A Trissecção do Ângulo

Jorge C. Lucero[*]

24 de janeiro de 2006

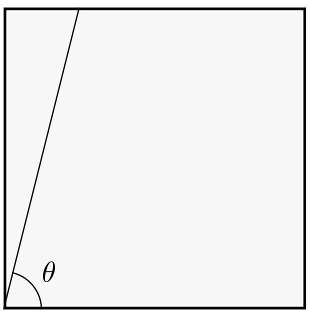
Introdução

A trissecção de um ângulo arbitrário é outro dos problemas clássicos da Antigüidade [Boy96]. Similarmente ao caso da duplicação do cubo [1], é impossível de ser resolvido usando apenas régua e compasso (onde a régua deve ser utilizada para traçar linhas retas, e não para medir), em um número finito de passos. Note-se que é tarefa fácil trissectar alguns ângulos, como o ângulo reto; entretanto, aqui trata-se de fazê-lo com um ângulo *arbitrário*. É claro que existem soluções quando as restrições anteriores não são impostas. Por exemplo, pode-se resolver o problema quando se permite marcar distâncias na régua, como já conhecido naquela época.

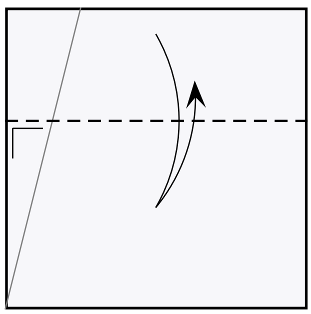
O problema geral da divisão de um ângulo em n partes iguais seria de interesse para os geômetras gregos, pois a sua resolução possibilitaria a construção de polígonos regulares de quantidade arbitrária de lados. A bissecção do ângulo é simples de se realizar com régua e compasso, e naturalmente induz a tentar a trissecção. Esta Nota mostra uma solução usando origami, devida a Abe [Lan04].

Resolução

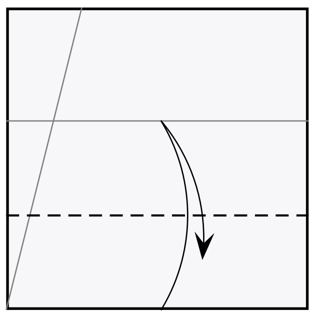
Partimos de uma folha quadrada de papel, de dimensão arbitrária. Consideramos aqui a trissecção de um ângulo agudo; contudo, o método pode ser estendido facilmente a ângulos obtusos.



(1) Marcar o ângulo θ a trissectar.



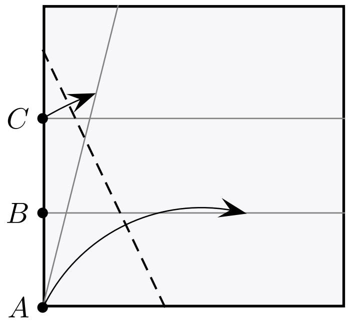
(2) Dobrar horizontalmente, em qualquer lugar da folha.



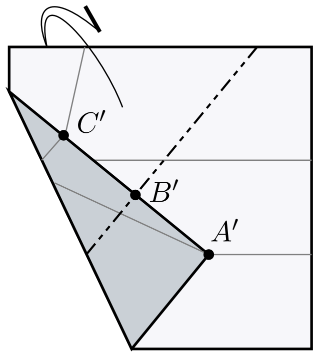
(3) Dobrar e abrir.

[*](21/06/2015) Endereço atual: Departamento de Ciência da Computação, Universidade de Brasília, `http://www.cic.unb.br/~lucero/`, e-mail: `lucero@unb.br`

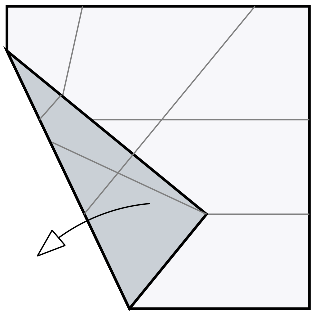
[1] Veja "O Problema Deliano"



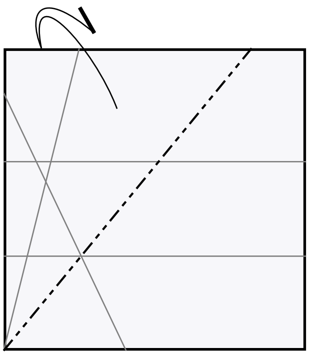
(4) Dobrar de forma que o ponto A fique sobre a linha horizontal indicada, e o ponto C sobre a linha oblíqüa marcada no passo (1).



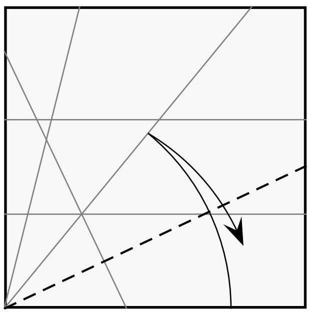
(5) Dobrar prolongando a linha que termina no ponto B' (dobra feita no passo 3), e logo abrir.



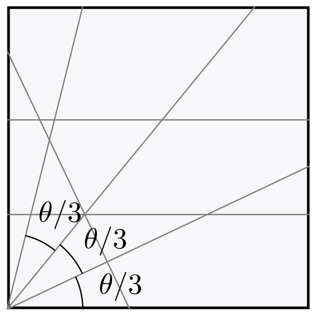
(6) Abrir.



(7) Dobrar prologando a dobra feita no passo (5). Note que a dobra deve terminar no vêrtice inferior esquerdo.



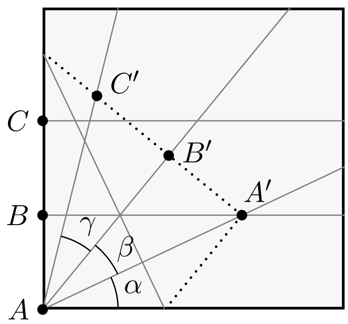
(8) Dobrar e abrir.



(9) Resultado final.

Demonstração

A demonstração é bem simples. Na figura abaixo, reproduzimos o resultado final, junto com a dobradura do passo (4).



Queremos mostrar que $\alpha = \beta = \gamma$. Pelo passo (8), sabemos que $\alpha = \beta$. Analisemos agora os triângulos $AA'B'$ e $AB'C'$. Pelo passo (3), $AB = BC$ e portanto $A'B' = B'C'$. Pelo passo (5), o segmento AB' é perpendicular ao $A'C'$. Estes fatos nos permitem concluir que os triângulos $AA'B'$ e $AB'C'$ são iguais, e consequentemente, que $\beta = \gamma$.

Referências

[Boy96] Carl B. Boyer. *História da Matemática*. Editora Edgar Blücher Ltda., São Paulo, 1996. Traduzido por Elza F. Gomide do original em inglês: *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Nova Iorque, 1991.

[Lan04] Robert J. Lang. Origami: Complexity in creases (again). *Engineering and Science*, LXVII(1):8–19, 2004.