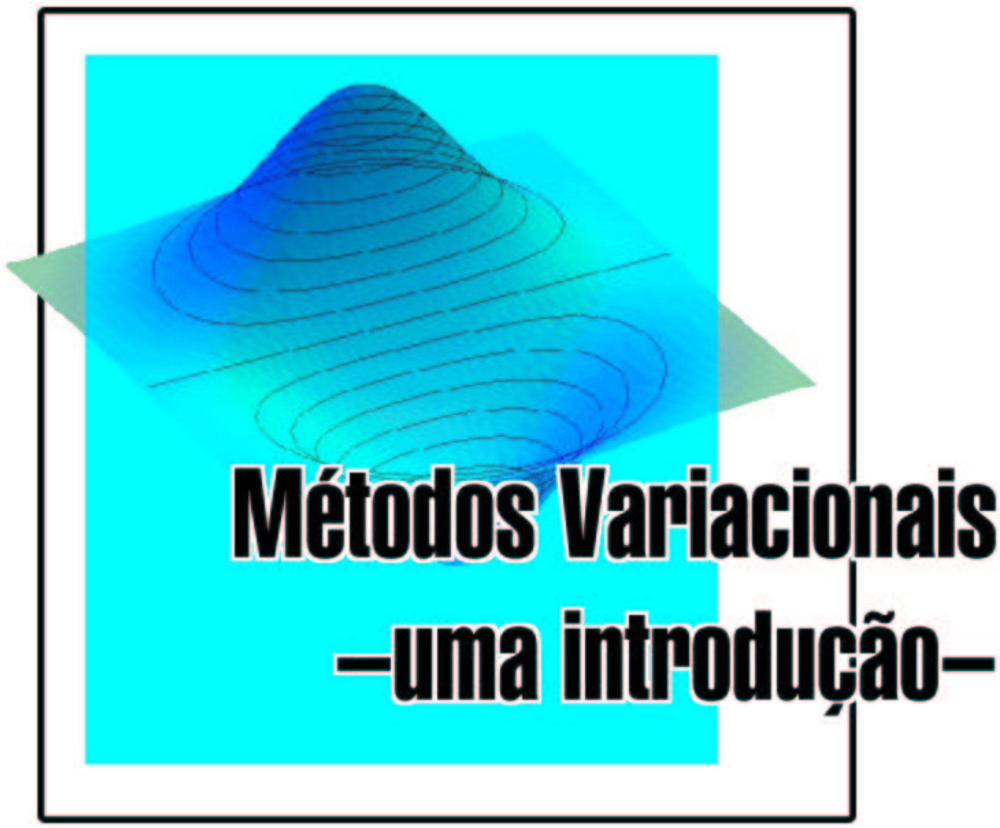
Departamento de Matemática

Trabalhos de Graduação em Matemática n.º 2/96

UnB



Departamento de Matemática

Trabalhos de Graduação em Matemática n.º 2/96

UnB

Métodos Variacionais
–uma introdução–

Marcelo Fernandes Furtado

Capa: Lucas C. S. Ferreira e Roberto S. M. Oliveira

Sumário

Prefácio

A presente monografia foi baseada no artigo do Prof. Djairo G. de Figueiredo entitulado *Métodos Variacionais em Equações Diferencias* e tem como objetivo explorar algumas técnicas de métodos variacionais aplicadas à resolução de problemas de equações diferencias. A partir de um problema desta natureza o que faremos é buscar uma formulação variacional cuja solução nos remeta à resolução do problema original. Tal formulação estará intimamente ligada à procura de pontos críticos de um funcional apropriado. A exposição será feita de maneira inteiramente construtiva, isto é, na medida em que as dificuldades forem surgindo vamos introduzir elementos que nos permitam superá-las.

Iniciaremos o Capítulo 1 tratando um problema linear via métodos de minimização. Isto constituirá parte fundamental do trabalho, tendo em vista o conjunto de conceitos e idéias que serão introduzidos. Após cumprida esta etapa concentraremos nossas atenções em um problema sub-linear que, uma vez entendido o caso linear, não apresentará nenhum tipo de dificuldade.

O Capítulo 2 apresenta um problema superlinear, que se diferenciará dos primeiros pela peculiaridade de que o funcional a ele associado não é limitado nem superiormente nem inferiormente. Neste ponto teremos que lançar mão de outros resultados, utilizando assim o famoso Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti e Rabinowitz, que tem se constituído, juntamente com suas diversas variações e generalizações, uma importante ferramenta no estudo de problemas em Análise não linear. O trabalho se encerra com uma demonstração do Teorema do Passo da Montanha. Tal demonstração utilizará o não menos famoso Lema da Deformação de Clark e o leitor terá oportunidade de notar que, apesar da grande importância do resultado de Ambrosetti e Rabinowitz, a sua demonstração é extremamente simples.

Afim de simplificar a exposição consideraremos somente problemas de equações diferenciais ordinárias. Alguns resultados mais profundos de Análise Funcional serão enunciados e não serão provados. Naturalmente, este é um ponto que merece um cuidado especial em qualquer trabalho desta natureza. A escolha dos resultados que seriam apresentados sem demonstração foi guiada tendo em vista dois aspectos básicos. O primeiro foi o de não estender por demais o texto, evitando assim que nos afastássemos de nosso objetivo principal que é o de explorar algumas técnicas variacionais. O segundo foi a intenção de tornar o texto acessível a estudantes com conhecimentos referentes a um bom curso de Análise Real. Para o leitor interessado nas demonstrações destes resultados recomendamos o livro [1].

Por fim, gostaria de deixar registrado meus sinceros agradecimentos a todo o pessoal do PET, por todos os momentos de descontração que, tenho certeza, foram inesquecíveis e principalmente ao Prof. Célius Antonio Magalhães que, além de sugerir o tema deste trabalho, esteve presente em seus momentos mais delicados, não só através da ajuda na fundamentação teórica mas também em suas sempre valiosas sugestões.

Capítulo 1

Métodos Variacionais

1.1 Problema Linear

Nesta seção, e no que se segue, denotaremos por $C^n[a,b]$ o conjunto das funções $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ que possuem n derivadas contínuas em $[a,b]$. Usaremos também a notação $C_0^n[a,b]$ para denotar o conjunto das função $u \in C^n[a,b]$ tais que $u(a) = u(b) = 0$ e $C_c^n[a,b]$ para o conjunto das funções $u \in C^n[a,b]$ que se anulam fora de um intervalo fechado contido em (a,b). Afim de não carregar as expressões escreveremos $\int f$ para designar $\int_a^b f(t)dt$. Fixadas tais convenções considere o seguinte problema de contorno:

$$Lu = f \text{ em } [a,b], \quad u(a) = u(b) = 0, \tag{1.1}$$

em que

$$Lu = -(p(t)u')' + q(t)u$$

é um operador diferencial definido em $C^2[a,b]$. A função f é contínua em $[a,b]$ e será dada. Vamos impor também as seguintes condições sobre os coeficientes de L:

$$p \in C^1[a,b], \quad q \in C^0[a,b]\ ; \quad p(t) > 0, \quad q(t) \geqslant 0 \quad \forall t \in [a,b].$$

Afim de continuar a exposição considere $v \in C_0^1[a,b]$. Multiplicando a equação (1.1) por v e integrando obtemos:

$$\int -(pu')'v + \int quv = \int fv,$$

ou ainda, usando integração por partes e que $v(a) = v(b) = 0$,

$$\int pu'v' + \int quv = \int fv, \quad \forall v \in C_0^1[a,b]. \tag{1.2}$$

Diremos que $u \in C_0^1[a,b]$ é uma *solução fraca* de (1.1) se u satisfaz à relacao (1.2). Estamos procurando soluções $u \in C^2[a,b]$ que satisfaçam à equação (1.1). Uma tal função será dita *solução clássica* do problema (1.1). Nossa tarefa será obter uma solução fraca e depois mostrar que tal solução é de fato uma solução clássica.

A idéia agora é associar a equação diferencial original a um funcional apropriado. Feito isso vamos reduzir o problema de encontrar soluções para a equação diferencial ao problema de encontrar pontos críticos para o funcional associado, isto é, reduziremos um problema de equações diferenciais a um problema variacional. Consideremos então o seguinte funcional:

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}\int p|v'|^2 + \frac{1}{2}\int qv^2 - \int fv. \tag{1.3}$$

Como estamos procurando soluções fracas de (1.1) vamos considerar o funcional Φ atuando em funções $v \in C_0^1[a,b]$.

Lembremos que, se $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função com derivadas parcias contínuas, um ponto crítico de g é um vetor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $dg(x_0)x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, isto é, um vetor em que a derivada direcional é nula em qualquer direção. Como estamos interessados em estudar pontos críticos para o funcional Φ é conveniente introduzirmos um conceito que seja o análogo da derivada direcional. Assim, fixado $u_0 \in C_0^1[a,b]$, denotaremos por $\Phi'(u_0)v$ ao seguinte limite:

$$\Phi'(u_0)v = \lim_{s\to 0} \frac{\Phi(u_0 + sv) - \Phi(u_0)}{s}.$$

Essa expressão é conhecida no Cálculo das Variações como *primeira variação* do funcional Φ. Naturalmente precisamos mostrar que o limite acima existe para que nossa definição faça sentido. Para isto note que, como

$$\Phi(u_0 + sv) = \frac{1}{2}\int \left[p(u_0' + sv')^2 + q(u_0 + sv)^2 - 2f(u_0 + sv)\right]$$

e

$$\Phi(u_0) = \frac{1}{2}\int \left[p(u_0')^2 + q(u_0 + sv)^2 - 2fu_0\right],$$

segue que

$$\Phi'(u_0)(v) = \lim_{s\to 0}\int \left\{p\left[u_0'v' + \frac{s}{2}(v')^2\right] + q\left[u_0 v + \frac{s}{2}v^2\right] - fv\right\}.$$

Como o domínio de integração é compacto é o integrando é contínuo podemos passar o limite para dentro da integral e obter

$$\Phi'(u_0)(v) = \int pu_0'v' + \int qu_0 v - \int fv. \tag{1.4}$$

Se compararmos agora as expressões (1.4) e (1.2) veremos que se $u_0 \in C_0^1[a,b]$ for tal que $\Phi'(u_0)v = 0$ para toda função $v \in C_0^1[a,b]$ então u_0 é uma solução fraca de (1.1). Fica portanto claro porque estamos procurando pontos críticos para o funcional Φ. Como no caso de funções reais definidas em $\mathbb{R}^n$ aqui também os pontos de máximo e de mínimo do funcional, caso existam, são candidatos naturais a pontos críticos. De fato, suponha que $u_0 \in C_0^1[a,b]$ é um ponto de mínimo de Φ. A minimalidade de $\Phi(u_0)$ nos fornece

$$\Phi(u_0 + sv) - \Phi(u_0) \geqslant 0 \quad \forall s \in \mathbb{R},\ \forall v \in C_0^1[a,b].$$

Desta forma

$$\Phi'(u_0)v = \lim_{s\to 0^+}\frac{\Phi(u_0 + sv) - \Phi(u_0)}{s} \geqslant 0$$

e

$$\Phi'(u_0)v = \lim_{s\to 0^-}\frac{\Phi(u_0 + sv) - \Phi(u_0)}{s} \leqslant 0,$$

e portanto $\Phi'(u_0)v = 0$ qualquer que seja $v \in C_0^1[a,b]$. Pode-se fazer análise semelhante para o caso de ponto de máximo. Conforme verificaremos o funcional em questão é ilimitado superiormente. Por isso nosso objetivo é provar que o funcional Φ assume mínimo em $C_0^1[a,b]$. A primeira tarefa então é verificar que o funcional é limitado inferiormente. Para tanto nos será útil o seguinte resultado:

Lema 1.1. *Qualquer que seja $v \in C_0^1[a,b]$ e $p > 1$ vale*

$$\left(\int |v|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c_p\left(\int |v'|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

em que $c_p > 0$ é uma constante que só depende p.

Demonstração. Dada $v \in C_0^1[a,b]$ podemos escrever, pelo Teorema Fundamental de Cálculo,

$$v(t) = \int_a^t v'(s)ds.$$

Introduzimos em $C_0^1[a,b]$ o produto interno $\langle f, g\rangle = \int fg$ (o leitor não terá nenhuma dificuldade em mostrar que isto de fato define um produto interno) e observamos que

$$|v(t)|^p = \left|\int_a^t v'(s)ds\right|^p.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos então:

$$|v(t)|^p \leqslant \left|\int_a^t v'(s)^2 ds\right|^{\frac{p}{2}} \left|\int_a^t 1^2 ds\right|^{\frac{p}{2}} \leqslant (t-a)^{\frac{p}{2}} \left(\int_a^b v'(s)^2 ds\right)^{\frac{p}{2}},$$

donde segue que

$$\int_a^b |v(t)|^p dt \leqslant \left(\int_a^b v'(s)^2 ds\right)^{\frac{p}{2}} \int_a^b (t-a)^{\frac{p}{2}} dt$$

e portanto

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b |v(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} &\leqslant \left(\int_a^b v'(s)^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (t-a)^{\frac{p}{2}} dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[\frac{2}{p+2}(b-a)^{\frac{p+2}{2}}\right]^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b v'(s)^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

conforme desejávamos. ■

Observe que, no caso em que $p = 2$, a desigualdade se reduz a

$$\int |v'|^2 \geqslant c \int v^2,$$

onde $c = \left(\frac{1}{c_2}\right)^2$. Esta última desigualdade é conhecida como Desigualdade de Wirtinger. Vamos utilizar esta desigualdade para verificar que o funcional é limitado inferiormente. A primeira estimativa que podemos fazer é a seguinte

$$\Phi(v) = \int \frac{p}{2}|v'|^2 + \int \frac{q}{2}v^2 - \int fv \geqslant p_0 \int |v'|^2 - \left(\int f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int v^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

em que $p_0 = \min\left\{\frac{p(t)}{2} : t \in [a,b]\right\} > 0$. Note que estamos utilizando novamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz e também o fato de q ser não-negativa em $[a,b]$.

De acordo com a Desigualdade de Wirtinger temos:

$$-\left(\int v^2\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant -\left(\frac{1}{c}\int |v'|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Das duas últimas desigualdades segue que

$$\Phi(v) \geqslant p_0 \int |v'|^2 - \left(\frac{1}{c}\int f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |v'|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.5}$$

Fazendo $\delta(v) = \left(\int |v'|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ temos

$$\Phi(v) \geqslant p_0 \delta(v)^2 - \left(\frac{1}{c}\int f^2\right)^{\frac{1}{2}} \delta(v),$$

que é uma função quadrática na variável $\delta(v)$. Agora basta lembrar que, se $g(x) = ax^2 + bx$ é uma função com $a > 0$, então $g(x) \geqslant \dfrac{-b^2}{4a}$. Assim temos:

$$\Phi(v) \geqslant \frac{-1}{4p_0c}\int f^2, \quad \forall v \in C_0^1[a,b]$$

e portanto o funcional Φ é, conforme afirmamos, limitado inferiormente.

Neste ponto seria conveniente introduzir em $C_0^1[a,b]$ alguma estrutura topológica afim de que possamos prosseguir com a nossa análise. Para tanto, note inicialmente que $C_0^1[a,b]$ é um espaço vetorial real com as operações de soma e de produto por escalar usuais. Vamos introduzir o produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int f'g', \quad \forall f, g \in C_0^1[a,b]. \tag{1.6}$$

Afim de mostrar que a expressão acima define de fato um produto interno lembremos que um produto interno num espaço vetorial real E é uma função $\langle\cdot,\cdot\rangle : E\times E \to \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de vetores $u, v \in E$ um número real $\langle u, v\rangle$ de modo a serem cumpridas as condições abaixo, para $u, v, w \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrários:

i) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$;

ii) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$;

iii) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;

iv) $\langle u, u\rangle \geqslant 0$ e $\langle u, u\rangle = 0 \Rightarrow u = 0$.

As três primeiras condições são imediatas. Quanto à última note que se $\displaystyle\int (f')^2 = 0$ então, como f' é contínua, devemos ter f' identicamente nula, isto é, f deve ser constante em $[a,b]$. Uma vez que $f(a) = f(b) = 0$ devemos ter então $f(t) = 0$ para todo $t \in [a,b]$.

Naturalmente, a partir de um produto interno podemos definir uma norma $\|\cdot\|$ por $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. A partir de agora denotaremos por X o espaço vetorial $C_0^1[a,b]$ munido da norma

$$\|v\| = \left(\int |v'|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.7}$$

Neste ponto seria interessante que contássemos com a continuidade do nosso funcional. Afim de provar que Φ é contínuo em X lembremos, inicialmente, que um *espaço de Hilbert* é um espaço vetorial H, munido de um produto interno e completo em relação à norma induzida por esse produto. Designaremos por L^2 o espaço $L^2[a,b]$ das funções reais mensuráveis à Lebesgue definidas no intervalo $[a,b]$ e tais que $\int f^2 < \infty$. Pode-se mostrar que esse espaço, munido do produto interno $\langle f, g\rangle_{L^2} = \int fg$, é um espaço de Hilbert (cf. [1]; pág. 57). Observe que toda função contínua definida em $[a,b]$ pertence a L^2, logo $C^\infty[a,b] \subset L^2[a,b]$. Um resultado mais forte e surpreendente é o de que toda função de L^2 pode ser aproximada por funções de classe C_c^∞, isto é

Proposição 1.2. *$C_c^\infty[a,b]$ é denso em $L^2[a,b]$*

Demonstração. Ver [1] pág. 71. ■

Afim de provar a continuidade do funcional considere $v \in X$ e $(v_n) \subset X$ tal que $v_n \to v$ em X. Vamos mostrar inicialmente que $v_n \to v$ em L^2. Segue da Desigualdade de Wirtinger que

$$0 \leqslant \|v_n - v\|_{L^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{c}}\|v_n - v\|. \tag{1.8}$$

Tomando o limite na expressão acima temos o resultado desejado. Para mostrar que Φ é contínuo em X vamos mostrar que $\Phi(v_n) \to \Phi(v)$. Observe incialmente que, como $v_n \to v$ em X e L^2, $\|v_n + v\|$ e $\|v_n + v\|_{L^2}$ são limitadas. Assim temos

$$\begin{aligned} \left| \int p|v_n'|^2 - \int p|v'|^2 \right| &= \left| \int p(v_n' + v')(v_n' - v') \right| \\ &\leqslant \left(\int p^2 |v_n' + v'|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |v_n' - v'|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \tilde{p} \|v_n + v\| \|v_n - v\| \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

em que $\tilde{p}$ é o máximo de p em $[a, b]$. Analogamente temos

$$\left| \int q v_n^2 - \int q v^2 \right| \leqslant \tilde{q} \|v_n + v\|_{L^2} \|v_n - v\|_{L^2} \longrightarrow 0,$$

onde $\tilde{q}$ é o valor máximo de q em $[a, b]$. Para o terceiro termo temos

$$\left| \int f v_n - \int f v \right| \leqslant \|f\|_{L^2} \cdot \|v_n - v\|_{L^2} \longrightarrow 0$$

Desta forma concluímos que o funcional Φ é contínuo em X.

Neste ponto convém lembrar o velho e famoso Teorema de Bolzano-Weierstrass que diz que toda função real definida num intervalo fechado e limitado assume valores máximo e mínimo. Apesar do espaço em questão não ser a reta existe uma generalização natural deste importante teorema. Antes porém recordemos algumas definições. Dizemos que um espaço topológico M é *compacto* quando toda cobertura de M por abertos admite subcobertura finita. Um funcional $\psi : M \to \mathbb{R}$ é *semicontínuo inferiormente* se para toda sequência $(u_n) \subset M$ tal que $u_n \to u \in M$ vale $\psi(u) \leqslant \liminf \psi(u_n)$. Um bom exercício para o leitor é mostrar que esta definição é equivalente a dizer que $\psi^{-1}(a, \infty)$ é aberto em M para todo $a \in \mathbb{R}$.

Temos então o seguinte resultado

Teorema 1.3. *Seja M um espaço topológico compacto e $\psi : M \to \mathbb{R}$ um funcional real semicontínuo inferiormente. Então ψ é limitado inferiormente e o ínfimo é assumido em M.*

Demonstração. Considere a cobertura por abertos de M

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \psi^{-1}(-n, \infty).$$

Da compacidade de M segue que existe n_0 tal que

$$M = \bigcup_{n=1}^{n_0} \psi^{-1}(-n, \infty),$$

ou seja, $-n_0$ é uma cota inferior para ψ e portanto o funcional é limitado inferiormente. Seja então I o ínfimo de ψ em M e suponha, por contradição que I não é assumido. Então

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \psi^{-1} \left(I + \frac{1}{n}, \infty \right).$$

Usando novamente a compacidade obtemos n_1 tal que

$$M = \bigcup_{n=1}^{n_1} \psi^{-1} \left(I + \frac{1}{n}, \infty \right),$$

donde se conclui que $\psi(x) > I + \frac{1}{n_1}$ para todo $x \in M$, contrariando o fato de I ser o ínfimo de ψ em M. ■

A idéia agora é caminhar em uma direção que nos permita utilizar o Teorema 1.3 para minimizar o funcional Φ. A primeira observação cabível é que, tendo em vista (1.5), vemos que $\Phi(v) \to \infty$ quando $\|v\| \to \infty$. Assim existe $R > 0$ tal que

$$\inf_X \Phi = \inf\{\Phi(v) : v \in X, \|v\| \leqslant R\}$$

e podemos então olhar para o funcional Φ restrito à bola $B_R = \{v \in X : \|v\| \leqslant R\}$. Neste ponto poderíamos pensar em aplicar o Teorema 1.3 ao funcional Φ restrito à bola B_R. No entanto a bola B_R não é compacta. Afim de contornar este problema vamos apelar para resultados mais profundos de análise. Na verdade vamos modificar um pouco o espaço de funções em que estamos trabalhando. A primeira tarefa a se cumprir é a de passar para um espaço que seja pelo menos completo, uma vez que X não possui essa propriedade. Depois de feito isto vamos introduzir uma topologia diferente neste espaço visto que, de acordo com o Teorema de Riez (cf. [1]; pág. 92), a bola B_R é compacta na topologia da norma se, e somente se, X tem dimensão finita.

Um resultado importante da topologia nos diz que dado qualquer espaço topológico, mesmo que não seja completo, é sempre possível obter um novo espaço que "contenha" o espaço original e que seja completo. Esta operação é conhecida como completamento do espaço. Ocorre que, ao fazermos o completamento, o novo espaço obtido é constituído por classes de equivalência de sequências de Cauchy do espaço original. Assim, embora saibamos que um tal completamento exista, operar com estes novos elementos não é tarefa fácil. No nosso caso as coisas funcionarão bem porque vamos identificar o completamento de X com um novo espaço de funções. Uma vez expostos os novos rumos de nosso trabalho vamos colocar a mão na massa.

Já tivemos a oportunidade de conhecer o espaço L^2. Vamos agora introduzir um conceito que, de certa forma, generaliza a idéia de derivada. Diremos que $u \in L^2[a, b]$ tem *derivada fraca* em $L^2[a, b]$ se existir $v \in L^2[a, b]$ tal que

$$\int v\varphi = -\int u\varphi' \quad \forall \varphi \in C_c^1[a, b]$$

Afim de mostrar que esse conceito é de fato uma generalização da derivada usual observe que se u for contínua com derivada contínua então u possui derivada fraca e esta coincide com a derivada usual u'. De fato, qualquer que seja $\varphi \in C_c^1[a, b]$ temos:

$$\int u'\varphi + \int u\varphi' = \int (u\varphi)' = (u\varphi)(b) - (u\varphi)(a) = 0,$$

visto que, como $\varphi \in C_c^1[a, b]$, devemos ter $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Considere agora a função $u : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $u(x) = |x|$. Sabemos que f é derivável em qualquer ponto diferente de 0. Vamos mostrar que u tem derivada fraca em $[-1, 1]$. Para tanto considere a função v definida como se segue:

$$v(x) = \begin{cases} 1 & , \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 & , \text{se } -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

Vamos mostrar que v é a derivada fraca de u. Observe inicialmente que

$$\int_{-1}^{1} v\varphi = \int_{-1}^{0} v\varphi + \int_{0}^{1} v\varphi.$$

Defina agora $u_1 : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ por $u_1(x) = -x$ e $u_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por $u_2(x) = x$. Observe agora que $v|_{[0,1]} = u_2'$ e que $v|_{[-1,0]} = u_1'$ a menos do ponto 0. Mas duas funções que diferem apenas em um ponto possuem a mesma integral e portanto podemos reescrever a última expressão da seguinte forma:

$$\int_{-1}^{1} v\varphi = \int_{-1}^{0} u_1'\varphi + \int_{0}^{1} u_2'\varphi = -\int_{-1}^{0} u_1\varphi' - \int_{0}^{1} u_2\varphi' = -\int_{-1}^{1} u\varphi'.$$

Nos cálculos acima usamos integração por partes e o fato de que φ se anula nos extremos do intervalo $[-1,1]$. Observe que, com este mesmo raciocínio, podemos provar que, se $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ possui derivada em $[a,b]$ a menos de um conjunto finito, então u possui derivada fraca. Observe também que, no nosso exemplo, poderíamos atribuir qualquer valor a $v(0)$. Diremos porém que a derivada fraca é única no sentido que, se v_1 e v_2 são ambas derivada fraca de u, então $v_1 - v_2 = 0$ q.t.p. (isto é, a menos de um conjunto de medida nula). A unicidade, posta neste sentido, nos permite denotar a derivada fraca de u por u'. Para justificar estas últimas afirmações observe que, sendo v_1 e v_2 derivadas fracas de u, então

$$\int (v_1 - v_2)\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^1[a,b],$$

ou ainda,

$$\langle v_1 - v_2, \varphi \rangle_{L^2} = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^1[a,b].$$

Se tivéssemos a relação acima para toda função $\varphi \in L^2$ poderíamos concluir que $v_1 = v_2$ a menos de um conjunto de medida nula. Porém a Proposição 1.2 nos assegura que C_c^1 é denso em L^2. Podemos então nos valer desta densidade e da continuidade do produto interno para demonstrar a unicidade da derivada fraca.

1.1.1 O Espaço $H^1[a,b]$

Buscando trabalhar com um espaço completo denotemos por $\overline{X}$ o fecho de X. Porém, por razões que ficarão claras no decorrer do nosso estudo, vamos completar o espaço com a seguinte norma:

$$\|u\|_{H^1} = \left(\int |u'|^2 + \int u^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.9}$$

O leitor não terá dificuldade em mostrar que (1.9) está bem definida em X. Observe que os elementos de $\overline{X}$ são classes de equivalência de sequências de Cauchy. Afim de superar esta dificuldade considere o espaço de funções $H^1[a,b]$ definido como se segue:

$$H^1[a,b] = \{u \in L^2[a,b] : u' \in L^2[a,b]\},$$

em que a derivada acima é tomada no sentido fraco.

Defina em $H^1 = H^1[a,b]$ o seguinte produto interno

$$\langle u_1, u_2 \rangle_{H^1} = \int u_1' u_2' + \int u_1 u_2, \quad \forall u_1, u_2 \in H^1. \tag{1.10}$$

cuja norma induzida é exatamente a norma (1.9).

Queremos agora estudar um pouco o espaço H^1 de modo a conhecer suas principais características. O primeiro resultado se refere à completude do espaço.

Proposição 1.4. *$H^1[a,b]$, munido do produto interno (1.10), é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Inicialmente é preciso mostrar que (1.10) de fato define um produto interno. Para tanto bastar notar que, se $\int |u'|^2 + \int u^2 = 0$, então $u \equiv 0$ q.t.p. e, lembrando que funções de H^1 são definidas a menos de um conjunto de medida nula, concluímos que $u = 0_{H^1}$. As outras propriedades do produto interno são facilmente verificáveis.

Para a completude considere $(u_n) \subset H^1$ sequência de Cauchy. Sabemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|u_m - u_n\right\|_{H^1} < \varepsilon, \quad \forall m, n > n_0.$$

Assim, se $m, n > n_0$ temos

$$\left(\int |u_m - u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int |u_m' - u_n'|^2 + \int |u_m - u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

ou ainda

$$\left\|u_m - u_n\right\|_{L^2} < \varepsilon, \quad \forall m, n > n_0,$$

donde se conclui que $(u_n) \subset L^2$ é sequência de Cauchy em L^2. Analogamente $(u_n') \subset L^2$ é sequência de Cauchy em L^2. Uma vez que L^2 é completo, sabemos que existem $u, v \in L^2$ tais que $u_n \to u$ e $u_n' \to v$ em L^2. Afim de concluir a demonstração note inicialmente que

$$\int u_n \varphi' = -\int u_n' \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1[a, b].$$

Tomando o limite na expressão acima temos

$$\int u \varphi' = -\int v \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1[a, b],$$

o que nos diz que $u \in H^1$ e $u' = v$. Assim tomamos uma sequência de Cauchy arbitrária em H^1 e mostramos que a mesma converge neste espaço, logo o espaço é completo. ■

Considere agora $(u_n) \subset X$ sequência de Cauchy. A desigualdade de Wirtinger nos permite escrever

$$\int |u'|^2 + \int u^2 \leqslant \int |u'|^2 + \frac{1}{c}\int |u'|^2, \quad \forall u \in X$$

ou ainda

$$\left(\int |u'|^2 + \int u^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{1 + \frac{1}{c}}\left(\int |u'|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in X$$

o que mostra que $(u_n) \subset H^1$ é também sequência de Cauchy. Ora, como H^1 é completo, sabemos que o limite de u_n está em H^1. Desta forma concluímos que $\overline{X} \subset H^1$, o que nos permite identificar $\overline{X}$ com um subespaço de H^1. Baseados nestas observações vamos definir $H_0^1[a, b] = \overline{X}$.

Vamos explorar um pouco mais o espaço H^1. Consideremos então $u \in H^1$ e lembremos que u possui derivada fraca $u' \in L^2$. Neste ponto é natural perguntamos o que se pode afirmar acerca da função u no aspecto de continuidade e diferenciabilidade no sentido clássico. A próxima proposição nos diz que, a menos de um conjunto de medida nula, u é igual a uma outra função $\tilde{u} \in C^0[a, b]$. Nesse sentido podemos afirmar que $H^1[a, b] \subset C^0[a, b]$. Antes porém um resultado auxiliar :

Lema 1.5. *Seja $u \in L^2[a, b]$ tal que*

$$\int u \varphi' = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1[a, b].$$

Então u é constante em $[a, b]$ a menos de um conjunto de medida nula.

Demonstração. Fixe $\psi \in C_c^1[a, b]$ tal que $\int \psi = 1$ e considere, para todo $v \in C_c^0[a, b]$, a função h definida por

$$h = v - \psi \int v.$$

Observe inicialmente que $h \in C_c^0[a, b]$. Vamos mostrar agora que, se $\varphi(t) = \int\limits_a^t h$ então $\varphi \in C_c^1[a, b]$.

Naturalmente, como h é contínua, φ é contínua e possui derivada contínua. Afim de mostrar que φ

tem suporte compacto vamos supor que v e ψ se anulam fora de $[a_1, b_1] \subset [a,b]$. Nestas condições devemos ter $\varphi(t_0) = 0$ sempre que $t_0 < a_1$. Tomemos então $t_0 \in [a,b]$ tal que $t_1 > b_1$ e mostremos que $\varphi(t_1) = 0$. Como $v(t) = \psi(t) = 0$ sempre que $t > b_1$ devemos ter $\int_a^{t_1} v = \int v$ e $\int_a^{t_1} \psi = \int \psi$. Desta forma

$$\varphi(t_1) = \int_a^{t_1} v - \int v \cdot \int_a^{t_1} \psi = \int v - \int v \cdot \int \psi = 0,$$

em que usamos o fato de $\int \psi = 1$. Assim $\varphi \in C_c^1[a,b]$.

Por hipótese temos

$$0 = \int u\varphi' = \int u \left[v - \psi \int v \right] = \int v \left[u - \int u\psi \right] = 0,$$

qualquer que seja $v \in C_c^0[a,b]$. Uma vez que C_c^0 é denso em L^2 concluímos que $u - \int u\psi = 0$, donde segue que $u = \int u\psi$ é constante em $[a,b]$. ■

Estamos prontos para enunciar e provar a

Proposição 1.6. *Dada $u \in H^1[a,b]$, existe uma função $\tilde{u} \in C^0[a,b]$ tal que $u = \tilde{u}$, a menos de um conjunto de medida nula.*

Demonstração. Inicialmente vamos definir $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ como

$$w(t) = \int_a^t u'(s)ds.$$

A função w assim definida é uniformemente contínua em $[a,b]$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \dfrac{\varepsilon^2}{\|u\|_{H^1}^2}$. Quaiquer que sejam $t_1, t_2 \in [a,b]$ temos:

$$|w(t_2) - w(t_1)| = \left| - \int_{t_2}^{a} u' - \int_a^{t_1} u' \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} u' \right|$$

Usando então Cauchy-Schwarz teremos:

$$|w(t_2) - w(t_1)| \leqslant \left(\int_{t_1}^{t_2} |u'|^2 + \int_{t_1}^{t_2} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{H^1} |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, se $|t_2 - t_1| < \delta$ temos $|t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}} < \dfrac{\varepsilon}{\|u\|_{H^1}}$ e portanto

$$|w(t_2) - w(t_1)| < \varepsilon \quad , \text{ se } |t_2 - t_1| < \delta.$$

Utilizando agora resultados da Teoria de Lebesgue podemos afirmar que w é diferenciável q.t.p e $w' = u'$ q.t.p.. Qualquer que seja $\varphi \in C_c^1[a,b]$ temos então que $w\varphi$ é diferenciável e vale a regra de derivação $(w\varphi)' = w'\varphi + w\varphi'$. Por outro lado, o Teorema Fundamental do Cálculo para a integral de Lebesgue nos garante que

$$0 = (w\varphi)(b) - (w\varphi)(a) = \int (w\varphi)' = \int w'\varphi + \int w\varphi'$$

Assim, para todo $\varphi \in C_c^1[a,b]$ temos que $\int w'\varphi = -\int w\varphi'$ e $\int u'\varphi = -\int u\varphi'$. Mas, como $w' = u'$ q.t.p. temos $\int w\varphi' = \int u\varphi'$ e portanto

$$\int (w-u)\varphi' = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1[a,b].$$

Usando agora o Lema 1.5 concluímos que existe uma constante k tal que $w - u = k$. Fazendo agora $\tilde{u} = w - k$ teremos que $\tilde{u}$ é uma função contínua tal que $u = \tilde{u}$ q.t.p. ■

Tendo em vista que $H^1[a,b] \subset C^0[a,b]$ vamos estudar a injeção $\mathcal{I} : H^1[a,b] \to C^0[a,b]$ que associa a cada $u \in H^1$ a função $\tilde{u} \in C^0$ obtida da Proposição 1.6. Consideraremos em H^1 a norma (1.9) e em C^0 a norma do máximo $\|\cdot\|_\infty$ definida por:

$$\|u\|_\infty = \max\{|u(t)| : t \in [a,b]\}.$$

Proposição 1.7. *Existe uma constante $c > 0$ tal que, para toda $u \in H^1[a,b]$ vale*

$$\|u\|_\infty \leqslant c\|u\|.$$

Demonstração. Dada $u \in H^1$ podemos, em virtude da Proposição 1.6, supor que u é uniformemente contínua em $[a,b]$. Fixado $t_0 \in [a,b]$ temos que, qualquer que seja $t \in [a,b]$, vale:

$$|u(t_0) - u(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} u'(s)ds \right|$$

do que segue, usando Cauchy-Schwarz, que

$$|u(t_0) - u(t)| \leqslant \left(\int_{t_0}^{t} |u'|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |t - t_0|^{\frac{1}{2}} \tag{1.11}$$

e portanto

$$|u(t_0) - u(t)| \leqslant (b-a)^{\frac{1}{2}} \left(\int |u'|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando a desigualdade triangular temos

$$|u(t_0)| \leqslant |u(t)| + (b-a)^{\frac{1}{2}} \left(\int |u'|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t \in [a,b].$$

Integrando esta última expressão obtemos:

$$(b-a)|u(t_0)| \leqslant \int |u(t)| + (b-a)^{\frac{3}{2}} \left(\int |u'|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

do que segue, usando novamente Cauchy-Scwarz, que

$$(b-a)|u(t_0)| \leqslant (b-a)^{\frac{1}{2}} \left(\int u^2 \right)^{\frac{1}{2}} + (b-a)^{\frac{3}{2}} \left(\int |u'|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Desta forma, se tomarmos k como sendo o máximo entre $(b-a)^{-\frac{1}{2}}$ e $(b-a)^{\frac{1}{2}}$, obtemos que

$$|u(t_0)| \leqslant k \left[\left(\int u^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int |u'|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Lembrando que, se c e d são números não-negativos, então $c + d \leqslant 2\sqrt{c^2 + d^2}$, podemos escrever

$$|u(t_0)| \leqslant 2k \left(\int |u'|^2 + \int u^2 \right)^{\frac{1}{2}} = c\|u\|$$

Como t_0 é arbitrário a demonstração está concluída. ■

Corolário 1.8. *A inclusão* $H^1[a,b] \hookrightarrow C^0[a,b]$ *é uma injeção contínua.*

Demonstração. De fato, a última proposição nos diz que a inclusão $\mathcal{I}$ anteriormente definida é uma função Lipschitz e portanto contínua. ■

Este último resultado nos permite reduzir um problema de convergência em C^0 a um problema de convergência em H^1.

Lembremos agora que um subconjunto $A \subset H^1$ é *equicontínuo* quando, para todo $t_0 \in [a,b]$ e todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|t - t_0| < \delta$ implique $|v(t) - v(t_0)| < \varepsilon$, seja qual for $v \in A$. Observe que a escolha de δ a partir do ε dado é a mesma para todas as funções pertencentes ao conjunto A.

Consideremos então $A \subset H^1$ subconjunto limitado, isto é, existe $k > 0$ tal que $\|u\|_{H^1} \leqslant k$ qualquer que seja $u \in A$. De (1.11) temos:

$$|u(t_0) - u(t)| \leqslant \|u\|_{H^1} |t - t_0|^{\frac{1}{2}} \leqslant k|t - t_0|^{\frac{1}{2}}.$$

Dado agora $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon^2}{k^2}$ e concluir que A é equicontínuo. Agora, fixado $t_0 \in [a,b]$ sabemos que, tendo em vista a limitação de A e a Proposição 1.7, $|u(t_0)| \leqslant kc$, isto é, o conjunto A é *equilimitado*. Desta forma podemos aplicar o Teorema de Arzellá-Ascoli (cf. [4]; pág. 329) e concluir que o conjunto A, visto como subconjunto de $C^0[a,b]$, é relativamente compacto. Isto que dizer que toda sequência $(u_n) \subset A$ possui subsequência convergente em $C^0[a,b]$. Dizemos, então, que a injeção $H^1[a,b] \hookrightarrow C^0[a,b]$ é *compacta*.

Considere agora $H_0^1[a,b]$ munido da norma definida em (1.9). Uma vez que $H_0^1[a,b]$ é o completamento de X, sabemos que $C_0^1[a,b]$ é denso em $H_0^1[a,b]$. Podemos então, por densidade, utilizar a desigualdade de Wirtinger para funções de $H_0^1[a,b]$. Desta forma teremos:

$$\int |u'|^2 + \int u^2 \leqslant \int |u'|^2 + \frac{1}{c_2} \int |u'|^2, \quad \forall u \in H_0^1[a,b].$$

Desta última desigualdade segue que

$$\left(\int |u'|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int |u'|^2 + \int u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(1 + \frac{1}{c_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |u'|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim concluímos que a norma (1.9) é equivalente a seguinte norma:

$$\|u\| = \left(\int |u'|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.12}$$

que é a norma do nosso espaço original X. Vamos então tentar aplicar o Teorema 1.3 ao funcional Φ definido no espaço topológico $B_R \subset H_0^1[a,b]$ munido de uma nova topologia, onde a bola B_R é compacta. A esta nova topologia denominamos *topologia fraca*. Vamos então definir o conceito de convergência na topologia fraca. Diremos que uma sequência $(u_n) \subset H_0^1[a,b]$ *converge fracamente* para $u \in H_0^1[a,b]$ quando

$$\langle u_n, v \rangle \longrightarrow \langle u, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1[a,b].$$

Um conjunto $A \subset H_0^1[a,b]$ é dito *fracamente compacto* quando toda sequência em A possui uma subsequência fracamente convergente. Pode-se provar que, em espaços de Hilbert, bolas são fracamente compactas (cf. [1]; pág. 44).

Uma vez que queremos utilizar o Teorema 1.3 precisamos mostrar que Φ é fracamente semicontínuo inferiormente. Lembremos que, se E é um espaço vetorial, uma função $g : E \to \mathbb{R}$ é *convexa* se para quaisquer $x, y \in E$ e $t \in [0,1]$ vale

$$g(tx + (1-t)y) \leqslant tg(x) + (1-t)g(y)$$

Este conceito nos será útil porque vamos utilizar o seguinte resultado

Teorema 1.9. *Sejam E espaço de Banach, $\psi : E \to \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente na norma de E e convexo. Então ψ é fracamente semicontínuo inferiormente.*

Demonstração. Ver [1] pág. 38. ■

O funcional Φ é semicontínuo inferiormente na topologia da norma porque é contínuo nesta mesma topologia. Resta então verificar que Φ é convexo. Naturalmente a terceira parte do funcional, por ser linear, é convexa. Precisamos então mostrar que $\int p|u'|^2$ e $\int qu^2$ são convexos. Mas isto é equivalente a verificar que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(s) = s^2$ é convexa. Fixados então $x, y \in \mathbb{R}$ mostremos que

$$h(t) = g(tx + (1-t)y) - tg(x) - (1-t)g(y) \leqslant 0 \quad \forall\, t \in [0,1].$$

Fazendo os cálculos obtemos $h(t) = (x-y)^2 t(t-1)$. Uma vez que $(x-y)^2 \geqslant 0$ e $t(t-1) \leqslant 0$ se $t \in [0,1]$ obtemos o resultado desejado. Portanto o funcional Φ é convexo. Assim podemos aplicar o Teorema 1.9 e concluir que Φ é fracamente semicontínuo inferiormente.

Estamos então prontos para utilizar o Teorema 1.3 e garantir a existência de um ponto de mínimo $u_0 \in H_0^1$ do funcional Φ. Naturalmente, por densidade, todos aqueles resultados obtidos no início do trabalho para funções de C_0^1 podem ser obtidos para funções de H_0^1. Podemos então dizer que u_0 é uma solução fraca de (1.1) no mesmo sentido que diziamos para funções de C_0^1. A diferença básica é que vamos tomar a derivada no sentido fraco. Portanto temos, de (1.2), a seguinte relação:

$$\int pu_0'v' + \int qu_0 v = \int fv, \quad \forall v \in H_0^1,$$

que pode ser reescrita como

$$\int pu_0'v' = -\int [qu_0 - f]v, \quad \forall v \in H_0^1.$$

Esta expressão nos mostra que pu_0' possui derivada fraca em L^2, a saber

$$(pu_0')' = qu_0 - f.$$

Assim pu_0' é contínua e portanto u_0' também o é. Uma vez que p nunca se anula e é derivável também é derivável a função $\dfrac{1}{p}$. Desta forma, escrevendo $u_0' = \dfrac{1}{p}pu_0'$ vemos que u_0' é derivável e podemos aplicar a regra da derivada do produto e obter

$$pu_0'' = -p'u_0' + qu_0 - f,$$

o que nos mostra que u_0'' é contínua. Desta maneira $u_0 \in C_0^2[a,b]$ é uma solução clássica do problema (1.1).

Antes de passar para outro problema vamos verificar que a solução de (1.1) é única. Para tanto sejam u_1 e u_2 soluções clássicas do nosso problema. Naturalmente tais soluções são também soluções fracas e portanto podemos escrever

$$\int pu_i'v' + \int qu_i v = \int fv, \quad \forall v \in C_0^1[a,b], \quad i = 1, 2.$$

do que segue, tomando $v = u_1 - u_2$ e subtraindo as equações, que

$$\int p(u_1' - u_2')^2 + \int q(u_1 - u_2)^2 = 0.$$

Uma vez que $p(t) > 0$ e $q(t) \geqslant 0$ em $[a,b]$ devemos ter

$$\int p(u_1' - u_2')^2 = 0 \implies u_1' = u_2'.$$

Lembrando agora que u_i' é a derivada fraca de u_i temos

$$\int u_i'\varphi = -\int u_i\varphi', \quad \forall \varphi \in C_c^1[a,b],$$

e portanto

$$\int (u_1 - u_2)\varphi' = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^1[a,b],$$

o que implica, pelo Lema 1.5, que $u_1 - u_2$ é constante em $[a,b]$. Como as duas funções se anulam nos extremos devemos ter $u_1(t) = u_2(t)$, qualquer que seja $t \in [a,b]$.

1.2 Problema Sub-Linear

Vamos agora estudar um exemplo de problema não linear. Para tanto considere o seguinte problema:

$$Lu = f(t,u) \text{ em } [a,b], \quad u(a) = u(b) = 0, \tag{1.13}$$

em que L é o operador diferencial definido na seção anterior e $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitida uniformemente por uma constante positiva k, isto é,

$$|f(t,u)| \leqslant k, \quad \forall (t,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}.$$

Afim de resolver o problema vamos seguir os mesmos passos que demos para o caso linear. Assim, uma solução fraca de (1.13) é uma função $u_0 \in H_0^1$ satisfazendo

$$\int p u_0' v' + \int q u_0 v = \int f(t,u_0)v, \quad \forall v \in H_0^1.$$

O funcional associado ao problema é

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int p|u'|^2 + \frac{1}{2}\int qu^2 - \int F(t,u),$$

em que $F(t,u)$ é uma primitiva de $f(t,u)$ na variável u, isto é,

$$F(t,u) = \int_0^u f(t,s)ds.$$

Lembre que, como $H_0^1[a,b] \subset C^0[a,b]$, a função $F(t,u(t))$ é contínua para toda $u \in H_0^1$ e portanto o funcional está bem definido. Mais do que isso, a função $F(t,u)$ é de Lipschitz na segunda variável. De fato, temos

$$\begin{aligned} |F(t,u_0) - F(t,u_1)| &= \left| \int_0^{u_0} f(t,s)ds - \int_0^{u_1} f(t,s)ds \right| \\ &= \left| \int_{u_0}^{u_1} f(t,s)ds \right| \leqslant k|u_0 - u_1|. \end{aligned}$$

Afirmamos que Φ é derivável a Fréchet e

$$\Phi'(u)v = \int pu'v' + \int quv - \int f(t,u)v, \quad \forall u, v \in H_0^1[a,b].$$

De fato, os dois primeiros termos da expressão acima foram calculados na seção anterior. Verifiquemos então o terceiro termo. Observe inicialmente que, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{s\to 0} \frac{F(t,u+sv) - F(t,u)}{s} = \frac{d}{ds}F(t,u+sv)|_{s=0} = f(t,u)v,$$

do que segue que, para $u, v \in H_0^1$,

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left[\int F(t,u+sv) - F(t,u)\right] = \int f(t,u)v,$$

em que passamos o limite para dentro do sinal de integral baseados na continuidade uniforme de $F(t,u)$ (lembre que F é de Lipschitz) e na compacidade do domínio de integração.

Desta forma, como no exemplo anterior, buscar soluções fracas para (1.13) é o mesmo que buscar pontos críticos para o funcional Φ. Mostremos agora que Φ é limitado inferiormente. Temos:

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &\geqslant \frac{1}{2}\int p|u'|^2 - \int |F(t,u)| \\
&\geqslant p_0 \int |u'|^2 - \int k|u| \\
&\geqslant p_0 \int |u'|^2 - k(b-a)^{\frac{1}{2}} \left(\int u^2\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

em que $p_0 = \min\left\{\frac{p(t)}{2} : t \in [a,b]\right\}$ e estamos usanso Cauchy-Schwarz e o fato de que $|F(t,u)| = \left|\int\limits_0^u f(t,s)ds\right| \leqslant k|u|$. Usando agora a desigualdade de Wirtinger obtemos

$$\Phi(u) \geqslant p_0 \int |u'|^2 - k\left(\frac{b-a}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |u'|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Desta desigualdade segue, por um raciocínio análogo ao feito para o caso linear, que Φ é limitado inferiormente e $\Phi(u) \to \infty$ quando $\|u\| \to \infty$. Assim, para algum $R > 0$, tem-se

$$\inf \Phi = \inf\{\Phi(u) : \|u\| \leqslant R\}.$$

Resta-nos somente mostrar que Φ é semicontínuo inferiormente na topologia fraca de H_0^1. Já sabemos que isto ocorre com a parte quadrática do funcional. Afim de verificar o terceiro termo tome $(u_n) \subset H_0^1$ tal que u_n converge fracamente para u em H_0^1. Assim toda subsequência w_n de u_n converge fracamente para u em H_0^1. A convergência fraca de w_n implica que a mesma é limitada. Como a injeção $H_0^1[a,b] \hookrightarrow C^0[a,b]$ é compacta sabemos que existe uma subsequência w_{n_j} de w_n que converge para u em $C^0[a,b]$. Como $F(t,u(t))$ é de Lipschitz temos $F(t, w_{n_j}(t)) \to F(t,u(t))$ e

$$\int F(t, w_{n_j}(t)) \longrightarrow \int F(t,u(t)).$$

Assim, toda subsequência de $\int F(t,u_n(t))$ possui uma subsequência $\int F(t,w_n(t))$ que possui uma subsequência convergindo para $\int F(t,u(t))$, o que nos permite concluir que

$$\int F(t,u_n(t)) \longrightarrow \int F(t,u(t))$$

e portanto Φ é semicontínuo inferiormente na topologia fraca de H_0^1. Desta forma sabemos que o mínimo de Φ é assumido em um ponto $u_0 \in H_0^1$. Através de um processo de regularização semelhante ao feito na seção anterior podemos concluir que $u_0 \in C_0^2[a, b]$ é uma solução clássica de (1.13).

Observe que este exemplo inclui o anterior e que só usamos a limitação da função f para mostrar que o funcional era limitado inferiormente. No próximo capítulo vamos estudar um caso em que a função f é ilimitada. Um exemplo famoso de problema do tipo (1.13) é o problema do pêndulo

$$u'' = \text{sen}\, u, \qquad u(a) = u(b) = 0.$$

Capítulo 2

O Passo da Montanha

A partir de agora vamos tratar o seguinte problema

$$-u'' = u^2 \text{ em } [a,b], \quad u(a) = u(b) = 0, \tag{2.1}$$

em que procuramos soluções $u \in C^2[a,b]$ tais que $u \not\equiv 0$.

Vamos seguir os mesmos passos usados para resolver (1.1). Uma solução fraca de (2.1) é uma função $u \in H_0^1$ que cumpre

$$\int u'v' - \int u^2 v = 0 \quad \forall v \in H_0^1.$$

O funcional associado ao problema é

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}\int |v'|^2 - \frac{1}{3}\int v^3, \quad \forall v \in H_0^1.$$

Um cálculo simples mostra que, dados $u_0, v \in H_0^1$, tem-se:

$$\Phi'(u_0)v = \int u_0'v' - \int u_0^2 v$$

e portanto os pontos críticos de Φ são soluções fracas de (2.1). Lembre que introduzimos $\Phi'(u_0)v$ porque buscávamos algo que fosse análogo à derivada tradicional. $\Phi'(u_0)$ nada mais é do que a derivada de Fréchet de Φ. Usando o Teorema de Riesz-Fréchet (cf. [1]; pág. 81) para identificar o espaço dos funcionais lineares contínuos sobre H_0^1 com o próprio H_0^1 podemos denotar a derivada de Φ por $\nabla\Phi : H_0^1 \to H_0^1$. Neste sentido escreveremos

$$\langle \nabla\Phi(u_0), v\rangle_{H^1} = \Phi'(u_0)v.$$

Uma conta simples mostra que Φ é contínuo. Mais ainda, pode-se mostrar que Φ é de fato um funcional de classe C^1.

Diferentemente dos casos anteriores, agora Φ não é limitado inferiormente. De fato, se tomarmos $v \in H_0^1$ tal que $v > 0$ em (a,b) e a sequência $v_n = nv$ teremos:

$$\Phi(v_n) = \frac{n^2}{2}\int |v'|^2 - \frac{n^3}{3}\int v^3 \quad \xrightarrow[n]{} \quad -\infty.$$

e portanto vemos que o funcional não é limitado inferiormente.

Além disso Φ também é ilimitado superiormente. De fato, para facilitar as contas, suponha $a = 0$, $b = \pi$ e considere $v_n = \operatorname{sen} nt$. Temos então:

$$\Phi(v_n) = \frac{n^2}{2}\int_0^\pi \cos^2 nt - \frac{1}{3}\int_0^\pi \operatorname{sen}^3 nt \geqslant \frac{n^2\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \;\xrightarrow[n]{}\; \infty.$$

Portanto é inútil tentarmos encontrar um ponto crítico não nulo através de métodos de minimização ou maximização. Resta-nos portanto os pontos críticos do tipo sela. Para isto vamos precisar usar recursos mais poderosos dos que os já expostos. Afim de fazê-lo, observe inicialmente que $0 \in H_0^1$ é um ponto crítico do funcional. Vamos mostrar agora que de fato este é um ponto de mínimo local. Lembre que, dado $v \in H_0^1$, vale:

$$\left(\int v^3\right)^{\frac{1}{3}} \leqslant c_3 \left(\int |v'|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

do que segue que
$$-\frac{1}{3}\int v^3 \geqslant -\left(\frac{c_3}{3}\right)^3\left(\int |v'|^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$
Assim podemos estimar o funcional da seguinte forma
$$\Phi(v) \geqslant \frac{1}{2}\int |v'|^2 - \left(\frac{c_3}{3}\right)^3\left(\int |v'|^2\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \left(\frac{c_3}{3}\right)^3\|v\|^3.$$
Desta forma temos que, se $\|v\| < \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{c_3}\right)^3$ então $\Phi(v) > 0$ e portanto a origem é um ponto de mínimo local. Observe agora que, se $g(t) = \Phi(tv)$, então $g(t) \to -\infty$ quando $t \to \infty$ qualquer que seja $0 < v \in H_0^1$ e $t = 0$ é ponto de mínimo local de g. Isto nos leva a pensar que deve existir outro ponto crítico. Vamos então em busca deste ponto crítico.

Seja E um espaço de Hilbert e $\Phi : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Dizemos que Φ satisfaz à *condição de Palais-Smale* (que será denotada também por PS) se toda sequência $(u_n) \subset E$ tal que
$$\Phi(u_n) \text{ é limitado} \quad \text{e} \quad \nabla\Phi(u_n) \to 0$$
possui subsequência convergente na norma de E. Observe que, por Chauchy-Schwarz, temos
$$|\langle \nabla\Phi(u_n), v\rangle_E| \leqslant \|\nabla\Phi(u_n)\|_E \cdot \|v\|_E \quad \forall v \in E$$
e portanto a segunda condição é equivalente à dizer que
$$|\langle \nabla\Phi(u_n), v\rangle_E| \leqslant \varepsilon_n\|v\|_E \quad \forall v \in E$$
com $\varepsilon_n \to 0$.

Estamos agora prontos para enunciar o teorema, devido a Ambrosetti e Rabinowitz, que vai nos garantir a existência de um ponto crítico não nulo para o nosso funcional Φ. Vamos a ele:

Teorema 2.1. (Passo da Montanha) *Seja $\Phi : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 satisfazendo à condição de Palais-Smale, definido num espaço de Hilbert E. Suponha que $\Phi(0) = 0$ e que existam constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $\Phi|_{\partial B_\rho} \geqslant \alpha$. Suponha ainda que existe $e \in E \setminus B_\rho$ tal que $\Phi(e) \leqslant 0$. Seja*
$$\Gamma = \{\gamma \in C^0([0,1]; E) : \gamma(0) = 0 \ e \ \gamma(1) = e\}$$
e defina
$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\ \max_{u\in\gamma([0,1])} \Phi(u).$$
Então $c \geqslant \alpha$ e c é um valor crítico de Φ.

O símbolo $C^0([0,1]; E)$ denota o conjunto de todas as funções $\gamma : [0,1] \to E$ contínuas. Pelas observações anteriores sabemos que o nosso funcional já verifica quase todas as hipóteses do teorema. Resta somente verificar que ele obedece à condição de Palais-Smale para que possamos utilizar o teorema e garantir a existência de um ponto crítico não trivial $u_0 \in H_0^1[a,b]$. Tal função é uma solução fraca de (2.1). A verificação de que u_0 é de classe C^2 é completamente análoga à que foi feita para o problema (1.1) e ficará a cargo do leitor.

Vamos provar que o funcional Φ satisfaz à condição de Palais-Smale. Para tanto considere $(u_n) \subset H_0^1$ tal que
$$|\Phi(u_n)| = \left|\frac{1}{2}\int |u_n'|^2 - \frac{1}{3}\int u_n^3\right| \leqslant c \tag{2.2}$$
e
$$|\langle \nabla\Phi(u_n), v\rangle| = \left|\int u_n'v' - \int u_n^2 v\right| \leqslant \varepsilon_n\|v\| \tag{2.3}$$

em que $\varepsilon_n \to 0$ e a última desigualdade vale para toda $v \in H_0^1$. Se tomarmos $v = u_n$ teremos então

$$\left| \int |u_n'|^2 - \int u_n^3 \right| \leqslant \varepsilon_n \|u_n\|,$$

Afirmamos que $\|u_n\|$ é limitado. De fato temos

$$\int |u_n'|^2 = \int u_n^3 + \Phi'(u_n)u_n = \frac{3}{2} \int |u_n'|^2 - 3\Phi(u_n) + \Phi'(u_n)u_n,$$

do que segue que

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 = 3\Phi(u_n) - \Phi'(u_n)u_n \leqslant 3c + \varepsilon_n \|u_n\|.$$

Esta última expressão nos mostra que $\|u_n\|$ é limitado (observe que do lado esquerdo temos um fator quadrático). Como bolas são fracamente compactas em H_0^1 sabemos que existe uma subsequência u_{n_j} que converge fracamente para u em H_0^1 e, como a injeção de $H_0^1[a,b]$ em $C^0[a,b]$ é compacta, temos que $u_{n_j} \to u$ em $C^0[a,b]$. Se tomarmos agora $v = u_{n_j} - u$ em (2.3) obtemos

$$\left| \int u_{n_j}'(u_{n_j}' - u') - \int u_{n_j}^2(u_{n_j} - u) \right| \leqslant \varepsilon_n \|u_{n_j} - u\|.$$

Como $\|u_{n_j} - u\|$ é limitado e $\varepsilon_n \to 0$ temos que o lado direito da última desigualdade tende a 0. Observe agora que

$$\int u_{n_j}^2(u_{n_j} - u) \leqslant \|u_{n_j}^2\|_{L^2} \cdot \|u_{n_j} - u\|_{L^2} \longrightarrow 0,$$

em que estamos usando (1.8) para concluir que limitação e convergência na norma de H^1 implica em limitação e convergência na norma de L^2. O fato da segunda integral tender a 0 no mostra que

$$\lim \int u_{n_j}'(u_{n_j}' - u') = 0. \tag{2.4}$$

Uma vez que u_{n_j} converge fracamente para u em H_0^1 temos

$$\langle u_{n_j}, v \rangle \longrightarrow \langle u, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1.$$

Fazendo $v = u$ nesta última expressão obtemos

$$\langle u_{n_j} - u, u \rangle \longrightarrow 0$$

ou ainda

$$\lim \int u'(u_{n_j}' - u') = 0. \tag{2.5}$$

Olhando agora para (2.4) e (2.5) obtemos

$$\lim \int |u_{n_j}' - u'|^2 = 0.$$

Assim concluímos que $\|u_{n_j} - u\|^2 \to 0$ e portanto u_{n_j} converge para u na norma de H^1. Desta maneira Φ obedece à condição de Palais-Smale.

2.1 Lema da Deformação

Nosso objetivo daqui por diante é apresentar a demonstração do Teorema do Passo da Montanha. Conforme o leitor terá oportunidade de verificar a demonstração é bastante simples quando se lança mão do Lema da Deformação. Assim nosso primeiro passo será o estudar o Lema da Deformação para só então partir para a demonstração do passo da montanha.

Considere E um espaço de Hilbert. Diremos que $v \in E$ é um *pseudo-gradiente para* Φ *em* $u \in U$ se:

$$\text{(i)} \quad \|v\| \leqslant 2\|\Phi'(u)\|, \tag{2.6}$$

$$\text{(ii)} \quad \Phi'(u)v \geqslant \|\Phi'(u)\|^2. \tag{2.7}$$

Prosseguindo com os preparativos lembremos que uma função $h : E \to \mathbb{R}$ diz-se *localmente Lipschitz* quando para todo $a \in E$ existe uma vizinhança V_a de a e uma constante $k_a \geqslant 0$ tal que

$$|h(x) - h(y)| \leqslant k_a\|x - y\|, \quad \forall x, y \in V_a. \tag{2.8}$$

O leitor não terá nenhuma dificuldade em mostrar que a soma de funções localmente Lipschitz é uma função localmente Lipschitz. Para o produto, note inicialmente que, se h é localmente Lipschitz, então é localmente limitada. De fato, basta fixar $x_0 \in V_a$ e obter

$$||h(x)| - |h(x_0)|| \leqslant k_a\|x - x_0\| \Longrightarrow |h(x)| \leqslant |h(x_0)| + k_a\|x - x_0\|.$$

Portanto, se fizermos $M = |h(x_0)| + k_a \sup\limits_{x,y \in V_a} \|x - y\|$, temos que $|h(x)| \leqslant M$ para todo $x \in V_a$. Com esta observação o leitor pode facilmente mostrar que o produto de funções localmente Lipchitz é também localmente Lipschitz. Afim de finalizar os preparativos suponha que h é localmente Lipschitz e satisfaz $h(x) \neq 0$ para todo $x \in E$. Fixado então $a \in E$ suponhamos que seja $h(a) > 0$. Desta forma existe uma vizinhança V_a satisfazendo (2.8). A continuidade de h nos permite escolher V_a de modo que se tenha $\delta_a = \inf\limits_{x \in V_a} h(x) > 0$. Desta forma teremos $\dfrac{1}{h(x)} \leqslant \dfrac{1}{\delta_a}$ em V_a e portanto

$$\left|\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{h(y)}\right| = \frac{|h(x) - h(y)|}{|h(x)h(y)|} \leqslant \frac{k_a}{\delta_a^2}\|x - y\|$$

qualquer que seja $x, y \in V_a$. Assim concluímos que o quociente de duas funções localmente Lipschitz é também localmente Lipschitz.

Seja $\Phi \in C^1(E; \mathbb{R})$ e $\tilde{E} = \{u \in E : \Phi'(u) \neq 0\}$ o conjunto de todos os pontos regulares de Φ. Uma aplicação $V : \tilde{E} \to E$ é um *campo pseudo-gradiente para* Φ *em* $\tilde{E}$ se V é localmente Lipschitz e $V(u)$ é um pseudo-gradiente para Φ qualquer que seja $u \in \tilde{E}$. O detalhe maior importante desta definição é o fato do campo ser localmente Lipschitz. Para ver isso, suponha que $E = \mathbb{R}^n$. O leitor não terá nenhuma dificuldade em verificar que o gradiente usual $\nabla\Phi$ é sempre um pseudo-gradiente para Φ. Como o funcional é de classe C^1 sabemos que $\nabla\Phi : \tilde{E} \to E$ é contínua. Porém, de uma maneira geral, $\nabla\Phi$ não é um campo pseudo-gradiente porque, excetuando-se especiais, não temos elementos que nos garantam que o campo gradiente é localmente Lipschitz. Assim, o pseudo-gradiente nada mais é do que um vetor que esta muito próximo do gradiente e que é contruído de maneira que V seja localmente Lipschitz. Pode-se mostrar que, se $\Phi \in C^1(E; \mathbb{R})$, então existe um campo pseudo-gradiente para Φ em $\tilde{E}$ (cf. [6]; pág. 81).

Dado um número $s \in \mathbb{R}$ vamos denotar por $A_s = \{u \in E : \Phi(u) \leqslant s\}$ e $K_s = \{u \in E : \Phi(u) = s \text{ e } \Phi'(u) = 0\}$.

Lema 2.2. (Lema da Deformação de Clark) *Seja E um espaço de Hilbert e $\Phi \in C^1(E; \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo (PS). Se $c \in \mathbb{R}$, $\overline{\varepsilon} > 0$ e Ω é uma vizinhança de K_c, então existe $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})$ e $\eta \in C([0,1] \times E; E)$ tais que*

(1) *$\eta(0, u) = u$ para todo $u \in E$.*

(2) $\eta(t,u) = u$ *para todo* $t \in [0,1]$ *se* $\Phi(u) \notin [c-\overline{\varepsilon}, c+\overline{\varepsilon}]$.
(3) $\|\eta(t,u) - u\| \leqslant 1$ *para todo* $t \in [0,1]$ *e* $u \in E$.
(4) $\Phi(\eta(t,u)) \leqslant \Phi(u)$ *para todo* $t \in [0,1]$ *e* $u \in E$.
(5) $\eta(1, A_{c+\varepsilon} \setminus \Omega) \subset A_{c-\varepsilon}$.
(6) *Se* $K_c = \varnothing$ *então* $\eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$.

Demonstração. O primeiro passo é demonstrar que K_c é compacto. De fato, seja $(u_n) \subset K_c$ uma sequência qualquer. Como Φ satisfaz (PS) sabemos que existe uma subsequência de (u_n) que converge para $u \in E$. Uma vez que $\Phi(u_n) = c$ e Φ é contínuo devemos ter $\Phi(u) = c$. Da mesma forma $\Phi'(u_n) = 0$ e a continuidade de Φ' implica que $\Phi'(u) = 0$. Desta forma temos que $u \in K_c$ e portanto K_c é compacto. Definamos agora $N_\delta = \{u \in E : d(u, K_c) < \delta\}$, em que $d(u, K_c) = \inf\limits_{v \in K_c} \|u - v\|$. A compacidade de K_c nos permite escolher δ suficientemente pequeno de maneira que tenhamos $N_\delta \subset \Omega$. Desta forma podemos, em (**5**), substituir Ω por N_δ. No caso em que $K_c = \varnothing$ podemos escolher $N_\delta = \varnothing$ e (**6**) segue trivialmente de (**5**). Afirmamos que existem constantes $b, \tilde{\varepsilon} > 0$ tais que

$$\|\Phi'(u)\| \geqslant b \quad \text{para todo } u \in A_{c+\tilde{\varepsilon}} \setminus \left(A_{c-\tilde{\varepsilon}} \cup N_{\delta/8}\right). \tag{2.9}$$

De fato, se não fosse assim, existiriam sequências $b_n \to 0$, $\tilde{\varepsilon}_n \to 0$ e $(u_n) \subset A_{c+\tilde{\varepsilon}_n} \setminus \left(A_{c-\tilde{\varepsilon}_n} \cup N_{\delta/8}\right)$ tais que $\|\Phi'(u_n)\| < b_n$. Naturalmente $\Phi(u_n)$ é limitada e portanto podemos usar (PS) para obter uma subsequência de u_n convergindo para $u \in E$. Uma vez que $c - \tilde{\varepsilon_n} < \Phi(u_n) \leqslant c + \tilde{\varepsilon_n}$ devemos ter $\Phi(u) = c$. Como para todo n tem-se $u_n \notin N_{\delta/8}$ concluímos que $u \notin N_{\delta/16}$. Assim devemos ter $u \in K_c \setminus N_{\delta/16} = \varnothing$, o que é absurdo. Evidentemente, (2.9) continua valendo se diminuirmos $\tilde{\varepsilon}$ e portanto podemos assumir que

$$0 < \tilde{\varepsilon} < \min\left(\overline{\varepsilon}, \frac{b\delta}{32}, \frac{b^2}{2}, \frac{1}{8}\right). \tag{2.10}$$

Escolhamos agora $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$ e definamos:

$$A = \{u \in E : \Phi(u) \leqslant c - \tilde{\varepsilon}\} \cup \{u \in E : \Phi(u) \geqslant c + \tilde{\varepsilon}\}$$

e

$$B = \{u \in E : c - \varepsilon \leqslant \Phi(u) \leqslant c + \varepsilon\}.$$

Desta maneira temos que $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$ e portanto fica bem definida

$$g(u) = \frac{d(u,A)}{d(u,A) + d(u,B)} \quad \text{qualquer que seja } u \in E.$$

A função g é tal que $g = 0$ em A, $g = 1$ em B e $0 \leqslant g(u) \leqslant 1$ para toda $u \in E$. Afim de mostrar que g é localmente Lipschitz vamos mostrar que $d(u, A)$ é localmente Lipschitz. Para todo $x \in A$, temos: $d(u,A) \leqslant \|u - x\| \leqslant \|u - v\| + \|v - x\|$, ou seja: $d(u,A) - \|u - v\| \leqslant \|v - x\|$. Como esta desigualdade vale para todo $x \in A$, concluímos que $d(u,A) - \|u - v\| \leqslant d(v, A)$, ou ainda que $d(u,A) - d(v,A) \leqslant \|u - v\|$. Trocando u por v obtem-se que $-\|u - v\| \leqslant d(u,A) - d(v,A)$ e portanto $|d(u,A) - d(v,A)| \leqslant \|u - v\|$ e g é de fato localmente Lipchitz. Analogamente existe uma função localmente Lipschitz f em E tal que $f = 0$ em $N_{\delta/8}$, $f = 1$ em $E \setminus N_{\delta/4}$ e $0 \leqslant f(u) \leqslant 1$ em E. Considere $V : \tilde{E} \to E$ um campo campo pseudo-gradiente para Φ. Vamos definir ainda $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por $h(s) = 1$ se $s \in [0,1]$ e $h(s) = \frac{1}{s}$ se $s > 1$. Deixamos para o leitor a tarefa elementar de mostrar que h é localmente Lipschitz. Feito tudo isso definimos

$$W(u) = \begin{cases} -f(u)g(u)h(\|V(u)\|)V(u) & \text{, se } u \in \tilde{E} \\ 0 & \text{, se } u \notin \tilde{E}. \end{cases}$$

Observe inicialmente que $0 \leqslant \|W(u)\| \leqslant 1$ e que W, sendo produto de funções localmente Lipschitz, é também localmente Lipschitz. Considere agora o problema

$$\frac{d\eta(t,u)}{dt} = W(\eta(t,u)), \qquad \eta(0,u) = u. \tag{2.11}$$

O teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias nos garante que para cada $u \in E$, (2.11) possui solução única definida para t em um intervalo maximal $(t^-(u), t^+(u))$. Vamos mostrar que $t^+(u) = \infty$. De fato, suponha que isto não ocorra, isto é, que se tem $t^+(u) < \infty$. Considere $t_n \to t^+(u)$ com $t_n < t^+(u)$. Integrando (2.11) obtemos:

$$\int_{t_n}^{t_{n+p}} \frac{d\eta}{dt} = \int_{t_n}^{t_{n+p}} W(\eta) \Longrightarrow \left\| \int_{t_n}^{t_{n+p}} \frac{d\eta}{dt} \right\| \leqslant \int_{t_n}^{t_{n+p}} \|W(\eta)\|$$

ou ainda, lembrando que $0 \leqslant \|W(u)\| \leqslant 1$,

$$\|\eta(t_{n+p}, u) - \eta(t_n, u)\| \leqslant |t_{n+p} - t_n| \qquad \text{para todo } p \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que t_n é sequência de Cauchy podemos concluir que $\eta(t_n, u)$ é também sequência de Cauchy em E. A completude de E nos assegura a existência de $\overline{u} \in E$ tal que $\eta(t_n, u) \to \overline{u}$. Se considerarmos então (2.11) com valor inicial $\overline{u}$ obtemos, usando novamente o teorema de existência e unicidade, uma continuação de $\eta(t,u)$ para valores $t > t^+(u)$, contrariando a maximidade de $t^+(u)$. Um raciocínio completamente análogo nos permite concluir que $t^-(u) = -\infty$.

A dependência contínua da solução em relação aos dados iniciais nos assegura que $\eta \in C([0,1] \times E; E)$. Como, por definição, $\eta(0,u) = u$ temos a validade de (**1**). Uma vez que $\overline{\varepsilon} > \tilde{\varepsilon}$ e $g(u) = 0$ em A temos que, se $\Phi(u) \notin [c - \overline{\varepsilon}, c + \overline{\varepsilon}]$, então $W(\eta(t,u)) = 0$ e portanto a unicidade de solução de (2.11) nos garante que devemos ter $\eta(t,u) = u$, ficando assim estabelecido a veracidade de (**2**). Fixado $t \in [0,1]$ e $u \in E$ e integrando (2.11) de 0 a t obtemos

$$\|\eta(t,u) - u\| = \|\eta(t,u) - \eta(0,u)\| \leqslant t \leqslant 1,$$

ficando portanto demonstrado (**3**).

Afim de mostrar (**4**) vamos verificar que $\dfrac{d\Phi(\eta(t,u))}{dt} \leqslant 0$, isto é, que $\Phi(\eta(t,u))$ é não-crescente. Observe inicialmente que, se $W(u) = 0$ então $\eta(t,u) \equiv u$ e (**4**) segue trivialmente. Se $W(u) \neq 0$ temos $u \in \tilde{E}$ e portanto tem sentido falarmos em $V(\eta(t,u))$. Nesse caso teremos

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi(\eta(t,u))}{dt} &= \Phi'(\eta)\frac{d\eta}{dt} = -\Phi'(\eta) f(\eta) g(\eta) h(\|V(\eta)\|) V(\eta) \\
&= -\left[f(\eta) g(\eta) h(\|V(\eta)\|)\right] \Phi'(\eta) V(\eta) \\
&\leqslant -\left[f(\eta) g(\eta) h(\|V(\eta)\|)\right] \|\Phi'(\eta)\|^2 \leqslant 0
\end{aligned}$$

em que usamos, na última estimativa, (2.7). Isto estabelece (**4**).

Resta mostrar (**5**) ou, equivalentemente, que $\eta(1, A_{c+\varepsilon} \setminus N_\delta) \subset A_{c-\varepsilon}$. Observe que, se $u \in A_{c-\varepsilon}$, temos por (**4**) que $\Phi(\eta(t,u)) \leqslant \Phi(\eta(0,u)) = \Phi(u) \leqslant c - \varepsilon$. Portanto, se definirmos $Y = A_{c+\varepsilon} \setminus (N_\delta \cup A_{c-\varepsilon})$, é suficiente mostrar que $\eta(1,u) \in A_{c-\varepsilon}$ para todo $u \in Y$. Seja então $u \in Y \subset \tilde{E}$. O cálculo feito anteriormente mostra que

$$\frac{d\Phi(\eta(t,u))}{dt} \leqslant 0.$$

Uma vez que $g = 0$ em $A_{c-\tilde{\varepsilon}}$ percebemos que a órbita de $\eta(t,u)$ não pode entrar em $A_{c-\tilde{\varepsilon}}$ (lembre que, se $g = 0$ então $W = 0$ e (2.11) possui solução constante em relação a t). Tendo em vista esta última observação e (**4**) podemos escrever

$$\Phi(\eta(0,u)) - \Phi(\eta(t,u)) \leqslant \varepsilon + \tilde{\varepsilon} < 2\tilde{\varepsilon}. \tag{2.12}$$

Definamos agora $Z = A_{c+\varepsilon} \setminus \big(N_{\delta/2} \cup A_{c-\varepsilon}\big)$. Suponha que $u \in Y$ e $\eta(s,u) \in Z$ para todo $s \in [0,t]$ (a continuidade de Φ nos assegura que isto ocorre pelo menos para t pequeno). Fixado um t com a propriedade acima temos que, qualquer que seja $s \in [0,t]$, $\eta(s,u) \in \tilde{E}$ (por 2.9) e também $f(\eta(s,u)) = 1 = g(\eta(s,u))$. Podemos então, a partir de (2.12), escrever:

$$\begin{aligned}
2\tilde{\varepsilon} &\geqslant \int_t^0 -\Phi'(\eta(s,u))h(\|V(\eta(s,u))\|)V(\eta(s,u))ds \\
&= \int_0^t h(\|V(\eta)\|)\Phi'(\eta)V(\eta)ds \\
&\geqslant \int_0^t h(\|V(\eta)\|)\|\Phi'(\eta)\|^2 ds \\
&\geqslant b\int_0^t h(\|V(\eta)\|)\|\Phi'(\eta)\|ds \\
&\geqslant \frac{b}{2}\int_0^t h(\|V(\eta)\|)\|V(\eta)\|ds \\
&\geqslant \frac{b}{2}\left\|\int_0^t h(\|V(\eta)\|)V(\eta)ds\right\| \\
&= \frac{b}{2}\left\|\int_0^t \frac{d\eta}{ds}ds\right\| = \frac{b}{2}\|\eta(t,u)-u\|.
\end{aligned}$$

em que usamos (2.7), (2.9) e (2.6), respectivamente. Desta última estimativa e de (**4**) obtemos que

$$\|\eta(t,u)-u\| \leqslant \frac{4\tilde{\varepsilon}}{b} < \frac{\delta}{8}, \quad \text{visto que } \tilde{\varepsilon} < \frac{b\delta}{32}.$$

Queremos, a partir desta última estimativa, mostrar que a órbita de $\eta(t,u)$ não pode deixar Z e entrar em $N_{\delta/2}$. Para ver isso considere o seguinte conjunto:

$$F = \{t \in [0,1] : \eta(s,u) \in Z \text{ para todo } s \in [0,t]\}.$$

Afirmamos que, se $t_0 = \sup F$, então $\eta(t_0,u) \notin N_{\delta/2}$. De fato, basta que mostremos que $\|\eta(t_0,u)-u\| \leqslant \frac{\delta}{4}$. A continuidade de η nos permite escolher t_1 tal que $0 < t_1 < t_0$ e $\|\eta(t_0,u)-\eta(t_1,u)\| < \frac{\delta}{8}$. Note que, como $t_1 < t_0$, temos que $t_1 \in F$ e portanto $\|\eta(t_1,u)-u\| < \frac{\delta}{8}$. Assim

$$\|\eta(t_0,u)-u\| \leqslant \|\eta(t_0,u)-\eta(t_1,u)\| + \|\eta(t_1,u)-u\| \leqslant 2\frac{\delta}{8},$$

donde concluímos que a única forma de $\eta(t,u)$ sair de Z é entrar em $A_{c-\varepsilon}$. A idéia agora é mostrar que isto ocorre para algum $t \in (0,1)$. De fato, se isto não ocorrese, então $\eta(t,u) \in Z$ para todo $t \in (0,1)$. Teríamos então

$$\frac{d\Phi(\eta)}{dt} = -h(\|V(\eta)\|)\Phi'(\eta)V(\eta) \leqslant -h(\|V(\eta)\|)\|\Phi'(\eta)\|^2.$$

Analisemos esta última expressão em dois casos distintos.

Caso 1. $\|V(\eta)\| \leqslant 1$. Neste caso temos que $h(\|V(\eta)\|) = 1$ e, por (2.9), temos

$$\frac{d\Phi(\eta)}{dt} \leqslant -b^2.$$

Caso 2. $\|V(\eta)\| > 1$. Temos então que $h(\|V(\eta)\|) = \dfrac{1}{\|V(\eta)\|}$ e portanto (2.6) implica que

$$\frac{d\Phi(\eta)}{dt} \leqslant -\frac{1}{\|V(\eta)\|}\frac{\|V(\eta)\|^2}{4} \leqslant -\frac{1}{4}.$$

Em ambos os caso temos que, se $t \in (0,1)$, vale $\dfrac{d\Phi(\eta)}{dt} \leqslant -\min\left(b^2, \dfrac{1}{4}\right)$. Integrando esta expressão de 0 a t e usando (2.12) temos

$$\min\left(b^2, \frac{1}{4}\right) \leqslant \Phi(\eta(0,u)) - \Phi(\eta(t,u) \leqslant 2\tilde{\varepsilon},$$

ou ainda

$$\tilde{\varepsilon} \geqslant \min\left(\frac{b^2}{2}, \frac{1}{8}\right),$$

o que contraria (2.10). Esta contradição nos mostra que para algum $t \in (0,1)$ tem-se $\eta(t,u) \in A_{c-\varepsilon}$. Usando agora (**4**) concluímos que $\eta(1,u) \in A_{c-\varepsilon}$ e fica então demonstrado o lema. ■

2.2 Demonstração do Teorema

Nesta seção faremos a demonstração do Teorema do Passo da Montanha.
Demostração do Teorema 2.1. A definição de c mostra que c é finito. Se $\gamma \in \Gamma$ então $\gamma([0,1]) \cap \partial B_\rho \neq \varnothing$, pois $\gamma([0,1])$ é conexo. Desta forma

$$\max_{u\in\gamma([0,1])} \Phi(u) \geqslant \inf_{w\in\partial B_\rho} \Phi(w) \geqslant \alpha$$

e portanto $c \geqslant \alpha$. Suponha agora que c não é um valor crítico de Φ. Então o Lema 2.2 com $\overline{\varepsilon} = \frac{\alpha}{2}$ nos garante a existência de $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})$ e $\eta \in C([0,1] \times E; E)$ satisfazendo todas as propriedades do enunciado do Lema da Deformação. Escolha agora $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{u\in\gamma([0,1])} \Phi(u) \leqslant c + \varepsilon \tag{2.13}$$

e considere $\zeta(t) = \eta(1, \gamma(t))$. A continuidade de η e de γ nos assegura que $\zeta \in C([0,1]; E)$. Temos $\zeta(0) = \eta(1, \gamma(0)) = \eta(1, 0)$. Uma vez que $c \geqslant \alpha$, temos $c - \overline{\varepsilon} \geqslant \dfrac{\alpha}{2}$ e $\Phi(0) = 0 < \dfrac{\alpha}{2} \leqslant c - \overline{\varepsilon}$. Assim usando (**1**) do Lema da Deformação com $t = 1$ concluímos que $\zeta(0) = 0$. Analogamente, como $\gamma(1) = e$ e $\Phi(e) \leqslant 0 < c - \overline{\varepsilon}$ temos que $\zeta(1) = e$. Desta forma temos $\zeta \in \Gamma$ e, da definição de c, obtemos

$$c \leqslant \max_{u\in\zeta([0,1])} \Phi(u). \tag{2.14}$$

Agora por (2.13), $\gamma([0,1]) \subset A_{c+\varepsilon}$ logo por (**6**) do Lema da Deformação temos que $\zeta([0,1]) \subset A_{c-\varepsilon}$, isto é

$$\max_{u\in\zeta([0,1])} \Phi(u) \leqslant c - \varepsilon$$

o que contraria (2.14). Desta forma fica mostrado que c é um valor crítico de Φ. ■

A forma de caracterização do valor crítico c no teorema acima o qualifica como um teorema de *minimax*. Tais teoremas têm como ingredientes básicos a escolha de uma família de conjuntos invariante pela deformação η, um valor de minimax c obtido a partir dessa família de conjuntos, argumentos topológicos que dão alguma estimativa para c e finalmente um argumento indireto, baseado no Lema da Deformação, que mostra que c é um valor crítico do funcional em questão. No caso específico do Passo da Montanha poderíamos ter escolhido outras famílias de conjuntos. Afim de exemplificar definamos

$$\Gamma_0 = \{g([0,1]) : g \text{ é injetiva }, g(0) = 0, g(1) = e\},$$

$$\Gamma_1 = \{K \subset E : K \text{ é compacto, conexo e } \{0, e\} \subset K\},$$

$$\Gamma_2 = \{K \subset E : K \text{ é fechado, conexo e } \{0, e\} \subset K\}.$$

e

$$c_i = \inf_{K \in \Gamma_i} \sup_{u \in K} \Phi(u), \qquad i = 0, 1, 2.$$

Pode-se mostrar que c_0, c_1 e c_2 são valores críticos e que vale a relação $c_0 \geqslant c \geqslant c_1 \geqslant c_2$. Estes resultado bem como outras variantes e generalizações do Passo da Montanha podem ser encontradas em [6]. Neste mesmo trabalho o leitor poderá encontrar aplicações do Passo da Montanha a vários problemas de equações diferencias parcias. Uma outra demonstração do Passo da Montanha foi feita por Brézis e Ekeland. Tal demonstração utiliza o Princípio Variacional de Ekeland que é outra poderosa arma no estudo de problemas em Análise, cf. [3].

Bibliografia

[1] H. BRÉZIS. *Analyse Fonctionnelle*. Masson, Paris, 1983. iii, 4, 6, 11, 12, 16

[2] D. G. DE FIGUEIREDO. *Métodos Variacionais em Equações Diferenciais*. Matemática Universitária N.7, Junho de 1988, 21-47

[3] I. EKELAND. *Non convex minimization problems*. Bull. A.M.S. vol. 1, 1979, 443-474. 24

[4] E. L. LIMA. *Curso de Análise - Vol. 1*. IMPA, Rio de Janeiro, 1976. 11

[5] E. L. LIMA. *Topologia do Espaços Métricos*. IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[6] P. H. RABINOWITZ. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*. Regional Conference Series in Mathemathics No. 65, 1984. 19, 24