O Problema Deliano[*]

Jorge C. Lucero[†]

8 de janeiro de 2006

Introdução

Conta Eratóstenes [Hea81] que, certa vez na antiga Grécia, os habitantes da ilha de Delos perguntaram ao oráculo de Apolo o que fazer para combater uma peste que assolava o povo. A resposta do oráculo foi que o altar de Apolo, de forma cúbica, devia ser duplicado. Assim, teria nascido o problema geométrico da duplicação do cubo, também conhecido como “problema deliano”, que se tornou um dos problemas clássicos da Antigüidade [Boy96]. Podemos enunciá-lo também desta forma: dada a aresta de um cubo, construir a aresta de um segundo cubo cujo volume seja o dobro do primeiro. Os matemáticos gregos ja tinham resolvido a questão da duplicação de um quadrado, e parece natural que tenham estendido-a ao caso do cubo.

Figura 1: Templo de Apolo em Delphi, Grécia. Fonte: Luarvick/Wikimedia Commons/CC-BY-SA 3.0/GFDL.

Seja um segmento de reta de cumprimento a. O cubo que tem tal segmento como aresta terá volume $V_a = a^3$. Queremos, então, obter um segmento de reta de cumprimento b, tal que o cubo associado, de volume $V_2 = b^3$, satisfaça $V_b = 2V_a$. Destas fórmulas obtemos a relação $\frac{b}{a} = \sqrt[3]{2}$. Assim, o problema se reduz a calcular a raiz cúbica de 2 (i.e, obter 2 segmentos de reta cujos comprimentos estejam na relação $1 : \sqrt[3]{2}$).

Numerosas soluções foram propostas usando todo tipo de artifícios, já desde o século V a.C., com uma construção tridimensional devida a Arquitas. Entretanto, o problema se tornaria famoso quando considerado sob a seguinte restrição: deve ser resolvido em um número finito de passos usando apenas régua e compasso, onde a régua deve ser utilizada apenas para traçar linhas retas, e não para medir. Todos temos estudado muitos problemas de construção similares na escola, os que constituem os fundamentos da geometria elementar. De fato, é possível definir a geometria euclideana como “a ciência daquilo que pode ser construído com régua e compasso” [DH95]

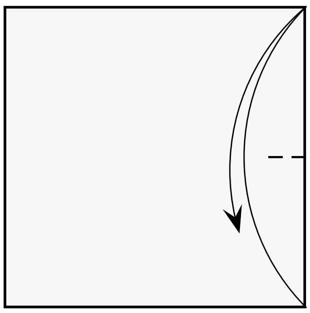
[*] Publicado, em versão revisada, na *Revista do Professor de Matemática* (Sociedade Brasileira de Matemática) 62: 25Ű28, 2007

[†] (21/06/2015) Endereço atual: Departamento de Ciência da Computação, Universidade de Brasília, `http://www.cic.unb.br/~lucero/`, e-mail: `lucero@unb.br`

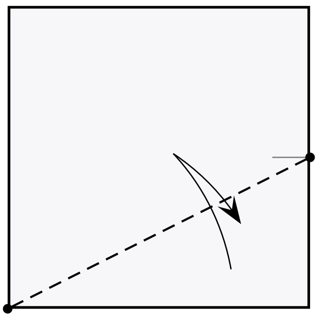
A solução ao problema deliano, com a restrição citada, foi procurada em vão durante séculos. Só a partir dos trabalhos em álgebra de Ruffini, Abel, e Galois, no século XIX, demostrou-se que é impossível fazer tal construção [CR00]. Resulta curioso, então, que seja possível resolvê-lo apenas dobrando uma folha de papel. Acaso a dobradura de uma folha é uma ferramenta geométrica mais poderosa que a combinação de régua e compasso? Surpreendentemente, a resposta é *afirmativa* [Alp00]. Aqui veremos uma solução elegante devida a Messer [Lan04, Mes86]

Resolução

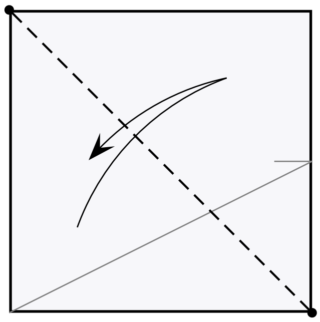
Partimos de uma folha quadrada de papel, de dimensão arbitrária. A solução consta de duas etapas; primeiramente, devemos dividir a folha em três partes iguais. Isso pode ser feito por meio dos seguintes passos:



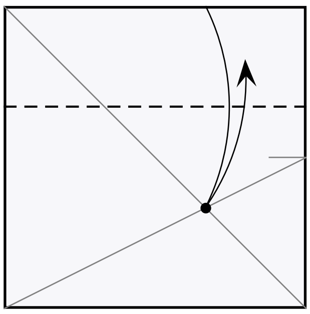
(1) Marcar o ponto médio na borda direita.



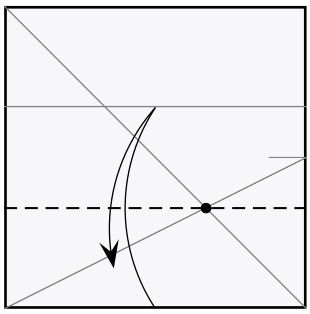
(2) Dobrar e abrir.



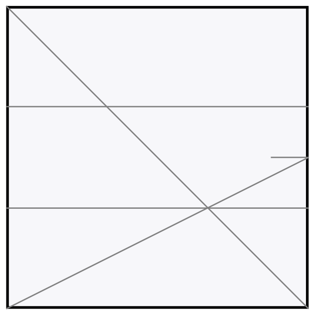
(3) Dobrar e abrir.



(4) Dobrar horizontalmente, de forma que a borda superior toque a intersecção das linhas de dobrado anteriores, e abrir.

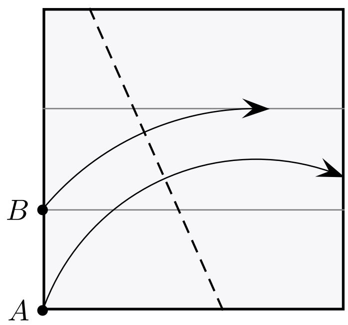


(5) Dobrar horizontalmente, de forma que a borda inferior toque a linha de dobrado anterior, e abrir.

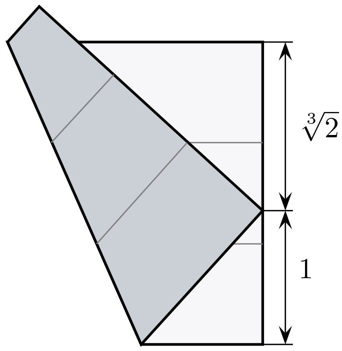


(6) As linhas de dobrado horizontais dividem a folha em três partes iguais.

Os seguintes passos, finalmente, determinam $\sqrt[3]{2}$. As linhas de dobrado que não são relevantes foram eliminadas, para maior clareza.



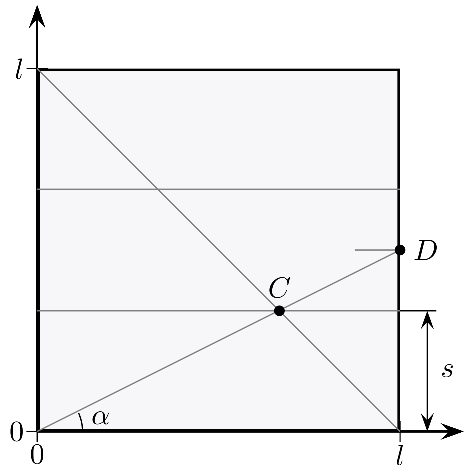
(7) Dobrar de forma que o ponto A fique sobre a borda direita, e o ponto B sobre a linha horizontal indicada.



(8) Resultado final.

Demonstração

Demonstremos primeiro que a seqüência de passos (1)-(6) divide a folha de papel em 3 partes iguais. O seguinte diagrama reproduz o resultado no passo (6). Temos colocado um par de eixos cartesianos $x - y$, com origem no canto inferior esquerdo da folha de papel. Como indicado, o cumprimento dos lados da folha é l.



O ponto C está a mesmas distância das bordas inferior e direita da folha, que chamaremos de s, por tanto suas coordenadas são $(x_C, y_C) = (l - s, s)$. As coordenadas do ponto D são $(x_D, y_D) = (l, l/2)$. Podemos então dizer que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{y_C}{x_C} = \frac{s}{l-s} \\ &= \frac{y_D}{x_D} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

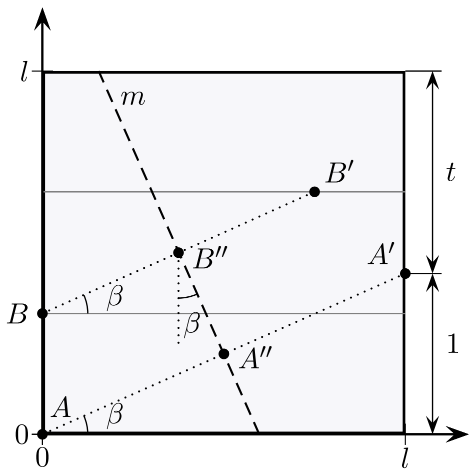
Igualando ambas equações, obtemos

$$\frac{l-s}{s} = \frac{l}{2} \Rightarrow s = \frac{l}{3}$$

Pelos passos (4) e (5), a distância entre ambas linhas de dobrado horizontais, e entre a linha superior e a borda superior da folha, também deve ser $l/3$.

Demostremos agora que a dobra do passo (7) determina $\sqrt[3]{2}$ sobre a borda direita da folha. Para isso, colocamos novamente um par de eixos cartesianos $x - y$, com origem no canto inferior esquerdo da folha de papel (figura na página seguinte).

Os pontos A e B são os indicados no passo (7) anterior, e têm coordenadas $(x_A, y_A) = (0,0)$ e $(x_B, y_B) = (0, l/3)$, respectivamente. Nesse mesmo passo, realizamos a dobra sobre a linha m, e os pontos A e B passam a ocupar as posições A' e B', respectivamente, de coordenadas $(x_{A'}, y_{A'}) = (l, 1)$ e $(x_{B'}, y_{B'}) = (a, 2l/3)$, onde a designa a abcissa do ponto B'. O pontos A'' e B'', sobre a linha de dobrado, são os pontos medios dos segmentos AA' e BB', respectivamente, e têm coordenadas $(x_{A''}, y_{A''}) = (l/2, 1/2)$ e $(x_{B''}, y_{B''}) = (a/2, l/2)$.



Pela geometria da figura, os três ângulos designados por β, com vêrtice em A, B, e B'', são iguais. Calculemos o valor de $\operatorname{tg}\beta$ em cada caso:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} = \frac{1}{l} \tag{1}$$

$$= \frac{y_{B'} - y_B}{x_{B'} - x_B} = \frac{l/3}{a} \tag{2}$$

$$= \frac{x_{A''} - x_{B''}}{y_{A''} - y_{B''}} = \frac{l-a}{l-1} \tag{3}$$

Igualando as equações (1) e (2) obtemos

$$\frac{1}{l} = \frac{l}{3a} \Rightarrow a = \frac{l^2}{3}$$

Similarmente, igualando (1) e (3)

$$\frac{1}{l} = \frac{l-a}{l-1}$$

Substituindo o valor de a nesta última equação e operando, resulta em

$$l^3 - 3l^2 + 3l - 3 = 0$$

que pode ser reescrita na foram

$$(l-1)^3 - 2 = 0$$

Finalmente, substituindo $t = l - 1$, obtemos

$$t^3 - 2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt[3]{2}$$

o que prova a solução do problema deliano.

Comentário final

A raiz cúbica de 2 é a solução da equação $x^3 - 2 = 0$. Com dobraduras de uma folha de papel, é possível resolver qualquer equação cúbica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, o que é impossível de ser feito com régua e compasso. Isso permite resolver outros problemas geométricos de construção que possam ser reduzidos a uma equação cúbica, como a trisseção de um ângulo, e a construção de um heptágono regular.

Referências

[Alp00] Roger C. Alperin. A mathematical theory of origami constructions and numbers. *New York Journal of Mathematics*, 6:119–133, 2000.

[Boy96] Carl B. Boyer. *História da Matemática*. Editora Edgar Blücher Ltda., São Paulo, 1996. Traduzido por Elza F. Gomide do original em inglês: *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Nova Iorque, 1991.

[CR00] Richard Courant e Herbert Robbins. *O Que é Matemática?* Editora Ciência Moderna Ltda., Rio de Janeiro, 2000. Traduzido por Adalberto da Silva Brito do original em inglês: *What is Mathematics?*, 1941.

[DH95] Philip J. Davis e Reuben Hersch. *A Experiência Matemática*. Gradiva, Lisboa, 1995. Traduzido por Fernando Miguel Louro e Ruy Miguel Ribeiro do original em inglês: *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston, 1981.

[Hea81] Thomas Heath. *History of Greek Mathematics*. Courier Dover Publications, Mineola, NY, (EUA), 1981.

[Lan04] Robert J. Lang. Origami: Complexity in creases (again). *Engineering and Science*, LXVII(1):8–19, 2004.

[Mes86] Peter Messer. Problem 1054. *Crux Mathematicorum*, 12(10):284–285, 1986.