Tu, v\rangle = \int_\Omega uv = \int_\Omega vu = \langle Tv, u\rangle = \langle u, Tv\rangle,$$

e portanto T é linear e autoadjunto. Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré para obtemos,

$$\|Tu\|^2 = \langle Tu, Tu\rangle = \int_\Omega uTu \le \|u\|_2\|Tu\|_2 \le c_1\|u\|\|Tu\|,$$

ou ainda

$$\|Tu\| \le c_1\|u\|, \ \ \forall\, u \in H_0^1(\Omega),$$

o que mostra que T é contínuo.

Seja agora $(u_m) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência limitada. A compacidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ implica que, a menos de subsequência,

$$u_m \to u \quad \text{em } L^2(\Omega).$$

Assim, procedendo como acima, obtemos

$$\|Tu_m - Tu_k\|^2 = \langle T(u_m - u_k), (u_m - u_k)\rangle \le c_2\|u_m - u_k\|_2\|T(u_m - u_k)\|,$$

ou ainda,

$$\|Tu_m - Tu_k\| \le c_2\|u_m - u_k\|_2.$$

Como $u_m \to u$ em $L^2(\Omega)$ a expressão acima mostra que (Tu_m) é uma sequência de Cauchy em $H_0^1(\Omega)$. Logo, possui subsequência convergente. Isso mostra que T é compacto.

Observe agora que, se $u \neq 0$ é solução fraca de (PA), então

$$\langle u, v\rangle = \lambda \int_\Omega uv = \lambda \langle Tu, v\rangle,$$

ou ainda

$$\langle Tu, v\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle u, v\rangle, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Segue da expressão acima que $\lambda > 0$ é autovalor de (PA) com autovetor associado $u \neq 0$ se, e somente se,

$$Tu = \frac{1}{\lambda}u.$$

Temos então o seguinte resultado.

Teorema 1.1. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado então o problema de autovalor*

$$(PA) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui uma sequência de autovalores

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots \le \lambda_k \le \cdots$$

tal que $\lambda_k \to \infty$ quando $k \to \infty$. Além disso, as autofunções associadas formam uma base ortogonal de $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Seja T o operador definido em (1.1). Sabemos que $\lambda > 0$ é autovalor do problema (PA) se, e somente se, $1/\lambda$ é autovalor de T. De acordo com o Teorema **??**, exatamente uma das alternativas abaixo ocorre

(i) $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ é finito ;

(ii) $\sigma_p(T) \setminus \{0\}$ é uma sequência $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $\mu_m \to 0^+$.

Uma vez que $H_0^1(\Omega)$ é separável e T é compacto e autoadjunto, os autovetores de T formam uma base ortogonal de $H_0^1(\Omega)$ (cf. [9, Teorema VI.11]). Usando a

Alternativa de Fredholm temos que, se μ é um autovalor de T, então a dimensão de $\ker(T - \mu\,\mathrm{Id})$ é finita. Logo, todos os autoespaços tem dimensão finita. Uma vez que $H_0^1(\Omega)$ tem dimensão infinita concluímos que a alternativa (i) acima não pode ocorrer. Desse modo

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\} = (\mu_m),$$

com $\mu_m \to 0^+$. Os autovalores correspondentes de (PA) são da forma

$$\lambda_m = \frac{1}{\mu_m}.$$

Logo, eles formam um sequência

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_m \leq \cdots,$$

tal que $\lim_{m\to\infty} \lambda_m = +\infty$. Mostraremos posteriormente que o primeiro autovalor λ_1 é simples, isto é, $\lambda_1 < \lambda_2$. □

Vale observar que, na notação do teorema acima, se

$$\lambda_{m-1} < \lambda_m = \cdots = \lambda_{m+j-1} < \lambda_{m+j}$$

então $\lambda = \lambda_m$ é um autovalor com multiplicade j, isto é,

$$\dim\ker(T - \lambda\,\mathrm{Id}) = j.$$

Outro ponto importante é que o resultado acima permanece válido para o operador

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + c(x)u,$$

se L for simétrico, uniformemente elíptico, os coeficientes forem limitados e c for não negativa.

A parte final do teorema nos diz que

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \ldots\}},$$

onde φ_m é uma autofunção associada ao autovalor λ_m. As autofunções φ_i são ortogonais em $H_0^1(\Omega)$. Contudo, usando a formulação fraca do problema (AP), é fácil ver que elas são também ortogonais em $L^2(\Omega)$. Isso nos permite obter algumas desigualdades interessantes para funções de $H_0^1(\Omega)$ em termos dos autoespaços (cf. Exercício **??**).

No que segue vamos extrair propriedades importante do primeiro autovalor λ_1. Começamos recordando o seguinte resultado de Análise Funcional (cf. [9, Proposição VI.9])

Lema 1.2. *Seja H um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador linear, contínuo e autoadjunto. Defina*

$$m := \inf_{\|u\|_H=1} \langle Tu, u\rangle_H \quad e \quad M := \sup_{\|u\|_H=1} \langle Tu, u\rangle_H.$$

Então m, $M \in \sigma(T)$ e $\sigma(T) \subset [m, M]$.

Vamos aplicar o resultado acima para o operador T relacionado com o problema (PA). Para fazer isso, observe inicialmente que o menor autovalor λ_1 do problema (PA) é exatamente o inverso do maior autovalor do operador T definido em (1.1). Assim,

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup_{\|u\|=1} \langle Tu, u\rangle = \sup_{u\neq 0} \left\langle T\left(\frac{u}{\|u\|}\right), \frac{u}{\|u\|}\right\rangle.$$

Segue da expressão acima que, se $u \neq 0$, então

$$\frac{1}{\lambda_1} \geq \left\langle T\left(\frac{u}{\|u\|}\right), \frac{u}{\|u\|}\right\rangle = \frac{1}{\|u\|^2}\langle Tu, u\rangle = \frac{1}{\|u\|^2}\int_\Omega u^2,$$

e portanto

$$\lambda_1 \int_\Omega u^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

As considerações acima provam o seguinte resultado.

Proposição 1.3. *O primeiro autovalor $\lambda_1 > 0$ do problema de autovalor (PA) é*

$$\lambda_1 = \inf_{u\neq 0} Q(u),$$

onde $Q : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é definido por

$$Q(u) = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2}.$$

Vamos estudar melhor a função Q acima. Observe inicialmente que o ínfimo de Q é na verdade um mínimo. De fato, se φ_1 é uma autofunção associada a λ_1, então $-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$ em Ω, donde se conclui que

$$\int |\nabla\varphi_1|^2 = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1^2,$$

isto é,

$$\lambda_1 = Q(\varphi_1).$$

Desse modo, toda autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 é um ponto de mínimo de Q.

Vamos mostrar que a recíproca da conclusão acima é verdadeira, isto é, se $\varphi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ é tal que $Q(\varphi) = \lambda_1$, então φ é uma λ_1-autofunção. De fato, dada $v \in H_0^1(\Omega)$ e $t \in \mathbb{R}$, temos que $\lambda_1 \leq Q(\varphi + tv)$, isto é,

$$\int_\Omega |\nabla(\varphi + tv)|^2 \geq \lambda_1 \int_\Omega (\varphi + tv)^2.$$

Desenvolvendo os dois lados da desigualdade acima e lembrando que $\lambda_1 \int_\Omega \varphi^2 = \int_\Omega |\nabla\varphi|^2$ obtemos

$$2t \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla v + t^2 \int_\Omega |\nabla v|^2 \geq 2t\lambda_1 \int_\Omega \varphi v + t^2\lambda_1 \int_\Omega v^2.$$

Dividindo a expressão acima por $2t > 0$ e fazendo $t \to 0^+$ concluímos que

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla v \geq \lambda_1 \int_\Omega \varphi v.$$

Analogamente, fazendo $t \to 0^-$, obtemos a desigualdade reversa. Logo

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla v = \lambda_1 \int_\Omega \varphi v, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

o que mostra que φ é uma solução fraca do problema (AP) com $\lambda = \lambda_1$.

Estamos prontos para provar o

Teorema 1.4. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado, λ_1 é o primeiro autovalor do problema (AP) e φ_1 é uma autofunção associada a esse autovalor. Então*

(i) *$\varphi_1 > 0$ ou $\varphi_1 < 0$ em Ω.*

(ii) *se ψ é uma λ_1-autofunção, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\psi = \alpha\varphi_1$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que φ_1 troca de sinal em Ω. Então

$$\varphi_1 = \varphi_1^+ - \varphi_1^-,$$

com $\varphi_1^+, \varphi_1^- \not\equiv 0$. Lembremos que $\varphi_1^+, \varphi_1^- \in H_0^1(\Omega)$ e

$$\nabla\varphi_1^+(x) = \begin{cases} \nabla\varphi_1(x), & \text{q.t.p. em } \{x \in \Omega : \varphi_1(x) > 0\} \\ 0, & \text{q.t.p. em } \{x \in \Omega : \varphi_1(x) \leq 0\}, \end{cases}$$

com uma expressão análoga valendo para $\nabla\varphi_1^-$. Fazendo $v = \varphi_1^+$ na formulação fraca do problema obtemos

$$\int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1^+ = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1\varphi_1^+. \tag{1.2}$$

Mas

$$\int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1^+ = \int_{\{\varphi_1 > 0\}} \nabla\varphi_1^+ \cdot \nabla\varphi_1^+ = \int_\Omega |\nabla\varphi_1^+|^2.$$

Analogamente $\int_\Omega \varphi_1\varphi^+ = \int_\Omega (\varphi_1^+)^2$, e portanto segue de (1.2) que

$$\int_\Omega |\nabla\varphi_1^+|^2 = \lambda_1 \int_\Omega (\varphi_1^+)^2.$$

Logo $Q(\varphi_1^+) = \lambda_1$ donde se conclui que φ_1^+ é uma λ_1-autofunção. De maneira análoga mostra-se que φ_1^- é também λ_1-autofunção.

Temos então que

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1^\pm = \lambda_1\varphi_1^\pm, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Uma vez que as autofunções são regulares e $\varphi_1^\pm \geq 0$ em Ω, segue do Princípio do Máximo Forte que $\varphi_1^\pm > 0$ em Ω. De fato, se existisse $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi_1^+(x_0) = 0$ então a função φ_1^+ terias um ponto de mínimo em Ω. Daí seguiria que $\varphi_1^+ \equiv 0$ em Ω o que é absurdo, visto que estamos supondo $\varphi_1^+ \not\equiv 0$. Desse modo concluímos que $\varphi_1^\pm > 0$. Mas isso contraria o fato de $\varphi_1^+\varphi_1^- \equiv 0$ em Ω.

A contradição acima proveio do fato de supormos que φ_1 trocava de sinal em Ω. Logo devemos ter $\varphi_1^+ \equiv 0$ ou $\varphi_1^- \equiv 0$. Se $\varphi_1^- \equiv 0$ então $\varphi_1 \geq 0$ em Ω. Aplicando o Princípio do Máximo novamente concluímos que $\varphi_1 > 0$ em Ω. No caso em que $\varphi_1^+ \equiv 0$ o mesmo argumento implica que $\varphi_1 < 0$ em Ω. Isso estabelce o item (i).

Para provar (ii) vamos supor, por contradição novamente, que φ_1 e ψ são linearmente independentes. Nesse caso,

$$\dim\ker(-\Delta - \lambda_1\,\mathrm{Id}) \geq 2.$$

Uma vez que existe uma base ortogonal de $H_0^1(\Omega)$ formada por autofunções, e φ_1 e ψ são linearmente independentes, temos que

$$0 = \langle \varphi_1, \psi\rangle = \int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \psi = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1\psi.$$

Mas a expressão acima não pode nunca ocorrer visto que, pelo item (i), o produto $\varphi_1\psi$ tem sinal definido em Ω. Obtemos então uma contradição, o que mostra que ψ é um múltiplo escalar de φ_1. $\square$

1.2 Funcionais diferenciáveis

Dado um espaço de Banach X e um funcional $I : X \to \mathbb{R}$, dizemos que I possui uma derivada de Fréchet no ponto $u \in X$ quanto existe um funcional linear $T \in X'$ tal que

$$\lim_{v\to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - T(v)}{\|v\|_X} = 0.$$

A derivada de Fréchet no ponto u, quando existe, é única. Assim, vamos denotá-la simplesmente por $I'(u)$. Se $A \subset X$ é um conjunto aberto, dizemos que $I \in C^1(A, \mathbb{R})$ se a derivada de Frechét de I existe em todo ponto $u \in A$ e a aplicação $I' : A \to X'$ é contínua.

Observe que o conceito acima é semelhante ao conceito de diferenciabilidade de uma função $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Lembre que nos cursos de Análise aprendemos também o conceito de derivada direcional. Um conceito análogo pode ser introduzido em espaços de Banach como segue: dizemos que I tem uma derivada de Gateaux no ponto $u \in X$ se existe $T_0 \in X'$ tal que

$$\lim_{t\to 0} \frac{I(u+tv) - I(u)}{t} = T_0 v, \quad \forall\, v \in X.$$

A derivada de Gateaux, quando existe, é também única e será denotada por $DI(u)$.

Pode-se mostrar que, se I é derivável no sentido de Fréchet, então I é também Gateaux-diferenciável com $DJ(u) = I'(u)$. O contrário não é verdade em geral. Contudo, se I tem derivada de Gateaux em todos os pontos de uma vizinhança de $u \in X$ e DI é contínua no ponto u, então $I'(u)$ existe e $I'(u) = DI(u)$ (cf. Exercício 1.7).

Um exemplo simples de funcional diferenciável é $J(u) = \|u\|_X^2$, onde X é um espaço de Hilbert. De fato, usando as definições acima pode-se mostrar que $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ com (cf. Exercício 1.8)

$$J'(u)v = 2\langle u, v\rangle_X, \quad \forall\, u, v \in X.$$

O objetivo dessa seção é apresentar algumas classes de funcionais diferenciáveis que serão usandos no transcorrer do curso. A exposição feita aqui está baseada naquela apresentada em [44, Seção 1.2]. A seguinte desigualdade será usada repetidas vezes

$$(|a| + |b|)^\tau \leq 2^{\tau-1}(|a|^\tau + |b|^\tau), \;\; \forall\, a, b \in \mathbb{R}, \tau \geq 1. \tag{1.3}$$

Começamos com as propriedades básicas dos chamados operadores de superposição.

Lema 1.5. *Sejam Ω um domínio limitado, $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $r, q \geq 1$, $a \geq 0$ e $b > 0$ tais que*

$$|f(x,s)| \leq a + b|s|^{\frac{r}{q}} \;,\; \forall\; (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Então o operador $B : L^r(\Omega) \to L^q(\Omega)$ dado por

$$B(u) = f(x, u(x))$$

está bem definido e é contínuo. O mesmo resultado vale se Ω é ilimitado e $a = 0$.

Demonstração. Vamos verificar inicialmente que, se $u \in L^r(\Omega)$, então $Bu \in L^q(\Omega)$. Para tanto, note que

$$|f(x,u)|^q \leq (a + b|u|^{r/q})^q \leq 2^{q-1}\left(a^q + b^r|u|^r\right),$$

e portanto $\int_\Omega |f(x,u)|^q < \infty$.

Seja $(u_k) \subset L^r(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ em $L^r(\Omega)$. Passando a uma subsequência se necessário podemos supor que, q.t.p. em Ω, vale $u_k(x) \to u(x)$ e $|u_n(x)|$, $|u(x)| \leq \psi(x)$, para alguma função $\psi \in L^r(\Omega)$. Por hipótese, temos que

$$\begin{aligned}
|f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^q &\leq (|f(x,u_n(x))| + |f(x,u(x))|)^q \\
&\leq 2^{q-1}(|f(x,u_n(x))|^q + |f(x,u(x))|^q) \\
&\leq 2^{q-1}\left\{\left(a + b|u_n(x)|^{\frac{r}{q}}\right)^q + \left(a + b|u(x)|^{\frac{r}{q}}\right)^q\right\} \\
&\leq 2^{q-1}[2^{q-1}(a^q + b^q|u_n(x)|^r) + 2^{q-1}(a^q + b^q|u(x)|^r)] \\
&\leq c_1 + c_2|\psi(x)|^r,
\end{aligned}$$

onde $c_1 = 2^{2q-1}a^q$ e $c_2 = 2^{2q-1}b^q$. Como Ω é limitado e $\psi \in L^r(\Omega)$, segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |B(u_n) - B(u)|_q^q &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |B(u_n) - B(u)|^q \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^q = 0,
\end{aligned}$$

mostrando que B é um operador contínuo.

Uma inspeção simples da prova mostra que, se $a = 0$, não precisamos da limitação de Ω. $\square$

Dados $r_1, r_2, q_1, q_2 \geq 1$, sejam

$$\Sigma_1 = L^{r_1}(\Omega) \cap L^{r_2}(\Omega) \quad \text{e} \quad \Sigma_2 = L^{q_1}(\Omega) + L^{q_2}(\Omega).$$

Pode-se mostrar (cf. [1]) que eles são espaços de Banach com as normas

$$\|u\|_{\Sigma 1} = |u|_{r_1} + |u|_{r_2},$$

e

$$\|u\|_{\Sigma_2} = \inf\{|u_1|_{q_1} + |u_2|_{q_2} : u = u_1 + u_2,\ u_1 \in L^{q_1}(\Omega),\ u_2 \in L^{q_2}(\Omega)\}.$$

Lema 1.6. *Sejam Ω um domínio limitado, $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $a, b \geq 0$ tais que*

$$|f(x,s)| \leq a|s|^{\frac{r_1}{q_1}} + b|s|^{\frac{r_2}{q_2}}\ ,\ \forall\ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Então operador $B : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ definido por

$$B(u) = f(x, u(x)).$$

é tal que $B = B_1 + B_2$, onde B_i é uma aplicação contínua de L^{r_i} em L^{q_i}, para $i = 1, 2$. Em particular, B é uma aplicação contínua de Σ_1 em Σ_2.

Demonstração. Seja $\xi \in C(\mathbb{R}, [0,1])$ uma função corte tal que $\xi \equiv 1$ em $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e $\xi \equiv 0$ em $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$. Sejam $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$g(x,s) = \xi(s)f(x,s), \quad h(x,s) = (1 - \xi(s))f(x,s).$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $r_1/q_1 \leq r_2/q_2$. Como $\xi(s) = 0$ se $|s| \geq 1$, temos que

$$|g(x,s)| \leq |f(x,s)| \leq a|s|^{\frac{r_1}{q_1}} + b|s|^{\frac{r_2}{q_2}} \leq (a+b)|s|^{\frac{r_1}{q_1}}, \quad \forall\ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

De maneira análoga, como $(1 - \xi(s)) = 0$ para $s| \leq 1/2$, obtemos

$$|h(x,s)| \leq (a+b)|s|^{\frac{r_2}{q_2}} \quad \forall\ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Definindo as aplicações

$$B_1 : L^{r_1}(\Omega) \to L^{q_1}(\Omega)\ ,\ B_1(u) = g(x, u(x))$$

e

$$B_2 : L^{r_2}(\Omega) \to L^{q_2}(\Omega)\ ,\ B_2(u) = h(x, u(x)),$$

segue do Lema 1.5 que B_1 e B_2 são contínuas. O resultado segue do fato de que $f(x,u) = g(x,u) + h(x,u)$. $\square$

Teorema 1.7. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto e* $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Suponha que existem constantes* $r, q > 0$ *e* $a, b \geq 0$ *tais que*

$$|f(x,s)| \leq a|s|^r + b|s|^q, \quad \forall\, (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Suponha ainda que o espaço de Banach X *seja tal que as imersões* $X \hookrightarrow L^{r+1}(\Omega)$ *e* $X \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ *são contínuas. Então o funcional* $J : X \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u),$$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$, *é de classe* C^1 *em* X, *com*

$$J'(u)v = \int_\Omega f(x,u)v, \quad \forall\; u,\, v \in X.$$

Além disso, se as imersões acima forem compactas, então $J' : X \to X'$ *é compacto.*

Demonstração. Como $X \hookrightarrow L^{r+1}(\Omega)$ e $X \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$|u|_{r+1} \leq c_1 \|u\|_X, \quad |u|_{q+1} \leq c_2 \|u\|_X, \quad \forall\;\; u \in X. \tag{1.4}$$

Para $u, v \in X$ fixos e $\gamma \in [0,1]$, podemos usar a hipótese de crescimento de f e (1.3), para escrever

$$\begin{aligned} |f(x, u + \gamma v)v| &\leq a|u + \gamma v|^r |v| + b|u + \gamma v|^q |v| \\ &\leq c_3(|u|^r|v| + |v|^{r+1} + |u|^q|v| + |v|^{q+1}) \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young com expoentes $(r+1)/r$ e $r+1$ obtemos

$$|u|^r|v| \leq \frac{|u|^{r+1}}{(r+1)/r}.$$

Vale uma desigualdade análoga com q no lugar de r. Logo, podemos afirmar que

$$|f(x, u + \gamma v)v| \leq c_4\Big(|u|^{r+1} + |v|^{r+1} + |u|^{q+1} + |v|^{q+1}\Big), \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Note que, por (1.4), o lado direito da expressão acima é uma função de $L^1(\Omega)$. Desse modo, podemos usar o Teorema do Valor Médio, a desigualdade acima e o Teorema da Convergência Dominada para obter

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{F(x,u+tv)-F(u)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega f(x,u+\theta tv)v\\ &= \int_\Omega f(x,u)v,\end{aligned}$$

em que $\theta(x)\in[0,1]$.

Seja $T_0(v)=\int_\Omega f(x,u)v$, para $v\in X$. Essa aplicação é claramente linear. Além disso, usando o crescimento de f, a desiguldade de Hölder e (1.4), obtemos

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f(x,u)v\right| &\le \int_\Omega |f(x,u)||v|\\ &\le c_5\left(\int_\Omega |u|^r|v|+|u|^q|v|\right)\\ &\le c_5\left(|u|_{r+1}^r|v|_{r+1}+|u|_{q+1}^r|v|_{q+1}\right)\\ &\le c_6\left(|u|_{r+1}^r+|u|_{q+1}^r\right)\|v\|_X.\end{aligned}$$

Logo T_0 é contínua. Isso mostra que J possui derivada de Gateaux no ponto u e essa é dada por $DJ(u)v=\int_\Omega f(x,u)v$.

Se mostrarmos que DJ é contínua em X então teremos que J é diferenciável no sentido de Frechét, é de classe C^1 em X e $J'(u)v=DJ(u)v$. Seja então $(u_k)\subset X$ tal que $u_k\to u\in X$. Defina a aplicação

$$B: L^{r+1}(\Omega)\cap L^{q+1}(\Omega)\to L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega)+L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$$

por, $B(u):=f(x,u)$. Segue do Lema 1.6 que $B=B_1+B_2$, onde

$$B_1: L^{r+1}(\Omega)\to L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega),\ B_2: L^{q+1}(\Omega)\to L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$$

são aplicações contínuas e limitadas. Note que,

$$\begin{aligned}
|(DJ(u_k) - DJ(u))v| &= \left| \int_\Omega (f(x,u_k) - f(x,u))v \right| \\
&= \left| \int_\Omega (B(u_k) - B(u))v \right| \\
&\le \int_\Omega |B_1(u_k) - B_1(u)||v| + \int_\Omega |B_2(u_k) - B_2(u)|.
\end{aligned}$$

Usando (1.4) e a desigualdade de Hölder como antes, obtemos da desigualdade acima que

$$\begin{aligned}
|(DJ(u_k) - DJ(u))v| &\le |B_1(u_k) - B_1(u)|_{\frac{r+1}{r}} |v|_{r+1} + |B_2(u_k) - |B_2(u)|_{\frac{q+1}{q}} |v|_{q+1} \\
&\le c_7 \{|B_1(u_k) - B_1(u)|_{\frac{r+1}{r}} + |B_2(u_k) - B_2(u)|_{\frac{q+1}{q}} \Big\} \|v\|_X.
\end{aligned}$$

Lembrando que (1.4) implica que $u_k \to u$ também em $L^{r+1}(\Omega)$ e $L^{q+1}(\Omega)$, concluímos que $B_1(u_k) \to B_1(u)$ e $B_2(u_k) \to B_2(u)$ em $L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega)$ e $L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$, respectivamente. Logo, segue da expressão acima que $DJ(u_k) \to DJ(u)$ em X'.

Como a derivada de Gateaux é contínua em X concluímos que J é de classe C^1, com $J'(u)v = DJ(u)v = \int_\Omega f(x,u)v$.

Suponha agora que as imersões do enunciado sejam compactas. Então, se $(u_k) \subset X$ é uma sequência limitada, a menos de uma subsequência, $u_n \to u$ em $L^{r+1}(\Omega)$ e $L^{q+1}(\Omega)$. Então,

$$B_1(u_n) \to B_1(u) \text{ em } L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega) \;\text{ e }\; B_2(u_n) \to B_2(u) \text{ em } L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega),$$

e portanto podemos proceder como acima para concluir que $J'(u_k) \to J'(u)$ em X'. □

Usando as imersões do espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ e as consideraçõs feitas acima, podemos provar a seguinte proposição, que será largamente usada nos capítulos seguintes.

Teorema 1.8. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e a função f satisfaz*

(f_0) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(f_1) *existem* c_1, $c_2 \geq 0$ *e* $1 \leq p < 2^*$, *tais que*

$$|f(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1}, \quad \forall\, (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Então o funcional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u),$$

com $F(x,s) = \int_0^t f(t)\mathrm{d}t$ *está bem definido, é de classe* C^1 *e*

$$I'(u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Omega f(x,u)v, \quad \forall\; u,\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Além disso, se $p < 2^*$*, então a derivada* $I' : X \to X'$ *é da forma* $I' = Id - K$*, com* Id *sendo o operador identidade e* $K : X \to X'$ *compacto.*

1.3 Exercícios

1.1. Dado um espaço de Hilbert H e uma sequência $(u_k) \subset H$, dizemos que u_k *converge fracamente para* u se

$$\lim_{k\to\infty} \langle u_k, v\rangle_H = \langle u, v\rangle_H, \quad \text{para todo } v \in H.$$

Nesse caso, escrevemos $u_k \rightharpoonup u$. Prove os ítens abaixo.

a) $u_k \rightharpoonup u$ se, e somente se, $T(u_k) \to T(u)$ para todo $T \in H'$.

b) Se $u_k \rightharpoonup u$ e $\lim_{k\to\infty} \|u_k\| = \|u\|$, então $u_k \to u$ fortemente em H.

c) Se $u_k \rightharpoonup u$, então (u_k) é limitada e $\|u\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|$.

   Sugestão: veja [9, Proposição 3.5].

d) Dê um exemplo de uma sequência $(u_k) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ que converge fraco para zero mas não converge forte em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

   Sugestão: tome a mesma sequência do Exercício 8.16.

1.2. Mostre que a sequência de autovalores do problema (PA) obtida na Seção 1.1 contém todos os autovalores do problema.

1.3. Se $C > 0$ é tal que

$$\int u^2 \leq C \int |\nabla u|^2, \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega),$$

então $C \geq 1/\lambda_1$.

1.4. Se $\lambda < \lambda_1$ então

$$\|u\|_\lambda = \left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda u^2 \right) \right)^{1/2}$$

define uma norma em $H_0^1(\Omega)$ que é equivalente à norma usual.

1.5. Seja $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a sequência (ordenada) de autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ e $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ as autofunções associadas. Dado $k \in \mathbb{N}$ considere $V = \text{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}\}$ e $W = V^\perp$. Prove que valem as seguintes desigualdades

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \leq \lambda_{k-1} \int_\Omega v^2, \quad \forall\, v \in V,$$

e

$$\lambda_k \int_\Omega w^2 \leq \int_\Omega |\nabla w|^2 \quad \forall\, w \in W.$$

1.6. (Desigualdade de interpolação) Se $1 \leq r \leq s \leq t < \infty$ são tais que

$$\frac{1}{s} = \frac{\alpha}{r} + \frac{1-\alpha}{t}$$

$u \in L^r(\Omega) \cap L^t(\Omega)$, então $u \in L^s(\Omega)$ e vale a seguinte desigualdade

$$\|u\|_{L^s(\Omega)} \leq \|u\|_{L^r(\Omega)}^\alpha \|u\|_{L^t(\Omega)}^{1-\alpha}.$$

1.7. Seja X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional. Mostre que se $I'(u)$ existe então existe a derivada de Gateaux em u e $DI(u) = I'(u)$. Supondo agora que DI existe em uma vizinhança de $u \in X$ e é contínua nesse ponto, então I tem derivada de Fréchet em u.

1.8. Se X é um espaço de Hilbert e $J(u) = \|u\|_X^2$, então J é de classe C^1 em X com $J'(u)v = 2\langle u, v\rangle_X$, para cada u, $v \in X$.

1.9. Demonstre a desigualdade (1.3).

CAPÍTULO 2

Problemas de minimização

Iniciamos esse capítulo considerando o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{p-2}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um dómínio limitado, $2 < p < 2^*$ e λ é um parâmetro real tal que $\lambda < \lambda_1$, onde λ_1 denota o primeiro autovalor do problema (PA) estudado na Seção 1.1. Observe que $u \equiv 0$ é uma solução (trivial) do probema, de modo que nosso objetivo é encontrar uma solução que não seja identicamente nula.

Conforme vimos no final da Seção 1.2 as soluções fracas do problema são precisamente os pontos críticos do funcional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p,$$

onde

$$\|u\| = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)\right)^{1/2}, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

De acordo com o Exercício 1.4, como $\lambda < \lambda_1$, a expressão acima define uma norma em $H_0^1(\Omega)$. Vamos denotar por H o espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ munido da norma acima. No que segue vamos denotar

$$|u|_p := \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{1/p}, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Para encontrar pontos críticos de I, a primeira ideia que vem à cabeça é tentar encontrar pontos de mínimo ou de máximo do funcional. Note porém que, se $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, então

$$\lim_{t \to \infty} I(tu) = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{t^2}{2} \|u\|^2 - \frac{t^p}{p} |u|_p^p \right) = -\infty,$$

o que mostra que o funcional I não é limitado inferiormente.

No que segue vamos verificar que I também não é limitado superiormente. Para tanto, observamos inicialmente que usando a definição de I e um cálculo simples podemos verificar que, para cada $u \in H \setminus \{0\}$, vale o seguinte (cf. Exercício 2.1)

$$\max_{t \geq 0} I(tu) = \frac{p-2}{2p} \left(\frac{\|u\|^2}{|u|_p^2} \right)^{p/(p-2)} \tag{2.1}$$

Seja φ_k a autofunção associada ao k-ésimo autovalor λ_k do problema (PA). Suponha ainda que φ_k está normalizada em $L^2(\Omega)$. Defina

$$u_k = \frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}}$$

e observe que, como $\lambda_k = \int_\Omega |\nabla \varphi_k|^2$, então

$$\|u_k\|^2 = \frac{\|\nabla \varphi_k\|^2}{\lambda_k} = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla \varphi_k|^2 - \lambda \int_\Omega \varphi_k^2}{\lambda_k} = \frac{\lambda_k - \lambda}{\lambda_k}.$$

Logo, a sequência (u_k) é limitada em $H_0^1(\Omega)$ e, a menos de subsequência, $u_k \rightharpoonup u$ fracamente em H e $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Como u_k é ortogonal a φ_j sempre que $j \neq k$, a convergência fraca de u implica que

$$\langle u, \varphi_j \rangle = \lim_{k \to \infty} \langle u_k, \varphi_j \rangle = 0, \quad \forall\, j \in \mathbb{N},$$

e portanto $u = 0$. Logo

$$0 = \lim_{k \to \infty} |u_k|_p = \lim_{k \to \infty} \frac{|\varphi_k|_p}{\sqrt{\lambda_k}}$$

e portanto

$$\lim_{k\to\infty}\max_{t\geq 0} I(t\varphi_k) = \lim_{k\to\infty}\frac{p-2}{2p}\left(\frac{\|\varphi_k\|^2}{|\varphi_k|_p^2}\right)^{p/(p-2)} = \lim_{k\to\infty}\frac{p-2}{2p}\left(\frac{\sqrt{\lambda_k}}{|\varphi_k|_p}\right)^{2p/(p-2)} = \infty.$$

Desse modo, I também não é limitado superiormente.

A ideia então é usar um argumento de minimização com vínculo e usar a homogeneidade do lado direito da equação para resolver o problema. Na próxima seção apresentamos o resultado abstrato que vai nos ajudar em nossa tarefa.

2.1 Teorema do Multiplicador de Lagrange

Nesta seção vamos mostrar que o Teorema do Multiplicador de Lagrange visto nos cursos de Análise no $\mathbb{R}^N$ permanece válido em dimensão infinita. Mais especificamente, vamos provar o seguinte resultado.

Teorema 2.1. *Seja X um espaço de Banach, $F, G \in C^1(X,\mathbb{R})$ e $x_0 \in X$ um extremo local de F restrita ao conjunto $M = \{x \in X : G(x) = G(x_0)\}$. Se $G'(x_0)w \neq 0$ para algum $w \in X$ então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$F'(x_0)w = \lambda G'(x_0)w, \quad \forall\, w \in X.$$

Para provar o teorema vamos usar o seguinte lema.

Lema 2.2. *Seja X um espaço de Banach e $F, G \in C^1(X,\mathbb{R})$. Suponha que existem $x_0, v, w \in X$ tais que $F'(x_0)vG'(x_0)w \neq F'(x_0)wG'(x_0)v$. Então o ponto x_0 não é extremo local de F restrita ao conjunto $M = \{x \in X : G(x) = G(x_0)\}$.*

Antes de provar o lema acima vamos ver como usá-lo para obter o Teorema 2.1. Suponha então que as hipóteses do teorema sejam satisfeitas e observe que, como $x_0 \in X$ é um extremo local de F restrita a M, o lema acima implica que, para cada $v \in X$, vale

$$F'(x_0)vG'(x_0)w = F'(x_0)wG'(x_0)v.$$

Como $G'(x_0)w \neq 0$, é suficiente então tomarmos

$$\lambda = \frac{F'(x_0)w}{G'(x_0)w}.$$

No que segue apresentamos a prova do Lema 2.2.

Demonstração do Lema 2.2. Considere $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\psi(s,t) = (f(s,t), g(s,t))$ onde

$$f(s,t) = F(x_0 + sv + tw), \quad g(s,t) = G(x_0 + sv + tv),$$

para cada $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. Note que a função ψ é de classe C^1 e que, se $[J_\psi(0,0)]$ denota a matriz Jacobiana de ψ no ponto $(0,0)$, então

$$\det[J_\psi(0,0)] = \begin{vmatrix} F'(x_0)v & G'(x_0)v \\ F'(x_0)w & G'(x_0)w \end{vmatrix} = F'(x_0)vG'(x_0)w - F'(x_0)wG'(x_0)v \neq 0.$$

Segue então do Teorema da Função Inversa que existem vizinhanças abertas V e W de $(0,0)$ e $\psi(0,0) = (F(x_0), G(x_0))$, respectivamente, tais que $\psi : V \to W$ é um difeomorfismo.

Dado $\delta > 0$ qualquer, vamos obter um ponto $y_0 = y_0(\delta) \in M \cap B_\delta(x_0)$ tal que $F(y_0) > F(x_0)$. Desse modo, x_0 não pode ser um máximo local de F restrita a M. Para obter y_0 como acima vamos considerar $\delta' > 0$ tal que $B_{\delta'}(0) \subset V$ e, além disso,

$$2\delta' < \frac{\delta}{\|v\|_X + \|w\|_X}. \tag{2.2}$$

Com essa escolha temos que ψ é um difeomorfismo de $B_{\delta'}(0)$ em $\widehat{W} = \psi(B_{\delta'}(0))$. Como $\widehat{W}$ é aberto, podemos tomar $\varepsilon > 0$ pequeno de modo que $(F(x_0)+\varepsilon, G(x_0)) \in \widehat{W}$. Seja agora $(s_0, t_0) \in B_{\delta'}(0)$ satisfazendo $\psi(s_0,t_0) = (F(x_0) + \varepsilon, G(x_0))$, isto é,

$$F(x_0 + s_0v + t_0w) = F(x_0) + \varepsilon > F(x_0), \quad G(x_0 + s_0v + t_0w) = G(x_0).$$

Então $y_0 = x_0 + s_0v + t_0w$ é tal que $F(y_0) > F(x_0)$ e $y_0 \in M$. Além disso, como $(s_0, t_0) \in B_{\delta'}(0)$, podemos usar (2.2) para concluir que

$$\|y_0 - x_0\|_{\mathbb{R}^2} \leq |s_0|\|v\|_X + |t_0|\|w\|_X \leq 2\|(s_0,t_0)\|_{\mathbb{R}^2}(\|v\|_X + \|w\|_X) < \delta,$$

o que mostra que $y \in B_\delta(x_0)$. Logo, x_0 não pode ser um máximo local de F restrita a M. De maneira análoga podemos mostrar que x_0 não pode ser ponto de mínimo local da restrição de F à M. Isso conclui a demonstração. $\square$

2.2 Um problema de minimização com vínculo

Nesta seção vamos retomar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{p-2}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um dómínio limitado, $2 < p < 2^*$ e $\lambda < \lambda_1$. Vamos considerar um problema de minimização com vínculo e usar a homogeneidade da problema para obter uma solução. Mais especificamente, seja $J : H \to \mathbb{R}$ definido por $J(u) = \|u\|^2$ e considere

$$\alpha = \inf_{u \in M} J(u) = \inf_{u \in M} \|u\|^2,$$

onde

$$M = \left\{ u \in H : \int_\Omega |u|^p = 1 \right\}.$$

Como J é limitado inferiormente temos que $\alpha \in \mathbb{R}$.

Seja $(u_k) \subset M$ uma sequência minimizante, isto é, uma sequência tal que $\|u_k\|^2 \to \alpha$. Como (u_k) é limitada temos que, a menos de subsequência,

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u_0, & \text{fracamente em } H, \\ u_k \to u_0, & \text{em } L^p(\Omega), \\ u_k(x) \to u_0(x), & \text{q.t.p. em } \Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

em que usamos a compacidade da imersão $H \hookrightarrow L^p(\Omega)$. A convergência forte em $L^p(\Omega)$ implica que $|u_0|_p = \lim |u_k|_p = 1$, e portanto $u_0 \in M$. Como a norma é fracamente semicontínua inferiormente, pode-se mostrar que (cf. Exercício 1.1) que

$$J(u_0) = \|u_0\|^2 \leq \liminf_{k \to \infty} \|u_k\|^2 = \alpha.$$

Como $u_0 \in M$, a expressão acima mostra que $J(u) = \alpha$, ou seja, u_0 é um ponto de mínimo de J restrito à M.

Considerando agora $G(u) = \int_\Omega |u|^p$, $u \in h$, temos que G é de classe C^1 e $G'(u_0)u_0 = p \int_\Omega |u_0|^p = p \neq 0$. Logo, estamos então nas condições de aplicar o

Teorema do Multiplicador de Lagrange (cf. Teorema 2.1) para obter $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $J'(u_0)v = \mu G'(u_0)v$ para todo $v \in H$, isto é,

$$2\int_\Omega (\nabla u_0 \cdot \nabla v - \lambda u_0 v) = \mu p \int_\Omega |u_0|^{p-2}u_0 v, \quad \forall\, v \in H.$$

Fazendo $v = u_0$ concluímos que $\mu = 2\alpha/p > 0$, e portanto

$$\int_\Omega (\nabla u_0 \cdot \nabla v - \lambda u_0 v) = \alpha \int_\Omega |u_0|^{p-2}u_0 v, \quad \forall\, v \in H.$$

Observe que a expressão acima é quase a que define o conceito de solução fraca. O que está "atrapalhando" é o termo α que aparece do lado direito. Vamos usar a homogeneidade do problema para buscar uma solução na forma $u = \alpha^{-\theta}u_0$, para alguma escolha apropriada de $\theta \in \mathbb{R}$. Substituindo $u_0 = \alpha^\theta u$ na expressão acima obtemos

$$\alpha^\theta \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - \lambda u v) = \alpha\alpha^{\theta(p-2)}\alpha^\theta \int_\Omega |u|^{p-2}uv, \quad \forall\, v \in H.$$

Como $\alpha > 0$, é suficiente escolher θ de tal que modo que $1 + \theta(p-2) = 0$, isto é, $\theta = 1/(2-p)$. Assim $u = \alpha^{1/(p-2)}u_0$ é uma solução fraca não trivial do problema.

Na verdade, vale o seguinte resultado.

Teorema 2.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitido e $2 < p < 2^*$. Então o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{p-2}u, & x \in \Omega, \\ u \geq 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

possui solução não trivial se, e somente se, $\lambda < \lambda_1$.

Demonstração. Suponha que $\lambda < \lambda_1$. Então os argumentos apresentados anteriormente mostram que existe uma função u que satisfaz a equação do problema acima no sentido fraco. Precisamos somente mostrar que $u \geq 0$. Isso pode ser feito da seguinte maneira. Ao tomarmos a sequência (u_k) satisfazendo $\|u_k\|^2 \to \alpha$, vamos substituí-la por $(|u_k|)$. Claramente $|u_k| \in M$ e, como $\int_\Omega |\nabla|u_n||^2 = \int_\Omega |\nabla u_n|^2$ (cf. Exercício 8.12), concluímos que $|u_k|$ também é uma sequência minimizante. A convergência pontual em (2.3) implica que o limite fraco u_0 satisfaz $u_0 \geq 0$ em Ω. Lembrando que $\alpha > 0$ e que $u = \alpha^{1/(p-2)} u_0$ obtemos uma solução fraca não negativa.

Para mostrar que a condição $\lambda < \lambda_1$ é necessária, suponha que $u \in H$ é uma solução fraca e tome a primeira autofunção de (PA) como função teste na formulação fraca do problema para obter

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_\Omega u\varphi_1 = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi_1 - \lambda u \varphi_1) = \int_\Omega |u|^{p-2} u \varphi_1.$$

Como podemos supor que $\varphi_1 > 0$ em Ω as integrais nos exremos esquerdo e direito da expressão acima são positivas. Portanto devemos ter $\lambda_1 - \lambda > 0$. Isso conclui a demonstração. □

Um dos pontos cruciais na solução do problema (2.4) foi usar a compacidade da imersão $H \hookrightarrow L^p(\Omega)$ para garantir que o limite fraco da sequência minimizante pertencia a M. Assim, seguindo as mesmas ideias podemos provar o seguinte resultado geral de minimização.

Teorema 2.4. *Seja X um espaço de Banach reflexivo, $M \subset X$ um conjunto fracamente fechado e $I : M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que $I(u_0) < \infty$ para algum $u_0 \in M$. Suponha ainda que I satisfaz*

(a) *I é coerciva, isto é,*

$$\lim_{\|u\|_X \to \infty} I(u) = +\infty;$$

(b) *para toda sequêcia $(u_k) \subset M$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ fracamente em X temos que*

$$I(u) \leq \liminf_{k \to \infty} I(u_k).$$

Então I é limitado inferiormente e o ínfimo de I é atingido em M.

Demonstração. Seja

$$\alpha = \inf_{u \in M} I(u) < \infty$$

e considere $(u_k) \subset M$ tal que $I(u_k) \to \alpha$. A sequência (u_k) é limitada pois, caso contrário, existiria uma subsequência $(u_{k_j}) \subset (u_k)$ tal que $\|u_{k_j}\| \to \infty$. Desse modo, usando a coercividade de I, teríamos $I(u_{k_j}) \to \infty$ o que contraria $\alpha < \infty$. Como

(u_k) é limitada podemos usar a reflexividade de X para garantir que, a menos de subsequência, $u_k \rightharpoonup u$ fracamente em X. A hipótese (b) implica que

$$I(u) \leq \liminf_{k\to\infty} I(u_k) = \alpha.$$

Como M é fracamente fechado temos que $u \in M$, e portato $\alpha \leq I(u)$. Logo, segue da expressão acima que $I(u) = \alpha$, isto é, o mínimo de I em M é atingido no ponto u. $\square$

Aplicação 1. Como primeira aplicação do resultado acima vamos considerar o problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $p \geq 2$ e $f \in L^{p'}(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Por definição, uma solução fraca do problema acima é uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v - f(x)v) = 0, \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Vamos definir $I : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p - \int_\Omega f(x)u = \frac{1}{p}\|u\|^p - \int_\Omega f(x)u,$$

em que estamos usando o símbolo $\|\cdot\|$ para indicar a norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Procedendo como na Seção 1.2, podemos verificar que $I \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$I'(u)v = \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v - f(x)v),$$

para cada u, $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Desse modo, para obter uma solução fraca de (2.5) é suficiente encontrarmos um ponto crítico de I. Vamos fazer isso aplicando o Teorema 2.4.

Note primeiro que, usando a desigualdade de Hölder e a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, obtemos

$$I(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \|f\|_{p'}\|u\|_p \geq \frac{1}{p}\|u\|^p - c_1\|f\|_{p'}\|u\|,$$

Como $p \geq 2$ a expressão acima mostra que I é coercivo em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Seja $(u_k) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Como a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é compacta, a menos de subsequência, temos que $u_k \to u$ em $L^p(\Omega)$. Logo

$$\left| \int_\Omega f(x)(u_k - u) \right| \leq \|f\|_{p'} \|u_k - u\|_p \to 0,$$

e portanto $\int_\Omega f(x) u_k \to \int_\Omega f(x) u$. Desse modo, lembrando que a norma é fracamente semicontínua inferiormente, obtemos

$$\liminf_{k\to\infty} I(u_k) = \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{p}\|u_k\|^p - \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f(x) u_k \geq \frac{1}{p}\|u\| - \int_\Omega f(x) u = I(u).$$

Segue do Teorema 2.4 que I possui um ponto de mínimo em $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Como I é de classe C^1 devemos ter $I'(u) = 0$ e portanto u é solução fraca do problema.

Aplicação 2. Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é como na aplicação anterior e $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz

$$\lim_{s\to-\infty} \frac{f(s)}{s} = \alpha_-, \quad \lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} = \alpha_+, \tag{2.7}$$

com α_-, $\alpha_+ \in [0, \lambda_1)$.

Dado $\varepsilon > 0$, podemos usar os limites acima para obter $s_0 > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq (\alpha + \varepsilon)|s|, \quad \forall\ |s| \geq s_0,$$

onde $\alpha = \max\{\alpha_-, \alpha_+\}$. Segue então da continuidade de f que

$$|f(s)| \leq (\alpha + \varepsilon)|s| + c_1, \quad \forall\ s \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Logo, a função f satisfaz a condição de crescimento subcrítico (f_1) do Teorema 1.8. Em particular, se denotarmos por $F(s) = \int_0^s f(t)\mathrm{d}t$ a primitiva de f, o funcional $I : H \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(u),$$

é de classe C^1 em H.

Integrando a desigualdade (2.8) obtemos

$$|F(s)| \leq \frac{(\alpha+\varepsilon)}{2}s^2 + c_1|s|, \quad \forall\, s \in \mathbb{R},$$

e portanto podemos usar a desigualdade de Poincaré e a imersão $H \hookrightarrow L^1(\Omega)$ para obter

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{(\alpha+\varepsilon)}{2}\|u\|_2^2 - c_1|u|_1 \geq \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{(\alpha+\varepsilon)}{\lambda_1}\right\}\|u\|^2 - c_2\|u\|.$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ pequeno de modo que $\alpha + \varepsilon < \lambda_1$ vemos que o termo entre chaves acima é positivo. Logo, o funcional I é coercivo em H.

Seja agora $(u_k) \subset H)$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ fracamente em H. A compacidade da imersão $H \hookrightarrow L^2(\Omega)$ implica que, a menos de subsequência, $u_k \to u$ em $L^2(\Omega)$, $u_k(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω e $|u_k(x)| \leq \psi(x)$ q.t.p. em Ω, para alguma função $\psi_2 \in L^2(\Omega)$. Como a imersão em $L^1(\Omega)$ também é compacta podemos ainda supor que $|u_k(x)| \leq \psi_1(x)$ q.t.p. em Ω, para um função $\psi_1 \in L^1(\Omega)$ Desse modo,

$$|F(u_k(x))| \leq \frac{(\alpha+\varepsilon)}{2}|u_k(x)|^2 + c_1|u_k(x)| \leq \frac{(\alpha+\varepsilon)}{2}|\psi(x)|^2 + c_1|\psi_1(x)|, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Como a função do lado direito acima pertence a $L^1(\Omega)$ e $F(u_k(x)) \to F(u(x))$ q.t.p. em Ω, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir que

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega F(u_k) = \int_\Omega F(u).$$

O mesmo argumento do exemplo anterior mostra que a condição (b) do Teorema 2.4 é satisfeita por I. Logo o funcional atinge mínimo em H.

2.3 Exercícios

2.1. Verifique a igualdade (2.1).

2.2. O objetivo desse exercício é fazer uma prova diferente do Teorema 2.3 no caso $\lambda < \lambda_1$. Suponha então que I é o funcional associado ao problema (2.4) e considere $\mathcal{N}$ a *variedade de Nehari* associada a I, isto é,

$$\mathcal{N} = \{u \in H_0^1(\Omega) \ : \ I'(u)u = 0\}.$$

Resolva os itens a seguir.

a) Verifique que $\mathcal{N}$ é uma variedade de classe C^1 e que existe $\rho > 0$ tal que

$$\|u\| \geq \rho > 0, \quad \forall\, u \in \mathcal{N},$$

em que $\|u\| = \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda u^2)^{1/2}$.

Sugestão: se $\psi(u) = \|u\|^2 - |u|_p^p$ então $\mathcal{N} = \psi^{-1}(0) \setminus \{0\}$.

b) I é limitado inferiormente em $\mathcal{N}$.

c) Considerando

$$c = \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u),$$

use o Teorema do Multiplicador de Lagrange para mostrar que, se $u \in \mathcal{N}$ é tal que $I(u) = c$, então $I'(u) = 0$.

Sugestão: $I'(u)v = \mu\psi'(u)v$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. Escolha $v = u$ para concluir que $\mu = 0$.

d) O ínfimo é atingido em $\mathcal{N}$ e portanto o problema (2.4) possui uma solução fraca não trivial.

Sugestão: imite a prova do Teorema 2.3.

e) Se $u \in \mathcal{N}$ é um ponto crítico de I tal que $I(u) < 2c$, então u não muda de sinal em Ω. Conclua que o problema (2.4) possui uma solução fraca não nula e não negativa.

Sugestão: prove que $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$ estão em $\mathcal{N}$.

2.3. Com relação ao problema (2.4), resolva os itens a seguir:

a) Discuta a questão de existência de solução, não necessariamente não negativa, no caso $p = 2$.

b) Mostre que a condição $\lambda < \lambda_1$ é necessária mesmo no caso em que $p = 2^*$.

c) Explique porque a demonstração de existência de solução não nula para o problema não funciona se $p = 2^*$.

2.4 (Identidade de Pohozäev)**.** Suponha que $u \in W^{2,2}_{loc}(\overline{\Omega})$ é uma solução fraca de

$$-\Delta u = f(u), \text{ em } \Omega, \qquad u = 0, \text{ em } \partial\Omega,$$

e que $F(u) \in L^1(\Omega)$. Mostre que vale a desigualdade de Pohozäev [38]:

$$N\int_\Omega F(u) - \left(\frac{N-2}{2}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \eta(x) \mathrm{d}S_x,$$

em que $\eta(x)$ é o vetor normal exterior no ponto $x \in \partial\Omega$.

Sugestão: veja [51, Teorema B.1]

2.5. Um domínio Ω é dito estrelado com relação à origem se toda semi-reta partindo da origem intercepta a fronteira de Ω em somente um ponto. Nesse caso, temos que $x \cdot \eta(x) > 0$ para todo $x \in \partial\Omega$. Supondo que Ω tem essa propriedade e considerando o problema

$$-\Delta u = \lambda u + |u|^{p-2}u, \text{ em } \Omega, \qquad u = 0, \text{ em } \partial\Omega,$$

use a identidade de Pohozäev para provar as seguinte afirmações:

a) Se $\lambda < 0$ e $p = 2^*$, então o problema não possui solução diferente de zero.

b) Se $\lambda = 0$ e $p = 2^*$, então o problema não possui solução não negativa.

c) Se $\lambda = 0$ e $p > 2^*$, então o problema não possui solução diferente de zero.

d) Se $\lambda = 0$, $\Omega = \mathbb{R}^N$ e o problema possui uma solução diferente de zero, então $p = 2^*$.

2.6. Suponha que f satisfaz as condições do Teorema 1.8 e que

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} \leq \alpha < \lambda_1.$$

Mostre que o problema (2.6) tem pelo menos uma solução fraca em $H^1_0(\Omega)$

2.7. Se $1 < p < 2$, então o problema

$$-\Delta u = |u|^{p-2}u, \text{ em } \Omega, \;\; u = 0, \text{ em } \partial\Omega$$

possui pelo menos uma solução $u \not\equiv 0$.

Sugestão: denotando por I o funcional associado e dada $\phi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, estude o sinal de $I(t\phi)$ para $t \sim 0$. Em seguida, mostre que o mínimo do funcional é atingido em um ponto não nulo $u \in H_0^1(\Omega)$.

2.8. Seja $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere o problema de fronteira

$$\begin{cases} -u'' + u^3 = h(t), & t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Resolva os itens abaixo.

a) Mostre que o funcional associado é limitado inferiormente. Em seguida obtenha uma solução fraca u_0 que é um mínimo do funcional.

b) Mostre que a solução fraca u_0 obtida acima é única.

Sugestão: como $s \mapsto s^3$ é crescente, temos que $(a^3 - b^3)(a - b) > 0$ sempre que $a \neq b$.

c) Mostre que se substituirmos o termo não linear u^3 por $-u^3$, então o funcional associado não é mais limitado inferiormente.

2.9. Usando um argumento de minimização, mostre que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \operatorname{sen} u + f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

possui uma solução fraca em $H_0^1(\Omega)$, qualquer que seja $f \in L^2(\Omega)$.

CAPÍTULO 3

Lema de deformação e a condição de Palais-Smale

Daqui para frente estamos interessados na obtenção de pontos críticos para funcionais associadas a problemas que não podem ser resolvidos por minimização, ainda que com vínculos, e podem também não ser homogêneos.

A estratégia que vamos adotar está baseada em três passos principais:

1. estabeler alguma estrutura de ”link” para o funcional;

2. utilizar lemas de deformação;

3. provar alguma propriedade de compacidade.

Ainda que os passos acima possam parecer um tanto obscuros nesse momento, vamos tentar entender um pouco o passo 2. Para tanto, vamos considerar X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional dado. Para $c \in \mathbb{R}$ vamos denotar

$$I^c = \{u \in X \,:\, I(u) \leq c\} \subset X.$$

Lembremos que o número c é chamado *valor crítico* se existe $u \in X$ tal que $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$. Caso contrário, dizemos que c é um *valor regular* de I.

A ideia basica nos argumentos de deformacao é que, se c é um valor regular de I, então para $\varepsilon > 0$ pequeno os conjuntos $I^{c+\varepsilon}$ e $I^{c-\varepsilon}$ tem uma estrutura topológica parecida. Num certo sentido, podemos construir uma aplicação contínua $\eta : X \to X$ tal que $\eta(I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}$.

Não é difícil construir exemplos em que c é um valor crítico e os conjuntos $I^{c+\varepsilon}$ e $I^{c-\varepsilon}$ tem características topológicas bem distintas. Por exemplo, se $I(x, y) = x^2 - y^2$, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, então $c = 0$ é (o único) valor crítico de I. Note que, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto I^ε é conexo enquanto $I^{-\varepsilon}$ é desconexo (cf. Exercício 3.1). Outro exemplo interessante é dado pela função $I(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$. Nesse caso os valores críticos são $c = 0$ e $c = -1$. Temos que (cf. Exercício 3.2)

$$I^a = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } a < -1, \\ \text{um anel}, & \text{se } -1 < a < 0, \\ \text{um disco}, & \text{se } a > 0. \end{cases}$$

Uma maneira simples de fazer deformações dos conjuntos de nível de um funcional foi utilizada por Cauchy [13] em 1847. Ela consiste em fazer a deformação "caminhando" ao longo de um fluxo gradiente. Mais especificamente, se X é um espaço de Hilbert, consideramos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t, u) &= -\nabla I(\sigma(t, u)), \\ \sigma(0, u) &= u. \end{cases}$$

Supondo que $\nabla I : X \to X$ é localmente Lipschitziana, podemos usar o Teorema 3.5 para garantir que o problema acima tem solução local. Observe agora que

$$\frac{d}{dt} I(\sigma(t, u)) = I'(\sigma(t, u))\dot{\sigma}(t, u) = \langle \nabla I(\sigma(t, u)), \dot{\sigma}(t, u) \rangle_X = -\|\nabla I(\sigma(t, u))\|_X^2 \leq 0.$$

Desse modo, para cada $u \in X$ fixado, a função $t \mapsto I(\sigma(t, u))$ é não crescente. Mais ainda, ela é estritamente decrescente em $(0, s)$ desde que $\sigma(t, u)$ não seja ponto crítico de I para $t \in (0, s)$.

Na construção acima usamos o Teorema de Riez para identificar o espaço X com o seu dual X', via aplicação gradiente. Como em um espaço sem estrutura

Hilbertiana essa identificação não pode ser feita, vamos utilizar um conceito que, ao que parece, foi introduzido pelo matemático R.S. Palais.

Definição 3.1. *Seja X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e*

$$\widetilde{X} = \{u \in X \,:\, I'(u) \neq 0\}$$

o conjunto dos pontos regulares de I. Dizemos que $v_u \in X$ é um vetor pseudo-gradiente para I no ponto $u \in \widetilde{X}$ *se*

(PG1) $\|v_u\|_X \leq 2\|I'(u)\|_{X'}$;

(PG2) $I'(u)v_u \geq \|I'(u)\|_{X'}^2$.

Um campo pseudo-gradiente para I *é uma aplicação localmente Lipschitziana $v : \widetilde{X} \to X$ tal que, para cada $u \in \widetilde{X}$, o vetor $v(u)$ é um pseudo-gradiente para I em u.*

Dado $u \in \widetilde{X}$ é sempre possível obter um vetor pseudo-gradiente para I em u como segue. Considere $w \in X$ tal que $\|w\|_X = 1$ e $I'(u)w \geq \frac{2}{3}\|I'(u)\|_{X'}$, e defina

$$v_u = \frac{3}{2}\|I'(u)\|_{X'}w. \tag{3.1}$$

Um cálculo direto mostra que o vetor acima satisfaz (PG1) e (PG2) (cf. Exercício 3.3). Não é difícil ver que a construção acima pode ser ligeiramente modificada de modo a obter outro vetor pseudo-gradiente. Desse modo, não temos unicidade para o vetor pseudo-gradiente. Mais ainda, mostra-se facilmente que qualquer combinação convexa de vetores (campos) pseudo-gradiente ainda tem essa mesma propriedade (cf. Exercício 3.4).

Se X é um espaço de Hilbert e $I'(u) \neq 0$ então o vetor gradiente $\nabla I(u)$ é um vetor pseudo-gradiente para I em u (cf. Exercício 3.5). Contudo, de uma maneira geral, não temos como garantir que $\nabla I : \widetilde{X} \to X$ é localmente Lipschitziana. Logo, a questão da existência de campos pseudo-gradiente é um pouco mais delicada. No entanto, vale o seguinte resultado.

Lema 3.2. *Se X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $\widetilde{X} = \{u \in X \,:\, I'(u) \neq 0\}$, então existe um campo pseudo-gradiente para I. Além disso, se I é par, o campo pseudo-gradiente pode ser escolhido de modo a ser ímpar.*

Demonstração. Para cada $u \in \widetilde{X}$ considere $w \in X$ tal que $\|w\|_X = 1$ e $I'(u)w > \frac{2}{3}\|I'(u)\|_{X'}$. Conforme observado anteriormente, $v_u = \frac{3}{2}\|I'(u)\|_{X'}$ é um vetor pseudo-gradiente para I em u. Mais ainda, como I' é contínua e as desigualdades em $(PG1)$ e $(PG2)$ são estritas para essa escolha, esse mesmo vetor v_u é um pseudo-gradiente para I em todo os pontos de uma vizinhança aberta N_u de u. Com esta construção obtemos uma cobertura aberta $\{N_u : u \in \widetilde{X}\}$ do espaço métrico $\widetilde{X}$. Essa coberta possui um refinamento localmente finito que vamos denotar por $\{M_j\}_{j \in J}$, isto é, uma nova cobertura por abertos tal que, para cada $j \in J$, existe um aberto N_{u_j} tal que $M_j \subset N_{u_j}$ e, além disso, cada elemento $u \in \widetilde{X}$ possui uma vizinhança que intercepta somente um número finito de abertos da família $\{M_j\}_{j \in J}$.

Para cada $j \in J$ considere a função $\rho(u) = \mathrm{dist}(u, \widetilde{X} \setminus M_j)$, que é Lipschitziana e satisfaz $\rho_j(u) = 0$ se $u \notin M_j$. Defina agora

$$\beta_j(u) = \frac{\rho_j(u)}{\displaystyle\sum_{k \in J} \rho_k(u)}, \quad u \in \widetilde{X}.$$

Como cada $u \in \widetilde{X}$ pertence somente a um número finito de conjuntos M_k, o denominador acima é sempre uma soma finita, de modo que β_j é localmente Lipschitziana (cf. Exercício 3.10). Lembrando que cada M_j está contido em um aberto N_{u_j}, defina $v_j = \frac{3}{2}\|I'(u_j)\|w_j$, com w_j como no início da prova. Deste modo, v_j é um pseudo-gradiente para I em qualquer ponto de M_j e podemos finalmente definir

$$v(u) = \sum_{j \in J} v_j \beta_j(u), \quad u \in \widetilde{X}.$$

Para cada $u \in \widetilde{X}$, temos que $0 \leq \beta_j(u) \leq 1$ e $\sum_{j \in J} \beta_j \equiv 1$, de modo que cada vetor $v(u)$ é uma combinação convexa de vetores pseudo-gradientes para I em u, tendo portanto a mesma propriedade. Além disso, como a soma é sempre finita, sabemos que v é localmente Lipchitziana.

Se I é par então I' é ímpar. Assim, é imediato checar que a parte ímpar de v, ou seja,

$$\widehat{v}(u) = \frac{1}{2}\left(v(u) - v(-u)\right),$$

é ímpar, localmente Lipschitziano e satisfaz as condições $(PG1)$ e $(PG2)$. $\square$

Uma vez resolvida a perda de estrutura Hilbertiana precisamos agora entender quando é possível resolver a equação diferencial que vai nos dar o fluxo de deformação. Esse é o objetivo da próxima seção.

3.1 EDO's em espaços de Banach

Dado um espaço de Banach X, $u_0 \in X$ e uma função $W : X \to X$, vamos estudar a existência de solução para o problema de Cauchy

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = W(\sigma(t)), \;\; \sigma(0) = u_0.$$

Antes de apresentar o resultado principal vamos ver dois outros que serão úteis na demonstração.

Lema 3.3 (Lema de Gronwall). *Se $A \geq 0$, $B > 0$ e $f \in C([0,T],[0,+\infty))$ satisfaz*

$$f(t) \leq A + B\int_0^t f(s)\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \in [0,T],$$

então $f(t) \leq A\exp(Bt)$ para todo $t \in [0,T]$.

Demonstração. Suponha inicialmente que $A > 0$ e considere

$$g(t) = A + B\int_0^t f(s)\mathrm{d}s.$$

Então $g(0) = A$, $g(t) \geq A > 0$ e $g'(t) = Bf(t) \leq Bg(t)$. Logo

$$\ln\frac{g(t)}{g(0)} = \int_0^t \frac{g'(s)}{g(s)}\mathrm{d}s \leq \int_0^t B\mathrm{d}s = Bt$$

e o resultado segue da definição de g. Se $A = 0$ então, para todo $A' > 0$ e $t \in [0,T]$, o argumento inicial implica que $f(t) \leq A'\exp(Bt)$. Basta agora fazer $A' \to 0^+$ para obter que $f(t) \leq 0$ para todo $t \in [0,T]$. □

Teorema 3.4 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Seja X um espaço de Banach, $D \subset X$ um conjunto fechado e $H : D \to D$ uma contração, isto é,*

$$\|H(u) - H(v)\|_X \leq \alpha\|u - v\|_X, \quad \forall\, u, v \in X, \tag{3.2}$$

para alguma constante $\alpha \in (0,1)$. Então existe um único $u^* \in D$ tal que $H(u^*) = u^*$.

Demonstração. Fixado $u_0 \in D$ qualquer, defina a sequência $u_k = H(u_{k-1})$, para $k \in \mathbb{N}$. Usando a desigualdade (3.2) repetidas vezes obtemos que

$$\|u_{k+j+1} - u_k\|_X \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha}\|u_1 - u_0\|_X \to 0, \quad \text{quando } k \to \infty.$$

Portanto (u_k) é uma sequência de Cauchy em X, de modo que $u_k \to u^*$. Como (3.2) implica que H é contínua, passando a igualdade $u_k = H(u_{k-1})$ ao limite concluímos que $H(u^*) = u^*$. A unicidade segue diretamente de (3.2). □

Enunciamos e provamos abaixo o principal resultado dessa seção.

Teorema 3.5. *Seja X um espaço de Banach e $W : X \to X$ um campo de vetores satisfazendo*

(W1) *W é localmente Lipschitziano;*

(W2) *existem constantes a, $b \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\|W(u)\|_X \leq a + b\|u\|_X, \quad \forall\, u \in X.$$

Então para todo $u_0 \in X$ o problema de Cauhy

$$(PC) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma(t) &= W(\sigma(t)), \\ \sigma(0) &= u_0, \end{cases}$$

tem solução única definida em $[0, \infty)$.

Demonstração. Usando a condição (W1) obtemos ρ, $r > 0$ tais que

$$\|W(u) - W(u_0)\|_X \leq \rho\|u - u_0\|_X, \quad \forall\, u \in B_r(u_0). \tag{3.3}$$

A desigualdade acima implica que, para todo $u \in B_r(u_0)$, vale

$$\|W(u)\|_X \leq \|W(u) - W(u_0)\|_X + \|W(u_0)\|_X \leq \rho r + \|W(u_0)\|_X,$$

de modo que $\Lambda = \sup_{B_r(u_0)} \|W\|_X < \infty$.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon\rho < 1, \quad \varepsilon\Lambda \leq r,$$

e $\widehat{X} = C([0,\varepsilon], X)$ o espaço de Banach todas as curvas contínua definidas de $[0,\varepsilon]$ em X, munido com a norma

$$\|\gamma\|_{\widehat{X}} = \sup_{t\in[0,\varepsilon]} \|\gamma(t)\|_X$$

Considere o conjunto $D = \{\gamma \in \widehat{X} \,:\, \|\gamma - \widehat{u_0}\|_{\widehat{X}} \leq r\}$, em que estamos denotando por $\widehat{u_0}$ a curva constante $\widehat{u_0}(t) = u_0$ para todo $t \in [0,\varepsilon]$.

Vamos introduzir agora o operador integral associado ao problema (PC), a saber $H : \widehat{X} \to \widehat{X}$ definido por

$$H(\gamma)(t) = u_0 + \int_0^t W(\gamma(s))\mathrm{d}s.$$

Observe que, se $\sigma \in \widehat{X}$ é tal que $H(\sigma) = \sigma$, então

$$\sigma(t) = u_0 + \int_0^t W(\sigma(s))\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \in [0,\varepsilon],$$

e portanto segue do Teorema Fundamental do Cálculo que σ é uma solução de (PC) definida no intervalo $[0,\varepsilon]$. Logo, basta mostrar que o operador H possui um ponto fixo.

Observe que, para todo $\gamma \in D$, vale $\|\gamma(t) - u_0\|_X \leq r$ para $t \in [0,\varepsilon]$. Assim, usando a definição de H e Λ, obtemos

$$\|H(\gamma) - \widehat{u_0}\|_{\widehat{X}} \leq \int_0^t \|W(\gamma(s))\|_X \mathrm{d}s \leq \varepsilon\Lambda \leq r,$$

e portanto $H(D) \subset D$. Além disso, se $\alpha \in D$, então

$$\begin{aligned}
\|H(\gamma) - H(\alpha)\|_{\widehat{X}} &\leq \sup\nolimits_{t\in[0,\varepsilon]} \int_0^t \|W(\gamma(s)) - W(\alpha(s))\|_X \mathrm{d}s \\
&\leq \rho \int_0^\varepsilon \|\gamma(s) - \alpha(s)\|_X \mathrm{d}s \\
&\leq \rho \int_0^\varepsilon \sup_{t\in[0,\varepsilon]} \|\gamma(t) - \alpha(t)\|_X \mathrm{d}s \\
&\leq \varepsilon\rho\|\gamma - \alpha\|_{\widehat{X}}.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon\rho < 1$ concluímos que $H : D \to D$ é uma contração definida no conjunto fechado D. Segue do Teorema do Ponto Fixo de Banach que existe um único $\sigma \in D$

tal que $H(\sigma) = \sigma$. Conforme já observamos, a curva σ é uma solução solução para o problema que está definida para tempos no intervalo $[0, \varepsilon]$.

Seja agora T^+ o tempo máximo de existência da solução, isto é,

$$T^+ = \sup\{t \in [0, \infty] \,:\, \text{o problema } (PC) \text{ tem solução única definida em } [0, t]\}.$$

Vamos mostrar que a limitação em (W2) implica que $T^+ = \infty$. De fato, suponha por contradição que $T^+ < \infty$. Nesse caso, como $\sigma(t) = u_0 + \int_0^t W(\sigma(s)\mathrm{d}s$, podemos usar (W2) para obter

$$\|\sigma(t)\|_X \leq \|u_0\|_X + aT^+ + b\int_0^t \|\sigma(s)\|\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \in [0, T^+].$$

Segue do Lema de Gronwall que

$$\|\sigma(t)\|_X \leq (\|u_0\|_X + aT^+)\exp(bt) \leq c_1, \quad \forall\; t \in [0, T^+].$$

Logo, para quaisquer tempos s, $t \in [0, T^+]$, com $s \geq t$, vale

$$\|\sigma(t) - \sigma(s)\|_X \leq \int_s^t \|W(\sigma(\tau, u_0))\|_X \mathrm{d}\tau \leq a|t - s| + bc_1|t - s|.$$

Considere agora uma sequência $(t_k) \subset \mathbb{R}$ tal que $t_k \nearrow T^+$. A expressão acima implica que

$$\|\sigma(t_k) - \sigma(t_j)\|_X \leq a|t_k - t_j| + bc_1|t_k - t_j| \to 0, \quad \text{quando } j,\, k \to \infty.$$

Desse modo, $(\sigma(t_k)) \subset X$ é uma sequência de Cauchy, e portanto $\sigma(t_k) \to \overline{u}$ quando $k \to \infty$. Seja agora $\overline{\sigma}$ a solução do problema

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = W(\sigma(t)), \quad \sigma(0) = \overline{u},$$

definida no intervalo $[0, T^+_{\overline{u}}]$, com $T^+_{\overline{u}} > 0$. Assim, a função

$$v(t) = \begin{cases} \sigma(t), & \text{se } t \in [0, T^+], \\ \overline{\sigma}(t - T^+), & \text{se } t \in [T^+, T^+ + T^+_{\overline{u}}] \end{cases}$$

é uma solução do problema (PC), com dado inicial u_0, que está definida no intervalo $[0, T^+ + T^+_{\overline{u}}]$. Mas isso contraria a maximalidade de T^+, de modo que $T^+ = +\infty$. $\square$

Observação 3.6. *Usando um argumento análogo ao anterior podemos mostrar que a solução σ também está definida em $(-\infty, 0)$. Além disso, como o dado inicial no Teorema 3.5 é arbitrário, o fluxo obtido acima nos permite definir uma função $\sigma : \mathbb{R} \times X \to X$ tal que, para cada $u \in X$ fixado, $\sigma(\cdot, u)$ é a solução do problema (PC) com dado inicial u. Pode-se mostrar, além do mais, que a aplicação σ é contínua de $\mathbb{R} \times X$ em X.*

3.2 O Lema de Deformação

Nesta seção apresentamos o nosso primeito resultado de deformação. Ele é devido a Willem [50] e é uma versão de um resultado de deformação anterior devido a Clark [15] (cf. Exercício 3.20). Conforme veremos posteriormente o resultado de Clark exige uma propriedade de compacidade para o funcional I. Outras propriedades da deformação abaixo (cf. Exercício 3.12) podem ser encontradas no livro de Willem (veja [51, Lema 2.3]).

Lema 3.7 (Lema de deformação quantitativo)**.** *Sejam X um espaço de Banach, $S \subset X$, $\delta > 0$ e $S_\delta = \{u \in X : \operatorname{dist}(u, S) \leq \delta\}$. Sejam ainda $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ tais que*

$$\|I'(u)\|_{X'} \geq \frac{4\varepsilon}{\delta}, \quad \forall\, u \in I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}, \tag{3.4}$$

em que $I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) = \{v \in X : c - 2\varepsilon \leq I(v) \leq c + 2\varepsilon\}$. Então existe $\eta : [0, 1] \times X \to X$ contínua tal que, para todo $u \in X$ e $t \in [0, 1]$, valem

(i) *$\eta(0, u) = u$;*

(ii) *$\eta(t, u) = u$, se $u \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$;*

(iii) *$\eta(1, I^{c+\varepsilon} \cap S) \subset (I^{c-\varepsilon} \cap S_\delta)$;*

(iv) *se I é par, então $\eta(t, \cdot)$ é ímpar para todo $t \in [0, 1]$.*

Demonstração. Sejam

$$A = I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}, \qquad B = I^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap S_\delta,$$

e considere $\psi : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(u) = \frac{\operatorname{dist}(u, X \setminus A)}{\operatorname{dist}(u, X \setminus A) + \operatorname{dist}(u, B)}.$$

Para verificar que ψ está bem definida vamos mostrar que o denominador acima é sempre positivo. Suponha, por contradição, que existe $u \in X$ tal que $\operatorname{dist}(u, X \setminus A) + \operatorname{dist}(u, B) = 0$. Como $\operatorname{dist}(u, B) = 0$ e B é fechado temos que $u \in B$, e portanto $c - \varepsilon \leq I(u) \leq c + \varepsilon$. Por outro lado, como $\operatorname{dist}(u, X \setminus A) = 0$, existe $(u_k) \subset X \setminus A$ tal que $u_k \to u$. Uma vez que $u \in B \subset S_\delta$ devemos ter $u_k \in S_{2\delta}$ para k suficientemente grande. Desse modo, lembrando que $u_k \in X \setminus A$, concluímos que $u_k \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$ para k grande. Fazendo $k \to \infty$ e usando a continuidade de I, concluímos que $I(u) \leq c - 2\varepsilon$ ou $I(u) \geq c + 2\varepsilon$. Em qualquer um dos casos obtemos uma contradição. Logo ψ está bem definida.

Observe agora que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ em B e $\psi \equiv 0$ em $X \setminus A$. Além disso, como a função $u \mapsto \operatorname{dist}(u, K)$ é Lipschitziana para qualquer $K \subset X$, concluímos que ψ é localmente Lipschitziana.

Seja $v : \widetilde{X} \to X$ um campo pseudo-gradiente para I e defina $W : X \to X$ por

$$W(u) = \begin{cases} -\psi(u)\dfrac{v(u)}{\|v(u)\|_X}, & \text{se } u \in A, \\ 0, & \text{se } u \in X \setminus A. \end{cases} \tag{3.5}$$

Desse modo, W é localmente Lipschitziana (cf Exercício 3.11) e satisfaz $\|W(u)\|_X \leq 1$ para todo $u \in X$. Usando o Teorema 3.5 concluímos que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t, u) &= W(\sigma(t, u)), \\ \sigma(0, u) &= u, \end{cases}$$

tem solução única $\sigma(\cdot, u)$ definida em $\mathbb{R}$ e, além disso, $\sigma \in C(\mathbb{R} \times X, X)$.

Vamos definir a deformação a partir do fluxo acima. Mais especificamente, considere $\eta : [0, 1] \times X \to X$ dada por

$$\eta(t, u) = \sigma(\delta t, u).$$

Claramente $\sigma(0, u) = u$ para todo $u \in X$. Além disso, como $W \equiv 0$ no aberto $X \setminus A$, concluímos que $\sigma(t, u) = u$ sempre que $u \notin A$. Isso estabelece a veracidade dos itens (i) e (ii).

No que segue vamos verificar (iii) mostrando que

$$\sigma(\delta, I^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \left(I^{c-\varepsilon} \cap S_\delta\right).$$

Note inicialmente que, se $t > 0$, então

$$\|\sigma(t,u) - u\|_X = \left\| \int_0^t \frac{d}{ds}\sigma(s,u)\mathrm{d}s \right\|_X \leq \int_0^t \|W(\sigma(s,u))\|_X \mathrm{d}s \leq t$$

e portanto $\sigma(t,S) \subset S_\delta$ para todo $t \in [0,\delta]$. Além disso, se $\sigma(t,u) \in A$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) &= I'(\sigma(t,u))\dot{\sigma}(t,u) = I'(\sigma(t,u))W(\sigma(t,u)) \\
&= -\frac{\psi(\sigma(t,u))}{\|v(\sigma(t,u))\|_X} I'(\sigma(t,u))v(\sigma(t,u)) \\
&\leq -\frac{\psi(\sigma(t,u))}{\|v(\sigma(t,u))\|_X} \|I'(\sigma(t,u))\|_{X'}^2 \leq 0,
\end{aligned}$$

em que usamos, na última desigualdade acima, $\psi \geq 0$ e a propriedade (PG2) do pseudo-gradiente. A desigualdade $\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) \leq 0$ é também satisfeita quando $\sigma(t,u) \notin A$, e portanto a função $I(\sigma(\cdot,u))$ é não-crescente.

Considere agora $u \in I^{c+\varepsilon} \cap S$. Se $I(\sigma(t,u)) < c - \varepsilon$ para algum $t \in [0,\delta]$ então $I(\sigma(\delta,u)) < c - \varepsilon$. Como $\sigma(\delta,S) \subset S_\delta$ teremos então $\eta(1,u) = \sigma(\delta,u) \in I^{c-\varepsilon} \cap S_\delta$. Podemos então supor que, para todo $t \in [0,\delta]$,

$$c - \varepsilon \leq I(\sigma(t,u)) \leq I(\sigma(0,u)) = I(u) \leq c + \varepsilon$$

e portanto $\sigma(t,u) \in B$ sempre que $t \in [0,\delta]$. Desse modo,

$$I(\sigma(\delta,u)) = I(u) + \int_0^\delta \frac{d}{dt}I(\sigma(t,u))\mathrm{d}t = I(u) + \int_0^\delta I'(\sigma(t,u))\dot{\sigma}(t,u)\mathrm{d}t.$$

Como $\psi \equiv 1$ em B, podemos usar (PG2), (PG1) e (3.4) para obter

$$\begin{aligned}
I(\sigma(\delta,u)) &= I(u) - \int_0^\delta \frac{I'(\sigma(t,u))v(\sigma(t,u))}{\|v(\sigma(t,u))\|_X}\mathrm{d}t \\
&\leq I(u) - \int_0^\delta \frac{\|I'(\sigma(t,u))\|_{X'}^2}{\|v(\sigma(t,u))\|_X}\mathrm{d}t \\
&\leq I(u) - \frac{1}{2}\int_0^\delta \|I'(\sigma(t,u))\|_{X'}\mathrm{d}t \\
&\leq c + \varepsilon - \frac{1}{2}\int_0^\delta \frac{4\varepsilon}{\delta}\mathrm{d}t = c - \varepsilon,
\end{aligned}$$

e portanto $\sigma(\delta, u) \in I^{c-\varepsilon} \cap S_\delta$.

Para o item (iv) basta notar que o campo pseudo-gradiente v pode ser escolhido ímpar quando I é par. □

3.3 A condição de Palais-Smale

Começamos essa seção com uma aplicação simples e interessante do lema de deformação quantitativo.

Lema 3.8 (Princípio Variacional de Ekeland)**.** *Seja X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional limitado inferiormente, $u \in X$ e $\varepsilon > 0$ tais que*

$$I(u) \leq \inf_X I + \varepsilon.$$

Então, para todo $\delta > 0$ dado, existe $v = v(\delta) \in X$ tal que

(i) $I(v) \leq \inf_X I + 2\varepsilon$;

(ii) $\|v - u\|_X \leq 2\delta$;

(iii) $\|I'(v)\|_{X'} \leq 4\varepsilon/\delta$.

Demonstração. Seja $\mathcal{A} \subset X$ o conjunto de todos os elementos de X que verificam as condições (i) e (ii) acima. Como $u \in \mathcal{A}$, este conjunto é naturalmente não vazio. É suficiente mostra que, para algum elemento $v \in \mathcal{A}$ a condição (iii) é satisfeita. Suponha, por contradição, que este não é o caso. Então podemos definir $S = \{u\}$, $c = \inf_X I$ e obter

$$\|I'(u)\|_{X'} \geq \frac{4\varepsilon}{\delta}, \quad \forall\, u \in I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap \overline{B_{2\delta}(u)}.$$

Se η é a deformação dada pelo Lema 3.7 então $\eta(1, u) \in I^{c-\varepsilon}$. mas c é o ínfimo de I em X, de modo que $I^{c-\varepsilon} = \varnothing$. Temos então uma contradição e o lema está provado. □

O resultado acima foi provado por I. Ekeland [21] em 1974. A prova apresentada pelo autor não usa resultados de deformação. Na verdade, o lema acima e somente um entre vários outros apresentados em [21].

Como consequência do Princípio Variacional de Ekeland vemos que, nas condições do enunciado, se $(u_k) \subset X$ é uma sequência minimizante, isto é,

$$I(u_k) \to c = \inf_X I,$$

então podemos obter uma nova sequência $(v_k) \subset X$ cujos elementos estão próximo de u_k e satisfazem

$$I(v_k) \to c, \quad I'(v_k) \to 0.$$

Em particular, se I é limitado inferiormente, sempre existe uma sequência minimizante formada por "quase" pontos críticos, no sentido que a derivada do funcional aplicada na sequência converge para zero. Se conseguirmos garantir que a sequência (v_k) converge (fortemente) para v em X, então a regularidade do funcional implica que $I(v) = \inf_X I$ e $I'(v) = 0$. Isso mostra que o mínimo de I é atingido em X.

A possibililidade de provar a convergência da sequência minimizante está, em geral, relacionada tanto com a forma do funcional como com o espaço no qual ele está definido. Não é difícil apresentar exemplos onde as sequências minimizantes não convergem. Por exemplo, $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$, ou $g(x) = \exp(-x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

A discussão acima sobre a convergência de sequências de "quase" pontos críticos motiva a seguinte definição.

Definição 3.9. *Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que I satisfaz a* condição de Palais-Smale *se toda sequência $(u_k) \subset X$ tal que*

$$\sup_k |I(u_k)| < \infty, \quad \lim_{k\to\infty} I'(u_k) = 0, \tag{3.6}$$

possui subsequência convergente. Se $c \in \mathbb{R}$, dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c *se toda sequência tal que*

$$\lim_{k\to\infty} I(u_k) = c, \quad \lim_{k\to\infty} I'(u_k) = 0,$$

possui subsequência convergente.

Daqui por diante vamos denotar as duas condições definidas acima simplesmente por (PS) e $(\mathrm{PS})_c$, respectivamente. Uma sequência $(u_k) \subset X$ satisfzendo (3.6) será chamada sequência de Palais-Smale. De maneira análoga definimos sequência de Palais-Smale no nível c.

De acordo com as observações que antecedem a definição, se $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ é limitado inferiormente e satisfaz $(\mathrm{PS})_c$ para $c = \inf_X I$, então o ínfimo de I é atingido em X.

Essencialmente, a condição (PS) foi introduza por Palais e Smale (cf. [33, 47, 36]) em 1963 e 1964. Ao longo dos anos, muitas variações dessa condição foram aparecendo. Em particular, gostaríamos de citar uma condição introduzida por Cerami [14], em 1986. A *condição de Cerami no nível* $c \in \mathbb{R}$ é satisfeita pelo funcional $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ se toda sequência $(u_k) \subset X$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} I(u_k) = c, \quad \lim_{k\to\infty} \|I'(u_k)\|_{X'}(1 + \|u_k\|_X) = 0$$

possui subsequência convergente. Observe que a condição $(\mathrm{PS})_c$ implica na condição acima. Porém, o contrário não é verdade em geral (cf. Exercício 3.16). Destacamos que todos os resultados abstratos que apresentaremos daqui por diante continuam válidos se trocarmos a condição (PS) pela condição introduzida por Cerami.

Observamos ainda que a condição $(\mathrm{PS})_c$ é uma condição de compacidade no seguinte sentido: se $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz $(\mathrm{PS})_c$ então o conjunto

$$K_c = \{u \in X \,:\, I(u) = c,\, I'(u) = 0\}$$

é compacto (cf. Exercício 3.17).

Suponha que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ é tal que $I' : X \to X'$ tem a forma $I' = Id - K$, com Id sendo o operador identidade e $K : X \to X'$ compacto. Nesse caso, a verificação da condição de Palais-Smale é equivalente a mostrar que as sequência de Palais-Smale são limitadas. De fato, suponha que a derivada de I é como acima e seja $(u_k) \subset X$ uma sequência (PS) limitada. Como (u_k) é limitada e K é compacto, para alguma subsequência $(u_{k_j}) \subset (u_k)$ temos que $K(u_{k_j}) \to u$. Logo

$$\lim_{j\to\infty} u_{k_j} = \lim_{j\to\infty} \big(I'(u_{k_j}) + K(u_{k_j})\big) = u,$$

o que mostra que I satisfaz (PS).

Lembrando que a imersão $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ é compacta sempre que $1 \leq p < 2^*$ e Ω é limitado, podemos usar o argumento acima e o Teorema 1.8 para obter o seguinte resultado.

Corolário 3.10. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e a função f satisfaz*

(f_0) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$*;*

(f_1) *existem c_1, $c_2 \geq 0$ e $1 \leq p < 2^*$, tais que*

$$|f(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1}, \quad \forall\, (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Se $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ é uma sequência (PS) limitada do funcional

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u),$$

então (u_k) possui uma subsequência convergente.

3.4 Exercícios

Atenção: Nos exercícios abaixo, a menos que se diga o contrário, X é um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$

3.1. Se $I(x,y) = x^2 - y^2$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, então $c = 0$ é o único valor crítico de I e, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto I^ε é conexo enquanto $I^{-\varepsilon}$ é desconexo.

3.2. Se $I(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, então $c = 0$ e $c = -1$ são os únicos valores críticos de I. Além disso, para cada $a \in \mathbb{R}$, vale

$$I^a = \begin{cases} \varnothing, & \text{se } a < -1, \\ \text{um anel}, & \text{se } -1 < a < 0, \\ \text{um disco}, & \text{se } a > 0. \end{cases}$$

3.3. Mostre que o vetor v_0 definido em (3.1) é um vetor pseudo-gradiente para I em $u \in \widetilde{X}$. Modifique levemente a construção de modo a obter um outro vetor pseudo-gradiente diferente de v_0.

3.4. Suponha que v_1, v_2 são vetores pseudo-gradientes para I em $u \in \widetilde{X} = \{u \in X : I'(u) \neq 0\}$. Mostre que, para todo $t \in [0,1]$, o vetor $tv_1 + (1-t)v_2$ tem essa mesma propriedade. Enuncie e prove um resultado análogo para campos pseudo-gradiente.

3.5. Se X é um espaço de Hilbert, $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ e $\nabla I(u) \neq 0$, então $\nabla I(u)$ é um vetor pseudo-gradiente para I em u.

3.6. Complete os detalhes da demonstração do Teorema 3.4.

3.7. Mostre que a hipótese (W1) é suficiente para garantir a existência local de soluções para o problema (PC).

3.8. Sejam σ_{u_0} e σ_{v_0} as soluções do problema (PC) com dados iniciais u_0 e v_0, respectivamente. Usando o Lema de Gronwall, mostre que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\sigma_{u_0}(t) - \sigma_{v_0}(t)\|_X \leq \|u_0 - v_0\|_X \exp(\rho t), \quad \forall\, t \in [0,T],$$

em que $\rho > 0$ é como em (3.3). Isso mostra que, se os dados iniciais estão próximos, as soluções associadas permanecem próximas em intervalos compactos de tempo.

3.9. Se $K \subset X$ é um conjunto não vazio então a função $u \mapsto \mathrm{dist}(u,K)$ satisfaz

$$|\mathrm{dist}(u,K) - \mathrm{dist}(v,K)| \leq \|u - v\|_X.$$

Em particular, a função distância de um ponto a um conjunto é uma função Lispchitziana.

3.10. Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são Lipschitzianas então a função quociente f/g é localmente Lipschitziana em $\{u \in X : g(u) \neq 0\}$.

3.11. Verifique que o campo W definido em (3.5) é localmente Lipschitziano.

3.12. Mostre que a deformação η dada pelo Lema 3.7 satisfaz as seguintes propriedades:

a) $\|\eta(t,u) - u\|_X \leq \delta$ para todo $(t,u) \in [0,1] \times X$;

b) $I(\eta(t,u)) < c$ para todo $t \in [0,1]$, $u \in I^c \cap S_\delta$.

3.13. Verifique que se $X = \mathbb{R}$ e $I(x) = \exp(-x)$, então I não satisfaz $(PS)_0$. O que se pode dizer sobre $(PS)_c$ para $c \neq 0$.

3.14. Suponha que $X = \mathbb{R}$ e denote por K o conjunto dos pontos crítico de I.

a) O funcional $I(x) = x$ satisfaz (PS) mas $K = \varnothing$.

b) O funcional $I \equiv 0$ não satisfaz $(PS)_0$ e não satisfaz (PS), e o conjunto K é todo o espaço $\mathbb{R}$.

c) O funcional $I(x) = \cos(x)$ satisfaz $(PS)_c$ para todo $c \neq \pm 1$ e K é um conjunto infinito e ilimitado.

3.15. Suponha que $\dim X < \infty$ e o funcional I é tal que

$$\lim_{\|u\| \to \infty} (|I(u)| + \|I'(u)\|_{X'}) = \infty.$$

Verifique que I satisfaz (PS).

3.16. Se I satisfaz $(\mathrm{PS})_c$, então I satisfaz a condição de Cerami no nível c. Dê um exemplo de um funcional que satisfaz Cerami no nível c mas não satisfaz $(\mathrm{PS})_c$.

3.17. Se I satisfaz $(\mathrm{PS})_c$ então o conjunto $K_c = \{u \in X \,:\, I(u) = c,\, I'(u) = 0\}$ é compacto.

3.18. Suponha que I é tal que $I' = L + K$, com $L : X \to X'$ um operador inversível limitado e $K : X \to X'$ é compacto. Se toda sequência de Palais-Smale é limitada então I satisfaz (PS).

3.19. Seja Ω um domínio limitado e $\lambda \in \mathbb{R}$. Considere $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda u^2 \right) \mathrm{d}x$$

a) Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é um ponto crítico de I, determine de qual problema u é solução fraca.

b) Determine valores de λ para os quais o funcional acima tem pontos críticos não nulos.

c) Discuta a validade de (PS) para I.

3.20 (Lema de Deformação de Clark)**.** Sejam X um espaço de Banach, $c \in \mathbb{R}$ e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo *(PS)*$_c$. Se c é valor regular de I então, para todo $\varepsilon > 0$ pequeno, existe $\eta : [0,1] \times X \to X$ contínua tal que, para todo $u \in X$ e $t \in [0,1]$, valem

(i) $\eta(0, u) = u$;

(ii) $\eta(t, u) = u$, se $u \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$;

(ii) $\eta(1, I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}$;

(iv) se I é par, então $\eta(1, \cdot)$ é ímpar para todo $t \in [0,1]$.

CAPÍTULO 4

Teorema do Passo da Montanha

Neste capítulo vamos enunciar e provar nosso primeiro teorema abstract de minimax.

Teorema 4.1 (Teorema do Passo da Montanha)**.** *Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional tal que $I(0) = 0$ e*

(I_1) *existem ρ, $\alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;*

(I_2) *existe $e \in X$ tal que $\|e\|_X > \rho$ e $I(e) \leq 0$.*

Seja

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) \, : \, \gamma(0) = 0, \, \gamma(1) = e\}$. Então, se I satisfaz $(PS)_c$, o nível c é um nível crítico de I, isto é, existe $u \in X$ tal que $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$.

O Teorema do Passo da Montanha foi provado por Ambrosetti e Rabinowitz [4] em um celebrado artigo de 1973. Ele foi o precursos de muitos outros teoremas do tipo minimax. Existem na literatura muitas versões do teorema acima. O leitor interessado pode encontrar algumas delas no livro de Rabinowitz [41]. Uma generalização bem simples (cf. Exercício 4.1) é observar que as condições geométricas (I_1)

e (I_2) podem ser substituídas por

$$\max\{I(0), I(e)\} < \inf_{\partial B_\rho(0)} I.$$

Antes de apresentar a demonstração Desse importante teorema observamos que, como $I(0) = 0$ e $c \geq \alpha > 0$, o teorema acima nos fornece um ponto crítco não nulo de I. Outro ponto importante é que, de uma maneira geral, a condição de Palais-Smale é necessária para garantir que c é valor crítico. De fato, a função $I(x, y) = x^2 + (1 - x)^3 y^2$ é tal que $I(0) = 0$, (I_1) e (I_2) são satisfeitas, mas o seu único nível crítico é zero. (cf. Exercício 4.2).

Demonstração do Teorema 4.1. Vamos mostrar inicialmente que o número c definido no teorema é finito. De fato, se $\gamma \in \Gamma$, como $\gamma(0) = 0 \in B_\rho(0)$, $\gamma(1) = e \notin B_\rho(0)$ e $\gamma([0, 1])$ é conexo, temos que $\gamma([0, 1]) \cap \partial B_\rho(0) \neq \varnothing$. Logo, usando (I_1), concluímos que

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha,$$

donde se conclui que $c \geq \alpha > 0$.

Afirmação: Dado $\varepsilon > 0$, existe $u \in X$ tal que

(i) $c - 2\varepsilon \leq I(u) \leq c + 2\varepsilon$;

(ii) $\|I'(u)\|_{X'} < 2\varepsilon$.

Assumindo a veracidade desta afirmação a prova segue da seguinte maneira: escolhendo $\varepsilon = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, obtemos uma sequência $(u_k) \subset X$ satisfazendo

$$I(u_k) \to c \quad \text{e} \quad I'(u_k) \to 0.$$

Como I satisfaz $(\text{PS})_c$ existe uma subsequência $(u_{k_j}) \subset (u_k)$ tal que $u_{k_j} \to u$. Lembrando que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ concluímos que $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$.

Vamos agora provar a afirmação usando um argumento de contradição. Suponha então que ela não vale. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|I'(u)\|_{X'} \geq 2\varepsilon, \quad \forall\, u \in I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]).$$

As propriedades acima continuam sendo válidas com $\varepsilon' > 0$ no lugar de ε, qualquer que seja o valor de $\varepsilon' < \varepsilon$. Desse modo, como $c > 0$, podemos diminuir ε se necessário para supor que

$$I(e) \leq I(0) < c - 2\varepsilon. \tag{4.1}$$

Aplicando o Lema 3.7 com $\delta = 2$ e $S = X$ obtemos $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que

(a) $\eta(1, u) = u$ sempre que $u \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$;

(b) $\eta(1, I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}$.

Usando a definição de c obtemos $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \leq c + \varepsilon.$$

Defina agora $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to X$ por $\widetilde{\gamma}(t) = \eta(1, \gamma(t))$. Usando o item (a) acima e (4.1) obtemos

$$\widetilde{\gamma}(0) = \eta(1, \gamma(0)) = \eta(1, 0) = 0, \qquad \widetilde{\gamma}(1) = \eta(1, \gamma(1)) = \eta(1, e) = e.$$

Logo $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$ e portanto podemos usar (b) para concluir que $\widetilde{\gamma}(t) = \eta(1, \gamma(t)) \in I^{c-\varepsilon}$ para todo $t \in [0,1]$. Desse modo

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} I(\widetilde{\gamma}(t)) \leq c - \varepsilon,$$

o que é um absurdo. Isso conclui a prova do teorema. $\square$

Apresentaremos na sequência algumas aplicações do Teorema do Passo da Montanha.

4.1 Um problema superlinear

Nessa subseção vamos aplicar o Teorema 4.1 na obtenção de solução fraca para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e f é uma função contínua com crescimento subcrítico, isto é, f satisfaz

(f_0) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(f_1) existem c_1, $c_2 \geq 0$ e $1 \leq p < 2^*$, tais que

$$|f(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1}, \quad \forall\,(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Se denotarmos por H o espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ com a norma $\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2$, as consideraçoes feitas anteriormente mostram que as soluções fracas do problema são os pontos críticos do funcional

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(x,u),$$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\mathrm{d}t$.

Uma vez que número p dado pela condição (f_1) é maior do que dois, o probema acima é conhecido na literatura como um problema superlinear. Um caso particular importante é o modelo $f(s) = |s|^{p-2}s$. Ele foi considerado no capítulo anterior, quando usamos a homogeneidade da função f juntamente com o Teorema do Multiplicador de Lagrange para obter solução. Vamos considerar agora situações mais gerais, em que f não precisa ser uma potência pura.

O resultado abaixo foi provado por Ambrosetti e Rabinowitz em [4].

Teorema 4.2. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, f satisfaz $(f_0) - (f_1)$ e*

(f_2) $\lim\limits_{s \to 0} \frac{f(x,s)}{s} = 0$, *uniformemente para $x \in \Omega$;*

(f_3) *existe $\mu > 2$ tal que*

$$0 < \mu F(x,s) \leq sf(x,s), \quad \forall\, s \neq 0,$$

em que $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt$.

Então o problema (4.2) possui pelo menos uma solução fraca $u \neq 0$.

Demonstração. Vamos mostrar que o funcional associado ao problema satisfaz todas as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha.

Dado $\varepsilon > 0$, podemos usar (f_2) para obter $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \leq \varepsilon|s|, \quad \forall\ |s| \leq \delta,$$

e portanto

$$|F(x,s)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|s|^2, \quad \forall\ |s| \leq \delta.$$

Por outro lado, integrado a desigualdade em (f_1) obtemos $c_3 > 0$ tal que

$$|F(x,s)| \leq c_1|s| + c_3|s|^p \leq (c_3 + c_4)|s|^p, \quad \forall\,|s| \geq \delta,$$

em que $c_4 = \max_{s\geq\delta} c_1|s|^{1-p} \geq 0$. Desse modo

$$|F(x,s)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + c_5|s|^p, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Dada agora $u \in H$ podemos usar a desigualdade acima, Poincaré e a imersão $H \hookrightarrow L^p(\Omega)$ para obter

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |u|^2 - c_5\int_\Omega |u|^p \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{\lambda_1(\Omega)}\|u\|^2 - c_6\|u\|^p \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_1(\Omega)} - 2c_6\|u\|^{p-2}\right)\|u\|^2. \end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon = \lambda_1(\Omega)/2$ e $\rho = (8c_6)^{1/(2-p)}$, obtemos $I(u) \geq \frac{\rho^2}{4} = \alpha > 0$ sempre que $\|u\| = \rho$. Logo I satisfaz (I_1).

A fim de verificar (I_2) note que a condição (f_3) implica que

$$\frac{f(x,t)}{F(x,t)} \geq \frac{\mu}{t}, \quad \forall\, t > 0. \tag{4.3}$$

Desse modo, integrando a desigualdade acima no intervalor $[1,s]$, obtemos

$$\ln F(x,s) - \ln F(x,1) \geq \mu \ln s,$$

ou ainda,

$$F(x,s) \geq F(x,1)s^\mu, \quad \forall\, x \in \Omega,\ s \geq 1.$$

Como F é contínua em $\overline{\Omega} \times [0,1]$, temos que

$$F(x,s) \geq F(x,1)s^\mu - c_7, \quad \forall\, x \in \Omega,\ s \geq 0,$$

para alguma constante $c_7 > 0$. Quando $t < 0$, temos a desiguldade reversa em (4.3). Assim, tomando $s \leq -1$, integrando no intervalo $[s, -1]$ e procedendo como acima vamos obter $F(x,s) \geq F(x,-1)(-s)^{\mu}$ para todo $x \in \Omega$, $s \leq -1$. Assim, existem constantes c_8, $c_9 > 0$ tais que

$$F(x,s) \geq c_8 |s|^{\mu} - c_9, \quad \forall\, x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Fixada agora uma função $u \in C_0^{\infty}(\Omega) \setminus \{0\}$, a expressão acima implica que

$$I(tu) \leq \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - c_8 |t|^{\mu} \int_{\Omega} |u|^{\mu} + c_9 |\Omega|,$$

onde $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto Ω. Como $\mu > 2$, concluímos que que $\lim_{t\to\infty} I(tu) = -\infty$ quando $t \to \infty$. Podemos então fazer $e = tu$, como t suficientemente grande, de modo que $\|e\| > \rho$ e $I(e) < 0$. Isso mostra que I satisfaz (I_2).

Como $I(0) = 0$, resta somente verificar que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c. Seja então $(u_k) \subset H$ tal que $I(u_k) \to c$ e $I'(u_k) \to 0$. De acordo com o Corolário 3.10, é sufciente mostrar que a sequência é limitada em H. Denotanto por $o_k(1)$ uma quatidade que se aproxima de zero quando $k \to \infty$, temos que

$$|I'(u_k)u_k| \leq \|I'(u_k)\|_{H'} \|u_k\| = o_n(1)\|u_k\|.$$

Desse modo, podemos usar (f_3) para obter

$$\begin{aligned} c + o_k(1) + o_k(1)\|u_k\| &= I(u_k) + \frac{1}{\mu} I'(u_k)u_k \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_k\|^2 - \int_{\Omega}\left(F(x,u_k) - \frac{1}{\mu} f(x,u_k)u_k\right) \\ &\geq \frac{\mu - 2}{2\mu}\|u_k\|^2. \end{aligned}$$

Suponha, por contradição, que (u_k) não seja limitada. Então, a menos de subsequência, deveríamos ter $\|u_k\| \to \infty$. Dividindo a expressão acima por $\|u_k\|^2$ e fazendo $k \to \infty$ concluiríamos que $(\mu - 2)/2\mu \leq 0$, o que não faz sentido, visto que $\mu > 2$. Desse modo, a sequência é limitada e portanto I satisfaz Palais-Smale no nível c do Passo da Montanha. Aplicando então o Teorema 4.1 obtemos $u \neq 0$ tal que $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$. O teorema está provado. $\square$

Observe que $u = 0$ é uma solução (trivial) do problema (4.2). O teorema acima nos fornece uma segunda solução $u \neq 0$. As hipóteses (f_2) e (f_3) podem ser enfraquecidas de diversas maneiras (cf. Exercício 4.4). Além disso, definindo

$$f_+(x,s) := \begin{cases} f(x,s), & \text{se } s \geq 0, \\ 0, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

e considerando o funcional

$$I_+(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int F_+(x,u),$$

onde $F_+(x,s) = \int_0^s f_+(x,t)dt$, podemos proceder como antes para obter um ponto crítico não trivial $\overline{u} \in H$ tal que $\overline{u} \geq 0$. Se a função f for um pouco mais regular, por exemplo se ela satisfizer

$(\widehat{f_0})$ f é localmente Lipchitziana em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$,

podemos usar resultados de regularidade elíptica para concluir que $\overline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e daí, usando o Princípio do Máximo, podemos provar que $\overline{u} > 0$ em Ω (cf. Exercício 4.5). Um truncamento análogo nos permite encontrar ainda uma solução negativa. Pode-se mostrar que, além dessas duas soluções, o problema possui uma terceira solução que muda de sinal em Ω (cf. [49, 6, 12]). Além disso, se a função f é ímpar, veremos posteriormente que o problema possui uma infinidade de soluções.

A condição (f_3) usada acima é conhecida como condição de superlinearidade de Ambrosetti e Rabinowitz. Vimos que ela implica que

$$F(x,s) \geq c_8|s|^\mu - c_9, \quad \forall\, s \in \mathbb{R},$$

com $\mu > 2$. Observe que uma condição mais fraca de superlinearidade seria supor que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{F(x,s)}{s^2} = +\infty, \quad \text{uniformemente para } x \in \Omega. \tag{4.5}$$

No entanto, ainda não se sabe se é possível obter solução para o problema somente com as hipóteses $(f_0) - (f_2)$ e a condição acima. Existem vários resultados no sentido de substituir (f_3) por algum outro conjunto de hipóteses. Dentre aqueles que utilizam técnicas variacionais destacamos os resultados de Costa e Magalhães [18] (veja Exercício 4.6), Schechter e Zou [44] e Miyagaki e Souto [32].

4.2 Um problema de autovalor não linear

Nessa subseção vamos considerar o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.6}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, f satisfaz $(\widehat{f_0})$, (f_2) e

(f_4) existe $r > 0$ tal que $f(s) > 0$ em $(0, r)$ e $f(r) = 0$.

Vamos provar um resultado de multiplicidade de soluções para valores grandes do parâmetro λ. Mais especificamente, vale o seguinte:

Teorema 4.3. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e f satisfaz $(\widehat{f_0})$, (f_2) e (f_4). Então existe $\lambda^* > 0$ tal que, para cada $\lambda > \lambda^*$, o problema 4.6 tem pelo menos duas soluções positivas.*

Demonstração. O primeiro passo é definir o seguinte trucamento da função f:

$$\bar{f}(s) := \begin{cases} f(s), & \text{se } s \in [0, r], \\ 0, & \text{se } s \notin [0, r]. \end{cases}$$

Essa nova função claramente satisfaz $(\widehat{f_0})$ e $(f_1) - (f_2)$ de modo que, para cada $\lambda > 0$, o funcional $I_\lambda : H \to \mathbb{R}$ definido por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int \bar{F}(u),$$

onde $\bar{F}(s) = \int_0^s f(t)\mathrm{d}t$ pertence a $C^1(H, \mathbb{R})$, onde estamos denotando por H o espaço $H_0^1(\Omega)$ munido com a norma $\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2$.

Suponha que $u \in H$ é um ponto crítico não nulo de I_λ. Como $f(s) = 0$ se $s \leq 0$, se definirmos $u^-(x) := \max\{-u(x), 0\}$, temos que $f(u)u^- \equiv 0$, e portanto

$$0 = I'_\lambda(u)u^- = -\|u^-\|^2 + \int f(u)u^- = -\|u^-\|^2.$$

A expressão acima mostra que $u \geq 0$ em Ω. Além disso, a regularidade de $\bar{f}$ garante que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e portanto podemos usar o Princípio do Máximo para garantir que $u > 0$ em Ω. Definido agora o conjunto $\Omega_r = \{x \in \Omega : u(x) > r\}$, podemos usar a continuidade u para garantir que $u \equiv r$ em $\partial\Omega_r$. Lembrando que $f(s) = 0$ se $s > r$, concluímos que, se o conjunto Ω_r for não vazio, então

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in \Omega_r, \\ u = r, & x \in \partial\Omega_r. \end{cases}$$

O Princípio do Máximo implica então que $u \equiv r$ em Ω_r, o que contradiz a definiçao deste conjunto. Assim, qualquer ponto crítico $u \neq 0$ de I_λ tem imagem contida no intervalo $(0, r)$, de modo que $\bar{f}(u) = f(u)$, isto é, u é uma solução positiva do problema original (4.6).

Suponha que $(u_k) \subset H$ é uma sequência tal que $I_\lambda(u_n) \leq M$. Como $|\bar{F}(s)| \leq c_2|s|$ e portando podemos usar a imersão de Sobolev $H \hookrightarrow L^1(\Omega)$ para obter

$$M \geq I_\lambda(u_k) \geq \frac{1}{2}\|u_k\|^2 - \lambda c_3\|u_k\|,$$

o que mostra que (u_k) é limitada em H. Uma vez que $\bar{f}$ satisfaz (f_1), concluímos que I_λ satisfaz Palais-Smale. A desigualdade acima também mostra que I_λ é coercivo. Como I_λ leva conjuntos limitados em conjuntos limitados, concluímos que I_λ é limitado inferiormente e portanto fica bem definido

$$c_\lambda = \inf_{u \in H} I_\lambda(u).$$

Seja $(u_k^\lambda) \subset H$ um sequência tal que $I_\lambda(u_k^\lambda) \to c_\lambda$. De acordo com as observações que sucedem o Lema 3.8, podemos supor que $I'_\lambda(u_k^\lambda) \to 0$. Usando a condição de Palais-Smale sabemos que, a menos de subsequência, $u_k^\lambda \to \underline{u}^\lambda$ fortemente em H. Usando a regularidade de I_λ concluímos que $I'_\lambda(\underline{u}^\lambda) = 0$ e $I_\lambda(\underline{u}^\lambda) = c_\lambda$. A esta altura, ainda pode ocorrer $\underline{u}^\lambda = 0$, de modo que precisamos trabalhar um pouco mais para obter solução não nula.

Seja então $\varphi \in E \setminus \{0\}$ uma função tal que $\varphi(x) \in [0, r)$ para todo $x \in \Omega$. Segue de (f_4) que $\int \bar{F}(\varphi) > 0$ e portanto existe $\lambda^* > 0$ tal que

$$I_\lambda(\varphi) = \frac{1}{2}\|\varphi\|^2 - \lambda \int \bar{F}(\varphi) < 0, \quad \forall\, \lambda > \lambda^*.$$

Fixado então $\lambda > \lambda^*$, a desigualdade acima mostra que $c_\lambda < 0$. Logo, como visto anteriomente, existe um ponto crítico $\underline{u}^\lambda \in H \setminus \{0\}$ tal que $I'_\lambda(\underline{u}^\lambda) = 0$ e $I_\lambda(\underline{u}^\lambda) = c_\lambda$. Como $I_\lambda(0) = 0$, a função $\underline{u}^\lambda$ é uma solução positiva de (4.6).

Vamos obter uma segunda solução aplicando o Teorema 4.1. Note inicialmente que podemos usar $(f_1) - (f_2)$ e o mesmo argumento da seção anterior para obter

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \lambda\frac{\varepsilon}{\lambda_1(\Omega)} - 2\lambda c_6\|u\|^{p-2}\right)\|u\|^2 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 2\lambda c_6\|u\|^{p-2}\right)\|u\|^2,$$

onde escolhemos $\varepsilon = \lambda_1(\Omega)/(2\lambda)$. Assim,

$$I(u) \geq \frac{1}{8}\|u\|^2, \quad \forall\, \|u\| \leq (8\lambda c_6)^{1/(2-p)}. \tag{4.7}$$

Definindo então

$$\rho_\lambda = \min\left\{(8\lambda c_6)^{1/(2-p)}, \frac{\|\underline{u}^\lambda\|}{2}\right\},$$

podemos usar a última desigualdade para concluir que I_λ satisfaz (I_1) com $\rho = \rho_\lambda$ e $\alpha = \rho_\lambda^2/8$. Além disso, I_λ satisfaz (I_2) com $e = \underline{u}^\lambda$, pois $\|\underline{u}^\lambda\| > \rho_\lambda$ e $I_\lambda(\underline{u}^\lambda) < 0$. Segue do Teorema do Passo da Montanha que existe um ponto crítico $\bar{u}^\lambda \neq 0$ tal que $I_\lambda(\bar{u}^\lambda) > 0$. Esse ponto crítico é uma solução positiva de (4.6) que é diferente de $\underline{u}^\lambda$ por ter energia positiva.

4.3 Um problema em $\mathbb{R}^N$

Em toda esse seção vamos indicar por H o espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R}^N)$ munido se sua norma usual, a saber $\|u\| = (\int(|\nabla u|^2 + u^2))^{1/2}$. Além disso, para simplificar a notação, vamos escrever somente $\int f$ para denotar $\int_{\mathbb{R}^N} f$.

O objetivo da seção é usar o Teorema do Passo da Montanha para provar o teorema abaixo:

Teorema 4.4 (Ding e Ni [20])**.** *Suponha que $2 < p < 2^*$ e Q satisfaz*

(Q_0) $Q \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$*;*

(Q_1) $1 = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} Q(x) = \lim_{|x| \to \infty} Q(x), \quad Q \not\equiv 1.$

Então o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = Q(x)|u|^{p-2}u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{4.8}$$

possui pelo uma solução fraca não nula.

A demonstração do teorema acima requer uma série de passos. O primeiro deles é estudar o *problema limite* associado, ou seja, o problema para o caso em que $Q \equiv 1$:

$$-\Delta u + u = |u|^{p-2}u, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Esse problema está relacionado com a constante da imersão de H em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Mais especificamente, com o problema de minimização

$$S_p = \inf\left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2) \ : \ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p = 1 \right\}. \tag{4.9}$$

Uma vez que $H \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ verifica-se facilmente que $S_p > 0$. Desse modo, podemos tentar argumentar como no início do Capítulo 2 para provar que a constante S_p é atingida. Façamos isso, considerando $(u_k) \subset H$ uma sequência minimizante, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_k|^p = 1, \qquad \lim_{k\to\infty} \|u_k\|^2 = S_p,$$

Como (u_k) é limitada temos que $u_k \rightharpoonup u$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Logo,

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|^2 = S_p.$$

Se tivéssemos $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p = 1$, então o problema estaria resolvida, pois concluiríamos que a constante S_p era atingida em u. Daí, era suficiente usar o Teorema do Multiplicador de Lagrange como antes para obter uma solução do problema limite. O problema aqui é que, como $\mathbb{R}^N$ é ilimitado, não temos mais a compacidade da imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$.

O argumento utilizado para mostrar que a constante S_p é atingida é um pouco mais delicado e está baseado em dois resultados técnicos que apresentamos a seguir. Destacamos que ambos têm importância em si mesmos, e são largamente utilizados em diversos problemas que envolvem técnicas variacionais.

Antes de apresentarmos o primeiro resultado vamos lembrar que, se $(u_k) \subset L^p(\Omega)$ é uma sequência limitada, podemos supor, a menos de subsequência, que $u_k \rightharpoonup u$ fracamente em $L^p(\Omega)$ e $u_k(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω, para alguma função $u \in L^p(\Omega)$. Segue do Lema de Fatou que

$$\int_\Omega |u|^p \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |u_k|^p,$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, a convergência de u_k para u é forte. Em um artigo de 1983, Brézies e Lieb mostraram que a diferença $|u|_p - |u_k|^p_{L^p(\Omega)}$ se comporta exatamente como $|u_k - u|_p$, quando $k \to \infty$. Mais especificamente eles mostraram que

$$|u|_p^p = \lim_{k\to\infty} (|u_k|_p^p - |u_k - u|_p^p). \tag{4.10}$$

De fato, vale um resultado mais geral, que apresentamos abaixo.

Lema 4.5 (Brézis-Lieb [10]). *Seja $H : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ um função contínua tal que $H(0) = 0$. Suponha que, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|H(s+t) - H(s)| \leq \varepsilon H(s) + C_\varepsilon H(t), \quad \forall\ s,\, t \in \mathbb{R}. \tag{4.11}$$

Seja (u_k) uma sequência de funções mensuráveis no aberto Ω satisfazendo $u_k(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω, $\sup_k \int_\Omega H(u_k) < \infty$ e $\int_\Omega H(u) < \infty$. Então $\sup_k H(u_k - u) < \infty$ e

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |H(u_k) - H(u) - H(u_k - u)| = 0.$$

Demonstração. Observe inicialmente que (4.11) implica que

$$H(u_k - u) - H(u_k) \leq |H(u_k) - H(u_k - u)| \leq \frac{1}{2} H(u_k - u) + C_{1/2} H(u).$$

Logo

$$H(u_k - u) \leq 2\left(H(u_k) + C_{1/2} H(u)\right),$$

e portanto $M = \sup_k \int_\Omega H(u_k - u) < \infty$.

Dado $\varepsilon > 0$, considere a função

$$h_{k,\varepsilon} = \Big(|H(u_k) - H(u) - H(u_k - u)| - \varepsilon H(u_k - u)\Big)^+, \quad x \in \Omega.$$

Observe que, se $|H(u_k) - H(u) - H(u_k - u)| \geq \varepsilon H(u_k - u)$, então podemos usar (4.11) para obter

$$\begin{aligned} h_{k,\varepsilon} &= |H(u_k) - H(u) - H(u_k - u)| - \varepsilon H(u_k - u) \\ &\leq |H(u_k) - H(u_k - u)| + H(u) - \varepsilon H(u_k - u) \\ &\leq \varepsilon H(u_k - u) + C_\varepsilon H(u) + H(u) - \varepsilon H(u_k - u) \\ &= (1 + C_\varepsilon) H(u). \end{aligned}$$

No caso em $|H(u_k) - H(u) - H(u_k - u)| \leq \varepsilon H(u_k - u)$, temos $h_{k,\varepsilon} = 0$ e portanto a desigualdade acima é trivialmente satisfeita. Desse modo, concluímos que

$$|h_{k,\varepsilon}| \leq (1 + C_\varepsilon) H(u).$$

Como $\lim_{k\to\infty} h_{k,\varepsilon}(x) = 0$ q.t.p. em Ω, segue do Teorema da Convergência Dominada que $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega h_{k,\varepsilon} = 0$.

Observe agora que $h_{k,\varepsilon} \geq |H(u_k) - H(u) - H(u_k - u)| - \varepsilon H(u_k - u)$, ou ainda,

$$|H(u_k) - H(u) - H(u_k - u)| \leq h_{k,\varepsilon} + \varepsilon H(u_k - u).$$

Isso implica que

$$\limsup_{k\to\infty} \int_\Omega |H(u_k) - H(u) - H(u_k - u)| \leq M\varepsilon.$$

e o resultado segue fazendo $\varepsilon \to 0^+$. □

Não é difícil ver que a função $H(s) = |s|^p$ satisfaz a condição (4.11) quando $p \geq 1$. Logo, a equação (4.10) se verifica (cf. Exercicio 4.9). De fato, a condição (4.11) se verifica para qualquer função convexa.

O segundo resultado que vamos precisar é devido a P.L. Lions.

Lema 4.6 (Lions [29]). *Sejam $r > 0$ e $2 \leq q < 2^*$. Se $(u_k) \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada e*

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u_k|^q \right) = 0,$$

então $u_k \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $2 < p < 2^*$.

Demonstração. Para cada $z \in \mathbb{R}^N$, $s \in (q, 2^*)$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, podemos usar a desigualdade de interpolação (cf. Exercício 1.6) e a imersão $H^1(B_r(z)) \hookrightarrow L^{2^*}(B_r(z))$, para obter

$$\begin{aligned}
|u|_{L^s(B_r(z))} &\leq |u|_{L^q(B_r(z))}^{(1-\lambda)} |u|_{L^{2^*}(B_r(z))}^{\lambda} \\
&\leq c_1 |u|_{L^q(B_r(z))}^{(1-\lambda)} \left(\int_{B_r(z)} (|\nabla u|^2 + u^2) \right)^{\lambda/2},
\end{aligned}$$

onde $\lambda \in (0,1)$ é dado por

$$\lambda = \lambda(s) = \frac{(s-q)}{(2^* - q)} \frac{2^*}{s}.$$

Como $\lim_{s \to q} \lambda(s) = 0$, $\lim_{s \to 2^*} \lambda(s) = 1$ e $2/s \in (0,1)$, é possível escolher $s \in (q, 2^*)$ de maneira que $\lambda = 2/s$. Para essa escolha, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(z)} |u|^s &\leq c_2 |u|_{L^q(B_r(z))}^{(1-\lambda)s} \int_{B_r(z)} (|\nabla u|^2 + u^2) \\
&\leq c_2 \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u|^q \right)^{(1-\lambda)s/q} \int_{B_r(z)} (|\nabla u|^2 + u^2)
\end{aligned}$$

Considere uma cobertura do $\mathbb{R}^N$ por bolas de raio $r > 0$ de modo que cada ponto $z \in \mathbb{R}^N$ intercepte, no máximo, $(N+1)$ bolas. Passando para uma subcobertura enumerável temos que $\mathbb{R}^N = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_r(z_j)$, para alguma sequência $(z_j) \subset \mathbb{R}^N$. Assim, usando a estimativa acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u|^s &\leq \lim_{m \to \infty} \sum_{j=1}^{m} \int_{B_r(z_j)} |u|^s \\
&\leq c_3 \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u|^q \right)^{(1-\lambda)s/q} \lim_{m \to \infty} \sum_{j=1}^{m} \int_{B_r(z_j)} (|\nabla u|^2 + u^2).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Denotando por $\chi_{B_r(z_j)}$ a função característica da bola $B_r(z_j)$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \int_{B_r(z_j)} (|\nabla u|^2 + u^2) &= \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{B_r(z_j)}(x)(|\nabla u|^2 + u^2) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{j=1}^{m} \chi_{B_r(z_j)}(x) \right) (|\nabla u|^2 + u^2) \\
&\leq (N+1) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2),
\end{aligned} \tag{4.13}$$

em que usamos na última estimativa o fato de cada ponto $x \in \mathbb{R}^N$ interceptar no máximo $(N+1)$ bolas. A expressão acima, (4.12) e (4.13) implicam que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_k|^s \leq c_3(N+1) \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u|^q \right)^{(1-\lambda)s/q} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_k|^2 + u_k^2),$$

e portanto segue das hipóteses do lema que $u_k \to 0$ in $L^s(\mathbb{R}^N)$.

Considere agora $p \in (2, s)$ e note que, por interpolação novamente,

$$\lim_{k\to\infty} |u_k|_p \leq \lim_{k\to\infty} |u_k|_2^{1-\alpha} |u_k|_s^{\alpha} = 0,$$

para algum $\alpha \in (0,1)$, em que usamos a limitação de (u_k) em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Como (u_k) também é limitada em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, um argumento análogo mostra que $u_k \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ se $p \in (s, 2^*)$. □

Estamos prontos para mostrar que o problema de minimização possui solução.

Proposição 4.7 (Lions [29])**.** *Seja $(u_k) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência minizante para o número S_p definido em (4.9). Então existe uma sequência $(y_k) \subset \mathbb{R}^N$ tal que a sequência transladada $(v_k) := (u_k(\cdot + y_k))$ possui uma subsequência convergente. Em particular, a constante S_p é atingida em uma função $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N)$ positiva em $\mathbb{R}^N$.*

Demonstração. Como $|u_k|_p = 1$, podemos usar o Lema 4.6 para obter $r > 0$ tal que

$$\delta := \liminf_{k\to\infty} \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u_k|^p \right) > 0.$$

Desse modo, existe uma sequência $(y_k) \subset \mathbb{R}^N$ tal que (cf. Exercício 4.10)

$$\int_{B_r(y_k)} |u_k|^p \geq \frac{\delta}{2}. \tag{4.14}$$

Definindo $v_k(x) := u_k(x + y_k)$, podemos usar a invariância de $\mathbb{R}^N$ por translações para mostrar que $|v_n|_p = 1$ e $\|v_n\|^2 \to S_p$, isto é, $(v_k) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é também uma sequência minimizante para S_p. Além disso

$$\int_{B_r(0)} |v_k|^p = \int_{B_r(y_k)} |u_k|^p \geq \frac{\delta}{2}. \tag{4.15}$$

Como (v_k) é limitada temos que, a menos de subsequência,

$$\begin{aligned} v_k &\rightharpoonup v, && \text{fracamente em } H^1(\mathbb{R}^N),\\ v_k &\to v, && \text{fortemente em } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N),\\ v_k(x) &\to v(x), && \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Observe que a definição de S_p implica que $\|v\|^2 \geq S_p|v|_p^2$, para toda $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Desse modo, usando a convergência fraca acima e o Lema de Brézis-Lieb (cf. equação (4.10)) obtemos

$$\begin{aligned} S_p &= \lim_{k\to\infty} \|v_k\|^2 = \|v\|^2 + \lim_{k\to\infty} \|v_k - v\|^2\\ &\geq S_p|v|_p^2 + \lim_{k\to\infty} S_p|v_k - v|_p^2\\ &= S_p|v|_p^2 + S_p(1 - |v|_p^p)^{2/p}\\ &= S_p\left\{(|v|_p^p)^{2/p} + (1 - |v|_p^p)^{2/p}\right\}. \end{aligned}$$

Como $v_k \to v$ em $L^p(B_r(0))$, a inequação (4.14) implica que $\int_{B_r(0)} |v|^p \geq \delta/2$, e portanto $|v|_p^p \neq 0$. Suponha, por contradição, que $|v|_p^p < 1$. Então, como $v \neq 0$, devemos ter $|v|_p^p \in (0,1)$. Lembrando que $(a+b)^t < a^t + b^t$, sempre que a, b, $t \in (0,1)$, e fazendo $a = |v|_p^p$, $b = 1 - |v|_p^p$ e $t = 2/p$ na expressão acima, obtemos

$$S_p \geq S_p\left\{(|v|_p^p)^{2/p} + (1 - |v|_p^p)^{2/p}\right\} > S_p\left\{|v|_p^p + 1 - |v|_p^p\right\}^{2/p} = S_p,$$

o que é um absurdo. Logo $|v|_p^p = 1$ e portanto a constante S_p é atingida no ponto $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Isso implica que

$$\|v\|^2 = S_p = \lim_{k\to\infty} \|v_k\|^2,$$

donde se conclui que $v_k \to v$ fortemente em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Note que, substituindo (u_k) por $(|u_k|)$, podemos sempre supor que a sequência minimizante tomanda no início da demonstração é formada por funções não negativas. Isso mostra que $v \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$. Usando o Teorema do Multiplicador de Lagrange obtemos $\lambda > 0$ tal que

$$-\Delta v + v = \lambda v^p, \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Usando a teoria de regularidade e o Princípio do Máximo concluímos que $v \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e $v > 0$ em $\mathbb{R}^N$.

$\square$

Voltemos agora a considerar o nosso problema inicial, qual seja

$$\begin{cases} -\Delta u + u = Q(x)|u|^{p-2}u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com Q satifazendo $(Q_0) - (Q_1)$. Como $Q \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ podemos aplicar o Teorema 1.8 para mostrar que o funcional energia associado

$$I(u) = \frac{1}{2}\int(|\nabla u|^2 + u^2) - \frac{1}{p}\int Q(x)|u|^p = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}\int Q(x)|u|^p$$

pertence a $C^1(H, \mathbb{R})$. Além disso, os seus pontos críticos são exatamente as soluções fracas de (4.8). Como $u = 0$ é claramente uma solução, estamos interessados em obter pontos críticos não nulos.

Observe que a imersão $H \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ nos permite obter $c_1 > 0$ tal que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - |Q|_\infty \frac{1}{p}\int |u|^p \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - c_1\|u\|^p = \|u\|^2\left(\frac{1}{2} - c_1\|u\|^{p-2}\right).$$

Logo, podemos proceder como na seção anterior para mostrar que I satisfaz a condição (I_1) do Teorema do Passo da Montanha. Além disso, se $u \neq 0$, então

$$\lim_{t\to\infty} I(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \frac{t^p}{p}\int Q(x)|u|^p = -\infty,$$

e portanto I também satisfaz (I_2). Uma vez que $I(0)$, concluímos então que o funcional satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha. O problema é que, como a imersão $H \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ não é compacta, o argumento usado anteriormente não funciona para demonstrar Palais-Smale. De fato, nesse caso, a limitação de uma sequência de Palais-Smale não garante que ela possua subsequência convergente.

Para contornar a perda de compacidade da imersão vamos inicialmente mostrar, por um argumento indireto, que I satisfaz $(\mathrm{PS})_c$ para alguns valores de c.

Lema 4.8. *O funcional I satisfaz $(PS)_c$ para todo $c < c^*$, onde c^* é dado por*

$$c^* = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) S_p^{p/(p-2)}.$$

Demonstração. Suponha que $(u_k) \subset H$ é tal que $I(u_k) \to c < c^*$ e $I'(u_k) \to 0$. Como na seção anterior, temos que

$$c + o_k(1)\|u_k\| + o_k(1) = I(u_k) - \frac{1}{p}I'(u_k)u_k = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_k\|^2,$$

onde $o_k(1)$ denota uma quantidade que vai para zero quando $k \to +\infty$. Isso mostra que $(u_k) \subset H$ e portanto, a menos de subsequência, temos que

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u, & \text{fracamente em } H, \\ u_k \to u, & \text{em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad 1 \leq s < 2^* - 1, \\ u_k(x) \to u(x), & \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{4.16}$$

Considere $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N$ e seja $K = \operatorname{supp}\varphi$. A convergência pontual acima implica que $Q(x)|u_k|^{p-2}u_k\varphi \to Q(x)|u|^{p-2}u\varphi$ q.t.p. em K. Além disso, como $u_k \to u$ em $L^{p-1}(K)$, existe uma função $\psi_{p-1} \in L^{p-1}(K)$ tal que $|u_k| \leq \psi_{p-1}$ q.t.p. em K. Logo

$$\left|Q(x)|u_k|^{p-2}u_k\varphi\right| \leq |Q|_\infty|\varphi|_\infty|u_k|^{p-1} \leq |Q|_\infty|\varphi|_\infty|\psi_{p-1}|^{p-1}, \quad \text{q.t.p. em } K.$$

Como o lado direito acima está em $L^1(K)$, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada para obter

$$\lim_{k\to\infty}\int Q(x)|u_k|^{p-2}u_k\varphi = \lim_{k\to\infty}\int_K Q(x)|u_k|^{p-2}u_k\varphi = \int_K Q(x)|u|^{p-2}u\varphi = \int Q(x)|u|^{p-2}u\varphi.$$

Logo, passando a igualdade

$$o_k(1) = I'(u_k)\varphi = \langle u_k, \varphi\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \int Q(x)|u_k|^{p-2}u_k\varphi$$

ao limite, e usando as propriedades de (u_k), concluímos que

$$0 = \langle u, \varphi\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \int Q(x)|u|^{p-2}u\varphi = I'(u)\varphi, \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Segue então por densidade que $I'(u) = 0$.

Como $0 = I'(u)u = \|u\|^2 - \int Q(x)|u|^p$, obtemos

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}\int Q(x)|u|^p = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u\|^2 \geq 0.$$

Definindo $v_k = u_k - u$ e utilizando o Lema de Brézis-Lieb, temos que

$$\begin{aligned} \int Q(x)|u_k|^p &= \int Q(x)|u|^p + \int Q(x)|v_k|^p + o_k(1) \\ &= \int Q(x)|u|^p + \int |v_k|^p + \int (Q(x)-1)|v_k|^p + o_k(1). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Vamos estimar a última integral acima como segue. Dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que $|Q(x) - 1| < \varepsilon$, sempre que $|x| \geq R$. Logo

$$\begin{aligned} \left|\int (Q(x)-1)|v_k|^p\right| &\leq \int_{B_R(0)} |Q(x)-1||v_k|^p + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |Q(x)-1||v_k|^p \\ &\leq (|Q|_\infty + 1)\int_{B_R(0)} |v_k|^p + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |v_k|^p \\ &\leq (|Q|_\infty + 1) o_k(1) + \varepsilon c_1, \end{aligned}$$

em que usamos, na última desigualdade, o fato de $v_k \to 0$ em $L^p(B_R(0))$ e a limitação de (v_k) em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Segue então da expressão acima que

$$\limsup_{k\to\infty} \left|\int (Q(x)-1)|v_k|^p\right| \leq \varepsilon c_1.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, devemos ter $\int (Q(x)-1)|v_k|^p \to 0$ quando $k \to \infty$. Segue então de (4.17) que

$$\int Q(x)|u_k|^p = \int Q(x)|u|^p + \int |v_k|^p + o_k(1). \tag{4.18}$$

Observe agora que, usando a expressão acima e a convergência fraca de (u_k), obtemos

$$\begin{aligned} o_k(1) &= I'(u_k)u_k = \|u_k\|^2 - \int Q(x)|u_k|^p \\ &= \|u\|^2 + \|v_k\|^2 - \int Q(x)|u|^p - \int |v_k|^p + o_k(1) \\ &= I'(u)u + \|v_k\|^2 - \int |v_k|^p + o_k(1). \end{aligned}$$

Como $I'(u)u = 0$, segue da expressão acima que existe $b \geq 0$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \|v_k\|^2 = b = \lim_{k\to\infty} \int |v_k|^p.$$

Vamos mostrar que $b = 0$. Usando a definição de S_p, temos que $\|v_k\|^2 \geq S_p |v_k|_p^2$. Passando ao limite e usando a expressão acima concluímos que

$$b \geq S_p b^{2/p}.$$

Suponha então, por contradição, que $b > 0$. Nesse caso, a desigualdade acima implica que $b \geq S_p^{p/(p-2)}$, e portanto

$$c^* = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) S_p^{p/(p-2)} \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) b. \tag{4.19}$$

Por outro lado, usando (4.18) novamente, obtemos

$$\begin{aligned} I(u_k) &= \frac{1}{2}\|u_k\|^2 - \frac{1}{p}\int Q(x)|u_k|^p \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|v_k\|^2 - \frac{1}{p}\int Q(x)|u|^p - \frac{1}{p}\int |v_k|^p + o_k(1) \\ &= I(u) + \frac{1}{2}\|v_k\|^2 - \frac{1}{p}\int |v_k|^p + o_k(1). \end{aligned}$$

Passando ao limite e lembrando que $I(u) \geq 0$, concluímos que

$$c = I(u) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) b \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) b.$$

A expressão acima e (4.19) implicam que

$$c^* \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) b \leq c,$$

o que contradiz $c < c^*$. Logo $b = 0$, isto é, $\|u_k - u\|^2 \to 0$. Concluímos então que $u_k \to u$ fortemente em H, e o lema está provado. $\square$

Estamos prontos para provar o resultado principal dessa seção.

Demonstração do Teorema 4.4. Conforme observado anteriormente, existem ρ, $\alpha > 0$ tais que

$$I(u) \geq \alpha > 0, \quad \forall\ \|u\| = \rho.$$

Seja $v \in H$ dada pela Proposição 4.7, isto é, $|v|_p = 1$ e $\|v\|^2 = S_p$. Considere a função $t \mapsto I(tv)$, para $t \geq 0$. Essa função atinge seu máximo no ponto $\bar{t}$ dado por

$$\bar{t} = \left(\frac{\|v\|^2}{\int Q(x)|v|^p}\right)^{1/(p-2)}.$$

Sendo assim, denotando $a = \|v\|^2$ e $b = \int Q(x)|v|^p$ e efetuando alguns cálculos, temos

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 0} I(tv) &= I(\bar{t}v) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2/(p-2)} a - \frac{1}{p}\left(\frac{a}{b}\right)^{p/(p-2)} b \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{a}{b^{2/p}}\right)^{p/(p-2)} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left\{\frac{\|v\|^2}{(\int Q(x)|v|^p)^{2/p}}\right\}^{p/(p-2)}. \end{aligned}$$

De acordo com a condição (Q_1), existe uma bola $B \subset \mathbb{R}^N$ tal que $Q(x) > 1$ para todo $x \in B$. Assim, como o ínfimo de Q é igual a 1, concluímos que

$$\int Q(x)|v|^p > \int |v|^p.$$

Desse modo

$$\max_{t\geq 0} I(tv) < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left\{\frac{\|v\|^2}{(\int |v|^p)^{2/p}}\right\}^{p/(p-2)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) S_p^{p/(p-2)} = c^*.$$

Como $\lim_{t\to\infty} I(tv) = -\infty$ podemos escolher $e = t_0 v$, com $t_0 > 0$ suficientemente grande, de modo que $\|e\| > \rho$ e $I(e) \leq 0$. Para essa escolha de e, considere o nível minimax do Passo da Montanha, a saber

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) \,:\, \gamma(0) = 0,\, \gamma(1) = e\}$. Tomando o caminho $\gamma(t) = te$, para $t \in [0,1]$, obtemos

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) = \max_{t\in[0,1]} I(tt_0 v) \leq \max_{t\geq 0} I(tv) < c^*,$$

o que mostra que $c < c^*$. Segue do Lema 4.8 que I satisfaz $(\mathrm{PS})_c$. Portanto, podemos usar o Teorema do Passo da Montanha para obter um ponto crítico $u \neq 0$ do funcional I. Isso prova o teorema. $\square$

O Teorema 4.4 foi provado por Ding e Ni [20] em 1986. O Lema 4.8 é um ponto crucial na demonstração e foi inspirando em um resultado anterior de Brézis e Nirenberg [11]. Na verdade, não é difícil modificar a demonstração acima para verificar que, de fato, o problema possui uma solução positiva (cf. Exercício 4.11).

4.4 Exercícios

Atenção: Nos exercícios abaixo, a menos que se diga o contrário, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe C^1.

4.1. Suponha existem $\rho > 0$ e $e \in X$, $\|e\| > \rho$ tais que

$$\max\{I(0), I(e)\} < \inf_{\partial B_\rho(0)} I = \alpha.$$

Prove que o nível minimax c definido no Teorema do Passo da Montanha é tal que $c \geq \alpha$ e que ele é valor crítico se I satisfaz $(\mathrm{PS})_c$.

4.2. Mostre que $I(x,y) = x^2 + (1-x)^3 y^2$ é tal que $I(0) = 0$, (I_1) e (I_2) são satisfeitas, mas o único nível crítico é zero. Conclua que I não satisfaz (PS) no nível c dado pelo Passo da Montanha.

4.3. Discuta a validade do Teorema 4.2 para $1 \leq p < 2$ (cf. Exercício 2.7).

4.4. Mostre que, no Teorema 4.2, as hipóteses (f_2) e (f_3) podem ser substituídas por

$(\widehat{f_2})$ $\lim\limits_{s \to 0} \frac{f(x,x)}{s} = \lambda < \lambda_1$, uniformemente para $x \in \Omega$;

$(\widehat{f_3})$ existem $\mu > 2$ e $s_0 > 0$ tais que

$$0 < \mu F(x,s) \leq s f(x,s), \quad \forall\, x \in \Omega,\ |s| > s_0.$$

4.5. Sob as mesmas hipótese do Teorema 4.2, mostre que existem soluções $\overline{u}$, $\underline{u} \in H_0^1(\Omega)$ tais que $\overline{u} \geq 0$ e $\underline{u} \leq 0$. Se, adicionalmente, a função f é localmente Lipschitz, então $\overline{u} > 0$ e $\underline{u} < 0$ em Ω.

Sugestão: para encontrar $\overline{u}$ considere $f_+ : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_+(x,s) := \begin{cases} f(x,s), & \text{se } s \geq 0, \\ 0, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Para a segunda parte use regularidade elíptica e o Princípio do Máximo.

4.6 (Condição de não-quadraticidade [18]). Suponha que f satisfaz $(f_0) - (f_2)$ e

(f_5) existe $\beta \in (\lambda_1, +\infty]$ tal que

$$\lim_{|s| \to \infty} \frac{f(x,s)}{s} \geq \beta, \text{ uniformemente para } x \in \Omega;$$

(NQ) $\lim\limits_{|s| \to \infty} [f(x,s)s - 2F(x,s)] = +\infty$, uniformemente para $x \in \Omega$.

Então o problema (4.2) possui pelo menos uma solução fraca $u \neq 0$.

Sugestão: Utilize o Lema de Fatou e (NQ) para mostrar que o funcional associado ao problema (4.2) satisfaz a condição $(\mathrm{Ce})_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Em seguida, lembre que o Teorema do Passo da Montanha vale com essa condição de compacidade mais fraca.

4.7. Mostre que a função $f(s) = F'(s)$, onde $F(s) = s^2 \ln(1 + s^2)$ é tal que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{s} = +\infty, \quad \lim_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{|s|^\delta s} = 0,$$

para todo $\delta > 0$. Além disso, f não satisfaz a condição de superlinearidade de Ambrosetti-Rabinowitz $(\widehat{f}_3)$, mas satisfaz (4.5), a condição (f_5) e a condição de não-quadraticidade (NQ), ambas dadas no Exercício 4.6.

4.8 (cf. [44])**.** Seja I o funcional associado ao problema (4.2) e suponha que a função f satisfaça $(f_0)-(f_1)$ e (4.5). Dado $\rho > 0$ qualquer, mostre que existe $e \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|e\|_{H_0^1(\Omega)} > \rho$ e $I(e) \leq 0$ (cf. condição (I_2) do Teorema do Passo da Montanha).
Sugestão: Use a continuidade de $F(x, s)$ e (4.5) para mostrar que, dado $M > 0$, existe $C_M > 0$ tal que $F(x, s) \geq Ms^2 - C_M$, para todo $x \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}$. Em seguida, escolha $\phi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ com norma pequena, estime $I(t\phi)$ e faça $t \to \infty$.

4.9. Verifique que a função $H(s) = |s|^p$, com $p \geq 1$, satisfaz a condição (4.11).

4.10. Complete a demonstração da Proposição 4.7 mostrando que

a) existe uma sequência $(y_k) \subset \mathbb{R}^N$ satisfazendo (4.14);

b) $(a + b)^t < a^t + b^t$, sempre que a, b, $t \in (0, 1)$.

4.11. Verifique que a demonstração do Teorema 4.4 permanece inalterada se considerarmos, no lugar de I, o funcional

$$I_+(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}\int Q(x)(u^+)^p.$$

Denotando por $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ o ponto crítico dado pelo Teorema do Passo da Montanha, calcule $I_+'(u)u^-$ para concluir que $u \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$. Regularizando a solução e usando o Princípio do Máximo, prove que $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Descreva um procedimento simples que nos permita encontrar uma segunda solução que é negativa em $\mathbb{R}^N$.

CAPÍTULO 5

Teorema do Ponto de Sela

Para provar o nosso próximo teorema de minimax vamos utilizar o conceito de grau topológico de Brouwer. No que segue, faremos uma breve exposição das suas principais propriedades.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $y \in \mathbb{R}^N$ tal que $y \notin \varphi(\partial\Omega)$. Estamos interessados em resolver a equação

$$\varphi(x) = y.$$

Supondo que y é um valor regular de φ, isto é, $\varphi'(x) \neq 0$ para todo $x \in \varphi^{-1}(\{y\})$, podemos usar o Teorema da Função Inversa para garantir que o conjunto $\varphi^{-1}(\{y\})$ contém somente pontos isolados. Como $y \notin \varphi(\partial\Omega)$ e $\overline{\Omega}$ é compacto, o conjunto $\varphi^{-1}(\{y\})$ é finito, e portanto fica bem definido (cf Exercício 5.1)

$$\deg(\varphi, \Omega, y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in \varphi^{-1}(\{y\})} \text{sgn det}\, \varphi'(x), & \text{se } \varphi^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{5.1}$$

Usando a definição acima podemos facilmente provar as seguinte propriedades (cf. Exercício 5.2).

(GR1) (Normalização) se Id: $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ é a aplicação identidade então

$$\deg(\mathrm{Id}, \Omega, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \in \Omega, \\ 0, & \text{se } y \notin \Omega; \end{cases}$$

(GR2) (Excisão) se $\deg(\varphi, \Omega, y) \neq 0$, então a equação $\varphi(x) = y$ possui solução em Ω;

(GR3) (Aditividade) se Ω_1, $\Omega_2 \subset \Omega$ são tais que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$ e $y \notin \varphi(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, então

$$\deg(\varphi, \Omega, y) = \deg(\varphi, \Omega_1, y) + \deg(\varphi, \Omega_2, y);$$

(GR4) (Continuidade) $\deg(\varphi, \Omega, y) = \deg(\psi, \Omega, y)$, sempre que $\|\varphi - \psi\|_{C^1(\overline{\Omega})}$ é suficientemente pequeno;

(GR5) (Invariância por Homotopia) se $H \in C([0,1] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $y \notin H([0,1] \times \partial\Omega)$ e y é um valor regular de $H(t,\cdot) \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ para todo $t \in [0,1]$, então

$$\deg(H(t,\cdot), \Omega, y) = \text{constante}, \quad \forall\, t \in [0,1].$$

A definição acima pode ser estendida para valores críticos de φ e para funções que estão em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Essa extensão é feita por aproximação e preserva todas as propriedades acima, com o conceito de proximidade em (GR4) podendo ser tomado na topologia de $C(\overline{\Omega})$.

Utilizando a homotopia $H(t,x) = t\psi(x) + (1-t)\varphi(x)$, podemos facilmente verificar a seguinte propriedade:

(GR6) Se φ, $\psi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ são tais que $\varphi \equiv \psi$ em $\partial\Omega$ e $y \notin \varphi(\partial\Omega)$, então

$$\deg(\varphi, \Omega, y) = \deg(\psi, \Omega, y).$$

Finalizamos essa breve introdução com uma observação interessante. Considere $\mathcal{D}$ a coleção de todos os subconjuntos abertos e limitados de $\mathbb{R}^N$ e defina

$$\mathcal{M} = \{(\varphi, \Omega, y) \;:\; \Omega \in \mathcal{D},\, \varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N),\, y \in \mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)\}.$$

Pode-se mostrar que existe exatamente uma função $d : \mathcal{M} \to \mathbb{Z}$ satisfazendo as propriedades (GR1), (GR3) e (GR5) acima. Essa função é definida, para funções em $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, pela expressão (5.1) e estendida para funções contínuas através de argumentos de aproximação. A função resultante dessa extensão é chamada *grau topológico de Brouwer*.

O conceito de grau topológico de Brouwer é o primeiro, entre muitos outros, que formam a chamada Teoria do Grau. Por exemplo, ele pode ser estendido para funções definidas em espaço de dimensão infinita que tenha certas propriedades. A extensão mais conhecida é para funções da forma $\varphi = \mathrm{Id} + K$, com K compacto, e é chamado de *grau de Leray-Schauder*. Recomendamos a leitura do livro de Deimling [19] aos leitores interessados em se aprofundar nesse belo tópico da Matemática.

Estamos prontos para apresentar o resultado principal desse capítulo. Ele foi provado por Rabinowtiz [39] em 1978.

Teorema 5.1 (Teorema do Ponto de Sela)**.** *Seja $X = V \oplus W$ um espaço de Banach, com* $\dim V < \infty$, *e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfazendo*

(I_3) *existem $\alpha \in \mathbb{R}$ e uma vizinha aberta $D \subset V$ da origem tais que*

$$I(v) \leq \alpha, \quad \forall\, v \in \partial D;$$

(I_4) *existe $\beta > \alpha$ tal que*

$$I(w) \geq \beta, \quad \forall\, w \in W.$$

Seja ainda

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \overline{D}} I(\gamma(u))$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C(\overline{D}, X) \,:\, \gamma(v) = v,\ \forall v \in \partial D\}$. Então $c \geq \beta$ e, se I satisfaz $(PS)_c$, o nível c é um nível crítico de I.

Demonstração. Vamos primeiro mostrar que $c \geq \beta$. Para tanto, é suficiente verificar a seguinte propriedade de intesecção: para cada $\gamma \in \Gamma$ fixado vale

$$\gamma(\overline{D}) \cap W \neq \varnothing.$$

De fato, se isso for verdade, escolhemos $u_\gamma \in \overline{D}$ tal que $\gamma(u_\gamma) \in W$ e usamos (I_4) para obter

$$\max_{u \in \overline{D}} I(\gamma(u)) \geq I(\gamma(u_\gamma)) \geq \beta.$$

Tomando o ínfimo para todas as funções em Γ concluímos que $c \geq \beta$.

Seja então $\gamma \in \Gamma$ e denotemos por $P : X \to V$ a projeção sobre V. Observe que $P \circ \gamma \in C(\overline{D}, X)$. Além disso, se $u \in \partial D$, então $P(\gamma(u)) = P(u) = u \neq 0$, visto que D é uma vizinha aberta da origem. Logo $0 \notin (P \circ \gamma)(\partial D)$ e $P \circ \gamma \equiv \mathrm{Id}$ em ∂D. Identificando V com o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{\dim V}$, temos que $\deg(P \circ \gamma, D, 0)$ está bem definido e

$$\deg(P \circ \gamma, D, 0) = \deg(\mathrm{Id}, D, 0) = 1,$$

onde usamos a propriedade (GR6) e (GR1) do grau de Brouwer. Segue agora de (GR2) que existe $u_\gamma \in D$ tal que $P(\gamma(u_\gamma)) = 0$. Como a projeção de $\gamma(u_\gamma)$ sobre V é igual a zero, concluímos que esse vetor pertence ao complementar de V, isto é, $\gamma(u_\gamma) \in W$.

Suponha agora, por contradição, que c não é valor crítico de I. Como $\beta > \alpha$, podemos aplicar o Lema de Deformação de Clark (cf. Exercício 3.20) com $0 < \varepsilon < \frac{\beta - \alpha}{2}$ pequeno, para obter uma deformação $\eta : [0,1] \times X \to X$ contínua satisfazendo

(a) $\eta(1, u) = u$ sempre que $u \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$;

(b) $\eta(1, I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}$.

Seja $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{u \in \overline{D}} I(\gamma(u)) \leq c + \varepsilon,$$

e defina $\widetilde{\gamma} : \overline{D} \to X$ por $\widetilde{\gamma}(u) = \eta(1, \gamma(u))$. Se mostrarmos que $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$ podemos usar $\gamma(\overline{D}) \subset I^{c+\varepsilon}$ e (b) para concluir que, para todo $u \in \overline{D}$, vale $\widetilde{\gamma}(u) = \eta(1, \gamma(u)) \in I^{c-\varepsilon}$. Desse modo,

$$c \leq \max_{u \in \overline{D}} I(\widetilde{\gamma}(u)) \leq c - \varepsilon,$$

o que é um absurdo.

Resta somente verificar que $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$. Claramente $\widetilde{\gamma} \in C(\overline{D}, X)$. Se $u \in \partial D$, então podemos usar (I_3), a escolha de ε e a desigualdade $c \geq \beta$ para obter

$$I(u) \leq \alpha < \beta - 2\varepsilon \leq c - 2\varepsilon.$$

Segue portanto da propriedade (a) da deformação que

$$\widetilde{\gamma}(u) = \eta(1, \gamma(u)) = \eta(1, u) = u.$$

Logo $\widetilde{\gamma} \equiv \mathrm{Id}$ em ∂D, donde se conclui que $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$. O teorema está provado. $\square$

Observe que, se $V = \{0\}$, não poderemos encontrar nenhuma vizinhança aberta de zero totalmente contida em V. Contudo, nesse caso, (I_4) implica que $c_0 = \inf_X I < \infty$ e portanto uma condição suficiente para que c_0 seja nível crítico é que I satisfaça $(\mathrm{PS})_{c_0}$, conforme vimos anteriormente.

Um outro ponto importante é notar que as condições geométricas (I_3) e (I_4) são satisfeitas se o funcional I é coercivo em W, leva conjuntos limitados em conjuntos limitados, e é anti-coercivo em V, isto é, $I(v) \to -\infty$ quando $\|v\|_X \to \infty$, $v \in V$. Esse é o caso em muitas aplicações do Teorema do Ponto de Sela.

Diferentemente do Teorema do Passo da Montanha, o ponto crítico dado pelo teorema acima pode ser zero. Desse modo, ele é aplicado em casos nos quais não sabemos se $u = 0$ é solução do problema em questão.

Existem muitas versões e generalizações do teorema acima. Em particular, o teorema vale se substituirmos (I_3) por

$(\widehat{I}_3)$ $I(v) \leq \alpha$, para todo $v \in V$.

Nesse caso, a hipótese acima e (I_4) implicam que $\beta \leq I(0) \leq \alpha$, e portanto temos que $\beta \leq \alpha$. Alguns resultados para o caso em que o funcional possui esse tipo de geometria foram obtidos por Schechter [43] e Silva [45]. O teorema pode também ser provado, com algumas condições mais restritivas, no caso em que $\dim V = +\infty$ (veja Silva [46]). Finalmente, se estivermos interessados na obtenção de pontos críticos diferentes de zero, podemos por exemplo adicionar algumas hipóteses relacionadas ao comportamente do funcional próximo à origem. Alguns resultados podem ser encontrados nos artigos de Lazer e Solimini [28], Perera e Schechter [37], Furtado e Silva [23], e Furtado, Maia e Silva [24]. Ainda com relação à questão de pontos críticos não nulos, podemos citar o artigo recente de Zou [52], onde o autor, sob algumas hipóteses extras, estabele a existência de um ponto crítico que muda de sinal (e portanto diferente de zero).

Nas próximas seções apresentamos aplicações do Teorema de Ponto de Sela na obtenção de soluções para problemas assintoticamente lineares.

5.1 Problema assintoticamente linear não ressonate

Nessa e na próxima seção vamos denotar por H o espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ com a norma $\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}$. Vamos também considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e escrever somente $\int f$ para denotar $\int_\Omega f$.

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + g(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.2}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma função limitada.

Considerando $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ a sequência de autovalores do problema linear (PA) estudado na Seção 1.1, podemos enunciar o resultado principal dessa seção como segue.

Teorema 5.2. *Suponha que g satisfaz*

(g_0) $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$*;*

(g_1) *existe $M > 0$ tal que*

$$|g(x,s)| \leq M, \quad \forall\ (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Se existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$, então o problema (5.2) possui pelo menos uma solução fraca.

Demonstração. Como a função $f(x,s) = \lambda s + g(x,s)$ satisfaz a condição de crescimento subcrítico (f_0), com $c_1 = M$, $c_2 = |\lambda|$ e $p = 2$, segue do Teorema 1.8 que as soluções fracas do problema (5.2) são os pontos críticos do funcional $I : H \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2}\int u^2 - \int G(x,u), \tag{5.3}$$

onde $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\mathrm{d}t$. Vamos verificar que todas as condições do Teorema do Ponto de Sela são satisfeitas pelo funcional I definido acima.

As condições geométricas são uma consequência simples da caracterização variacional dos autovalores. De fato, sejam $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ as autofunçoes associadas aos autovalores $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ do problema (PA), e defina

$$V = \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_j\}, \quad W = V^{\perp}.$$

De acordo com o Exercício 1.5, valem as seguintes desigualdades

$$\|v\|^2 \leq \lambda_j \int v^2, \quad \forall\, v \in V, \qquad \text{e} \qquad \lambda_{j+1} \int w^2 \leq \|w\|^2, \quad \forall\, w \in W.$$

Como g satisfaz (g_1), temos que

$$|G(x,s)| \leq \int_0^{|s|} |g(x,t)|\,\mathrm{d}t \leq M|s|, \quad \forall\,(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

Assim, dado $w \in W$, podemos usar a desigualdade variacional em W e a imersão $H \hookrightarrow L^1(\Omega)$, para obter

$$I(w) \geq \frac{1}{2}\|w\|^2 - \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda_{j+1}}\|w\|^2 - M\int |w| \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{j+1}}\right)\|w\|^2 - c_1\|w\|.$$

Como $\lambda < \lambda_{j+1}$, segue da expressão acima que $I(w) \to \infty$, quando $\|w\| \to \infty$, $w \in W$. Por outro lado, a limitação de $\lambda u + g(x,u)$ e as imersões de Sobolev mostram que I leva conjuntos limitados em conjuntos limitados. Logo, concluímos que I é limitado inferiormente em W, isto é, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $I(w) \geq \beta$ para todo $w \in W$.

Agora, dado $v \in W$, podemos usar a desigualdade variacional em V e a imersão $H \hookrightarrow L^1(\Omega)$, para obter

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda_j}\|v\|^2 + M\int |v| \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right)\|v\|^2 + c_2\|v\|.$$

Como $\lambda_j < \lambda$, segue que $I(v) \to -\infty$ quando $\|v\| \to \infty$, $v \in V$. Desse modo, existe $\alpha < \beta$ e $R > 0$ tal que

$$I(v) \leq \alpha, \quad \forall\, v \in V,\ \|v\| = R,$$

o que mostra que I satisfaz (I_3) com $D = B_R(0) \cap V$. Além disso, do parágrafo anterior e do fato de que $\alpha < \beta$ concluímos ainda que I satisfaz (I_3).

Resta somente verificar a condição de Palais-Smale. Seja então que $(u_k) \subset H$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} I(u_k) = c, \quad \lim_{k\to\infty} I'(u_k) = 0,$$

em que $c \in \mathbb{R}$ é o nível minimax dado pelo Teorema 5.1. Precisamos provar que (u_k) possui uma subsequência convergente. Como a não linearidade $f(x,u) = \lambda u + g(x,u)$ tem crescimento subcrítico, basta mostrar que (u_k) é limitada em H.

Suponha, por contradição, que a sequência não é limitada. Então existe uma subsequência, que denotaremos ainda por (u_k), tal que $\|u_k\| \to \infty$, quando $k \to \infty$. Definindo

$$\widetilde{u_k} = \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

temos que $(\widetilde{u_k})$ é limitada em H. Logo, a menos de subsequência, podemos supor que

$$\begin{cases} \widetilde{u_k} \rightharpoonup u, & \text{fracamente em } H, \\ \widetilde{u_k} \to u, & \text{em } L^2(\Omega), \\ \widetilde{u_k}(x) \to u(x), & \text{q.t.p. em } \Omega. \end{cases} \tag{5.5}$$

Fixada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos que

$$o_k(1) = I'(u_k)\varphi = \langle u_k, \varphi\rangle - \lambda \int u_k\varphi - \int g(x,u_k)\varphi.$$

Dividindo a expressão toda por $\|u_n\|$, obtemos

$$o_k(1) = \langle \widetilde{u_k}, \varphi\rangle - \lambda \int \widetilde{u_k}\varphi - \int g(x,u_k)\frac{\varphi}{\|u_k\|}. \tag{5.6}$$

A convergência fraca em (5.5) implica que $\langle \widetilde{u_k}, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle$. A convergência forte e Hölder nos fornece

$$\left| \int \widetilde{u_k}\varphi - u\varphi \right| \leq |\widetilde{u_k} - u|_2 |\varphi|_2 \to 0,$$

e portanto $\int \widetilde{u_k}\varphi \to \int u\varphi$. Finalmente, como $g(x,u_k)\varphi$ é limitada e $\|u_k\| \to \infty$, devemos ter $\int g(x,u_k)\varphi\|u_k\|^{-1} \to 0$. Assim, passando a expressão (5.6) ao limite, concluímos que

$$\int \nabla u \cdot \nabla\varphi = \lambda \int u\varphi, \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Por densidade, a expressão acima vale para $\varphi \in H$. Logo a função $u \in H$ satisfaz, no sentido fraco,

$$-\Delta u - \lambda u, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Como λ não é autovalor, devemos ter $u \equiv 0$.

Observe agora que, como $I(u_k) \to c$, obtemos

$$c + o_k(1) = I(u_k) = \frac{1}{2}\|u_k\|^2 - \frac{\lambda}{2}\int u_k^2 - \int G(x, u_k).$$

Dividindo por $\|u_k\|^2$, vem

$$o_k(1) = \frac{1}{2} - \lambda \int \widetilde{u_k}^2 - \int \frac{G(x, u_k)}{\|u_k\|^2}. \tag{5.7}$$

Note que

$$\left| \int \frac{G(x, u_k)}{\|u_k\|^2} \right| \leq \frac{M}{\|u_k\|} \int |\widetilde{u_k}|,$$

e portanto a limitação de $(\widetilde{u_k})$ implica que $\int G(x, u_k)\|u_k\|^{-2} \to 0$. Logo, passando (5.7) ao limite, usando a convergência forte em $L^2(\Omega)$ e $u \equiv 0$, obtemos

$$0 = \frac{1}{2} - \lambda \int u^2 = \frac{1}{2},$$

o que é absurdo. Logo a sequência (u_k) é limitada e podemos usar o Corolário 3.10 para garantir que I satisfaz $(\mathrm{PS})_c$.

Tendo em vista as considerações acima podemos aplicar o Teorema do Ponto de Sela para obter um ponto crítico para o funcional I. Tal ponto crítico é uma solução fraca do problema (5.2) e o teorema está provado. □

Como á função g do problema acima é limitada, a não linearidade $f(x, s) = \lambda s + g(x, s)$ satisfaz

$$\lim_{|s| \to \infty} \frac{f(x, s)}{s} = \lim_{|s| \to \infty} \frac{\lambda s + g(x, s)}{s} = \lambda.$$

Desse modo, o problema é chamado *assintoticamente linear* (cf. Aplicação 2 do Capítulo 2). O fato de λ não ser um autovalor de (PA) caracteriza o problema como *não ressonate*. Note que a demonstração de Palais-Smale apresentada acima não funciona se λ for um autovalor. Nesse caso, o problema é dito *ressonate* e a situação se torna mais delicada. Na próxima seção vamos ver que, sob certas condições, podemos ainda obter soluções para problemas ressonantes.

5.2 Problema resonante

Consideraremos agora o problema (5.2) no caso em que $\lambda = \lambda_j$, onde λ_j é um autovalor do problema (PA). Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\lambda_{j-1} < \lambda_j = \lambda_{j+1} = \cdots = \lambda_{j+m-1} < \lambda_{j+m},$$

com a convenção de que $\lambda_0 = -\infty$ se $j = 1$. Vamos decompor o espaço H da seguinte forma

$$H = H^- \oplus H^0 \oplus H^+,$$

onde

$$H^- = \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}\}, \quad H^0 = \ker(\Delta + \lambda_j), \quad H^+ = (H^- \oplus H^0)^\perp,$$

com a convenção de que $H^- = \{0\}$, se $j = 1$, e denotar por $P^i u$ a projeção de $u \in H$ sobre H^i, $i \in \{-, 0, +\}$. Desse modo, cada função $u \in H$ possui uma única decomposição na forma $u = u^- + u^0 + u^+$.

Conforme observado na seção anterior, o fato de λ ser um autovalor caracteriza o problema como resonante. Nesse caso, a questão de existência se torna mais delicada. De fato, se $g(x, s) = g(x)$, então podemos usar a Alternativa de Fredholm para concluir que o problema tem solução se, e somente se, $\int_\Omega g(x)v = 0$, para toda função $v \in H^0$. Isso mostra que precisamos de mais condições para garantir solubilidade. Apresentamos abaixo uma delas.

Teorema 5.3 (Ahmad, Lazer e Paul [3]). *Suponha que* $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *satisfaz* (g_1) *e*

(g_2^-) $\int_\Omega G(x, v(x)) \to -\infty$ *quando* $\|v\| \to \infty$, $v \in H^0$.

Então o problema (5.2), com $\lambda = \lambda_j$*, possui pelo menos uma solução fraca.*

Demonstração. Vamos considerar somente o caso $j > 1$ (cf. Exercício 5.6) e mostrar que, nesse caso, o funcional associado ao problema (cf. (5.3) com $\lambda = \lambda_j$) satisfaz as condições geométricas do Teorema do Ponto de Sela.

Observe que, para todo $u \in H$, vale

$$\|u^-\|^2 \leq \lambda_{j-1} \int (u^-)^2, \qquad \lambda_{j+m} \int (u^+)^2 \leq \|u^+\|^2,$$

e considere $V = H^-$ e $W = H^0 \oplus H^+$.

Dado $u \in V$, podemos usar a primeira desigualdade acima e (5.4) para obter

$$I(u) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_{j-1}}\right)\|u\|^2 + c_1\|u\|.$$

Como $\lambda_{j-1} < \lambda_j$, concluímos que I é anti-coercivo em V.

Considere agora $u = u^0 + u^+ \in W$. Uma vez que $u^0 \in H^0$, temos que $\|u^0\|^2 = \lambda_j \int (u^0)^2$. Logo, usando a ortogonalidade das autofunções em H e $L^2(\Omega)$, e a desigualdade variacional do espaço H^+, obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u^0\|^2 - \frac{\lambda_j}{2}\int (u^0)^2 + \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{\lambda_j}{2}\int (u^+)^2 - \int G(x,u) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_{j+m}}\right)\|u^+\|^2 - \int \big(G(x,u^0+u^+) - G(x,u^0)\big) - \int G(x,u^0). \end{aligned}$$

Para cada $x \in \Omega$, podemos usar o Teorema do Valor Médio para $G(x,\cdot)$ e (5.4), para obter

$$\big|G(x,u^0(x)+u^+(x)) - G(x,u^0(x))\big| \leq \sup_{s\in\mathbb{R}} |g(x,s)||u^+(x)| \leq M|u^+(x)|,$$

e portanto

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_{j+m}}\right)\|u^+\|^2 - c_2\|u^+\| - \int G(x,u^0).$$

Como $\lambda_j < \lambda_{j+m}$, a expressão acima e (g_2^-) implicam que $I(u) \to \infty$, quando $\|u\|^2 = \|u^0\|^2 + \|u^+\|^2 \to \infty$, $u \in W$.

Resta somente verificar que o funcional satisfaz a condição de Palais-Smale. Seja então $(u_k) \subset H$ tal que $I(u_k) \to d \in \mathbb{R}$ e $I'(u_k) \to 0$. Como sempre, basta mostrar que (u_k) é limitada.

A ortogonalidade das autofunções, a limitação de g e o mesmo argumento da primeira parte da demonstração nos fornece

$$\begin{aligned} o_k(1)\|u_k^+\| &= I'(u_k)u_k^+ \\ &= \langle u_k, u_k^+\rangle - \lambda_j \int u_k u_k^+ - \int g(x,u_k)u_k^+ \\ &= \|u_k^+\|^2 - \lambda_j \int (u_k^+)^2 - \int g(x,u_k)u_k^+ \\ &\geq \left(1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_{j+m}}\right)\|u_k^+\|^2 - c_2\|u_k^+\|, \end{aligned}$$

em que $o_k(1)$ denota uma quantidade que vai para zero quando $k \to +\infty$. Como o termo entre parêntesis é positivo, concluímos que $(u_k^+) \subset H$ é limitada. Analogamente,

$$o_k(1)\|u_k^-\| \leq \left(1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_{j-1}}\right)\|u_k^-\|^2 + c_1\|u_k^-\|,$$

donde obtemos a limitação de $(u_k^-) \subset H$, visto que o termo entre parêntesis é agora negativo. Segue então que

$$\|u_k - u_k^0\| = \|u_k^+ + u_k^-\| \leq c_3, \tag{5.8}$$

para alguma constante $c_3 > 0$.

Usando a ortogonalidade das autofunções novamente obtemos

$$\langle u, u_0\rangle = \|u_0\|^2 = \lambda_j \int u_0^2 = \lambda_j \int u u^0,$$

para todo $u = u^- + u^0 + u^+ \in H$. Logo

$$\|u - u^0\|^2 - \lambda_j \int (u - u^0)^2 = \|u\|^2 - \lambda_j \int u^2,$$

e portanto

$$\begin{aligned} I(u_k) &= \frac{1}{2}\left(\|u_k - u_k^0\|^2 + \lambda_j \int (u_k - u_k^0)^2\right) \\ &\quad - \int \left(G(x,u_k) - G(x,u_k^0)\right) - \int G(x,u_k^0), \end{aligned}$$

Usando (5.8) e imersão $H \hookrightarrow L^2(\Omega)$, concluímos que o primeiro termo do lado direito da expressão acima é limitado. Além disso, a limitação de g, o Teorema do Valor Médio e (5.8) novamente implicam que

$$\left|\int \left(G(x,u_k) - G(x,u_k^0)\right)\right| \leq c_4.$$

Logo, como $I(u_k) \to d$, devemos ter

$$\left| \int G(x, u_k^0) \right| \leq c_5.$$

Essa limitação e (g_2^-) mostram que $(u_k^0) \subset H$ é também limitada.

As considerações acima mostram que a sequência de Palais-Smale é limitada, possuindo portanto subsequência convergente. Segue então do Teorema do Ponto de Sela que o funcional I possui um ponto crítico, que é uma solução fraca do problema (5.2). □

O teorema acima foi provado por Ahmad, Lazer e Paul [3] em 1976. Ele é uma extensão de um resultado anterior de Landesman e Lazer [27] (cf. Exercício 5.10). A demonstração apresentada acima é devida à Rabinowitz [39]. Existe uma vasta literatura sobre problemas resonantes. Destacamos aqui os artigos de Costa e Magalhães [18], Beresticky e deFigueiredo [8] e Bartolo, Benci e Fortunato [7].

5.3 Exercícios

Atenção: Nos exercícios abaixo, a menos que se diga o contrário, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe C^1.

5.1. Seja $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $y \in \mathbb{R}^N$ tal que $y \notin \varphi(\partial\Omega)$. Se $\varphi'(x) \neq 0$ para todo $x \in \varphi^{-1}(\{y\})$, então o conjunto $\varphi^{-1}(\{y\})$ é finito.

5.2. Mostre que o grau de Brouwer definido no início do capítulo satisfaz as propriedades (GR1)-(GR6) lá apresentadas.

Sugestão: para mostrar (GR5) note que a função $t \mapsto \deg(H(t, \cdot), \Omega, y)$ é contínua e toma valores em um conjunto discreto.

5.3. Mostre que a conclusão do Teorema 5.2 permanece válida se substituirmos (g_1) pela condição mais fraca

$(\widetilde{g}_1)$ existem c_1, $c_2 \geq 0$ e $1 \leq p < 2$, tais que

$$|g(x, s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1}, \quad \forall\, (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

5.4. Seja $\rho : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ contínua em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Mostre que uma condição necessária para que o problema $-\Delta u = \lambda_j u + \rho(x)$ tenha solução fraca em $H_0^1(\Omega)$ é que $\int_\Omega \rho(x)v = 0$, para toda $v \in \ker(\Delta + \lambda_j \mathrm{Id})$.

5.5. Descreva todos os autovalores do problema

$$-u'' = \lambda u \ \text{ em } (0,\pi), \qquad u(0) = u(\pi) = 0.$$

Em seguida, mostre que o problema resonante

$$u'' + u = \operatorname{sen} t \ \text{ em } (0,\pi), \qquad u(0) = u(\pi) = 0,$$

não possui solução e explique por que o Teorema 5.3 não pode ser usado nesse caso.

5.6. Use um argumento de minimização para mostra que, se $j = 1$, a conclusão do Teorema 5.3 permanece válida.

5.7. Mostre que a conclusão do Teorema 5.3 permanece válida se substituirmos (g_2^-) por

(g_2^+) $\int_\Omega G(x, v(x)) \to +\infty$ quando $\|v\| \to \infty$, $v \in \ker(\Delta + \lambda_j \mathrm{Id})$.

Sugestão: usando a mesma notação da prova do Teorema 5.3, mostre que o funcional é coercivo em H^+ e anti-coercivo em $H^- \oplus H^0$.

5.8. Mostre que a condição (g_2^+) acima é satisfeita se g verifica

$(\widetilde{g_2^+})$ $\lim\limits_{|s|\to+\infty} G(x,s) \to +\infty$ uniformente em Ω.

Sugestão: projete cada $v \in \ker(\Delta + \lambda_j \mathrm{Id}) \setminus \{0\}$ na esfera unitária e use o fato da dimensão desse espaço ser finita.

5.9. Suponha que g satisfaz (g_0), (g_1) e a condição de não-quadraticidade (veja [18])

(NQ) $\lim\limits_{|s|\to\infty} [f(x,s)s - 2F(x,s)] = +\infty$, uniformemente para $x \in \Omega$.

Mostre que o funcional I definido em (5.2) satisfaz a condição de Cerami, isto é, toda sequência $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$I(u_k) \to d, \qquad \|I'(u_k)\|(1 + \|u_k\|) \to 0,$$

possui uma subsequência convergente.

5.10 (Landesman e Lazer [27]). Considere o problema

$$-\Delta u = \lambda_1 u + g(u) - h(x), \quad x \in \Omega, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

onde $h \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma função crescente. Denotando $g_{\pm\infty} = \lim_{s \to \pm\infty} g(s)$, mostre que a condição

(LL) se $\varphi_1 > 0$ é uma λ_1-autofunção então

$$g_{-\infty} \int_\Omega \varphi_1 < \int h(x)\varphi_1 < g_\infty \int_\Omega \varphi_1,$$

é necessária para a existência de solução. Em seguida, mostre que ela também é uma condição suficiente.

CAPÍTULO 6

Teorema de Linking

O teorema abaixo foi provado por Rabinowitz [40] em 1978.

Teorema 6.1 (Teorema do Passo da Montanha Generalizado)**.** *Seja* $X = V \oplus W$ *um espaço de Banach com* $\dim V < \infty$*. Suponha que* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ *satisfaz*

$(\widehat{I_1})$ *existem* ρ, $\alpha > 0$ *tais que*

$$I|_{\partial B_\rho(0) \cap W} \geq \alpha;$$

(I_5) *existem* $e \in \partial B_1(0) \cap W$ *e* $R > \rho$ *tais que, se*

$$Q = (\overline{B_R(0)} \cap V) \oplus \{re \ : \ 0 < r < R\},$$

então

$$I|_{\partial Q} \leq 0,$$

onde ∂Q *indica a fronteira de* Q *relativa ao espaço* $V \oplus \mathbb{R}e$*.*

Seja

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \overline{Q}} I(\gamma(u))$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C(\overline{Q}, X) \ : \ \gamma(v) = v, \ \forall v \in \partial Q\}$*. Então* $c \geq \alpha$ *e, se* I *satisfaz* $(PS)_c$*, o nível* c *é um nível crítico de* I*.*

Demonstração. Vamos primeiro mostrar que $c \geq \alpha$. Como antes, precisamos da seguinte propriedade de intersecção: para cada $\gamma \in \Gamma$ fixado vale

$$\gamma(\overline{Q}) \cap (\partial B_\rho(0) \cap W) \neq \varnothing.$$

De fato, se isso for verdade, escolhemos $u_\gamma \in \overline{Q}$ tal que $\gamma(u_\gamma) \in \partial B_\rho(0) \cap W$ e usamos $(\widehat{I_1})$ para obter

$$\max_{u \in \overline{Q}} I(\gamma(u)) \geq I(\gamma(u_\gamma)) \geq \alpha.$$

Tomando o ínfimo para todas as funções em Γ concluímos que $c \geq \alpha$.

Seja então $\gamma \in \Gamma$ e denotemos por $P_V : X \to V$ a projeção sobre V. Observe que a propriedade de intersecção acima é equivalente a obter $u_\gamma \in Q$ tal que

$$P_V(\gamma(u_\gamma)) = 0, \quad \|(\mathrm{Id} - P_V)\gamma(u_\gamma)\|_X = \rho. \tag{6.1}$$

Vamos decompor cada $u \in \overline{Q}$ na forma $u = v + re \sim (v, r)$, com $v \in V$ e $r \in (0, R)$, e considerar a aplicação $\psi : V \times \mathbb{R} \to V \times \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(v, r) = \left(P_V(\gamma(v + re)), \|(\mathrm{Id} - P_V)(\gamma(v + re))\|_X\right).$$

Note que, se $u = v + re \in \partial Q$, então $\gamma(v + re) = v + re$. Logo,

$$\psi(v, r) = (P_V(v) + rP_V(e), \|v + re - P_V(v) - rP_V(e)\|_X) = (v, r),$$

onde usamos a linearidade da projeção, $P_V(v) = v$, $\|e\|_X = 1$ e $P_V(e) = 0$ (lembre que $e \in W$). Em particular, se $u \in \partial Q$, então $\psi(v, r) \neq (0, \rho)$, visto que $(0, \rho) \in Q$. Isso mostra que, se identificarmos $V \oplus \mathbb{R}$ com o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{\dim V + 1}$, o grau de $\deg(\psi, Q, (0, \rho))$ está bem definido. Como $\psi|_{\partial Q} \equiv \mathrm{Id}$, segue da propriedade (GR6) do grau que

$$\deg(\psi, Q, (0, \rho)) = \deg(\mathrm{Id}, Q, (0, \rho)) = 1.$$

Segue agora da proporiedade (GR2) do grau que existe $u_\gamma \in Q$ tal que $\psi(u_\gamma) = (0, \rho)$. Usando a definição de ψ, concluímos que u_γ satisfaz as equações em (6.1), e portanto $\gamma(\overline{Q}) \cap (\partial B_\rho(0) \cap W) \neq \varnothing$.

Uma vez provado que $c \geq \alpha$, a demonstração é inteiramente análoga àquela feita no Teorema do Ponto de Sela. De fato, suponha por contradição que c não é valor crítico de I. Aplicando o Lema de Deformação de Clark (cf. Exercício 3.20) com $0 < \varepsilon < \frac{\alpha}{2}$ pequeno, obtemos uma deformação $\eta : [0,1] \times X \to X$ contínua satisfazendo

(a) $\eta(1,u) = u$ sempre que $u \notin I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$;

(b) $\eta(1, I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}$.

Seja $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{u\in\overline{Q}} I(\gamma(u)) \leq c + \varepsilon,$$

e defina $\widetilde{\gamma} : \overline{Q} \to X$ por $\widetilde{\gamma}(u) = \eta(1, \gamma(u))$. Se mostrarmos que $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$ podemos usar $\gamma(\overline{Q}) \subset I^{c+\varepsilon}$ e (b) para concluir que, para todo $u \in \overline{Q}$, vale $\widetilde{\gamma}(u) = \eta(1, \gamma(u)) \in I^{c-\varepsilon}$. Desse modo

$$c \leq \max_{u\in\overline{Q}} I(\widetilde{\gamma}(u)) \leq c - \varepsilon,$$

o que é um absurdo.

Resta somente verificar que $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$. Claramente $\widetilde{\gamma} \in C(\overline{Q}, X)$. Se $u \in \partial Q$, então podemos usar (I_5), a escolha de ε e a desigualdade $c \geq \alpha$ para obter

$$I(u) \leq 0 < \alpha - 2\varepsilon \leq c - 2\varepsilon.$$

Segue portanto da propriedade (a) da deformação que

$$\widetilde{\gamma}(u) = \eta(1, \gamma(u)) = \eta(1, u) = u.$$

Logo $\widetilde{\gamma} \equiv \mathrm{Id}$ em ∂Q, donde se conclui que $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$. O teorema está provado. □

Observe que, se $V = \{0\}$, então $W = X$ e a condição $(\widehat{I_1})$ é exatamente a condição (I_1) do Teorema 4.1. Nessas condições, se $I(0) = 0$, o teorema acima nada mais é do que o Teorema do Passo da Montanha.

Uma maneira prática de verificar a condição (I_5) é a seguinte. Suponha que $I|_V \leq 0$ e exista $e \in \partial B_1(0) \cap W$, $\bar{R} > \rho$ tal que $I(u) \leq 0$ se $u \in V \oplus \mathbb{R}e$ e $\|u\|_X > \bar{R}$. Então o funcional I satisfaz (I_5) para algum $R > 0$ suficientemente grande (cf. Exercício 6.1).

6.1 Um problema superlinear

Como aplicação do Teorema de Linking vamos considerar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vamos assumir as mesmas hipóteses do Capítulo 4 (veja também Exercício 4.4), isto é,

(f_0) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(f_1) existem c_1, $c_2 \geq 0$ e $1 \leq p < 2^*$, tais que

$$|f(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1}, \quad \forall\,(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R};$$

(f_2) $\lim\limits_{s\to 0} \frac{f(x,s)}{s} = 0$, uniformemente para $x \in \Omega$;

(f_3) existe $\mu > 2$ tal que

$$0 < \mu F(x,s) \leq s f(x,s), \quad \forall\, s \neq 0,$$

em que $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\mathrm{d}t$.

O resultado abaixo estende o Teorema 4.2.

Teorema 6.2. *Suponha que f satisfaz $(f_0) - (f_3)$. Então o problema (6.2) possui pelo menos uma solução fraca $u \neq 0$.*

Demonstração. Vamos denotar por H o espaço $H_0^1(\Omega)$ munido da norma $\|\cdot\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}$ e considerar o funcional $I : H \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 - \int_\Omega F(x,u),$$

onde $F(x,s) = \int_0^t f(x,t)\mathrm{d}t$.

Observe inicialmente que, se $\lambda < \lambda_1$ então podemos definir em H a norma $\|u\|_\lambda = ((|\nabla u|^2 - \lambda u^2))^{1/2}$. Desse modo, a demonstração do teorema é semelhante àquela do Teorema 4.2. Logo, podemos supor que $\lambda \in [\lambda_j, \lambda_{j+1})$, onde $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ denota a sequência de autovalores do problema (PA). Considerando $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ as autofunções associadas aos autovalores, vamos definir

$$V = \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_j\}, \quad W = V^{\perp}.$$

Lembrando que $\|w\|^2 \geq \lambda_{j+1} \int_\Omega w^2$ para toda $w \in W$, usando $(f_0) - (f_2)$, a desigualdade de Poincaré, e procedendo como no Teorema 4.2, obtemos, para cada $\varepsilon > 0$,

$$I(w) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{j+1}} - \frac{\varepsilon}{\lambda_1}\right)\|w\|^2 - c_1\|w\|^p,$$

em que $c_1 = c_1(\varepsilon) > 0$. Escolhendo $\varepsilon > 0$ pequeno de modo que o termo entre parêntesis acima seja positivo, obtemos α, $\rho > 0$ tais que

$$I(w) \geq \alpha, \quad \forall\, w \in \partial B_\rho(0) \cap W.$$

Logo, I satisfaz a condição $(\widehat{I_1})$.

Para verificar (I_5) note, inicialmente, que se $v \in V$, então $\|v\|^2 \leq \lambda_j \int_\Omega v^2$. Como (f_3) implica que $F \geq 0$, obtemos

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right)\|v\|^2 - \int_\Omega F(x,v) \leq -\int_\Omega F(x,v) \leq 0.$$

Seja agora $e = \frac{\varphi_{j+1}}{\|\varphi_{j+1}\|} \in W$ uma autofunção normalizada em H e considere $u \in V \oplus \mathbb{R}e$. Usando (f_0) e (f_3), obtemos

$$F(x,s) \geq c_2|s|^\mu - c_3, \quad \forall\, (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{6.3}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que a constante μ dada em (f_3) satisfaz $2 < \mu < 2^*$. Logo, a expressão acima implica que

$$I(u) \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(x,u) \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - c_2|u|_\mu^\mu + c_3|\Omega|, \quad \forall\, u \in V \oplus \mathbb{R}e.$$

Como $\dim(V \oplus \mathbb{R}e) < \infty$, as normas $\|\cdot\|$ e $|\cdot|_\mu$ são equivalente nesse espaço. Segue então que

$$I(u) \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - c_2\|u\|^\mu + c_3|\Omega|,$$

o que mostra que $I(u) \to -\infty$, quando $\|u\| \to \infty$, $u \in V \oplus \mathbb{R}e$.

As considerações acima e a observação feita após a demonstração do Teorema 6.1 mostram que I satisfaz (I_5).

Resta somente verificarmos a condição de Palais-Smale. Para tanto, escolha $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $2 < \beta < \mu$ e note que

$$\begin{aligned} I(u) - \frac{1}{\beta} I'(u)u &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta}\right) \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta}\right) \int_\Omega u^2 + \int_\Omega \left(\frac{1}{\beta} f(x,u)u - F(x,u)\right) \\ &\geq \frac{\beta - 2}{2\beta} \|u\|^2 - \lambda \frac{\beta - 2}{2\beta} \int_\Omega u^2 + \frac{\mu - \beta}{\beta} \int_\Omega F(x,u), \end{aligned}$$

em que somamos e subtraímos $\frac{\mu}{\beta} \int_\Omega F(x,u)$ e usamos (f_3). Uma vez que $2 < \beta < \mu$, podemos definir $\beta_0 = (\beta - 2)/(2\beta) > 0$, $c_4 = c_2(\mu - \beta)/\beta$, $c_5 = c_3|\Omega|(\mu - \beta)/\beta$ e usar (6.3) para obter

$$I(u) - \frac{1}{\beta} I'(u)u \geq \beta_0 \|u\|^2 - \lambda \beta_0 |u|_2^2 + c_4 |u|_\mu^\mu - c_5.$$

Lembre agora que, se $a, b \geq 0$, $r > 1$ e $1/r + 1/r' = 1$, a desigualdade de Young nos assegura que

$$ab \leq \frac{a^r}{r} + \frac{b^{r'}}{r'}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, podemos usar a desigualdade acima com $(r\varepsilon)^{1/r} a$ no lugar de a, e $(r\varepsilon)^{-1/r} b$ no lugar de b, para obter

$$ab \leq \varepsilon a^r + C_\varepsilon b^{r'},$$

onde $C_\varepsilon = (\varepsilon r)^{-r'/r}/r'$. Usando essa desigualdade e lembrando que $L^\mu(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $\mu/2 > 1$, obtemos

$$|u|_2 \leq c_6 |u|_\mu \leq \varepsilon |u|_\mu^{\mu/2} + C_\varepsilon c_6^{(\mu/2)'}.$$

Segue então de (6.3) que

$$I(u) - \frac{1}{\beta} I'(u)u \geq \beta_0 \|u\|^2 + -\lambda \beta_0 \left(\varepsilon |u|_\mu^{\mu/2} + C_\varepsilon c_6^{(\mu/2)'}\right)^2 + c_4 |u|_\mu^\mu - c_5.$$

Lembrando agora que

$$\left(\varepsilon |u|_\mu^{\mu/2} + C_\varepsilon c_6^{(\mu/2)'}\right)^2 \leq 2\varepsilon^2 |u|_\mu^\mu + 2C_\varepsilon^2 c_6^{2(\mu/2)'},$$

concluímos finalmente que

$$I(u) - \frac{1}{\beta} I'(u)u \geq \beta_0 \|u\|^2 + \left(-2\lambda \beta_0 \varepsilon^2 + c_4\right) |u|_\mu^\mu + C_\varepsilon^2 c_8 - c_5.$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ de modo que o termo entre parêntesis acima seja positivo, obtemos

$$I(u) - \frac{1}{\beta} I'(u)u \geq \beta_0 \|u\|^2 - c_9.$$

Considerando agora $(u_k) \subset H$ tal que $I(u_k) \to d$ e $I'(u_k) \to 0$, podemos usar a expressão acima para obter

$$d + o(1) + o(1)\|u_k\| = I(u_k) - \frac{1}{\beta} I'(u_k)u_k \geq \beta_0 \|u_k\|^2 - c_9,$$

o que mostra que (u_k) é limitada em H. Logo vale Palais-Smale e podemos aplicar o Teorema 6.1 para obter um ponto crítico para I. $\square$

6.2 Exercícios

6.1. Mostre que a condição (I_5) do Teorema 6.1 é satisfeita se $I|_V \leq 0$ e existe $e \in \partial B_1(0) \cap W$, $\bar{R} > \rho$ tal que $I(u) \leq 0$ se $u \in V \oplus \mathbb{R}e$ e $\|u\|_X > \bar{R}$.

6.2. Mostre que a conclusão do Teorema 6.2 permanece válida se substituirmos (f_3) por

$(\widehat{f_3})$ existem $\mu > 2$ e $R > 0$ tais que

$$0 < \mu F(x,s) \leq s f(x,s), \quad \text{para todo } x \in \Omega, \ |s| > R$$

e, além disso, $F(x,s) \geq 0$ para todo $(x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$.

6.3. Sob as mesmas condições do exercício acima, mostre que não existe solução positiva para o problema (6.2) se $\lambda \geq \lambda_1$

CAPÍTULO 7

Funcionais com simetria

Estamos interessados em estudar como propriedades de simetria de um dado funcional afetam o seu número de pontos críticos. Por exemplo, se X é um espaço de Banach e o funcional $I : X \to \mathbb{R}$ é par, então os seus pontos críticos ocorrem sempre aos pares, visto que a derivada I' é ímpar e, portanto, se u é ponto crítico de I então o seu simétrico $-u$ também o é. Note que, nesse exemplo, o funcional I é invariante sob a ação do grupo $\mathbb{Z}_2 = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$, isto é,

$$I(gu) = I(u), \qquad \forall\, g \in \mathbb{Z}_2,\ u \in X.$$

7.1 Gênero e o Teorema de Ljusternik-Schnirelmann

No nosso primeiro resultado vamos mostrar que, sob certas condições no domínio do funcional, podemos obter mais pontos críticos. Mais especificamente, vamos demonstrar um resultado de Ljusternik e Schnirelmann [30] que data de 1934. Ele é um resultado pioneiro entre aqueles que fornecem resultado de multiplicidade de pontos críticos.

Teorema 7.1 (Ljusternik-Schnirelmann). *Se $I \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é par então a restrição de I à esfera unitária $\mathbb{S}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$ possui, pelo menos, N pares de pontos críticos.*

Para provar o teorema acima vamos usar um argumento semelhante àquele utilizado nos capítulos anteriores, além do conceito de *gênero* que, num certo sentido, mede o tamanho de conjuntos simétricos. A definição de de gênero que usaremos aqui é devida à Krasnoselski [26] (veja também os artigos [16, 17]).

Seja X um espaço de Banach. Um conjunto $A \subset X \setminus \{0\}$ é *simétrico com respeito à origem* (ou simplesmente simétrico) se $-x \in A$ sempre que $x \in A$. Denote por Σ a família de todos os conjuntos fechados simétricos $A \subset X \setminus \{0\}$. Definimos o *gênero* de um elemento $A \in \Sigma$ como sendo

$$\gamma(A) = \inf\{k \in \mathbb{N} \ : \ \text{existe } \varphi : A \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \text{ contínua e ímpar}\}.$$

Quando não existe $k \in \mathbb{N}$ como acima definimos $\gamma(A) = +\infty$. Definimos ainda $\gamma(\varnothing) = 0$.

Como exemplo, suponha que $A \subset X$ é tal que $A \cap (-A) = \varnothing$. Considere a aplicação $\varphi : A \cup (-A) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definida por $\varphi(x) = 1$ se $x \in A$, $\varphi(x) = -1$ se $x \in -A$. Como φ é ímpar e contínua concluímos que $\gamma(A \cup (-A)) = 1$.

Suponha agora que $A \subset \Sigma$ tem um número finito de elementos. Então podemos escrever A como sendo $A = B \cup (-B)$ de modo que $B \cap (-B) = \varnothing$. Em particular, $\gamma(A) = 1$. Isso mostra que todo conjunto com gênero maior do que um possui um número infinito de elementos.

Uma maneira de construir conjuntos com gênero maior do que 1 é observar que, se $A \in \Sigma$ é homeomorfo à $\mathbb{S}^k$, $k \geq 1$, por uma aplicação ímpar, então $\gamma(A) > 1$ (cf. Exercício 7.1).

Apresentamos abaixo as principais propriedades do gênero.

Proposição 7.2. *Para A, $B \in \Sigma$ valem as afirmações abaixo:*

(i) *se $x \neq 0$, então $\gamma(\{x, -x\}) = 1$;*

(ii) *se existe uma função ímpar $f \in C(A, B)$, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$;*

(iii) *se* $A \subset B$, *então* $\gamma(A) \leq \gamma(B)$;

(iv) $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$;

(v) *se* A *é compacto, então* $\gamma(A) < \infty$ *e existe* $\delta > 0$ *tal que o conjunto*

$$A_\delta = \{x \in X : dist(x, A) \leq \delta\}$$

satisfaz $A_\delta \in \Sigma$ *e* $\gamma(A) = \gamma(A_\delta)$.

Demonstração. O item (i) pode ser provado com um argumento semelhante ao exemplo dado após a definição do gênero. Para os itens (ii)-(iv), podemos supor que $\gamma(A)$, $\gamma(B) < \infty$, pois se não os resultados são imediatos. Vamos então verificar (ii). Suponha que $\gamma(B) = k$ e considere $\varphi : B \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ contínua e ímpar. A função $\varphi \circ f : A \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ é contínua e ímpar, de modo que $\gamma(A) \leq k$. O item (iii) segue de (ii) considerando $f = \mathrm{Id}$. Para provar (iv) vamos supor que $\gamma(A) = k$ e $\gamma(B) = j$ e considerar $\varphi : A \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ e $\psi : B \to \mathbb{R}^j \setminus \{0\}$ ímpares e contínuas. Usando o Teorema de Tietze (cf. [19]) obtemos funções $\widehat{\varphi} \in C(X, \mathbb{R}^k)$ e $\widehat{\psi} \in C(X, \mathbb{R}^j)$ tais que $\widehat{\varphi}|_A = \varphi$ e $\widehat{\psi}|_B = \psi$. Sem perda de generalidade podemos supor que as extensões são ímpares pois, se não for esse o caso, podemos tomar a parte ímpar da extensão (cf. Exercício 7.2). Defina agora $f : X \to \mathbb{R}^{k+j} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^j$ por

$$f(x) = (\widehat{\varphi}(x), \widehat{\psi}(x)).$$

Temos que $f \in C(A \cup B, \mathbb{R}^{k+j} \setminus \{0\})$ é ímpar, e portanto

$$\gamma(A \cup B) \leq k + j = \gamma(A) + \gamma(B).$$

Vamos verificar agora (v). Dado $A \subset \Sigma$ compacto defina, para cada $x \in A$, o conjunto

$$T_x = B_{r_x}(x) \cup B_{r_x}(-x),$$

onde $r_x = \frac{\|x\|_X}{2}$. As considerações feitas após a definição do gênero mostram que $\gamma(T_x) = 1$. Como os conjuntos T_x formam uma cobertura aberta do compacto A, temos que

$$A \subset T_{x_1} \cup \cdots \cup T_{x_j},$$

donde se conclui que

$$\gamma(A) \leq \sum_{i=1}^{j} \gamma(T_{x_i}) = j < \infty.$$

Suponha agora que $\gamma(A) = k$ e considere $\varphi : A \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ ímpar e contínua. Seja $\widehat{\varphi}$ a extensão de φ para todo o X. Como antes, podemos supor que $\widehat{\varphi}$ é ímpar. Como $\widehat{\varphi}$ é contínua e $\widehat{\varphi}(x) = \varphi(x) \neq 0$ para todo x no compacto A, existe $\delta > 0$ tal que $0 \notin \widehat{\varphi}(A_\delta)$. Logo $\widehat{\varphi} \in C(A_\delta, \mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ o que mostra que $\gamma(A_\delta) \leq k$. Como, por (iii), $k = \gamma(A) \leq \gamma(A_\delta)$, concluímos que $\gamma(A_\delta) = \gamma(A)$. A proposição está provada. $\square$

Uma observação simples, que será usada no futuro, é a seguinte: se $\gamma(B) < \infty$ então, como $A \subset \left(\overline{(A \setminus B)} \cup B\right)$, temos que $\gamma(A) \leq \gamma\left(\overline{(A \setminus B)} \cup B\right) \leq \gamma(\overline{A \setminus B}) + \gamma(B)$. Logo,

$$\gamma(\overline{A \setminus B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B). \tag{7.1}$$

No que segue apresentamos uma maneira de calcular o gênero para uma família especial de conjuntos. Em seguida, apresentamos um outro resultado que mostra como podemos usar propriedades de simetria, juntamente com o gênero, para obter resultados de intersecção.

Lema 7.3. *Seja $A \subset \Sigma$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ uma vizinhança limitada e simétrica da origem. Se existe um homeomorfismo ímpar $h : A \to \partial\Omega$ então $\gamma(A) = k$.*

Demonstração. Como $h \in C(A, \mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ é ímpar temos que $\gamma(A) \leq k$. Suponha, por contradição, que $\gamma(A) = j < k$. Então existe $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^j \setminus \{0\})$ ímpar. Logo, a aplicação $f = \varphi \circ h^{-1} \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^j \setminus \{0\})$ é ímpar. Segue do Teorema de Borsuk-Ulam que existe $x \in \partial\Omega$ tal que $f(x) = f(-x)$. Mas f é ímpar, e portanto

$$f(x) = f(-x) = -f(x),$$

o que mostra que $f(x) = 0$. Isso é um absurdo visto que f toma valores em $\mathbb{R}^j \setminus \{0\}$. $\square$

Lema 7.4. *Seja $W \subset X$ um subespaço de codimensão k e $A \subset \Sigma$ tal que $\gamma(A) > k$. Então $A \cap W \neq \varnothing$.*

Demonstração. Considere $X = V \oplus W$ com $\dim V = k$ e $P_V : X \to V$ a projeção sobre V, que é ímpar por ser linear. Suponha, por contradição, que $A \cap W = \varnothing$. Então $P(A) \subset V \setminus \{0\}$. Logo $P \in C(A, V \setminus \{0\})$ é ímpar e segue do item (ii) da Proposição 7.2 que $\gamma(A) \leq \gamma(P(A))$. Considere π a projeção radial de $P(A)$ sobre $\partial B_1(0) \cap V$, isto é, $\pi(x) = \frac{x}{\|x\|_X}$ para todo $x \in P(A)$. Naturalmente π é contínua e ímpar. Desse modo, $\gamma(P(A)) \leq \gamma(\partial B_1(0) \cap V)$. Segue então do último lema que

$$\gamma(A) \leq \gamma(P(A)) \leq \gamma(\partial B_1(0) \cap V) = k,$$

o que é um absurdo. $\square$

Antes de provar o Teorema de Ljusternik-Schnirelmann vamos precisar de uma versão do lema de deformação para funcionais definidos em subvariedades de um espaço de Banach.

Lema 7.5. *Seja X um espaço de Banach e $M \subset X$ uma C^1-variedade de Banach. Suponha que $I \in C^1(M, \mathbb{R})$ satisfaça Palais-Smale e considere $c \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{O} \subset M$ uma vizinhança de $K_c = \{u \in M : I(u) = c,\ I'(u) = 0\}$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ pequeno, existe $\eta \in C([0,1] \times M, M)$ tal que, para todo $u \in M$ e $t \in [0,1]$, valem*

(i) *$\eta(0, u) = u$;*

(ii) *$\eta(t, u) = u$, se $u \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$;*

(iii) *$\eta(1, I^{c+\varepsilon} \setminus \mathcal{O}) \subset I^{c-\varepsilon}$;*

(iv) *se I é par, então $\eta(t, \cdot)$ é ímpar.*

A prova do lema acima pode ser encontrada em [42]. Na verdade, ela é análoga àquela que fizemos no Capítulo 3. A diferença principal é que, para o resultado acima, precisamos resolver uma EDO não mais em um espaço de Banach, mas em uma variedade de $M \subset X$. A existência de campo pseudo-gradiente para o funcional I sobre M é análoga à anterior. Além disso, como I é par, o campo pseudo-gradiente pode ser construído de modo a que seja ímpar, e portanto podemos provar (iv). Observe agora que, se $\delta > 0$ é pequeno de modo que $(K_c)_\delta \subset \mathcal{O}$ então, como I

satisfaz (PS), existe $\alpha > 0$ e $\widehat{\varepsilon} > 0$ tais que

$$\|I'(u)\| \geq \alpha > 0, \quad \forall\, u \in I^{c+\widehat{\varepsilon}} \setminus \left(I^{c-\widehat{\varepsilon}} \cup (K_c)_\delta\right).$$

Logo, o mesmo argumento do Capítulo 3 mostra o item (iii).

Estamos prontos para provar o Teorema de Ljusternik-Schnirelmann.

Demonstração do Teorema 7.1. Para cada $1 \leq j \leq N$, defina

$$\Gamma_j = \{A \in \Sigma \,:\, A \subset \mathbb{S}^{N-1},\, \gamma(A) \geq j\}$$

em que Σ é a família dos conjuntos $A \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ fechados e simétrico, e γ é o gênero. Os conjuntos Γ_j's tem as seguintes propriedades:

a) $\Gamma_j \neq \varnothing$ para todo $1 \leq j \leq N$;

b) $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \cdots \supset \Gamma_N$;

c) se $\varphi \in C(\mathbb{S}^{N-1}, \mathbb{S}^{N-1})$ é ímpar e $A \in \Gamma_j$, então $\varphi(A) \in \Gamma_j$;

d) se $A \in \Gamma_j$ e $B \in \Sigma$ com $\gamma(B) \leq k < j$, então $\overline{A \setminus B} \in \Gamma_{j-k}$.

De fato, como $\gamma(\mathbb{S}^{N-1}) = N$, o item (a) segue do Lema 7.3. A propriedade (b) é trivial e (c) segue do item (ii) da Proposição 7.2, pois $\varphi \in C(A, \varphi(A))$, donde

$$j \leq \gamma(A) \leq \gamma(\varphi(A)),$$

o que mostra que $\varphi(A) \in \Gamma_j$. Finalmente, a propriedade (d) segue de (7.1), pois

$$\gamma(\overline{A \setminus B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B) \geq j - k.$$

Para cada $1 \leq j \leq N$, definimos os seguintes níveis minimax

$$c_j = \inf_{A \in \Gamma_j} \sup_{u \in A} I(u).$$

Note inicialmente que, pela propriedade (b) acima, temos que

$$c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_N.$$

Como alguns dos níveis minimax podem coincidir, não basta mostrarmos que cada c_j é um nível crítico. No entanto, lembrando que se $\gamma(A) > 1$ para algum $A \in \Sigma$, então A tem que ser um conjunto infinito e que $\gamma(\varnothing) = 0$, é suficiente mostrar a seguinte

Afirmação: se $c_j = c_{j+1} = \cdots = c_{j+k} = c$, então $\gamma(K_c) \geq k+1$.

Para provar a afirmação acima suponha, por contradição, que $\gamma(K_c) \leq k$. Como K_c é compacto, o item (v) da Proposição 7.2 nos fornece $\delta > 0$ tal que $\gamma((K_c)_\delta) = \gamma(K_c) \leq k$. Considerando $\widetilde{K} = (K_c)_\delta \cap \mathbb{S}^{N-1}$, segue do item (iii) da Proposição 7.2 que $\gamma(\widetilde{K}) \leq k$. Aplicando o lema de deformação com $\mathcal{O}$ sendo o interior (na esfera) de $\widetilde{K}$, obtemos $\varepsilon > 0$ pequeno e $\eta \in C([0,1] \times \mathbb{S}^{N-1}, \mathbb{S}^{N-1})$ tal que $\eta(t,\cdot)$ é ímpar e satisfaz $\eta(1, I^{c+\varepsilon} \setminus \mathcal{O}) \subset I^{c-\varepsilon}$. Desse modo

$$\eta(1, I^{c+\varepsilon} \setminus \widetilde{K}) \subset I^{c-\varepsilon}.$$

Escolha agora $A \in \Gamma_{j+k}$ tal que

$$\sup_{u \in A} I(u) \leq c + \varepsilon.$$

Como $\gamma(\widetilde{K}) \leq k$, segue da propriedade (d) acima que $\overline{A \setminus \widetilde{K}} \in \Gamma_j$. Uma vez que $\eta(1,\cdot)$ é ímpar, o item (ii) da Proposição 7.2 implica que $\eta(1, \overline{A \setminus \widetilde{K}}) \in \Gamma_j$. Segue então que

$$\sup_{u \in \eta(1, \overline{A \setminus \widetilde{K}})} I(u) \leq c - \varepsilon.$$

Lembrando que $\eta(1, \overline{A \setminus \widetilde{K}}) \in \Gamma_j$ obtemos

$$c = c_j = \inf_{B \in \Gamma_j} \sup_{u \in B} I(u) \leq \sup_{u \in \eta(1, \overline{A \setminus \widetilde{K}})} I(u) \leq c - \varepsilon,$$

o que é absurdo. Logo $\gamma(K_c) \geq k+1$ e o teorema está provado. □

Um dos fatos importantes na prova acima foi o fato do conjunto K_c ser compacto. Se X é um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz $(\mathrm{PS})_c$, sabemos que o conjunto K_c é compacto. Logo, uma adaptação simples da prova acima nos fornece a seguinte versão do Teorema de Ljusternik-Schnirelmann em dimensão infinita, cuja demonstração deixamos para o leitor (cf. Exercício 7.5).

Teorema 7.6. *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional par. Suponha que $I|_{\partial B_r(0)}$ satisfaz (PS) e é limitado inferiormente. Então $I|_{\partial B_r(0)}$ possui infinitos pares de pontos críticos.*

Apresentamos ainda um outro resultado de multiplicidade que pode ser provado com as mesmas ideias acima.

Teorema 7.7. *Seja X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional par que satisfaz (PS) e é limitado inferiormente. Suponha ainda que $I(0) = 0$, existe um conjunto $K \subset X$ homeomorfo à esfera S^{j-1} por uma aplicação ímpar e $\sup_K I < 0$. Então I possui j pares de pontos críticos.*

Demonstração. (ideia) A prova segue as mesmas linhas daquela do Teorema 7.1. Seja

$$\Gamma_k = \{A \in \Sigma : \gamma(A) \geq k\}$$

e defina

$$c_k = \inf_{A \in \Gamma_k} \sup_{u \in A} I(u), \quad 1 \leq k \leq j.$$

Os conjuntos Γ_k satisfazem as propriedades (a)-(d) da prova do Teorema 7.1 com $\mathcal{S}^{N-1}$ trocado por X. Assim, $c_1 \leq c_2 \leq \leq c_j$. Além disso, $c_1 > -\infty$ porque I é limitado inferiormente e $c_j < 0$ pois $\gamma(K) = j$ e $\sup_K I < 0$. Para concluir a demonstração basta a compacidade de K_{c_i} para provar que, se $c_k = \cdots = c_{k+p} = c$, então $\gamma(K_c) \geq p+1$. Os detalhes de toda a demonstração são deixados para o leitor (cf. Exercício 7.6). □

Como aplicação do resultado acima vamos considerar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(u - f(x, u)), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um dómínio limitado e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz

$(\widehat{f_0})$ f é localmente Lipchitziana em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$;

(f_2) $\lim\limits_{s \to 0} \frac{f(x,s)}{s} = 0$, uniformemente para $x \in \Omega$;

(f_5) existe $r > 0$ tal que $r - f(x,r) \leq 0$, para $x \in \Omega$;

(f_6) $f(x,\cdot)$ é ímpar para todo $x \in \Omega$.

Vale o seguinte resultado:

Teorema 7.8. *Suponha que f satisfaz $(\widehat{f_0})$, (f_2), (f_5) e (f_6). Se $\lambda > \lambda_k$, o k-ésimo autovalor de $\sigma(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, então o problema* (7.2) *possui pelo menos k pares de soluções não triviais.*

Demonstração. (ideia) O primeiro passo é proceder como na prova do Teorema 4.3. Definimos então

$$\bar{f}(s) := \begin{cases} s - f(x,s), & \text{se } s \in [0,r], \\ \bar{f}(x,r), & \text{se } s \geq r, \\ -\bar{f}(x,s), & \text{se } s \leq 0. \end{cases}$$

e consideramos o problema modificado

$$-\Delta u = \lambda \bar{f}(x,u), \text{ em } \Omega, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

Argumentando como na prova do Teorema 4.3 concluímos que as soluções do problema acima são, de fato, soluções do problema (7.2). Seja I o funcional associado ao problema modificado. As hipóteses do Teorema 7.7, a menos da existência do conjunto K, são facilmente verificáveis. Para mostrar a existência do conjunto K denote por $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ as autofunções associadas aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ normalizadas de modo que

$$\|\varphi_i\| = 1 = \lambda_i \int_\Omega \varphi_i^2 dx, \qquad 1 \leq i \leq k,$$

e defina

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi_i : \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 = r^2 \right\}.$$

Esse conjunto é claramente homeomorfo à esfera S^{k-1} por uma aplicação ímpar e, usando (f_2), podemos verificar que $\sup_K I < 0$ desde que $r > 0$ seja suficientemente pequeno. Os detalhes de toda a prova acima são deixados para o leitor (cf. Exercício 7.7). $\square$

O conceito de gênero usado acima é um caso particular do conceito de índice, que descrevemos a seguir.

Seja X um espaço de Banach, $M \subset X$ uma C^1-variedade e G um grupo compacto que age sobre M. Considere conjunto

$$\Sigma = \{A \subset M \,:\, A \text{ é fechado e } G\text{-invariante}\}.$$

Seja ainda

$$\Gamma = \{h \in C(M, M) \,:\, h \circ g = g \circ h, \forall\, g \in G\}$$

a classe das aplicações G-equivariantes. Finalmente, se $G \neq \{\mathrm{Id}\}$, defina

$$\operatorname{Fix} G = \{x \in M \,:\, gx = x, \forall\, g \in G\}.$$

Um *índice para* (G, Σ, Γ) é uma função

$$i : \Sigma \to \mathbb{N} \cup \{0, +\infty\}$$

tal que, para quaisquer A, $B \in \Sigma$, valem

(IND1) se $x \neq \operatorname{Fix} G$, então $i\left(\bigcup_{g \in G} gx\right) = 1$;

(IND2) $i(A) \leq i(\overline{h(A)})$;

(IND3) se $A \subset B$, então $i(A) \leq i(B)$;

(IND4) $i(A \cup B) \leq i(A) + i(B)$;

(IND5) se A é compacto e $A \cap \operatorname{Fix} G = \varnothing$, então $i(A) < \infty$ e existe uma vizinhança G-invariante N de A tal que $i(\overline{N}) = i(A)$.

O mesmo argumento usado na prova do Teorema de Ljusternik-Schnirelmann nos fornece o seguinte resultado.

Teorema 7.9. *Seja X um espaço de Banach e $M \subset X$ uma C^1-variedade. Suponha que $I \in C^1(M, \mathbb{R})$ é limitado inferiormente e satisfaz (PS). Suponha que G seja um grupo compacto agindo sobre M sem pontos fixos, seja Σ a classe de conjunto* *fechados e G-invariantes de M e Γ o grupo dos homeomorfismo G-equivariantes de M . Suponha ainda que i seja um índice para (G, Σ, Γ) e considere*

$$\alpha(M) = \sup\{i(K) \,:\, K \subset M \text{ é compacto e } G-\text{invariante}\}.$$

Então I tem pelos $\alpha(M)$ pontos críticos distintos módulo G.

O teorema acima mostra a importância de se construir índices. O exemplo mais simples de índice é o gênero de Krasnoselski γ, onde tomamos $G = \mathbb{Z}_2$. Apresentamos a seguir um segundo exemplo.

Considere M um espaço topológico e $A \subset M$ um conjunto fechado. Dizemos que A é contrátil em M se existe uma aplicação contínua $H : [0,1] \times A \to M$ tal que $H(0,\cdot) = \mathrm{Id}$ e $H(1,x) = x_A$ para todo $x \in A$ e algum $x_A \in M$. Definimos a *categoria de Ljusternik-Schnirelmann de A em M* como sendo

$$\mathrm{cat}_M A = \inf\left\{k \in \mathbb{N} \,:\, A \subset \bigcup_{j=1}^{k} A_j,\ A_j \text{ é fechado e contrátil em } M\right\}.$$

Se nenhuma cobertura como acima existir dizemos que $\mathrm{cat}_M A = +\infty$. Finalmente, definimos $\mathrm{cat}_M \varnothing = 0$.

Pode-se mostrar (cf. Exercício 7.10) que cat_M é um índice para (G, Σ, Γ), onde

$$G = \{\mathrm{Id}\}, \qquad \Sigma = \{A \subset M \,:\, A \text{ é fechado}\},$$

e

$$\Gamma = \{h \in C(M,M) \,:\, h \text{ é um homeomorfismo}\}.$$

O conceito acima foi introduzido por Ljusternik-Schnirelmann [30] em 1934 e foi o primeiro índice a aparecer na literatura. De uma maneira geral, não é fácil calcular a categoria de um conjunto. Um exemplo bem ilustrativo e simples é o caso da esfera. Tomando o complementar de vizinhanças abertas dos pólos norte e sul verifica-se facilmente que $\mathrm{cat}_{\mathbb{S}^k}\mathbb{S}^k = 2$, sempre que $k \in \mathbb{N}$. Como a bola é contrátil, temos que $\mathrm{cat}_{B_1(0)} B_1(0) = 1$. Considerando $\mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ um k-toro, pode-se mostrar (cf. [30]) que

$$\mathrm{cat}_{\mathbb{T}^k}\mathbb{T}^k = k + 1.$$

Em particular, se $I \in C^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$, então I tem, além dos pontos de mínimo e máximo, um terceiro ponto crítico.

O resultado abaixo, provado por Rabinowitz (cf. [42, Teorema 3.7]), estabelece uma interessante relação entre a categoria e o gênero.

Proposição 7.10. *Seja $A \subset \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ um conjunto compacto e simétrico. Se $\widehat{A} = A/\mathbb{Z}_2$, então*

$$\gamma(A) = \operatorname{cat}_{(\mathbb{R}^k \setminus \{0\})/\mathbb{Z}_2} \widehat{A}.$$

Maiores detalhes sobre a categoria de Ljusternik-Schnirelmann e resultado que envolvem simetria podem ser encontrados no livro [5].

7.2 Infinitas soluções para um problema de autovalor não linear

Nessa seção vamos estudar o problema de autovalor não linear

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz

(f_0) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(f_1) existem c_1, $c_2 \geq 0$ e $1 \leq p < 2^*$, tais que

$$|f(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1}, \quad \forall\, (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R};$$

(f_6) $f(x,\cdot)$ é ímpar para todo $x \in \Omega$;

(f_7) $sf(x,s) > 0$, para todo $x \in \Omega$ e $s > 0$.

Por solução entendemos um par $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ que satisfaz a equação acima no sentido fraco, isto é,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \lambda \int_\Omega f(x,u)\varphi, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Denotando por H o espaço $H_0^1(\Omega)$ munido da norma $\|u\| = (\int_\Omega |\nabla u|^2)^{1/2}$, vamos considerar os funcionais I, $J : H \to \mathbb{R}$ definidos por

$$I(u) = -\int_\Omega F(x,u), \qquad J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2,$$

em que $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$. Ambos são de classe C^1 em H. Ademais, para cada $r > 0$, temos que $\partial B_r(0) = J^{-1}(\{\sqrt{2r}\})$ é uma variadade de classe C^1.

Daqui por diante vamos denotar $\widetilde{I}$ a restrição de I ao conjunto $\partial B_r(0)$. Note que, se $u \in \partial B_r(0)$ é um ponto crítico de $\widetilde{I}$, então podemos usar o Teorema do Multiplicador de Lagrange para obter $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$I'(u)\varphi = \mu J'(u)\varphi, \quad \forall\, \varphi \in H.$$

Escolhendo $\varphi = u$ e usando $(f_6) - (f_7)$, obtemos

$$\mu r = -\int_\Omega f(x,u)u < 0,$$

e portanto $\mu \neq 0$. Assim,

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla\varphi) + \frac{1}{\mu}\int_\Omega f(x,u)\varphi, \quad \forall\, \varphi \in H,$$

e portanto o par $(-\mu^{-1}, u)$ é uma solução de (7.3).

No que segue vamos obter pontos críticos para o funcional $\widetilde{I}$. Note inicialmente que $(f_0) - (f_1)$ implicam que

$$|\widetilde{I}(u)| \leq c_1\|u\| + c_2\|u\|^p \leq c_3, \quad \forall u \in \partial B_r(0),$$

e portanto $\widetilde{I}$ é limitado inferiormente.

Para verificar a condição de Palais-Smale considere $(u_k) \subset \partial B_r(0)$ tal que

$$\widetilde{I}(u_k) = I(u_k) \to c \neq 0, \qquad \widetilde{I}'(u_k) = I'(u_k) - b_k u_k \to 0.$$

Como (u_k) é limitada podemos supor que, a menos de subsequência, $u_k \hookrightarrow u$ fracamente em H. As condições $(f_0) - (f_1)$ implicam que I' é compacto e portanto podemos também supor que $I'(u_k) \to I'(u)$. Além disso, a convergência fraca de

(u_k), as imersões compactas de H em $L^2(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$ e o Teorema da Convergência Dominada implicam que

$$I(u_k) \to I(u) = c \neq 0,$$

o que mostra que $u \neq 0$. O mesmo argumento, juntamente com $\widetilde{I}'(u_k)u_k \to 0$, nos fornece

$$\lim_{k\to+\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} I'(u_k)u_k = \lim_{k\to+\infty} -\int_\Omega f(x,u_k)u_k = -\int_\Omega f(x,u)u = b < 0,$$

em que usamos (f_7) na última deisgualdade. Assim, $b_k \to b \neq 0$ e portanto

$$u_k = \frac{1}{b_k}\Big(I'(u_k) - \widetilde{I}'(u_k)\Big) \to \frac{1}{b} I'(u).$$

As considerações acima mostra que $\widetilde{I}$ satisfaz $(PS)_c$ para todo $c \neq 0$. Podemos então definir, para $j \in \mathbb{N}$,

$$c_j = \inf_{A\in\Gamma_j} \sup_{u\in A} \widetilde{I}(u),$$

em que $\Gamma_j = \{A \in H \cap \partial B_r(0) : A \text{ é fechado}, A = -A, \gamma(A) \geq j\}$. Como $c_j < 0$, a condição de Palais-Smale local provada acima mostra que o conjunto K_{c_j} é compacto. Assim, podemos seguir o mesmo argumento da prova do Teorema 7.1 (que é na verdade a prova do Teorema 7.6) para obter o seguinte resultado de multiplicidade.

Teorema 7.11. *Suponha que f satisfaz (f_0), (f_1), (f_6) e (f_7). Dado $r > 0$, o problema (7.9) possui uma sequência de soluções $(-b_k, u_k) \subset \mathbb{R} \times H$, em que $b_k = \frac{1}{I'(u_k)u_k}$.*

7.3 Teorema do Passo da Montanha com simetria

O teorema principal dessa seção é o seguinte resultado de multiplicidade de pontos críticos provado por Ambrosetti e Rabinowitz [4].

Teorema 7.12 (Teorema do Passo da Montanha com Simetria)**.** *Seja $X = V \oplus W$ um espaço de Banach tal que* $\dim X = \infty$ *e* $\dim V < \infty$*. Seja $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional par satisfazendo (PS), $I(0) = 0$ e*

$(\widehat{I}_1)$ *existem* ρ, $\alpha > 0$ *tais que*

$$I|_{\partial B_\rho(0)\cap W} \geq \alpha;$$

$(\widehat{I}_2)$ *para cada subespaço* $\widehat{X} \subset X$ *de dimensão finita existe* $R = R(\widehat{X})$ *tal que*

$$I|_{\widehat{X}\setminus B_R(0)} \leq 0.$$

Então I *tem uma sequência ilimitada de valores críticos.*

A demonstração do teorema acima é bem mais complexa do que a dos resultados anteriores. Ela será feita em uma série de passos, que consistem basicamente no seguinte: vamos introduzir uma família apropriada de conjuntos e, com base nela, definir os valores minimax. Usando o lema de deformação vamos mostrar que os níveis minimax são níveis críticos do funcional. Em seguida, novamente por um processo indireto via lema de deformação, vamos mostrar que os nível críticos formam uma sequência ilimitada.

Observe que, nos resultados da seção anterior, na hora de definir os níveis minimax utilizamos conjuntos do tipo $\Gamma_j = \{A \in \Sigma \,:\, \gamma(A) \geq j\}$. Conforme veremos na próxima seção, o teorema acima se aplica para o funcional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p,$$

em que $2 < p < 2^*$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado. De acordo com o Exercício 7.8, para esse funcional I, temos que

$$\inf_{A\in\Gamma_j}\sup_{u\in A} I(u) = -\infty,$$

o que mostra que uma nova família de conjuntos deve ser definida para provar o Teorema 7.12. Nosso primeiro passo é introduzir essa nova família.

Seja $k = \dim V < \infty$ e $\{e_1, \ldots, e_k\}$ uma base de V constituída de vetores unitários. Para cada $m \geq k$ escolhemos $e_{m+1} \notin \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_m\} = X_m$ e definimos $D_m = B_{R_m}(0) \cap X_m$, em que $R_m = R_m(X_m)$ é dado pela hipótese $(\widehat{I}_2)$. Seja agora

$$G_m = \{h \in C(D_m, X) \,:\, h \text{ é ímpar e } h(u) = u,\ \forall\, u \in \partial B_{R_m}(0) \cap X_m\}.$$

Note que $\mathrm{Id} \in G_m$ para todo $m \geq k$, de modo que $G_m \neq \varnothing$. Defina, para $j \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma_j = \{h(\overline{D_m \setminus Y}) : h \in G_m,\, m \geq j,\, Y \in \Sigma,\, \gamma(Y) \leq m - j\}.$$

A família definida acima satisfaz propriedades análogas àquelas da definida na prova do Teorema 7.1, conforme o resultado abaixo.

Proposição 7.13. *A família $\{\Gamma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ definida acima satisfaz as seguintes propriedades*

a) $\Gamma_j \neq \varnothing$*;*

b) $\Gamma_{j+1} \subset \Gamma_j$*;*

c) *se $\varphi \in C(X, X)$ é ímpar e φ restrita a $\partial B_{R_m}(0) \cap X_m$ é a identidade para todo $m \geq j$, então $\varphi(\Gamma_j) \subset \Gamma_j$;*

d) *se $A \in \Gamma_j$ e $B \in \Sigma$ é tal que $\gamma(B) \leq s < j$, então $\overline{A \setminus B} \in \Gamma_{j-s}$.*

Demonstração. A propriedade (a) segue do fato de $\mathrm{Id} \in G_m$ para todo $m \geq k$. Se $A = h(\overline{D_m \setminus Y}) \in \Gamma_{j+1}$, então $m \geq j+1 \geq j$, $h \in G_m$, $Y \in \Sigma$ e $\gamma(Y) \leq m-(j+1) \leq m - j$. Logo, $A \in \Gamma_j$. Para verificar (c), seja $A = h(\overline{D_m \setminus Y}) \in \Gamma_j$ e φ como no enunciado de (c). Observe que $\varphi \circ h \in C(D_m, X)$ é ímpar e sua restrição ao conjunto $\partial B_{R_m}(0) \cap X_m$ é a identidade para todo $m \geq j$. Desse modo $\varphi \circ h \in G_m$. Além disso

$$(\varphi \circ h)(\overline{D_m \setminus Y}) = \varphi(h(\overline{D_m \setminus Y})) = \varphi(A),$$

e portanto $\varphi(A) \in \Gamma_j$. Vamos verificar agora a propriedade (d). Seja $A = h(\overline{D_m \setminus Y}) \in \Gamma_j$ e $B \in \Sigma$ tal que $\gamma(B) \leq s < j$. É suficiente mostrar que

$$\overline{A \setminus B} = h(\overline{D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(B))}). \tag{7.4}$$

De fato, supondo que a igualdade acima é verdadeira, procedemos como segue. Como $h(0) = 0 \notin B$, o conjunto fechado e simétrico $h^{-1}(B)$ não contém o 0. Logo, $Y \cup h^{-1}(B) \in \Sigma$ e podemos usar os itens (iv) e (ii) da Proposição 7.2 para obter

$$\gamma(Y \cup h^{-1}(B)) \leq \gamma(Y) + \gamma(h^{-1}(B)) \leq \gamma(Y) + \gamma(B) \leq m - j + s = m - (j - s).$$

Logo, $\overline{A \setminus B} \in \Gamma_{j-s}$.

Vamos então mostrar que vale a igualdade em (7.4). Observe inicialmente que, se $a \in h(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(B)))$ então

$$a \in (h(D_m \setminus Y) \setminus B) \subset (A \setminus B) \subset (\overline{A \setminus B}),$$

donde se conclui que

$$h(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(B))) \subset \overline{A \setminus B}.$$

Como h é contínua temos que $h(\overline{C}) \subset \overline{h(C)}$ para todo conjunto $C \subset D_m$. Desse modo, tomando o fecho na expressão acima obtemos

$$h(\overline{D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(B))}) \subset \overline{h(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(B)))} \subset \overline{A \setminus B}. \tag{7.5}$$

Por outro lado, se $a \in A \setminus B$, então $a = h(w) \notin B$, com $w \in \overline{D_m \setminus Y}$. Logo, como h é contínua,

$$w \in (\overline{D_m \setminus Y} \setminus h^{-1}(B)) \subset \overline{D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(B))},$$

e portanto

$$A \setminus B \subset h(\overline{D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(B))}).$$

Como $\overline{D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(B))}$ é compacto e a função contínua h leva compacto em compacto, o conjunto $h(\overline{D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(B))})$ é fechado. Segue então da inclusão acima que

$$\overline{A \setminus B} \subset h(\overline{D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(B))}).$$

Isso e (7.5) implicam na veracidade de (7.4). $\square$

A demonstração agora segue as mesmas linhas do Teorema 7.1. Para cada $j \in \mathbb{N}$, definimos o seguinte minimax

$$c_j = \inf_{A \in \Gamma_j} \sup_{u \in A} I(u).$$

Vamos mostrar que, se $j > k = \dim V$, então o nível c_j é um nível crítico de I. O primeiro passo é obter uma estimativa inferior para os valores minimax. Para tanto, vamos usar o seguinte resultado de intersecção.

Proposição 7.14. *Se $j > k$ e $A \in \Gamma_j$, então*

$$A \cap \partial B_\rho(0) \cap W \neq \varnothing. \tag{7.6}$$

Em particular, se $j > k$, $c_j \geq \alpha$.

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente como a primeira assertiva acima implica que $c_j \geq \alpha$. Dado $j > k$ e $A \in \Gamma_j$, segue de (7.6) e $(\widehat{I_1})$ que

$$\sup_{u \in A} I(u) \geq \inf_{u \in \partial B_\rho(0) \cap W} I(u) \geq \alpha.$$

É suficiente agora tomar o ínfimo para $A \in \Gamma_j$.

A primeira parte da proposição pode ser provada como segue. Seja $j > k$ e $A = h(\overline{D_m \setminus Y})$ com $m \geq j$ e $Y \in \Sigma$ tal que $\gamma(Y) \leq m - j$. Defina $\widetilde{\mathcal{O}} = \{u \in D_m \,:\, h(u) \in B_\rho(0)\}$ e note que, como h é ímpar, $0 \in \widetilde{\mathcal{O}}$. Seja $\mathcal{O}$ a componente de $\widetilde{\mathcal{O}}$ que contém 0, de modo que $\mathcal{O}$ é uma vizinhança limitada e simétrica da origem em X_m. Segue do Lema 7.3 que $\gamma(\partial\mathcal{O}) = m$. Afirmamos que

$$h(\partial\mathcal{O}) \subset \partial B_\rho(0).$$

Assumindo a inclusão acima vamos considerar

$$E = \{u \in D_m \,:\, h(u) \in \partial B_\rho(0)\}.$$

Então $\partial\mathcal{O} \subset E$ e, portanto, $m = \gamma(\partial\mathcal{O}) \leq \gamma(E)$. Assim,

$$\gamma(\overline{E \setminus Y}) \geq \gamma(E) - \gamma(Y) \geq m - (m - j) = j > k.$$

Segue do item (ii) da Proposição 7.2 que $\gamma(h(\overline{E \setminus Y})) > k$. Lembrando que codim $W = \dim V = k$, podemos usar o Lema 7.4 para concluir que $h(\overline{E \setminus Y}) \cap W \neq \varnothing$. Mas $h(\overline{E \setminus Y}) \subset (A \cap \partial B_\rho(0))$, donde se conclui que $A \cap \partial B_\rho(0) \cap W \neq \varnothing$, como havíamos afirmado.

Resta verificar que $h(\partial\mathcal{O}) \subset \partial B_\rho(0)$. Para tanto, note inicialmente que a escolha de R_m em $(\widehat{I_2})$ nos fornece

$$I \leq 0 \text{ em } X_m \setminus B_{R_m}(0).$$

Por outro lado, como $\operatorname{codim} W = k < m = \dim X_m$, temos que $W \cap \partial B_\rho(0) \cap X_m \neq \varnothing$ e portanto segue de $(\widehat{I_1})$ que

$$I|_{W\cap\partial B_\rho(0)\cap X_m} \geq \alpha > 0.$$

As duas últimas expressões implicam que $\rho < R_m$.

Suponha, por contradição, que $u \in \partial\mathcal{O}$ é tal que $h(u) \in B_\rho(0)$. Se $u \in D_m$ então, por continuidade, existe uma vizinhança N_u de u tal que $h(N_u) \subset B_\rho(0)$, o que implicaria que u está no interior do conjunto $\mathcal{O}$. Logo, $u \in \partial D_m$, onde a fronteira está sendo tomada com respeito a X_m. Mas, em ∂D_m, a função h coincide com a identidade. Logo,

$$\rho > \|h(u)\|_X = \|u\|_X = R_m,$$

o que é um absurdo. Isso conclui a demonstração. $\square$

O próximo resultado mostra que c_j é nível crítico e estima o tamanho do conjunto K_{c_j}, como feito no Teorema 7.1.

Proposição 7.15. *Se $j > k$ e $c_j = c_{j+1} = \cdots = c_{j+p} = c$, então $\gamma(K_c) \geq p + 1$.*

Demonstração. Como $I(0) = 0$ e $c \geq \alpha > 0$, então $K_c \in \Sigma$. Suponha, por contradição, que $\gamma(K_c) \leq p$. A condição de Palais-Smale implica que K_c é compacto, e portanto existe $\delta > 0$ tal que

$$\gamma((K_c)_\delta) = \gamma(K_c) \leq p.$$

Aplicando o Lema de Deformação com $0 < \varepsilon < \alpha/2$ e $\mathcal{O} = \operatorname{int}(K_c)_\delta$ obtemos $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que $\eta(1,\cdot)$ é ímpar e satisfaz

(i) $\eta(1,u) = u$ sempre que $u \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$;

(ii) $\eta(1, I^{c+\varepsilon} \setminus (K_c)_\delta) \subset I^{c-\varepsilon}$.

Escolha agora $A \in \Gamma_{j+p}$ tal que

$$\sup_{u\in A} I(u) \leq c + \varepsilon. \tag{7.7}$$

O item (d) da Proposição 7.13 implica que $\overline{A \setminus (K_c)_\delta} \in \Gamma_j$. Além disso, como $c - 2\varepsilon > 0$ e $I \leq 0$ em $\partial B_{R_m}(0) \cap X_m$ para todo $m \geq j$, concluímos da propriedade (i) acima que $\eta(1, \cdot)$=Id em $\partial B_{R_m}(0) \cap X_m$. Uma vez que $\eta(1, \cdot)$ é ímpar, a assertiva (c) da Proposição 7.13 mostra que $\eta(1, \overline{A \setminus (K_c)_\delta}) \in \Gamma_j$. Segue então de (ii) e de (7.7) que

$$c \leq \sup_{u \in \eta(1, \overline{A \setminus (K_c)_\delta})} I(u) \leq c - \varepsilon,$$

o que á absurdo. □

O próxima resultado completa a demonstração do Teorema 7.12

Proposição 7.16. *Os níveis críticos c_j são tais que*

$$\lim_{j \to \infty} c_j = +\infty.$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que a sequência crescente (c_j) é limitada. Como $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_j \leq \cdots$, então existe

$$c = \lim_{j \to \infty} c_j.$$

Se $c_j = c$ para todo $j \geq j_0$ então, pela Proposição 7.13, $\gamma(K_c) = \infty$, o que contraria a compacidade de K_c. Logo $c_j < c$ para todo $j \geq k$. Defina

$$K = \{u \in X \ : \ c_{k+1} \leq I(u) \leq c, \ I'(u) = 0\} = \bigcup_{c_{k+1} \leq d \leq c} K_d. \tag{7.8}$$

Usando Palais-Smale concluímos que K é compacto (cf. Exercício 7.11), de modo que existe $\delta > 0$ tal que $\gamma(K_\delta) = \gamma(K) < \infty$. Seja $s = \max\{k + 1, \gamma(K)\}$ e escolha $\varepsilon > 0$ tal que

$$0 < \varepsilon < \frac{c - c_s}{2}.$$

Escrevendo $\mathcal{O} = \mathrm{int}(K_\delta)$ e usando o Lema de Deformação, obtemos $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$ tal que $\eta(1, \cdot)$ é ímpar e satisfaz

(i) $\eta(1, u) = u$ sempre que $u \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$;

(ii) $\eta(1, I^{c+\varepsilon} \setminus K_\delta) \subset I^{c-\varepsilon}$.

Seja agora $j \in \mathbb{N}$ tal que $c_j > c - \varepsilon$ e escolha $A \in \Gamma_{j+s}$ tal que

$$\sup_{u \in A} I(u) \leq c_{j+s} + \varepsilon < c + \varepsilon.$$

Como antes, $\overline{A \setminus K_\delta} \in \Gamma_j$. Além disso, como $c - 2\varepsilon > c_s \geq \alpha > 0$, o mesmo argumento usando na prova da proposição anterior mostra que $\eta(1, \overline{A \setminus K_\delta}) \in \Gamma_j$. Logo, por (ii) acima e pela escolha de j, temos que

$$c_j \leq \sup_{u \in \eta(1, \overline{A \setminus K_\delta}) \in \Gamma_j} I(u) \leq c - \varepsilon < c_j,$$

o que é absurdo. Logo $c_j \to \infty$ quando $j \to \infty$. $\square$

7.4 Infinitas soluções para um problema superlinear

Nessa seção vamos retormar o problema estudado na Seção **??**, qual seja

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.9}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um dómínio limitado e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz

(f_0) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(f_1) existem c_1, $c_2 \geq 0$ e $1 \leq p < 2^*$, tais que

$$|f(x, s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1}, \quad \forall\, (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R};$$

(f_3) existe $\mu > 2$ tal que

$$0 < \mu F(x, s) \leq s f(x, s), \quad \forall\, s \neq 0,$$

em que $F(x, s) = \int_0^s f(x, t)\mathrm{d}t$;

(f_6) $f(x, \cdot)$ é ímpar para todo $x \in \Omega$.

O resultado principal da seção é o seguinte.

Teorema 7.17. *Suponha que f satisfaz (f_0), (f_1), (f_3) e (f_6). Então o problema (7.9) possui uma sequência ilimitada de soluções fracas.*

Demonstração. Denotando por H o espaço $H_0^1(\Omega)$ munido da norma $\|u\| = (\int_\Omega |\nabla u|^2)^{1/2}$, podemos usar a condição $(f_0) - (f_1)$ para verificar que o funcional

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u)$$

é de classe C^1 em H. Como antes, $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\mathrm{d}t$. Uma vez que $f(x,\cdot)$ é ímpar, sua primitiva $F(x,\cdot)$ é par, donde se conclui que o funcional I é par. Além disso, $I(0) = 0$ e, como f tem crescimento subcrítico, podemos usar a condição de Ambrosetti-Rabinowitz (f_3) como antes para verificar que I satisfaz (PS). Para provar o teorema precisamos somente verificar que I satisfaz as condições geométrica do Teorema do Passo da Montanha com simetria para alguma decomposição $H = V \oplus W$.

Mostremos primeiro que a condição $(\widehat{I_2})$ vale para qualquer decomposição do espaço H. De fato, sem perda de generalidade podemos supor que o número μ dado pela condição (f_3) satisfaz $2 < \mu < 2^*$. Essa mesma condição fornece

$$F(x,s) \geq c_1|s|^\mu - c_2, \quad \forall x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}.$$

Logo, dado um subespaço $\widehat{X} \subset X$ de dimensão finita, a equivalência das normas $\|\cdot\|$ e $|\cdot|_\mu$ nos fornece

$$I(u) \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - c_1|u|_\mu^\mu + c_2|\Omega| \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - c_3\|u\|_\mu^\mu + c_2|\Omega|, \quad \forall\, u \in \widehat{X}.$$

Como $\mu > 2$ segue que $I(u) \to -\infty$ quando $\|u\| \to \infty$, $u \in \widehat{X}$. Assim, existe $R = R(\widehat{X}) > 0$ tal que $I(u) \leq 0$ para todo $u \in \widehat{X}$ satisfazendo $\|u\| > R$, e portanto a condição $(\widehat{I_2})$ é satisfeita qualquer que seja a decomposição do espaço H como soma de dois subespaços, um deles com dimensão finita.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja

$$V_k = \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}, \quad W_k = V_k^\perp,$$

onde $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ são as autofunções do problema de autovalor (PA). Integrando a condição de crescimento (f_1) obtemos

$$|F(x,s)| \leq c_4|s| + c_5|s|^p \leq c_6 + c_7|s|^p, \quad \forall\,(x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Logo, para todo $u \in X$, temos que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - c_7|u|_p^p - c_8.$$

Como $2 < p < 2^*$, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$p = (1-\theta)2 + \theta 2^*. \tag{7.10}$$

Assim, podemos usar a desigualdade de Hölder com expoentes $s = \theta^{-1}$ e $s' = (1-\theta)^{-1}$ para obter

$$\int_\Omega |u|^p = \int_\Omega |u|^{(1-\theta)2}|u|^{\theta 2^*} \leq |u|_2^{(1-\theta)2}|u|_{2^*}^{\theta 2^*},$$

de modo que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - c_7|u|_2^{(1-\theta)2}|u|_{2^*}^{\theta 2^*} - c_8 \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - c_9|u|_2^{(1-\theta)2}\|u\|^{\theta 2^*} - c_8,$$

em que usamos a imersão $H \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$.

A desigualdade acima vale para todo elemento $u \in X$. Se tomarmos $u \in W_k$, podemos usar a desigualdade variacional $\|u\|^2 \geq \lambda_{k+1}|u|_2^2$ e (7.10) para obter

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{c_9}{\lambda_{k+1}^{(1-\theta)}}\|u\|^{(1-\theta)2}\|u\|^{\theta 2^*} - c_8 = \left(\frac{1}{2} - \frac{c_9}{\lambda_{k+1}^{(1-\theta)}}\|u\|^{p-2}\right)\|u\|^2 - c_8.$$

Considere agora $\rho = 2\sqrt{c_8+1}$ e escolha $k \in \mathbb{N}$ grande de modo que

$$\frac{c_9}{\lambda_{k+1}^{(1-\theta)}}\rho^{p-2} \leq \frac{1}{4}. \tag{7.11}$$

Note que tal escolha é possível porque $\lambda_k \to \infty$ quando $k \to \infty$. Com essa escolha, sempre que $u \in \partial B_\rho(0) \cap W_k$, temos que

$$I(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\rho^2 - c_8 = \frac{1}{4}(2\sqrt{c_8+1})^2 - c_8 = 1,$$

e portanto $(\widehat{I_1})$ é satisfeita com $\alpha = 1$, $\rho = 2\sqrt{c_8+1}$ e a decomposição do espaço sendo dada por $H = V_k \oplus W_k$, onde $k \in \mathbb{N}$ é tal que a desigualdade (7.11) é satisfeita.

Aplicando agora o Teorema 7.12 obtemos uma sequência de valores críticos $c_k \to \infty$. Considerando u_k um ponto crítico no nível c_k, temos que

$$I(u_k) = c_k = \frac{1}{2}\|u_k\|^2 - \int_\Omega F(x, u_k).$$

Se a sequência (u_k) fosse limitada teríamos que o lado direito seria limitado, pois (f_1) implica que

$$\left|\int_\Omega F(x,u_k)\right| \leq c_9\|u_k\| + c_{10}\|u_k\|^p.$$

Como $c_k \to \infty$ devemos então ter $\|u_k\| \to \infty$, quando $k \to \infty$. Isso conclui a prova do teorema. $\square$

7.5 Exercícios

7.1. Seja $A \subset X\backslash\{0\}$ é um conjunto fechado e simétrico. Se $k \geq 1$ e A é homeomorfo à $\mathbb{S}^k$ por uma aplicação ímpar, então $\gamma(A) > 1$.

7.2. Mostre que a extensão $\widehat{\varphi} : X \to \mathbb{R}^k$ de $\varphi : A \to \mathbb{R}^k\backslash\{0\}$ da prova da Proposição 7.2 pode ser considerada ímpar.

Sugestão: note que $\widehat{\varphi}(x) = \frac{\widehat{\varphi}(x)-\widehat{\varphi}(-x)}{2} + \frac{\widehat{\varphi}(x)+\widehat{\varphi}(-x)}{2}$

7.3. Se $A \subset H$ é um conjunto compacto e simétrico de um espaço de Hilbert H e $\gamma(A) = k < \infty$, então A contém um conjunto ortogonal contendo pelo menos k vetores não-nulos.

Sugestão: veja [41, Observação 8.7].

7.4. Verifique que os valores mini-max c_j definidos na prova do Teorema 7.1 podem ser alternativamente caracterizados como

$$c_j = \inf\{r \in \mathbb{R} : \gamma(I^r) \geq j\}.$$

Sugestão: veja [41, Observação 8.7].

7.5. Prove o Teorema 7.6.

7.6. Prove o Teorema 7.7.

7.7. Complete todos os detalhes da prova do Teorema 7.8.

Sugestão: veja [41, Teorema 9.6].

7.8. Considere $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p,$$

em que $2 < p < 2^*$. Seja $\Sigma = \{A \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : A = -A\}$ e defina

$$\gamma_k = \{A \in \Sigma : \gamma(A) \geq k\}.$$

Verifique que, para todo $k \in \mathbb{N}$, vale

$$\inf_{A \in \gamma_k} \sup_{u \in A} I(u) = -\infty.$$

7.9. Se i é um índice para (G, Σ, Γ) e $A \in \Sigma$ é tal que $A \cap \operatorname{Fix} G \neq \varnothing$, então

$$i(A) = \sup_{B \in \Gamma} i(B).$$

7.10. Seja M um espaço métrico, $G = \{\mathrm{Id}\}$, Σ a família dos conjuntos fechados de M e Γ a classe de todos os homeomorfismos de M em M. Verifique que cat_M é um índice para (G, Σ, Γ).

7.11. Use a condição de Palais-Smale para mostrar que o conjunto K definido em (7.8) é compacto.

CAPÍTULO 8

Espaços de Sobolev

A partir de agora vamos estudar o problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sendo um aberto de classe C^1 e a função f, ao contrário dos capítulos anteriores, podendo ser descontínua em Ω. A fim de exemplificar o que faremos vamos supor, inicialmente, que a função f pertence ao espaço de Lebesgue $L^2(\Omega)$.

Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ é solução de (P) no sentido clássico então, multiplicando a primeira equação de (P) por $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, integrando e usando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (-\Delta u(x))\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \varphi(x)\frac{\partial u}{\partial \eta}(x)\,\mathrm{d}x,$$

ou ainda, lembrando $\varphi \equiv 0$ em $\partial\Omega$,

$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{para toda } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{8.1}$$

Observe que o lado direito da equação acima é finito sempre que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Em particular, se $f \in L^2(\Omega)$ e u é uma solução clássica, a expressão acima sempre se verifica. Note ainda que o integrando do lado esquerdo envolve apenas as derivadas de primeira ordem da função u.

A fim de continuar nossa motivação vamos supor que existe um espaço de Hilbert H com as seguintes propriedades:

(i) o produto interno em H á dado pela aplicação

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_H : \quad & H \times H \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle_H = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}x; \end{aligned} \tag{8.2}$$

(ii) $C_0^\infty(\Omega)$ é um subespaço denso de H;

(iii) H está imerso continuamente em $L^2(\Omega)$.

Nessas condições a equação (8.1) se escreve como

$$\langle u, \varphi \rangle_H = \int_\Omega f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x, \quad \forall \, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Para mostrar que a igualdade acima pode ser estendida para todos os elementos de H, seja $\varphi \in H$ e $(\varphi_m) \subset H$ tal que $\varphi_m \to \varphi$ em H. Pela continuidade do produto interno temos que $\langle u \, , \varphi_m \rangle_H \to \langle u, \varphi \rangle_H$. Além disso, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a continuidade da imersão $H \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int (f(x)\varphi_m(x) - f(x)\varphi(x)) \, \mathrm{d}x \right| & \leq \int |f(x)(\varphi_m(x) - \varphi(x))| \, \mathrm{d}x \\ & \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_m - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_m - \varphi\|_H \to 0. \end{aligned}$$

Desse modo, passando a igualdade $\langle u, \varphi_m \rangle_H = \int_\Omega f(x)\varphi_m(x) \, \mathrm{d}x$ ao limite, concluímos que

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x, \quad \text{para toda } \varphi \in H. \tag{8.3}$$

Diremos que $u \in H$ é uma *solução fraca* do problema (P) se a igualdade acima ocorre. Naturalmente, toda solução clássica é solução fraca. Veremos posteriormente que o contrário pode não ser verdade.

Vejamos agora como a existência de um espaço H como acima nos permite encontrar solução fraca para o problema (P). Para isso vamos definir

$$\begin{aligned} T_f : \quad & H \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \varphi \mapsto T_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

e notar inicialmente que T_f é uma transformação linear. Além disso, para toda $\varphi \in H$, vale

$$|T_f(\varphi)| = \left| \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \|f\|_{L^2\Omega}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_H,$$

e portanto T_f é uma funcional linear contínuo de H em $\mathbb{R}$.

Nesse ponto vale lembrar que se $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma transformação linear e se $v \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito na base canônica de $\mathbb{R}^n$ como $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, então

$$T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(e_i) = \langle v_T, v\rangle_{\mathbb{R}^n},$$

em que $v_T = (T(e_1), \ldots, T(e_n)) \in \mathbb{R}^n$. Isso mostra que para cada transformação linear T de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ podemos associar um elemento $v_T \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$T(v) = \langle v_T, v\rangle_{\mathbb{R}^N}, \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^n.$$

O ponto importante aqui é que o resultado acima só depende da estrutura Hilbertina de $\mathbb{R}^n$. Desse modo, vale o mesmo resultado em dimensão infinita, isto é, se X é um espaço de Hilbert e $T : X \to \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo, então o Teorema da Representação de Riesz nos garante que existe um elemento $v_T \in X$ tal que

$$T(v) = \langle v_T, v\rangle_X, \quad \forall\, v \in X.$$

Voltando ao nosso problema, perceba que a existência de solução fraca para (P) é equivalente a encontrar $u \in H$ tal que

$$\langle u, \varphi\rangle_H = T_f(\varphi), \quad \forall\, \varphi \in H.$$

Como T_f é um funcional linear contínuo temos que existe um elemento $u_f \in H$ tal que

$$T_f(\varphi) = \langle u_f, \varphi\rangle_H, \quad \forall\, \varphi \in H.$$

Segue então das duas últimas igualdades que $u := u_f$ é uma solução fraca de (P).

Não é difícil verificar que a solução fraca obtida acima é única. De fato, suponha que u_1, $u_2 \in H$ são ambas soluções fracas de (P). Então

$$\langle u_1, \varphi\rangle_H = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle u_2, \varphi\rangle_H, \quad \forall\, \varphi \in H,$$

o que mostra que

$$\langle u_1 - u_2, \varphi\rangle_H = 0, \quad \forall\, \varphi \in H.$$

Em particular, escolhendo $\varphi = u_1 - u_2$ na expressão acima, concluímos que $\|u_1 - u_2\|_H^2 = 0$, o que implica que $u_1 = u_2$.

Vale notar que o mesmo argumento usado acima nos permite mostrar que, em geral, o elemento de representação dado pelo Teorema de Riesz é único.

Nas próximas seções vamos discutir a existência de um espaço H com as propriedades acima. É importante observar que a equação (8.3) pressupõe apenas a existência de derivas de ordem um para as funções de H. Desse modo, é natural que o espaço H seja maior do que $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, esse último sendo o espaço em que vivem as soluções clássicas. Assim, parece natural pensar que temos mais chance de obter soluções fracas do que soluções clássicas.

Um maneira simples de construir o espaço H seria notar que a função dada em (8.2) define um produto interno em $C_0^\infty(\Omega)$ e denotar por H o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com a norma induzida por esse produto interno. Uma dificuldade que surge é que, com essa construção, os elementos de H seriam classes de equivalência de sequências de Cauchy em $C_0^\infty(\Omega)$. Evidentemente não parece muito claro como trabalhar com tais elementos. O segundo problema é que ainda precisaríamos mostrar que $H \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

A idéia então é tentar identificar o completamento acima com algum espaço de funções. Esse é o conteúdo das próximas seções. Antés porém vamos fixar algumas notações.

Como trabalharemos muito com formulações integrais para nossos problemas, escreveremos somente $\int u$ para denotar $\int_\Omega u(x)\mathrm{d}x$, em que $u \in L^1(\Omega)$. Além disso, para $1 \le p \le \infty$ e $u \in L^p(\Omega)$, vamos escrever $\|u\|_p$ para denotar a norma de u em $L^p(\Omega)$. As normas de funções u contínuas ou Hölder contínuas serão denotadas por

$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})}$ e $\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})}$, respectivamente. Finalmente, diremos que φ é uma *função teste* quando $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

8.1 Derivadas fracas

O primeiro passo para a construção do espaço H com as propriedades apresentadas no início do capítulo será introduzir um novo conceito de derivada que generaliza que a derivada usual.

A fim de motivar esse novo conceito considere $u \in C^k(\Omega)$, para algum $k \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função teste. O Teorema da Divergência nos permite então integrar por partes para obter

$$\int u\varphi_{x_i} = -\int u_{x_i}\varphi + \int_{\partial\Omega} u(x)\varphi(x)\eta^i \, \mathrm{dS}_x = -\int u_{x_i}\varphi,$$

em que usamos, na última igualdade, o fato de que $\varphi \equiv 0$ em $\partial\Omega$. De uma maneira mais geral, se α é um multi-índice tal que $|\alpha| \leq k$, podemos escrever

$$\int uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int \varphi D^\alpha u. \tag{8.4}$$

Observe que o lado esquerdo da igualdade acima faz sentido mesmo que u não seja regular. De fato, basta supor que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ pois, nesse caso, se denotarmos por $K_\varphi \subset\subset \Omega$ o suporte da função φ, temos que

$$\left|\int uD^\alpha\varphi\right| \leq \int_{K_\varphi} |u(x)|\,|D^\alpha\varphi(x)| \, \mathrm{d}x \leq \|\varphi\|_\infty \int_{K_\varphi} |u(x)| \, \mathrm{d}x < \infty.$$

As considerações acima motivam a seguinte definição.

Definição 8.1. *Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e um multi-índice α, dizemos que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ é a α-ésima derivada fraca de u se*

$$\int_\Omega u(x)D^\alpha\varphi(x) \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{8.5}$$

Quando não existir uma função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ como acima, dizemos que u não possui α-ésima derivada fraca.

Essencialmente, a definição acima diz que uma derivada fraca de uma função é uma função localmente integrável que nos permite fazer integração por partes. O lema abaixo estabelece, em um certo sentido, a unicidade da derivada fraca.

Lema 8.2. *A α-ésima derivada fraca de uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, quando existe, é única a menos de conjuntos de medida nula.*

Demonstração. Suponha que $v, \tilde{v}$ são α-ésimas derivas fracas de u. Então

$$(-1)^{|\alpha|}\int v\varphi = \int uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int \tilde{v}\varphi, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

e portanto

$$\int (v-\tilde{v})\varphi = 0, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Segue então (cf. [9, Lema 4.2]) que $v - \tilde{v} = 0$ q.t.p. em Ω. Logo $v = \tilde{v}$ q.t.p. em Ω. □

Tendo em vista o lema acima, se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ possui α-ésima derivada fraca v, podemos denotar simplesmente

$$v = D^\alpha u.$$

Observe que a notação acima pode causar confusão com a de derivada no sentido clássico. Ao longo de todo este capítulo, quando escrevermos $D^\alpha u$, estamos nos referindo à α-ésima derivada no sentido fraco.

Antes de apresentar as propriedades básicas da derivada fraca vejamos alguns exemplos.

Exemplo 8.3. Se uma função u possui derivada no sentido clássico, então u possui derivada no sentido fraco e essa coincide com a derivada clássica.

Exemplo 8.4. Considere $\Omega = (0,2)$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que $u \in L^1_{loc}(0,2)$ e que não existe a derivada no sentido clássico, visto que não existe $u'(1)$. Vamos mostrar que u possui derivada fraca $v : (0,2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De fato, claramente temos que $v \in L^1_{loc}(0,2)$. Seja $\varphi \in C_0^\infty(0,2)$ e observe que

$$\begin{aligned} \int_\Omega u\varphi' &= \int_0^1 x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x\varphi(x)|_{x=0}^1 - \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x + (\varphi(2) - \varphi(1)) \\ &= \varphi(1) - \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \varphi(1) \\ &= -\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega v\varphi, \end{aligned}$$

de modo que $v = u'$ (no sentido fraco).

Exemplo 8.5. Considere $\Omega = (0,2)$ e seja agora $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos mostrar que nesse caso u não é fracamente derivável. De fato, suponha por contradição existe a derivada fraca u'. Então,

$$\int u\varphi' = -\int u'\varphi, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(0,2).$$

Considere uma sequência $(\varphi_m) \subset C_0^\infty(0,2)$ satisfazendo, para todo $m \in \mathbb{N}$,

(i) $\|\varphi_m\|_\infty \leq 1$;

(ii) $\varphi_m(1) = 1$;

(iii) $\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x) = 0$, para todo $x \neq 1$;

(iv) o suporte de φ_m está contido em $[1/2, 3/2]$.

Temos que

$$\begin{aligned}
-\int u'\varphi_m &= \int u\varphi_m' \\
&= \int_0^1 x\varphi_m'(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 2\varphi_m'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= x\varphi_m|_{x=0}^1 - \int_0^1 \varphi_m(x)\,\mathrm{d}x + 2\varphi_m(2) - 2\varphi_m(1) \\
&= \varphi_m(1) - \int_0^2 \varphi_m(x)\,\mathrm{d}x - 2\varphi_m(1) \\
&= -\int_0^2 \varphi_m(x)\,\mathrm{d}x - 1
\end{aligned}$$

Logo,

$$1 = \int u'\varphi_m - \int \varphi_m = \int_{\left(\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right)} u'\varphi_m - \int \varphi_m$$

Observe agora que $u'(x)\varphi_m(x) \to 0$ q.t.p. em (1/4,7/4). Além disso, $|u'(x)\varphi_m(x)| \leq |u'(x)|$ q.t.p. em $(1/4, 7/4)$ e $|u'| \in L^1(1/4, 7/4)$, visto que $u' \in L^1_{loc}(0, 2)$. Segue então do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\left(\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right)} u'\varphi_m = 0.$$

Do mesmo modo mostra-se que $\int \varphi_m \to 0$. Desse modo temos que

$$1 = \lim_{m\to\infty} \left(\int u'\varphi_m - \int \varphi_m \right) = 0,$$

o que é absurdo. Portanto, não existe a derivada fraca u'.

8.2 Espaços de Sobolev

Começamos definido o espaço com o qual trabalharemos em toda essa seção.

Definição 8.6. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega)\ :\ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq k\}.$$

Observe que se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ então $u \in L^P(\Omega)$, de modo que toda função de $W^{k,p}(\Omega)$ está em $L^1_{loc}(\Omega)$. Nunca é demais lembrar que, na definição acima, $D^\alpha u$

denota a derivada no sentido fraco. Finalmente, como $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, estamos assumindo tacitamente que todas as derivadas fracas de ordem menor ou igual a k existem. Uma outra observação importante é que valem as seguintes inclusões

$$C_0^\infty(\Omega) \subseteq W^{k,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega).$$

Quando $p = 2$, vamos denotar $W^{k,p}(\Omega)$ simplesmente por $H^k(\Omega)$, isto é, $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$. Em particular, se $k = 1$, temos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \ : \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ para } i = 1, ..., n. \right\}.$$

Veremos em breve que $H^k(\Omega)$ pode ser dotado de um produto interno de modo a tornar-se um espaço de Hilbert. Antes porém note que, se $u \in H^1(\Omega)$, então as duas integrais em (8.3) são finitas, sempre que $f \in L^2(\Omega)$. Conforme veremos posteriormente, o espaço H que estamos procurando para obter as soluções fracas de (P) é precisamente um subespaço especial de $H^1(\Omega)$.

O resultado abaixo apresenta as principais propriedades dos espaços de Sobolev.

Teorema 8.7. *Se $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ então*

(i) *$D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$, para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$.*

(ii) *$D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

(iii) *Se $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega$ é um aberto, então $u \in W^{k,p}(\widetilde{\Omega})$.*

(iv) *Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ então $\varphi u \in W^{k,p}(\Omega)$ e para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tal que $|\alpha| \leq k$, vale*

$$D^\alpha(\varphi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} D^\beta \varphi D^{\alpha-\beta} u,$$

onde $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!$ e $(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \beta \leq \alpha$ significa $\beta_i \leq \alpha_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

(v) *$D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u$ sempre que $|\beta| + |\alpha| \leq k$.*

Demonstração. Considere $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e note que, pela definição de derivada fraca, temos

$$\begin{aligned}\int(\lambda u+\mu v)D^\alpha\varphi &= \lambda\int uD^\alpha\varphi+\mu\int vD^\alpha\varphi\\ &= \lambda(-1)^{|\alpha|}\int\varphi D^\alpha u+\mu(-1)^{|\alpha|}\int\varphi D^\alpha v\\ &= (-1)^{|\alpha|}\int(\lambda D^\alpha u+\mu D^\alpha v)\,\varphi,\end{aligned}$$

o que estabelece a veracidade de (ii). A prova dos demais itens segue também da definição de derivada fraca e será deixada como exercício. $\square$.

Observe que o item (ii) acima implica que $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial real. Vamos transformá-lo em um espaço normado introduzindo a seguinte norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha|\le k}\int|D^\alpha u|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1\le p<\infty,\\ \displaystyle\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}\,, & \text{se } p=\infty.\end{cases}$$

Para verificar que $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ define de fato uma norma em $W^{k,p}(\Omega)$ precisamos mostrar que para quaisquer u, $v\in W^{k,p}(\Omega)$ e $\lambda\in\mathbb{R}$, valem

(N1) $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}=0$ se, e somente se, $u=0$;

(N2) $\|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)}=|\lambda|\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$;

(N3) $\|u+v\|_{W^{k,p}(\Omega)}\le\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}+\|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Temos que (i) e (ii) são imediatos da definição. Mostremos então (iii), para $1\le p<\infty$. Usando a desigualdade triangular em $L^p(\Omega)$ e a linearidade de D^α, obtemos

$$\|u+v\|_{W^{k,p}(\Omega)}=\left(\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u+D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{|\alpha|\le k}\left(\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}+\|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lembremos agora que, se $a_i, b_i\in\mathbb{R}$, a desigualdade de Minkowski se escreve como

$$\left(\sum_{i=1}^n|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^n|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^n|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Desse modo, temos que

$$\|u+v\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int |D^\alpha u|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int |D^\alpha v|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Quando $p = \infty$ o item (iii) segue imediatamente da desigualdade triangular para números reais.

Observação 8.8. Existem outras maneiras de definir normas em $W^{k,p}(\Omega)$, como por exemplo

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{ou} \quad |||u|||_{W^{k,p}(\Omega)} := \max_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

Não é difícil verificar que as expressões acima também definem normas em $W^{k,p}(\Omega)$ e que essas normas são equivalentes à norma usual $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

A fim de simplificar a notação, a norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ será denotada, daqui por diante, simplesmente por $\|\cdot\|_{k,p}$.

Lembremos que um espaço vetorial $(X, \|\cdot\|_X)$ é dito de Banach quando ele é completo com respeito à topologia induzida pela norma. O resultado abaixo estabelece a completude do espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$.

Teorema 8.9. *O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ com a norma $\|\cdot\|_{k,p}$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Suponha $1 \leq p < \infty$ e seja $(u_m) \subset W^{k,p}(\Omega)$ uma seqüência de Cauchy arbitrária. Vamos mostrar que (u_m) converge em $W^{k,p}(\Omega)$. Sendo $(u_m) \subset W^{k,p}(\Omega)$ uma seqüência de Cauchy temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$\|u_l - u_m\|_{k,p} < \varepsilon, \quad \text{se } l, m > N.$$

Assim, para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$,

$$\|D^\alpha u_l - D^\alpha u_m\|_p \leq \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u_l - D^\alpha u_m\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} < \varepsilon, \quad \text{se } l, m > N,$$

o que mostra que $(D^\alpha u_m) \subset L^p(\Omega)$ é uma seqüência de Cauchy. Sendo $L^p(\Omega)$ completo, segue que $D^\alpha u_m \to u_\alpha$ em $L^p(\Omega)$.

Considere $u := u_{(0,\dots,0)}$ e mostremos que $u \in W^{k,p}(\Omega)$ com $D^\alpha u = u_\alpha$ para todo $|\alpha| \le k$. Se isso for verdade podemos fazer $l \to \infty$ na expressão acima para concluir que $\|u_m - u\|_{k,p} < \varepsilon$ sempre que $m > N$. Ora, mais isso é o mesmo que dizer que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

Resta então mostrar que, para cada multi-índice α tal que $|\alpha| \le k$, vale $D^\alpha u = u_\alpha$. Para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ fixada temos que $D^\alpha \varphi \in L^{p'}(\Omega)$, em que p' é o expoente conjugado de p, isto é, $1/p + 1/p' = 1$. Desse modo, podemos usar a desigualdade de Hölder para obter

$$\left| \int (uD^\alpha\varphi - u_m D^\alpha \varphi) \right| \le \int |u - u_m||D^\alpha \varphi| \le \|u - u_m\|_{L^p(\Omega)} \|D^\alpha \varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

A expressão acima mostra que

$$\int u D^\alpha \varphi = \lim_{m\to\infty} \int u_m D^\alpha \varphi, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Uma vez que $D^\alpha u_m \to u_\alpha$ em $L^p(\Omega)$, podemos proceder como acima para verificar que

$$\int u_\alpha \varphi = \lim_{m\to\infty} \int (D^\alpha u_m)\varphi, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Portanto, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que

$$\int u D^\alpha \varphi = \lim_{m\to\infty} \int u_m D^\alpha \varphi = \lim_{m\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int (D^\alpha u_m)\varphi, = (-1)^{|\alpha|} \int u_\alpha \varphi.$$

donde se conclui que $D^\alpha u = u_\alpha \in L^p(\Omega)$, e portanto $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

O caso $p = \infty$ é simples e será deixado como exercício. □

Finalizamos essa seção apresentando outras duas propriedades úteis do espaço $W^{k,p}(\Omega)$. Para simplificar a exposição vamos considerar o caso $k = 1$ e observar que $W^{1,p}(\Omega)$ pode ser imerso isometricamente em $(L^p(\Omega))^{n+1}$ através da aplicação $I : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)^{n+1}$ dada por

$$I(u) := \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right),$$

onde o espaço $X := (L^p(\Omega))^{n+1}$ está munido com a norma

$$\|(v_0, v_1, \cdots, v_n)\|_{L^p(\Omega)^{n+1}} = \left(\sum_{i=0}^{n+1} \|v_i\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall\, v = (v_0, v_1, \ldots, v_n) \in L^p(\Omega)^{n+1}.$$

Isso significa que podemos identificar $W^{1,p}(\Omega)$ com o subespaço correspondente $Y := I(W^{1,p}(\Omega))$ de X. Uma vez que $W^{1,p}(\Omega)$ é completo segue que Y é um subespaço fechado de X. Mas X é reflexivo quando $1 < p < \infty$ e separável quando $1 \leq p < \infty$, o que mostra que o subespaço fechado Y (e portanto $W^{1,p}(\Omega)$) tem essas mesmas propriedades.

A construção acima pode facilmente ser feita para $W^{k,p}(\Omega)$ de modo que vale o seguinte

Teorema 8.10. *O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.*

8.3 Aproximação por funções suaves

Seja $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ a bola unitária, $1 < p < \infty$ e $\gamma > 0$ tal que $\gamma < (n-p)/p$. De acordo com o Exercício 8.5 temos que a função $|x|^{-\gamma}$ pertence a $W^{1,p}(B)$. Como ela é de classe C^∞ em qualquer aberto que não contém a origem, concluímos facilmente que $u \in W^{1,p}(B_2(0))$.

Considere agora $(x_m) \in B$ um conjunto enumerável e denso em B e defina $v : B \to \mathbb{R}$ por

$$v(x) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} |x - x_m|^{-\gamma}.$$

Observe que

$$\left\| |x - x_m|^{-\gamma} \right\|_{W^{1,p}(B)} \leq \left\| |x|^{-\gamma} \right\|_{W^{1,p}(B_2(0))} = C(n,p,\gamma) > 0,$$

e portanto

$$\|v\|_{W^{1,p}(B)} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \||x|^{-\gamma}\|_{W^{1,p}(B_2(0))} \leq C(n,p,\gamma) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = C(N,\gamma,p).$$

Desse modo concluímos que $v \in W_{1,p}(B)$. Observe porém que, como o conjunto (x_m) é denso em B, a função v é ilimitada em qualquer aberto contido na bola unitária.

O exemplo acima mostra que os espaços de Sobolev podem conter funções mal comportadas. Contudo, conforme veremos nessa seção, é sempre possível obter uma função regular que está próxima de v.

Em toda essa seção $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ denota um conjunto aberto arbitrário. Lembremos que, se $\varepsilon > 0$, então

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

No Capítulo 1 mostramos que, se $f \in C(\Omega)$, então a função regularizada $f^\varepsilon := (\eta_\varepsilon * u)$ é de classe C^∞ em Ω_ε. Utilizando o mesmo argumento apresentado naquela ocasião e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue podemos mostrar que a mesma conclusão vale com a hipótese mais fraca de que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Desse modo, se $f \in W^{k,p}(\Omega)$, então $f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Além disso, se $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ então $f^\varepsilon \to f$ em $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, sempre que $1 \le p < \infty$.

As considerações acima nos permitem provar nosso primeiro resultado de aproximação. Dizemos que uma sequência $(u_m) \subset W^{k,p}(\Omega)$ converge para u em $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ quando

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(K)} = 0,$$

para todo $K \subset\subset \Omega$. Vale o seguinte resultado.

Teorema 8.11. *Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para algum $1 \le p < \infty$ então u^ε converge para u em $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$, quando $\varepsilon \to 0^+$.*

Demonstração. Dado um multi-índice α tal que $|\alpha| \le k$, podemos usar o mesmo argumento do Capítulo 1 para verificar que, para todo $x \in \Omega_\varepsilon$, vale

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\varepsilon(x) &= D^\alpha \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy = \int_\Omega D^\alpha_x \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha_y \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\ &= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)D^\alpha u(y)dy \ = (\eta_\varepsilon * D^\alpha u)(x), \end{aligned}.$$

em que usamos a Regra da Cadeia e o fato de $y \mapsto \eta_\varepsilon(x - \cdot)$ ser uma funções teste. Desse modo concluímos que

$$D^\alpha u^\varepsilon \ = \ \eta_\varepsilon * D^\alpha u, \quad \forall\, x \in \Omega_\varepsilon.$$

Dado agora um compacto $K \subset\subset \Omega$, observe que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \|u^\varepsilon - u\|^p_{W^{k,p}(K)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|^p_{L^p(K)} = 0,$$

visto que $D^\alpha u^\varepsilon \to D^\alpha u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$. □

Gostaríamos agora de fazer aproximações em $W^{k,p}(\Omega)$ e não somente aproximações locais. Para isso, necessitamos transformar as estimas locais do último resultado em estimativas globais. Vamos então utilizar o importante conceito de partição da unidade, dado pelo resultado abaixo.

Proposição 8.12 (Partição da Unidade)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto qualquer e $\mathcal{O}$ uma família de abertos que cobrem Ω, isto é, $\Omega \subset \bigcup_{A \in \mathcal{O}} A$. Então existe uma família Ψ de funções $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tais que*

(i) $0 \leq \psi(x) \leq 1$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$, $\psi \in \Psi$*;*

(ii) *se $K \subset\subset \Omega$, então $supp\, \psi \cap K \neq \varnothing$ somente para um número finito de funções $\psi \in \Psi$;*

(iii) *para cada $\psi \in \Psi$, existe um aberto $A_\psi \in \mathcal{O}$ tal que $supp\, \psi \subset A_\psi$;*

(iv) *se $x \in \Omega$, então $\sum_{\psi \in \Psi} \psi(x) = 1$.*

A família de funções Ψ dada acima é chamada *partição da unidade subordinada à cobertura $\mathcal{O}$*. A demonstração do resultado pode ser encontrado em [?].

Provaremos abaixo que as funções de $W^{k,p}(\Omega)$ podem ser aproximada por funções de classe C^∞ em Ω.

Teorema 8.13. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Então existe $(u_m) \subset C^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$.*

Demonstração. É suficiente mostrar que, se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$, então existe $v \in C^\infty(\Omega)$ com $\|u - v\|_{k,p} < \varepsilon$. Considere, para $j \in \mathbb{N}$,

$$\Omega_j := \left\{ x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{j} \right\} \cap B_j(0).$$

Observe que $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$ e que, a medida em que j cresce, o conjunto Ω_j tende a se aproximar de Ω. Denotando $\Omega_{-1} = \Omega_0 = \varnothing$, considere os abertos

$$A_j := \Omega_{j+1} \backslash \overline{\Omega_{j-1}}$$

e note que $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$.

Seja Ψ a família de funções dada pela Proposição 8.12 e observe que, para cada $j \in \mathbb{N}$, a função $\psi_j \in \Psi$ cujo suporte está contido em A_j é tal que $\psi_j u \in W^{k,p}(\Omega)$, em vista do item (iv) do Teorema 8.7. Como $\psi_j u$ tem suporte compacto em Ω, podemos utilizar o Teorema 8.11 para obter $\varepsilon_j > 0$ pequeno, de modo que a função $v_j := \eta_{\varepsilon_j} * (\psi_j u)$ satisfaça

$$\|v_j - \psi_j u\|_{k,p} < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

Defina agora

$$v(x) := \sum_{j=1}^{\infty} v_j(x), \quad x \in \Omega.$$

Dado um compacto $K \subset\subset \Omega$ arbitrário, sabemos que $\operatorname{supp} \psi_j \cap K \neq \varnothing$ somente para um número finito de índices. Desse modo v restrita a K é uma soma finita de funções $v_j \in C^{\infty}(K)$, sendo portanto C^{∞} em K. Como o compacto é arbitrário concluímos que $v \in C^{\infty}(\Omega)$. Além disso, lembrando que $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x) = 1$, temos que

$$\begin{aligned} \|v - u\|_{k,p} &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} v_j - u \right\|_{k,p} = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} v_j - \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j u \right\|_{k,p} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|v_j - \psi_j u\|_{k,p} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Em muitos trabalhos antigos encontra-se a definição do espaço $H^{k,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de C^{∞} com respeito à norma $\|\cdot\|_{k,p}$. O teorema acima diz precisamente que $H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$. O resulatdo foi provado em 1964 por Meyers e Serrin [31], em um artigo cujo título é simplesmente "$H = W$". O artigo, além de ser sério candidato no concurso de trabalho com o menor título que se tem notícia, foi muito importante porque unificou a notação dos espaços de funções que vinham sendo utilizados pelos matemáticos.

Uma questão interessante é se podemos fazer aproximações por funções que são regulares até o fecho de Ω. Isso pode ser feito desde que Ω tenha um pouco de regularidade. Mais especificamente vale o seguinte resultado

Teorema 8.14. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é de classe C^1, $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$, então existe $(u_m) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$.*

A demonstração do resultado acima pode ser encontrada em [22, Teorema 3, Seção 5.3.3]. Para uma versão um pouco mais geral veja [1, Teorema 3.18].

Finalizamos essa seção observando que os dois resultados acima podem ser falsos se $p = \infty$. No que se refere ao primeiro basta considerar a função $u : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $u(x) = |x|$. Nesse caso $u \in W^{1,\infty}(-1, 1)$, mas u não pode ser aproximada por funções de classe $C^\infty(-1, 1)$. Com relação ao último teorema, consideramos $\Omega := (-1, 0) \cup (0, 1)$ e $v : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$v(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } -1 < x < 0, \\ x, & \text{se } -0 < x < 1. \end{cases}$$

Então $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ não pode ser aproximada por funções de classe $C^\infty(\overline{\Omega})$. Deixamos a cargo do leitor a verificação dos detalhes em ambos os exemplos (cf. Exercícios 8.7 e 8.8).

8.4 Imersões de Sobolev

Já havíamos observado que $C_0^\infty(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. Estaremos interessados agora em determinar espaços outros espaços intermediários, que se localizem $W^{k,p}(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$. A fim de motivar a exposição vamos considerar inicialmente o caso em que $1 \leq p < n$ e tentar obter uma estimativa do tipo

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall\, u \in C_0^1(\mathbb{R}^N), \tag{8.6}$$

com $C > 0$ independente de u. Considerando $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \neq 0$ e definindo, para $\lambda > 0$, a função

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

temos que

$$\|u_\lambda\|_q^q = \int |u(\lambda x)|^q = \lambda^{-n} \int |u_\lambda(x)|^q$$

e

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_\lambda(x)\|_p^p &= \int |\nabla u(\lambda x)|^p = \int |\nabla u_\lambda(x)\lambda|^p \\
&= \lambda^p \int |\nabla u(\lambda x)|^p = \lambda^{p-n} \int |\nabla u(x)|^p.
\end{aligned}$$

Suponha que a desigualdade (8.6) vale para alguma constante$C > 0$. Então

$$\left(\lambda^{-n} \int |u(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\lambda^{p-n} \int |\nabla u(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

isto é,

$$\lambda^{\frac{-n}{q}} \|u\|_q \leq C \lambda^{\frac{p-n}{p}} \|\nabla u\|_p,$$

ou ainda

$$\|u\|_q \leq C \lambda^{\frac{p-n}{p} + \frac{n}{q}} \|\nabla u\|_p,$$

qualquer que seja $\lambda > 0$.

Se $(p-n)/p + n/q > 0$ a desigualdade acima nos fornece umacontradição quando $\lambda \to 0^+$. Do mesmo modo, fazedo $\lambda \to \infty$, percebemos que não pode ocorrer $(p-n)/p + n/q < 0$. Desse modo, para que valha (8.6) devemos ter

$$\frac{p-n}{p} + \frac{n}{q} = 0,$$

ou equivalentemente,

$$q = p^* := \frac{np}{n-p}.$$

O número p^* acima é conhecido como *expoente crítico de Sobolev.*

No nosso próximo resultado vamos responder afirmativamente a pergunta feita no início da seção.

Lema 8.15. *Se $1 \leq p < n$ então existe $C = C(n,p) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Vamos considerar primeiro o caso $p = 1$ e escrever, no que segue, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Como u tem suporte compacto temos que, para cada $1 \leq i \leq n$, vale

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)\, \mathrm{d}y_i,$$

e portanto

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)|\, \mathrm{d}y_i,$$

o que implica que

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, \mathrm{d}y_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Integrando a expressão acima com respeito à variável x_1 obtemos

$$\begin{aligned} \int |u|^{\frac{n}{n-1}}\, \mathrm{d}x_1 &\leq \int \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, \mathrm{d}y_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \mathrm{d}x_1 \\ &= \left(\int |\nabla u|\, \mathrm{d}y_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int \prod_{i=2}^{n} \left(\int |\nabla u|\, \mathrm{d}y_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \mathrm{d}x_1. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Lembremos agora que, se $f_1, ..., f_j$ são tais que $f_i \in L^{r_i}$, $i = 1, ..., j$ e $\sum_{i=1}^{j} 1/r_i = 1$, então a desigualdade de Hölder generalizada se escreve como

$$\int |f_1 f_2 \cdots f_j| \leq \|f_1\|_{r_1} \cdots \|f_j\|_{r_j}.$$

Aplicando esse resultado em (8.7) com $j = n-1$, $r_i = n-1$ e $f_i = \left(\int |\nabla u| \mathrm{d}y_i \right)^{\frac{1}{n-1}}$, $i = 1, ..., n-1$, obtemos

$$\int |u|^{\frac{n}{n-1}}\, \mathrm{d}x_1 \leq \left(\int |\nabla u|\, \mathrm{d}y_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int \int |\nabla u|\, \mathrm{d}y_i\, \mathrm{d}x_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Agora, integrando com respeito a x_2, concluímos que

$$\int \int |u|^{\frac{n}{n-1}}\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \leq \left(\int \int |\nabla u|\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}y_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int \prod_{i=1, i\neq 2}^{n} F_i^{\frac{1}{n-1}}\, \mathrm{d}x_2,$$

onde

$$F_1 := \int |\nabla u|\, \mathrm{d}y_1 \quad \text{e} \quad F_i := \int \int |\nabla u|\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}y_i, \quad i = 3, 4, ..., n.$$

Aplicando Hölder novamente, vem

$$\begin{aligned}\int\int |u|^{\frac{n}{n-1}}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \quad &\leq \quad \left(\int\int |\nabla u|\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int\int |\nabla u|\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}x_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\\ &\times\prod_{i=3}^{n}\left(\int\int\int |\nabla u|\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.\end{aligned}$$

Continuando esse processo obtemos

$$\int\cdots\int |u|^{\frac{n}{n-1}}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \leq \prod_{i=1}^{n}\left(\int\ldots\int |\nabla u|\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\right)^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{i=1}^{n}\left(\int |\nabla u|\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

em que, na desigualdade acima, escrevemos $\mathrm{d}x_i$ no lugar de $\mathrm{d}y_i$. Segue então que

$$\int |u|^{\frac{n}{n-1}}\,\mathrm{d}x \leq \left(\int |\nabla u|\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{n}{n-1}},$$

ou ainda,

$$\left(\int |u|^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int |\nabla u|,$$

o que estabelece o lema no caso $p = 1$.

Para o caso $1 < p < n$ vamos aplicar a desigualdade acima para $|u|^\gamma$ com $\gamma > 1$ a ser escolhido posteriormente. Observe inicialmente que

$$\nabla(|u|^\gamma) = \gamma|u|^{\gamma-1}\operatorname{sgn} u\nabla u,$$

de modo que

$$\left(\int |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \gamma\int |u|^{\gamma-1}|\nabla u|.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes p e $p' = p/(p-1)$, obtemos

$$\left(\int |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \gamma\left(\int |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Vamos agora escolher γ de modo que

$$\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1},$$

isto é,

$$\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} > p > 1.$$

Com essa escolha a última desigualdade se torna

$$\left(\int |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}-\frac{p-1}{p}} \leq \gamma \left(\int |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mas,

$$\gamma\frac{n}{n-1} = \frac{p(n-1)}{n-p}\cdot\frac{n}{n-1} = \frac{np}{n-p} = p^*$$

e

$$\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p} = \frac{pn-p-np+n}{np} = \frac{n-p}{np} = \frac{1}{p^*},$$

e portanto,

$$\left(\int |u|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \frac{p(n-1)}{n-p}\left(\int |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

e portanto o lema vale para $C = p(n-1)/(n-p)$. □

Gostaríamos agora de estender o resultado do último lema para funções em $W^{1,p}(\Omega)$. Vamos considerar incialmente um caso mais simples, em que a função u é tal que existe uma sequência $(u_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ satisfazendo $u_m \to u$ *em* $W^{1,p}(\Omega)$. Como u_m tem suporte compacto em Ω podemos estendê-la para todo o $\mathbb{R}^n$ simplesmente fazendo $u_m|_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \equiv 0$. Observe que essa extensão não afeta a regularidade de u_m, de modo que podemos aplicar o último lema para obter

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)}. \tag{8.8}$$

Aplicando o mesmo lema para $u_m - u_l$ e lembrando que $\nabla u_m \to \nabla u$ em $L^p(\Omega)^n$, concluímos que $(u_m) \subset L^{p^*}(\Omega)$ é uma sequência de Cauchy em $L^{p^*}(\Omega)$. Logo $u_m \to v$ em $L^{p^*}(\Omega)$. Como $u_m \to u$ em $L^p(\Omega)$ devemos ter $u = v$, isto é, $u_m \to u$ em $L^{p^*}(\Omega)$. Assim, passando (8.8) ao limite obtemos

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \tag{8.9}$$

Concluímos então que o Lema 8.15 vale para toda função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ que é limite de funções de classe C^∞ com suporte compactamente contido em Ω. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 8.16. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. O espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ é definido como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $\|\cdot\|_{k,p}$, i.e.,*

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}}.$$

De acordo com a definição, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe uma seqüência $(u_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$. Observe que $W_0^{k,p}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $W^{k,p}(\Omega)$. Veremos posteriormente que, num certo sentido, as funções $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ são as funções de $W^{k,p}(\Omega)$ que "se anulam"no bordo de Ω. Antes porém, vejamos uma interessante extensão do Lema 8.15 para as funções de $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Teorema 8.17. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado e $1 \leq p < n$. Então, para todo $q \in [1, p^*]$ existe $C = C(n, p, q, |\Omega|) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Conforme vimos antes da definição $W_0^{1,p}(\Omega)$, o resultado vale quando $q = p^*$. Para o caso em que $q \in [1, p^*)$ basta usar Hölder para obter

$$\int |u|^q \leq \left(\int |u| \right)^{q/p^*} |\Omega|^{(p^*-q)/p^*},$$

o que mostra que a imersão $L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua para todo $q \in [1, p^*]$. Desse modo,

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_q\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \tilde{C}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

o que conclui a prova do teorema. □

Destacamos abaixo um importante caso particular do resultado acima.

Corolário 8.18 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado e $1 \leq p < n$. Então existe $C = C(n, p, |\Omega|) > 0$ tal que,*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Observação 8.19. Uma consequência importante do resultado acima é que podemos definir em $W_0^{1,p}(\Omega)$ a seguinta norma

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \tag{8.10}$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, basta notar que se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ então

$$\begin{aligned} \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} &= \int_\Omega |\nabla u|^p \leq \|u\|^p_{1,p} = \int_\Omega |u|^p + \int_\Omega |\nabla u|^p \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u|^p + C^p \int_\Omega |\nabla u|^p \leq \tilde{C} \int_\Omega |\nabla u|^p = \tilde{C} \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Assim, $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e, além disso, essa norma é equivalente à norma usual $\|\cdot\|_{1,p}$. Note que a expressão (8.10) **não** define uma norma em $W^{1,p}(\Omega)$. De fato, basta notar que, quando Ω é limitado, a função não nula $u \equiv 1$ está em $W^{1,p}(\Omega)$ mas $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 0$.

Como consequência imediata do Teorema 8.17 e da observação acima temos o seguinte resultado.

Teorema 8.20 (Imersão de $W_0^{1,p}$, $1 \leq p < n$)**.** *Se $1 \leq p < n$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado, então vale a imersão*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

qualquer que seja $1 \leq q \leq p^*$.

Ressaltamos nesse ponto que a Desigualdade de Poincaré (e portanto o teorema acima) pode não valer se Ω é ilimitado (cf. Exercício 8.15). Contudo, pode-se mostrar que ela vale se Ω é limitado em uma direção, em particular temos a imersão acima no caso em que $\Omega \subseteq (a,b) \times \mathbb{R}^{n-1}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Observe que o ponto fundamental para a prova de (8.9) para funções de $W_0^{1,p}(\Omega)$ foi usar um processo de aproximação por funções em $C_0^\infty(\Omega)$. Uma vez que toda função de $W_0^{1,p}(\Omega)$ é limite de funções desse tipo seria natural supor que as funções de $W_0^{1,p}(\Omega)$ se anulam na fronteira de $\partial\Omega$. Contudo, essa afirmação não faz sentido visto que $\partial\Omega$ tem medida n-dimensional de Lebesgue nula e que funções no espaço de Sobolev são sempre definidas a menos de conjuntos de medida nula.

No entanto, quando Ω é de classe C^1, sabemos que toda função de $W^{1,p}(\Omega)$ pode ser aproximada por funções $u_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Note que faz sentido falar dos valores de u_m em $\partial\Omega$. É possível então introduzir um operador que nos permite falar dos valores de fronteira de uma função no espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$. Mais especificamente, vale o seguinte resulatdo, cuja prova pode ser encontrada em [22, Teorema 1, Seção 5.5].

Teorema 8.21 (Teorema do Traço)**.** *Suponha que Ω é um aberto limitado de classe C^1 e que $1 \leq p < \infty$. Então existe um operador linear limitado*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tal que,

(i) $Tu = u_{|\partial\Omega}$ *se* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *;*

(ii) *existe* $C = C(p, \Omega) > 0$ *tal que, para toda* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *vale*

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

O operador acima é chamado *operador traço.* Conforme dito anteriormente, ele nos permite identificar Tu como sendo os valores, na fronteira, de uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$. É importante ressaltar que a existência desse operador está ligada com o fato das funções de $W^{1,p}(\Omega)$ possuirem deriva fraca. Conforme pode ser visto no Exercício 8.13, uma construção semelhante não pode ser feita de $L^p(\Omega)$ em $L^p(\partial\Omega)$. Assim, não existe uma maneira natural de falar dos valores de fronteira de uma função $u \in L^p(\Omega)$.

Suponha que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e seja $(u_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Como o operador traço é contínuo temos que

$$Tu = \lim_{m\to\infty} Tu_m = 0.$$

Desse modo, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset \ker T$. Um argumento mais sofisticado mostra que a recíproca é verdadeira, isto é, vale o seguinte resultado (cf. [22, Teorema 2, Seção 5.5]), que justifica a afirmação de que as funções de $W_0^{1,p}(\Omega)$ valem zero no bordo de $\partial\Omega$

Teorema 8.22 (Caracterização de $W_0^{1,p}$ em relação ao traço)**.** *Suponha que Ω é um aberto limitado de classe C^1, $1 \leq p < \infty$ e que $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se, $Tu = 0$ em $\partial\Omega$.*

No que segue vamos tentar provar um resultado análogo ao Teorema 8.20 para o espaço $W^{1,p}(\Omega)$. Observe que agora as funções podem não ter traço igual a zero e portanto o argumento de extensão utilizado na prova de (8.9) não se aplica mais.

Uma idéia seria estender uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ simplesmente fazendo $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Contudo isso pode criar descontinuidades na fronteira de Ω, de modo que a função estendida pode nem possuir derivada fraca.

O próximo resultado mostra que, se Ω é regular, então é possível estender as funções de $W^{1,p}(\Omega)$ de modo que a função estendida pertença a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e, além disso, tenhamos o controle do suporte da função. Diferentemente do Lema 8.15, o resultado de extensão abaixo vale para $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 8.23 (Teorema de extensão)**.** *Suponha que Ω é um aberto limitado de classe C^1 e que $\widetilde{\Omega}$ é um aberto tal que $\Omega \subset\subset \widetilde{\Omega}$. Se $1 \leq p \leq \infty$, então existe um operador linear limitado*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que, para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, vale

(i) $(Eu)(x) = u(x)$ *q.t.p. em* Ω *;*

(ii) $\operatorname{supp} Eu \subset \widetilde{\Omega}$ *;*

(iii) *existe* $C = C(p, \Omega, \widetilde{\Omega}) > 0$ *tal que*

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

A demonstração do resultado acima pode ser encontrada em [22, Teorema 1, Seção 5.4]. Para uma versão mais geral com menos exigência de regularidade no bordo, veja [1, Teorema 4.2.6]. O operador E acima é chamado *operador de prolongamento.* Pode-se mostrar que o mesmo resultado vale se $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ ou se o complementar de Ω for um aberto limitado de classe C^1.

Usando o operador de prolongamento podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 8.24 (Imersão de $W^{1,p}$, $1 \leq p < n$)**.** *Se $1 \leq p < n$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe C^1, então vale a imersão*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

qualquer que seja $1 \leq q \leq p^*$.

Demonstração. Vamos considerar primeiro o caso $q = p^*$. Queremos então obter uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Seja então $u \in W^{1,p}(\Omega)$, B uma bola tal que $\Omega \subset\subset B$ e considere $\bar{u} := Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ a extensão de u dada pelo teorema acima. Uma vez que o suporte de $\bar{u}$ está contido na bola, existe uma sequência $(u_m) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$u_m \to \bar{u} \quad \text{em } W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Segue do Lema 8.15 que

$$\|u_m - u_l\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\|\nabla u_m - \nabla u_l\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Como (u_m) converge em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ concluímos que o lado direito da expressão acima tende a zero quando $l, m \to \infty$. Desse modo $(u_m) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ é uma sequência de Cauchy, e portanto

$$u_m \to \bar{u} \quad \text{em } L^{p^*}(\mathbb{R}^n).$$

Logo passando a expressão

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

ao limite e usando o Teorema 8.23 obtemos

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|Eu\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\|\nabla(Eu)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

onde a constante $C = C(n, p, \Omega) > 0$ é independente de u.

Considere agora $1 \leq q < p^*$. Conforme visto na prova do Teorema 8.17 temos a imersão contínua $L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$. Logo

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Observação 8.25. Um ponto que merece destaque é que a imersão de $W_0^{1,p}(\Omega)$, diferente daquela de $W^{1,p}(\Omega)$, não exige regularidade da fronteira de $\partial\Omega$. Isso ocorre porque, no caso de $W_0^{1,p}(\Omega)$, não precisamos usar o operador de prolongamento.

Observação 8.26. O argumento final da demonstração acima pode ser ligeiramente adaptado para provar imersões para domínios mais gerais, inclusive ilimitados. De fato, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é tal que a imersão $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ é contínua. Desse modo, se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $u \in L^p(\Omega) \cap L^{p^*}(\Omega)$. Fixado $q \in (p, p^*)$ podemos usar as desigualdades $1/p^* < 1/q/ < 1/p$ para obter $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\frac{1}{q} = (1-\theta)\frac{1}{p} + \theta\frac{1}{p^*}$$

Segue então da desigualdade de Hölder que

$$\int_\Omega |u|^q = \int_\Omega |u|^{\theta q}|u|^{(1-\theta)q} \leq \left(\int_\Omega |u|^{\theta q \frac{p^*}{\theta q}}\right)^{\frac{\theta q}{p^*}} \left(\int_\Omega |u|^{(1-\theta)q\frac{p}{(1-\theta)q}}\right)^{\frac{(1-\theta)q}{p}},$$

isto é,

$$\|u\|_q \leq \|u\|_{p^*}^\theta \|u\|_p^{1-\theta}$$

Lembrando agora que estamos supondo $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ e usando a definição de $\|\cdot\|_{1,p}$, obtemos

$$\|u\|_q \leq C_1\|u\|_{1,p}^\theta \|u\|_p^{1-\theta} \leq C\|u\|_{1,p}^\theta \|u\|_{1,p}^{1-\theta} = C\|u\|_{1,p}, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Portanto, se $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, p^*]$, independente de Ω ser limitado ou regular.

Observe que o Teorema 8.24 considera o caso em que $1 \leq p < n$. Uma vez que $p^* = np/(n-p) \to \infty$ quando $p \to n^-$, poderíamos pensar que $W^{1,n}(\Omega) \subset L^\infty$. Conforme podemos ver pelo Exerício 8.9, isso não é verdade em geral. No entanto, podemos usar o Teorema 8.24 para considerar o caso $p = n$ como segue.

Teorema 8.27 (Imersão de $W^{1,n}$)**.** *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe C^1, então vale a imersão*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

qualquer que seja $q \geq 1$.

Demonstração. Vamos considerar somente o caso $n > 1$ (cf. Exercício 8.10). Para $q \geq 1$ fixado podemos usar a definição de expoente crítico de Sobolev para obter

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} (n - \varepsilon)^* = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{n(n-\varepsilon)}{n - (n - \varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{n(n-\varepsilon)}{\varepsilon} = \infty.$$

Desse modo, para $\varepsilon > 0$ pequeno, devemos ter $(n - \varepsilon)^* > q$. É suficiente agora observar que

$$W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,n-\varepsilon} \hookrightarrow L^{(n-\varepsilon)^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

O teorema está provado. $\square$

Vamos considerar o caso $p > n$. Começaremos com o seguinte lema:

Lema 8.28. *Se $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ então existe uma constante $C = C(n)$ tal que*

$$\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} |u(y) - u(x)| dy \leq C \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x - y|^{n-1}} dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e toda bola $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Fixemos $w \in \partial B_1(0)$ e $0 < s < r$, então

$$\begin{aligned} |u(x + sw) - u(x)| &= \left| \int_0^s \frac{d}{dt} u(x + tw)\, \mathrm{d}t \right| \\ &= \left| \int_0^s \nabla u(x + tw) \cdot w \, \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_0^s |\nabla u(x + tw)| \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_1(0)} |u(x+sw)-u(x)|\,\mathrm{d}S_w &\leq \int_{\partial B_1(0)} \left(\int_0^1 |\nabla u(x+tw)|\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}S_w \\
&= \int_0^1 \left(\int_{\partial B_1(0)} |\nabla u(x+tw)|\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}S_w \\
&= \int_0^1 \left(\int_{\partial B_t(x)} |\nabla u(y)| \frac{1}{t^{n-1}}\,\mathrm{d}S_y\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^s \left(\int_{\partial B_t(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^{n-1}}\,\mathrm{d}S_y\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{B_s(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

e portanto

$$\int_{\partial B_1(0)} |u(x+sw)-u(x)|\,\mathrm{d}S_w \leq \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,\mathrm{d}y.$$

Multiplicando por s^{n-1} e integrando, com respeito a s, no intervalo $[0,r]$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{r^n}{n}\int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,\mathrm{d}y &\geq \int_0^r \left(\int_{\partial B_1(0)} |u(x+sw)-u(x)|\,\mathrm{d}S_w\right) s^{n-1}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^r \left(\int_{\partial B_s(x)} \frac{|u(y)-u(x)|}{s^{n-1}}\,\mathrm{d}S_y\right) s^{n-1}\mathrm{d}s \\
&= \int_{B_r(x)} |u(y)-u(x)|\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

o que conclui a prova do lema. □

Lema 8.29. *Se $n < p < \infty$ então existe $C = C(n,p) > 0$ tal que*

$$||u||_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C||u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$, onde $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$ se $p < \infty$ e $\gamma = 1$ se $p = \infty$.

Demonstração. Considere inicialmente o caso $n < p < \infty$ e tome $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$. Como

$$|u(x)| = |u(x)-u(y)+u(y)| \leq |u(x)-u(y)| + |u(y)|,$$

podemos integrar em $B_1(x)$ em relação a y, para obter

$$\int_{B_1(x)} |u(x)|\,\mathrm{d}y \leq \int_{B_1(x)} |u(x)-u(y)|\,\mathrm{d}y + \int_{B_1(x)} |u(y)|\,\mathrm{d}y,$$

ou ainda

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\omega_n}\int_{B_1(x)} |u(x)-u(y)|\,\mathrm{d}y + \frac{1}{\omega_n}\int_{B_1(x)} |u(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Aplicando agora o lema anterior e lembrando que $L^p(B_1(x)) \hookrightarrow L^1(B_1(x))$, vem

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq C_1 \int_{B_1(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,\mathrm{d}y + C_2||u||_{L^1(B_1(x))} \\ &\leq C_1 \int_{B_1(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,\mathrm{d}y + C_3||u||_{L^p(B_1(x))}. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Vamos usar a desigualdade de Hölder para estimar a primeira integral do lado direito acima. Seja então $p' = p/(p-1)$ o expoente conjugado de p e observe que

$$\int_{B_1(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,\mathrm{d}y \leq \left(\int_{B_1(x)} |\nabla u(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}}\,\mathrm{d}y\right)^{(p-1)/p} \tag{8.12}$$

A primeira integral do lado esquerdo acima é finita porque $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Para ver que a segunda também é finita basta notar que

$$\int_{B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}}\,\mathrm{d}y = \int_{B_1(0)} |w|^{-(n-1)\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}w$$

e lembrar que $\int_{B_1(0)} |w|^{-\gamma}\mathrm{d}w < \infty$ se, e semente se, $\gamma < n$. Quando $\gamma = (n-1)p/(p-1)$ esta condição de integrabilidade é exatamente $n < p$, que é o caso que estamos considerando. Dessa forma

$$\int_{B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}}\,\mathrm{d}y = C(n,p) = C < \infty.$$

Substituindo a igualdade acima e (8.12) em (8.11), concluímos que

$$|u(x)| \leq C_1 C^{(p-1)/p}\|u\|_{L^p(B_1(x))} + C_3||u||_{L^p(B_1(x))} \leq C_4\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

e portanto

$$||u||_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_4||u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{8.13}$$

A fim de estimar $H_\gamma[u]$ procedemos como segue: escolha $x, y \in \mathbb{R}^n$ com $x \neq y$ e faça

$$r := |x-y|, \quad \Omega := B_r(x) \cap B_r(y).$$

Observe que para todo $z \in \mathbb{R}^n$,

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u(z)| + |u(z) - u(y)|$$

e portanto podemos integrar em Ω com respeito a z para obter

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u(x) - u(z)| \, \mathrm{d}z + \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u(z) - u(y)| \, \mathrm{d}z \tag{8.14}$$

Como $B_{r/2}(\frac{x+y}{2}) \subseteq \Omega$ temos que

$$|\Omega| \geq \left| B_{\frac{r}{2}} \left(\frac{x+y}{2} \right) \right| = \omega_n \left(\frac{r}{2} \right)^n .$$

Logo, podemos usar o lema anterior e a desigualdade de Hölder, para obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u(x) - u(z)| \, \mathrm{d}z &\leq \frac{2^n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} |u(x) - u(z)| \, \mathrm{d}z \\ &\leq C_5(n) \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(z)|}{|x - z|^{n-1}} \, \mathrm{d}z \\ &\leq C_5 \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{B_r(0)} |w|^{-(n-1)\frac{p}{p-1}} \, \mathrm{d}w \right)^{p/(p-1)} . \end{aligned}$$

Mas

$$\int_{B_r(0)} |w|^{-(n-1)\frac{p}{p-1}} \, \mathrm{d}w = \int_0^r \int_{\partial B_s(0)} |w|^{-(n-1)p/(p-1)} \, \mathrm{d}S_w \, \mathrm{d}s = C_6(n,p) r^{1-\frac{n}{p}} .$$

Assim,

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u(x) - u(y)| \, \mathrm{d}z \leq C_7 r^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

A expressão acima e (8.14) implicam que

$$|u(x) - u(y)| \leq 2C_7 r^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_8 r^{1-\frac{n}{p}} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} .$$

Como $r = |x - y|$, concluímos que para $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$ vale

$$H_\gamma[u] \leq C_8 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} ..$$

Isso, juntamente com (8.13), mostra que

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} ,$$

o que conclui aprova no caso em que $n < p < \infty$.

Para o caso $p = \infty$ basta usar a definição da norma em $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ e o Teorema do Valor Médio. Os detalhes são deixados a cargo do leitor. $\square$

Usando o lema acima e argumentando como na prova do Teorema 8.24 podemos provar o seguinte (cf. Exercício 8.14).

Teorema 8.30 (Imersão de $W^{1,p}$, $n < p$)**.** *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe C^1, então vale a imersão*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega}).$$

É importante nesse ponto entender o significado da imersão acima. Lembre que as funções de $W^{1,p}(\Omega)$, por pertencerem ao espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$, são definidas a menos de conjuntos de medida nula. Sendo assim, o teorema acima diz que,se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com $n < p$, então existe $u^* \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega})$ tal que

$$u(x) = u^*(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Um outro ponto que merece destaque é que a imerão acima também vale se $p = +\infty$. Nesse caso, mostra-se que $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ se, e somente se, u é Lipschitziana em Ω (cf. [22, Teorema 4, Seção 5.8])

Os resultados de imersão apresentado até agora podem ser sumarizados como segue: se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe C^1 então

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^q(\Omega),\ 1 \le q \le p^* = \frac{np}{n-p}, \text{ se } 1 \le p < n, \\[2mm] L^q(\Omega),\ q \ge 1, \quad \text{se } p = n, \\[2mm] C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega}), \quad \text{se } p > n. \end{cases}$$

Vamos agora considerar imersões para o espaço $W^{2,p}(\Omega)$. Suponha inicialmente que $1 \le p < n$ e seja $u \in W^{2,p}(\Omega)$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sendo um aberto limitado de classe C^1. Note inicialmente que, para cada $i = 1, \ldots, n$, vale

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

Uma vez que $u \in W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ concluímos que $u \in W^{1,p^*}(\Omega)$. Vamos supor adicionalmente que $1 \le p^* < n$, isto é, que $2p < n$. Nesse caso

$$W^{1,p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{(p^*)^*}(\Omega),$$

onde
$$(p^*)^* = \frac{np^*}{n-p^*} = \frac{np}{n-2p}.$$
Concluímos então que, se $2p < n$, vale a seguinte imersão
$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-2p}}(\Omega).$$

O caso $n < 2p$ pode ser tratado de maneira análoga. Iterando esse processo obtemos o seguinte resultado de imersão.

Teorema 8.31 (Imersão de $W^{k,p}$)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Então,*

(i) *se $kp < n$*
$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$
para todo $1 \leq q \leq \frac{np}{n-kp}$;

(ii) *se $kp = n$*
$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$
para todo $q \geq 1$;

(iii) *se $kp > n$*
$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\overline{\Omega}),$$
onde
$$\gamma = \begin{cases} [\frac{n}{p}] + 1 - \frac{n}{p}, & \textit{se } \frac{n}{p} \notin \mathbb{Z} \\ \textit{qualquer número pertencente a } (0,1), & \textit{se } \frac{n}{p} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Observação 8.32. O teorema acima continua válido se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto qualquer (possivelmente ilimitado) de classe C^1 com a restrição $q \geq p$ nos dois primeiros itens (cf. [1, Teorema 5.4]).

8.4.1 Imersões Compactas

Teorema 8.33 (Rellich-Kondrachov)**.** *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe C^1 então as seguintes imersões são compactas.*

(i) *se* $1 \leq p < n$,

$$W^{1,p}(\Omega) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),$$

para todo $1 \leq q < p^*$ *;*

(ii) *se* $p = n$,

$$W^{1,p}(\Omega) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),$$

para todo $q \geq 1$ *;*

(iii) *se* $n < p$,

$$W^{1,p}(\Omega) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}),$$

para todo $0 < \gamma < 1 - n/p$.

Além disso, as imersões $W_0^{1,p}(\Omega)$ *nos espaços acima são sempre compactas, independentemente da regularidade de* Ω.

Demonstração. Consideremos primeiro o caso $1 \leq p < n$. Fixado $1 \leq q < p^*$, seja $(u_m) \subset W^{1,p}(\Omega)$ uma sequência limitada. Usando o operador de prolongamento podemos supor que u_m está definida em todo o $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{supp} u_m \subset B$ onde B uma bola de raio suficientemente grande, e finalmente

$$\|u_m\|_{W^{1,p}(B)} \leq M.$$

Para cada $\varepsilon > 0$ considere $u_m^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u_m$. Podemos supor que $\varepsilon > 0$ é pequeno de modo que o suporte de cada u_m^ε está contido em B. O Teorema segue das duas afirmações abaixo

Afirmação 1: a sequência $(u_m^\varepsilon)_{m\in\mathbb{N}}$ é equicontínua e equilimitada.

Afirmação 2: $\lim_{\varepsilon\to 0^+} u_m^\varepsilon = u_m$, uniformemente em $L^q(B)$.

Vamos assumir a veracidade das duas afirmações acima e ver como o teorema segue delas.

Fixado $\delta > 0$, podemos usar a Afirmação 2 para obter $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(B)} < \frac{\delta}{4}, \quad m = 1, 2, ...$$

Agora, usando a Afirmação 1 e o Teorema de Ascoli-Arzelá, obtemos uma subsequência $(u^\varepsilon_{m_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset (u^\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente para u. Em particular, como Ω é limitado,

$$\limsup_{j,k\to+\infty} \|u^\varepsilon_{m_j} - u^\varepsilon_{m_k}\|_{L^q(B)} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(B)} &\leq \|u_{m_j} - u^\varepsilon_{m_j}\|_{L^q(B)} + \|u^\varepsilon_{m_j} - u^\varepsilon_{m_k}\|_{L^q(B)} \\ &+ \|u^\varepsilon_{m_k} - u_{m_k}\|_{L^q(B)},\end{aligned}$$

e portanto

$$\limsup_{j,k\to+\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(B)} < \delta.$$

Tomando agora $\delta_j = 1/j$, $j = 1, 2, \ldots$, e usando um processo diagonal obtemos uma subsequência de (u_m), que é uma sequência de Cauchy em $L^q(B)$. O resultado segue do fato dos espaços $L^q(\Omega) \subset L^q(B)$ serem completos.

Resta somente mostar as duas afirmações. Para a primeira, observe que

$$\begin{aligned}u^\varepsilon_m(x) &= \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y) u_m(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \varepsilon^{-n} \int_{B_\varepsilon(x)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u_m(y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}|u^\varepsilon_m(x)| &\leq \varepsilon^{-n}\|\eta\|_\infty \|u_m\|_{L^1(B_\varepsilon(x))} \\ &\leq C_1\varepsilon^{-n}\|u_m\|_{L^1(\widetilde{\Omega})} \\ &\leq C_2\varepsilon^{-n}\|u_m\|_{W^{1,p}(\widetilde{\Omega})} \\ &\leq C_3\varepsilon^{-n},\end{aligned}$$

o que mostra que $(u^\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é equilimitada. De maneira análoga mostra-se que

$$|\nabla u^\varepsilon_m(x)| \leq C_4\varepsilon^{-n-1},$$

e portando a derivada das funções u^ε_m formas uma sequência equilimitada no conjunto convexo B. Segue facilmente do Teorema do Valor Médio que a sequência $(u^\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é equicontínua, ficando portanto provada a primeira afirmação.

Para a prova da Afirmação 2 note inicialmente que

$$\begin{aligned} u_m^\varepsilon(x) &= \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)u_m(y)\,\mathrm{d}y = \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(z)u_m(x-z)\,\mathrm{d}z \\ &= \varepsilon^n \int_{B_1(0)} \eta_\varepsilon(\varepsilon y)u_m(x-\varepsilon y)\,\mathrm{d}y = \varepsilon^n \int_{B_1(0)} \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{|\varepsilon y|}{\varepsilon}\right) u_m(x-\varepsilon y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{B_1(0)} \eta(|y|)u_m(x-\varepsilon y)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Logo, se supormos que u_m é de classe C^1, temos

$$\begin{aligned} u_m^\varepsilon(x) - u_m(x) &= \int_{B_1(0)} \eta(|y|)(u_m(x-\varepsilon y) - u(x))\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{B_1(0)} \eta(|y|) \int_0^1 \frac{d}{dt}(u_m(x-t\varepsilon y))\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\ &= -\varepsilon \int_{B_1(0)} \eta(|y|) \int_0^1 \nabla u_m(x-t\varepsilon y)\cdot y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_B |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)|\,\mathrm{d}x &\leq \varepsilon \int_{B_1(0)} \eta(|y|) \int_0^1 \int_B |\nabla u_m(x-\varepsilon ty)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\ &\leq \varepsilon \int_B |\nabla u_m(z)|\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Uma vez que, $C^\infty(\bar{B})$ é denso em $W^{1,p}(B)$, podemos usar um argumento de densidade para ver que a estimativa acima vale se $u_m \in W^{1,p}(B)$.

A estimativa acima, a limitação de B e a limitação de (u_m) em $W^{1,p}(B)$, nos fonecem

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(B)} \leq \varepsilon\|\nabla u_m\|_{L^1(B)} \leq \varepsilon C_5 M,$$

o que mostra que $u_m^\varepsilon \to u_m$ em $L^1(B)$, uniformemente em m, e portanto a Afirmação 2 é verdadeira se $q = 1$.

Para o caso geral $1 < q < p^*$, argumentamos como na Observação 8.26 para obter $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(B)} &\leq \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(B)}^{1-\theta}\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(B)}^{\theta} \\ &\leq \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(B)}^{1-\theta}\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{W^{1,p}(B)}^{\theta} \\ &\leq C_6\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(B)}^{1-\theta}. \end{aligned}$$

O item (i) segue agora da convergência uniforme em $L^1(B)$.

Para mostrar o item (ii) vamos considerar somente o caso $p = n > 1$. Fixado $q \geq 1$ escolhemos $\varepsilon > 0$ pequeno de modo que $(n-\varepsilon)^* > q$. Temos então

$$W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,(n-\varepsilon)}(\Omega) \overset{\text{cpct.}}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),$$

e o resultado segue do fato da composição de um operador contínua com um operador compacto ser compacta.

O item (iii) segue facilmente do diagrama abaixo

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-n/p}(\overline{\Omega}) \overset{\text{cpct.}}{\hookrightarrow} C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Para verificar que no caso de $W_0^{1,p}(\Omega)$ vale a compacidade das imersções acima sem hipóteses de regularidade em Ω procedemos como segue. Consideramos uma bola aberta B tal que $\Omega \subset\subset B$ e estendemos as funções $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para todo a bola fazendo $u \equiv 0$ em $\Omega \setminus B$. Como a bola é de classe C^1, podemos proceder como acima para obter a compacidade das imersões. $\square$

8.5 Exercícios

Atenção: Nos exercícios abaixo, a menos que se diga o contrário, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe C^1.

8.1. Seja H um espaço vetorial real com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Prove os itens a seguir.

a) **(desigualdade de Cauchy-Schwarz)** Para quaisquer u, $v \in H$ vale

$$|\langle u, v\rangle_H| \leq \sqrt{\langle u, u\rangle_H}\sqrt{\langle v, v\rangle_H}.$$

Conclua que a aplicação $\|\cdot\|_H : H \to \mathbb{R}$ dada por $\|u\|_H = \sqrt{\langle u, u\rangle_H}$ define uma norma em H.

b) (**Teorema da representação de Riesz**) Se H é completo e $T : H \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo então existe um único $u_T \in H$ tal que

$$T(u) = \langle u, u_T\rangle_H, \quad \text{para todo } u \in H.$$

Além disso, $\|u\|_H = \|T\|_{H'}$.

8.2. Prove que
$$\langle u, v\rangle_1 = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\,\mathrm{d}x$$
define um produto interno em $C^1(\overline{\Omega})$.

8.3. Calcule a derivada fraca da função $u(x) = |x| \in L^1_{loc}(-1,1)$.

8.4. Mostre que a função sinal $u(x) = |x|/x \in L^1_{loc}(-1,1)$ não possui derivada fraca.

Sugestão: considere $(\phi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \phi_n(x) \leq 1$, $\phi_n(0) = 1$ e $\phi_n(x) \to 0$ para $x \neq 0$.

8.5. Seja $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ a bola unitária, $1 < p < \infty$ e $\gamma > 0$ tal que $\gamma < (n-p)/p$. Mostre que a função $u(x) := |x|^{-\gamma}$ está em $W^{1,p}(B)$.

8.6. Usando a definição de derivada fraca mostre que $H^1(\Omega)$ é um espaço vetorial real. Em seguida, verifique que a forma bilinear $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ do Exercício 8.2 define um produto interno em $H^1(\Omega)$.

8.7. Se $\Omega = (-1,1)$ e
$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-1,0), \\ x & \text{se } x \in [0,1), \end{cases}$$
então $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, mas u não pode ser aproximada nesse espaço por funções de classe $C^\infty(\Omega)$.

8.8. Se $\Omega = (-1,0) \cup (0,1)$ e
$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-1,0), \\ 1 & \text{se } x \in (0,1), \end{cases}$$
então $u \in W^{1,p}(\Omega)$ para todo $p \geq 1$, mas u não pode ser aproximada nesse espaço por funções de classe $C^1(\overline{\Omega})$.

8.9. Se $n > 1$ então a função $u(x) = \log\left(\log\left(1 + \frac{1}{|x|}\right)\right)$ é ilimitada em $B_1(0)$ e $u \in W^{1,n}(B_1(0))$.

8.10. Se $u \in W^{1,p}(0,1)$ para algum $1 \leq p < \infty$, então existe uma função u^* absolutamente contínua tal que $u(x) = u^*(x)$ q.t.p. em $(0,1)$. Além disso u' (que existe q.t.p. em (0,1)) pertence a $L^p(0,1)$.

8.11. Mostre que $H_0^1(\Omega)$ pode ser visto como subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Sugestão: dada $u \in H_0^1(\Omega)$, considere $\overline{u} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $\overline{u} \equiv u$ em Ω, $\overline{u} \equiv 0$ em Ω^c. Em seguida, mostre que $\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} = \overline{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}$

8.12. Resolva os itens abaixo.

a) Se $u \in H_0^1(\Omega)$ então $|u| \in H_0^1(\Omega)$ e vale

$$(|u|)_{x_i} = \begin{cases} u_{x_i}, & \text{se } u \geq 0, \\ 0, & \text{se } u = 0, \\ -u_{x_i}, & \text{se } u \leq 0. \end{cases}$$

Sugestão: considere, para $\varepsilon > 0$, as funções $\phi_\varepsilon(t) = (t^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon$, prove que $\phi_\varepsilon \circ u \in H_0^1(\Omega)$ e use o Teorema da Convergência Dominada.

b) Se $u \in H_0^1(\Omega)$ e $u^{\pm} = \max\{\pm u, 0\}$, então $u^{\pm} \in H_0^1(\Omega)$.

8.13. Não existe um operador linear limitado

$$T : L^p(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tal que $Tu = u|_{\partial\Omega}$ sempre que $u \in L^p(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

8.14. Prove o Teorema 8.30.

8.15. Mostre que a desigualdade de Poincaré não vale em $\mathbb{R}^N$.

Sugestão: tome $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \phi(x) \leq 1$, $\phi \equiv 1$ em $B_1(0)$, $\phi \equiv 0$ em $B_1(0)^c$ e considere a sequência $\phi_n(x) = \phi(x/n)$.

8.16. Mostre que a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ não é compacta.

Sugestão: tome $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que supp $\phi \subset B_1(0)$, $\|\phi\|_{L^2\mathbb{R}^N} = 1$, e considere a sequência $\phi_n(x) = \phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \phi(x_1 + n, x_2, \ldots, x_N)$.

Referências

[1] R. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[2] S. Agmon S., A. Douglis A., L. Nirenberg, *Estimatives near the boundary for solutions of elliptic P. D. E. satisfying a general boundary value condition I*, Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), pp. 623-727.

[3] S. Ahmad, A.C. Lazer, J.L. Paul, *Elementary critical point theory and pertubations of elliptic boundary value problems at resonance*, Indiana Univ. Math. J. **25** (1976), 933-944.

[4] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **149** (1973), 349-381.

[5] T. Bartsch, *Topological methods for variational problems with symmetries*, Lecture Notes in Mathematics, **1560**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[6] T. Bartsch, Z.-Q. Wang, *On the existence of sign changing solutions for semilinear Dirichlet problems*, Topol. Meth. Nonlinear Anal. **7** (1996), 115-131.

[7] P. Bartolo, V. Benci and D. Fortunato, *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity*, Nonlinear Anal. **7** (1983), 981-1012.

[8] H. Berestycki and D. G. Figueiredo, *Double resonance and semilinear elliptic problems*, Comm. PDE **6** (1981), 91-120.

[9] H. Brézis, *Analise Functionelle*, Masson, Paris, 1983.

[10] H. Brézis, E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), 486-490.

[11] H. Brézis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437-477.

[12] A. Castro, J. Cossio, J.M. Neuberger, *A sign-changing solution for a superlinear Dirichlet problem*, Rocky Mt. J. Math. **27** (1997), 1041-1053.

[13] A. Cauchy, *Méthode générale pour la résoltion des systémes d'équations simultannées*, C. R. Acad. Sci. Paris **25** (1847), 536-538.

[14] G. Cerami, *Un criterio di essistenza per i punti critici su varietà illimitate*, Rend. Accad. Sc. Lett. Inst. Lombrado **112** (1978), 332-336.

[15] D. Clark, *A variant of the Ljusternik-Schnirelman theory*, Indiana J. Math. **22** (1973), 65-74.

[16] C.V. Coffman, *A minimum-maximum principle for a class of nonlinear integralequations*, J. Analyse Math. **22** (1969), 391-419.

[17] P.E. Conner, E.E. Floyd, *Fixed point free evolutions and equivariant maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1966), 416-441.

[18] D.G. Costa, C.A. Magalhães, *Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity*, Nonlinear Anal. **23** (1994), 1401-1412.

[19] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlim, 1986.

[20] W.Y. Ding, W-M. Ni, *On the existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic equation*, Arch. Rat. Mech. Anal. **91** (1986), 283-308.

[21] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. **47** (1974), 324-353.

[22] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Math. Soc. (1998).

[23] M.F. Furtado, E.A.B. Silva, Double resonant problems which are locally non-quadratic at infinity, Electron. J. Diff. Eqns., Conf. 06, 2001, 155-171.

[24] M.F. Furtado, L.A. Maia and E.A.B. Silva, *Solutions for a resonant elliptic system with coupling in* $\mathbb{R}^N$, Comm. Partial Differential Equations **27** (2002), 1515–1536.

[25] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order* Springer-Verlag, Berlin, 1977 (2a edição 1984).

[26] M. A. Kranoselskii, *Topological methods in the theory of nonlineaar inetgral equations*, Macmillan, New York, 1964.

[27] E.M. Landesman and A.C. Lazer *Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance*, J. Math. Mech. **19** (1969/1970) 609–623

[28] A.C. Lazer and S. Solimini, *Nontrivial solutions of operators equations and Morse indices of critical points of min-max type*, Nonlinear Anal. **12** (1988), 761-775.

[29] P.L. Lions, *The concentration compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case*, Ann. Ins. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire **1** (1984), 109-145 e 223-283.

[30] L. Ljusternik, L. Schnirelmann, *Méthods topologiques dans les problémes variationnels*, Hermann, Paris, 1934.

[31] N.G. Meyers e J. Serrin, $H = W$, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **51** (1964), 1055–1056.

[32] O.H. Miyagaki, M.A.S. Souto, *Superlinear problems withou Ambrosetti and Rabinowitz growth condition*, J. Differential Equations **245** (2008), 3628-3638.

[33] R.S. Palais, *Morse theory on Hilbert manifolds*, Topology **2** (1963), 299-340.

[34] R.S. Palais, *Ljusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds*, Topology **5** (1966), 115-132.

[35] R.S. Palais, *Critical point theory and the minimax principle*, Nonlinear Funct. Anal. App. **15** (1970), 185-212.

[36] R.S. Palais, S. Smale, *A generalized Morse theory*, Bull. Am. Math. Soc. **70** (1964), 165-171.

[37] K. Perera and M. Schechter, *Morse index estimates in Saddle Point theorems without a finite-dimensional closed loop*, Indiana Univ. Math. J. **47** (1998), 1083-1095.

[38] S.I. Pohozaev, *On the eigenfunctions of the equation* $\Delta u+\lambda f(u)=0$, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR **165** (1965), 36-39.

[39] P.H. Rabinowitz, *Some minimax theorems and applications to semilinear elliptic partial differential equations*, Nonlinear Analysis: A collection of papers in honor of Erich Röthe, Academic Press, New York, 1978, 161-177.

[40] P.H. Rabinowitz, *Some critical point theorems ans applications to semilinear elliptic partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci (4) **5** (1978), 215-223.

[41] P.H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, C.B.M.S. Regional conference ser. math., American Mathematical Society **65**, 1986.

[42] P.H. Rabinowitz, *Some aspects of nonlinear eigenvalue problems*, Rocky Mount. J. Math. **3** (1973), 161-202.

[43] M. Schechter, *Linking methods in Critical Point Theory*, Birkhäuser, Boston, 1999.

[44] M. Schechter, W. Zou, *Superlinear problems*, Pacific J. Math **214** (2004), 145-160.

[45] E.A.B. Silva, *Critical point theorems and applications to differential equations*, Ph.D. thesis, University of Wisconsin-Madison (1988).

[46] E.A.B. Silva, *Subharmonic solutions for subquadratic Hamiltonian systems*, J. Diff. Eqs. **115** (1995), 120-145.

[47] S. Smale, *Morse theory and nonlinear generalization of the Dirichlet problem*, Ann. Math. **17** (1964), 307-315.

[48] M. Struwe, *Variational Methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[49] Z.-Q. Wang, *On a superlinear elliptic equation*, Ann. Inst. H. Poincaré - An. **8** (1991), 43-57.

[50] M. Willem, *Lectures on critical point theopry*, Trabalho de Matemática **199** (1983), Univ. de Brasília.

[51] M. Willem, *Minimax theorems*, Birkhäuser, Boston, 1996.

[52] W. Zou, *Sign-changing saddle point*, J. Funct. Anal. **219** (2005), 433-468.